Calcolo funzionale

Alberto Maggi

Notazioni Sia A un operatore hermitiano limitato sullo spazio di Hilbert separabile $\mathcal{H}$. A ammette $\mathbb{N}^{\times} \cup \{\infty\}$ vettori ψ_i tali che

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \bigoplus_{i=1}^{N} \mathcal{H}_i \\ \mathcal{H}_i &= \{P(A) \,|\, P \in \mathbb{C}[\lambda]\}^a\end{aligned}$$

Vale allora il teorema spettrale

Teorema 1 (spettrale) *Sia A un operatore limitato autoaggiunto sullo spazio di Hilbert separabile $\mathcal{H}$. Allora esistono le misure $\{\mu_n\}_{n \in J_N}$ su $\sigma(A)$, $N \in \mathbb{N}^{\times} \cup \{\infty\}$, e l'operatore unitario*

$$U : \mathcal{H} \to \bigoplus_{n=1}^{N} L^2(\sigma(A), d\mu_n)$$

di modo che, se scriviamo

$$\varphi \in \bigoplus_{n=1}^{N} L^2(\sigma(A), d\mu_n)$$

come N-upla $(\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$, la componente n-esima gode della proprietà

$$\left(UAU^{-1}\varphi\right)_n(\lambda) = \lambda \varphi_n(\lambda).$$

Questa realizzazione di A via l'operatore unitario U si chiama **rappresentazione spettrale** *di A.*

Teorema spettrale e calcolo funzionale Definito Ω come l'unione di N copie dello spettro e posta su Ω la misura m pari a μ_i sulla i-esima copia di $\sigma(A)$, determiniamo un operatore V unitario da $\mathcal{H}$ in $L^2(\Omega, m)$ di modo che

$$\left(VAV^{-1}\varphi\right)(\omega) = x(\omega)\varphi(\omega).$$

Poiché $\omega = (\lambda, i)$ (i indica la copia dello spettro e λ il punto dello spettro nella i-esima copia), abbiamo

$$x(\omega) \equiv x(\lambda, i) = \lambda,$$

sicché $x(\omega)$ è una funzione limitata e sommabile su $L^2(\Omega, m)$.
Possiamo costruire il calcolo funzionale agevolmente imponendo

$$\Phi(f)\varphi \equiv f(A)\varphi = U^{-1} f(x(\omega)) U\varphi$$

per ogni funzione continua sullo spettro. Si ha subito che Φ è un isomorfismo isometrico tra la C^*-algebra $\mathcal{C}(\sigma(A))$ e $C^*(A)$ la C^*-algebra generata da A (chiusura in norma dell'algebra dei polinomi in A).
In modo evidente, è possibile estendere il calcolo funzionale Φ a tutte le funzioni boreliane limitate ottenendo ancora uno *-omomorfismo (di norma inferiore a 1 una volta utilizzata la norma uniforme sulle boreliane limitate).

Misura μ Introduciamo la misura μ sullo spettro di A data dalla somma delle misure μ_i. μ è una misura finita se richiediamo $\|\psi_i\| = 2^{-i}$ (di modo che anche (Ω, m) viene a essere uno spazio di misura finita).

Calcolo funzionale su $L^\infty(\sigma(A), \mu)$ Consideriamo l'algebra di Banach $L^\infty(\sigma(A), \mu)$ la cui norma, $\|\cdot\|_\infty$, è il superiore essenziale. Φ si estende ancora a $L^\infty(\sigma(A), \mu)$.
Usando il teorema di Lebesgue è facile vedere che se $\{f_n\}$ è una successione equilimitata in $L^\infty(\sigma(A), \mu)$ convergente μ-quasi ovunque a f, allora $f \in L^\infty(\sigma(A), \mu)$ e $\{f_n(A)\}$ converge fortemente in $\mathcal{H}$ a $f(A)$.

Algebra di von Neumann generata da A Vogliamo vedere che l'immagine secondo Φ di $L^\infty(\sigma(A), \mu)$ è pari all'algebra di von Neumann, $W^*(A)$, generata da A. Questa è eguale alla chiusura forte di $C^*(A)$. Dunque, se $B \in W^*(A)$, allora esiste una successione $\{f_n(A)\}$, con $\{f_n\} \subset \mathcal{C}(\sigma(A))$, convergente fortemente a B. Per avere la tesi, ci basta mostrare che è possibile scegliere f_n in modo che f_n sia equilimitata e convergente puntualmente quasi ovunque a una funzione g. In tal caso avremmo $g \in L^\infty(\sigma(A), \mu)$ e $B = g(A)$.

Sia $B' = VBV^{-1}$, allora, per ogni $\psi(\omega) \in L^2(\Omega, m)$,

$$B'\psi(\omega) = L^2 - \lim_{n\to\infty} f_n(x(\omega))\,\psi(\omega) = \left(L^2 - \lim_{n\to\infty} f_n(x(\omega))\right)\psi(\omega) = (B'1)(\omega)\,\psi(\omega)\,,$$

cioè B è isomorfo al moltiplicatore per $(B'1)(\omega) \equiv \tilde{g}(\omega)$ in $L^2(\Omega, m)$. Visto che B è limitato, $\tilde{g}(\omega)$ deve essere una funzione m-essenzialmente limitata. $\tilde{g}$ è il limite $L^2(\Omega, m)$ di $f_n(x(\omega))$, tagliando sopra il superiore essenziale di g la successione $f_n(x(\omega))$, otteniamo una successione limitata senza modificare la convergenza L^2. In questo modo, ci riduciamo al caso in cui f_n è equilimitata.

Ora, $\{f_n\}$ è di Cauchy in ogni $L^2(\sigma(A), \mu_i)$. Ne viene che $\{f_n\}$ è di Cauchy in $L^2(\sigma(A), \mu)$: fissiamo $\varepsilon > 0$, sia per ogni n, $|f_n| \leq M$, allora esiste N' di modo che

$$\sum_{i=N'+1}^{N} \int d\mu_i < \frac{\varepsilon}{8M^2},$$

ed esiste ν di modo che se $n, m > \nu$ allora

$$\sum_{i=1}^{N'} \int |f_n - f_m|^2 \, d\mu_i < \frac{\varepsilon}{2},$$

infine,

$$\sum_{i=1}^{N} \int |f_n - f_m|^2 \, d\mu_i \leq \sum_{i=1}^{N'} \int |f_n - f_m|^2 \, d\mu_i + 4M^2 \sum_{i=N'+1}^{N} \int d\mu_i < \frac{\varepsilon}{2} + 4M^2 \frac{\varepsilon}{8M^2} = \varepsilon.$$

Esiste allora g limite $L^2(\sigma(A), \mu)$ di $\{f_n\}$. Passando a una sottosuccessione $\{f_n^*\}$ di $\{f_n\}$, abbiamo che $\{f_n^*\}$ converge puntualmente μ-quasi ovunque a g. Siccome $\{f_n^*\}$ è equilimitata e converge μ-quasi ovunque a g, poiché $\{f_n^*(A)\}$ converge fortemente a B, concludiamo $B = g(A)$, come volevamo.

Teorema 2 *Dato un operatore hermitiano limitato A su uno spazio di Hilbert separabile $\mathcal{H}$ esiste una misura boreliana μ sullo spettro di modo che l'algebra di von Neumann generata da A è isomorfa (tramite il calcolo funzionale) all'algebra delle funzioni $L^\infty(\sigma(A), \mu)$.*