TORTUGA
Publisher

Metodi matematici delle teorie quantistiche

Volume 2

Autoaggiunzione e formulazione algebrica della meccanica quantistica

Luglio 2002

Alberto Maggi

[219,915]

55 via Lopez, 57010 Guasticce (LI)

0586 984 980

Sommario

Capitolo I

Teoria spettrale

In questo capitolo ci occupiamo della teoria spettrale per gli operatori autoaggiunti su uno spazio di Hilbert. Si tratta di uno strumento fondamentale nella fisica matematica moderna, intimamente connesso con l'interpretazione della meccanica quantistica. Gran parte del materiale qui presente proviene dal testo di Reed-Simon, ma, in ogni caso nessuna dimostrazione è lasciata al lettore. Il calcolo funzionale per gli operatori limitati normali verrà ridimostrato in seguito nell'ambito della teoria di Gel'fand delle C^*-algebre abeliane.

I.1 Spettro di un operatore limitato

I.1.1 Definizione e classificazione

In dimensione finita, lo spettro di un operatore è l'insieme dei suoi autovalori ed ha cardinalità finita, pari, al più, alla dimensione dello spazio lineare sul quale è definito l'endomorfismo. In dimensione infinita le cose si complicano notevolmente e si è costretti ad allargare la nozione di spettro in modo da includere complessi che non sono autovalori dell'operatore. Per il momento ci limitiamo al caso degli operatori limitati. Per quelli illimitati insorgono difficoltà ulteriori, sicché saranno trattai a parte.
Nel seguito X sarà uno spazio di Banach sui complessi e $L(X)$ l'insieme degli operatori lineari limitati su X.

Definizione I.1 *Sia $A \in L(X)$. Un numero complesso λ appartiene al* **risolvente** *dell'operatore A, $\rho(A)$, se $A - \lambda \equiv A - \lambda\mathbb{I}$ è una biiezione con inverso limitato (cioè in $L(X)$). L'insieme complementare di $\rho(A)$ si dice* **spettro** *dell'operatore A, perciò, $\sigma(A) = \rho^c(A)$.*

Osservazione I.1 Poiché A è limitato, $A - \lambda$ è limitato, ne viene che se $A - \lambda$ è biunivoco, per il teorema dell'inverso limitato, ha inverso in $L(X)$. ▪

Una prima classificazione dei punti dello spettro di un operatore può avvenire nel modo seguente

Definizione I.2 *Sia $A \in L(X)$, allora*

(i) *$x \neq 0$ talché $Ax = \lambda x$ si dice* **autovettore** *di A relativo all'***autovalore** *λ; gli autovalori di un operatore appartengono al suo spettro e il loro insieme, $\sigma_{\mathrm{p}}(A)$, si dice* **spettro puntuale***;*

(ii) *se $\lambda \in \sigma(A)$ non è un autovalore, ma $R(A - \lambda)$ è denso in X, allora λ appartiene allo* **spettro continuo***, $\lambda \in \sigma_{\mathrm{c}}(A)$;*

(iii) *se $\lambda \in \sigma(A)$ non è un autovalore e $R(A - \lambda)$ è non denso in X, allora λ appartiene allo* **spettro residuo***, $\lambda \in \sigma_{\mathrm{r}}(A)$.*

Se λ è un autovalore, allora $A-\lambda$ è non iniettivo, perciò $\lambda \in \sigma(A)$, come detto nella definizione; se $A-\lambda$ è iniettivo, ma non suriettivo, allora esistono due possibilità: la prima è che l'immagine sia densa, allora λ appartiene allo spettro continuo, la seconda è che l'immagine non sia neppure densa e allora λ appartiene allo spettro residuo.

Spettro residuo Soffermiamoci un attimo sul caso hilbertiano, assumiamo perciò che $X = \mathcal{H}$ sia uno spazio di Hilbert. Sia A un operatore limitato (per ora ci occupiamo solo di questi e capiterà di non dirlo esplicitamente), A si dice normale se commuta con il suo aggiunto, cioè se $A^*A = AA^*$. Allora,

Proposizione I.1 *Un operatore normale ha spettro residuo vuoto.*

Dimostrazione Consideriamo i $\lambda \in \mathbb{C}$ tali che $A - \lambda\mathbb{I}$ è iniettivo, ma non suriettivo, cioè $\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_{\mathrm{p}}(A)$. Se A è normale, allora l'immagine di $A - \lambda\mathbb{I}$ deve essere densa. Altrimenti, esisterebbe ψ per cui

$$(\psi, (A - \lambda)\varphi) = 0$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{H}$. Dunque, per ogni φ

$$\left(\left(A^* - \bar{\lambda}\right)\psi, \varphi\right) = 0$$

da cui $\bar{\lambda}$ sarebbe un autovalore di A^*. D'altra parte,

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\left(A^* - \bar{\lambda}\right)\psi, \left(A^* - \bar{\lambda}\right)\psi\right) = \left(\psi, (A - \lambda)\left(A^* - \bar{\lambda}\right)\psi\right) = \\ &= \left(\psi, \left(A^* - \bar{\lambda}\right)(A - \lambda)\psi\right) = ((A - \lambda)\psi, (A - \lambda)\psi) \end{aligned}$$

(c.v.d.) perciò λ viene a essere un autovalore di A contro l'ipotesi.

Visto che ci occuperemo solo di operatori normali (le osservabili della meccanica quantistica sono autoaggiunte), lo spettro residuo rivestirà un'importanza marginale nella nostra trattazione.

Dimensione finita In dimensione finita vale, per ogni operatore

$$\dim X = \dim R(A) + \dim\ker(A)$$

perciò l'iniettività è equivalente alla biunivocità. Ne viene che lo spettro di un operatore si riduce, come doveva, all'insieme dei suoi autovalori, cioè $\sigma(A) = \sigma_{\mathrm{p}}(A)$.

I.1.2 Proprietà topologiche di spettro e risolvente

Risolvente come insieme aperto di $\mathbb{C}$ Lo spettro di un qualsiasi operatore limitato A è un insieme chiuso del piano complesso. Il risolvente è infatti aperto. Sia $\lambda \in \rho(A)$, allora l'inverso di $\lambda - \zeta - A$ si può scrivere, per $|\zeta|$ piccolo, come

$$(\lambda - A)^{-1}\sum_{n=0}^{+\infty}\zeta^n(\lambda - A)^{-n} \tag{I.1}$$

visto che se

$$|\zeta|\left\|(A - \lambda)^{-1}\right\| < 1$$

la serie converge (nella norma di $L(X)$) e che

$$\begin{aligned} (\lambda - \zeta - A)(\lambda - A)^{-1}\sum_{n=0}^{+\infty}\zeta^n(\lambda - A)^{-n} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\zeta^n(\lambda - A)^{-n} - \sum_{n=0}\zeta^{n+1}(\lambda - A)^{-(n+1)} = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\zeta^n(\lambda - A)^{-n} - \sum_{m=1}^{+\infty}\zeta^m(\lambda - A)^{-m} = \mathbb{I} \end{aligned}$$

Serie di Neumann e funzioni olomorfe a valori negli operatori L'espansione (I.1) si dice **serie di Neumann** e mostra come la funzione $\lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1} \equiv R_A(\lambda)$ sia una funzione analitica dall'insieme risolvente in $L(X)$. Ora, tutti i risultati (che non facevano uso della nozione di corpo per l'insieme di arrivo) ottenuti nell'ambito dell'analisi complessa per le funzioni olomorfe restano validi per le funzioni analitiche a valori in una C^*-algebra, com'è $R_A(\lambda)$.

Riscriviamo la serie di Neumann, posto $\lambda' = \lambda - \zeta$,

$$R_A(\lambda') = R_A(\lambda)\sum_{n=0}^{+\infty} R_A^n(\lambda)(\lambda-\lambda')^n$$

da cui

$$\begin{aligned} R_A(\lambda') - R_A(\lambda) &= R_A(\lambda)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} R_A^n(\lambda)(\lambda-\lambda')^n - 1\right) = R_A(\lambda)\sum_{n=1}^{+\infty} R_A^n(\lambda)(\lambda-\lambda')^n = \\ &= R_A(\lambda)(\lambda-\lambda')R_A(\lambda)\sum_{n=0}^{+\infty} R_A^n(\lambda)(\lambda-\lambda')^n = (\lambda-\lambda')R_A(\lambda)R_A(\lambda') \end{aligned}$$

scambiando λ con λ' si ottiene che $R_A(\lambda)$ e $R_A(\lambda')$ commutano. Per inciso, la funzione di λ $R_A(\lambda)$ si dice, essa stessa, **risolvente**.
In definitiva, abbiamo dimostrato il seguente

Teorema I.1 *Sia $A \in L(X)$. Allora $\rho(A)$ è un aperto di $\mathbb{C}$ e $R_A(\lambda) = (\lambda - A)^{-1}$ è una funzione analitica di λ. Per ogni coppia λ, λ' di punti in $\rho(A)$ vale la* **prima formula del risolvente**

$$R_A(\lambda') - R_A(\lambda) = (\lambda-\lambda')R_A(\lambda)R_A(\lambda').$$

Ricaviamo allora il

Corollario I.1 *Lo spettro di $A \in L(X)$ è non vuoto.*

Dimostrazione Possiamo scrivere, per $R_A(\lambda)$

$$\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{A^n}{\lambda^n} \tag{I.2}$$

La serie scritta converge senz'altro se $\lambda > \|A\|$ e, come prima, in questo caso, converge a $R_A(\lambda)$. Ne deriva che ogni $\lambda > \|A\|$ appartiene al risolvente di $\rho(A)$, di modo che quest'ultimo è un intorno di ∞. Ora, per $\lambda > \|A\|$, si ha

$$\|R_A(\lambda)\| = \left\|(\lambda - A)^{-1}\right\| \le \frac{1}{\|\lambda - A\|} \to 0,\ \lambda \to \infty.$$

Se $\sigma(A) = \emptyset$, allora $R_A(\lambda)$ sarebbe analitica sull'intero piano complesso e dal teorema di Liouville, avremmo

$$R_A(\lambda) = 0$$

(c.v.d.) per ogni λ, la qual cosa è assurda.

Osservazione I.2 Dalla dimostrazione del corollario, abbiamo che lo spettro di A è contenuto nel cerchio di ▪ centro l'origine e raggio $\|A\|$.

Definizione I.3 *Dato $A \in L(X)$ definiamo* **raggio spettrale** *di A il numero*

$$r(A) \equiv \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|$$

Teorema I.2 *Se $A \in L(X)$, allora*

$$r(A) = \limsup_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}$$

Dimostrazione Chiamiamo

$$\tilde{r} = \limsup_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}$$

Vogliamo mostrare che $r(A) = \tilde{r}$. La serie (I.2) è l'espansione attorno all'infinito di $R_A(\lambda)$ e perciò converge su tutti i cerchi attorno all'infinito fino alla prima singolarità (grazie al fatto che i coefficienti di Taylor, per la formula di Cauchy, hanno modulo maggiorato da $Mn!/R^n$, dove R è il cerchio di olomorfia attorno al punto in cui si fa l'espansione). Ma una singolarità è un punto dello spettro, perciò se $|\lambda| > r(A)$, allora la serie deve convergere e, quindi, $r(A) \geq \tilde{r}$, visto che, dal criterio di Hadamard la serie converge per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ per cui $|\lambda| > \tilde{r}$.

Per $|\lambda| < r(A)$ la serie non può convergere, altrimenti, se convergesse in $\hat{\lambda}$, allora esisterebbe almeno un $\lambda \in \sigma(A)$ con $|\lambda| > \left|\hat{\lambda}\right|$ sul quale la serie convergerebbe. Infatti, la (I.2) è una serie a potenze negative, di modo che se converge in $\hat{\lambda}$ converge in ogni z per cui $|z| > \left|\hat{\lambda}\right|$. Ma $\lambda \in \sigma(A)$ quindi deve essere una singolarità per $R_A(\lambda)$ e ivi la (I.2) non può convergere. **(c.v.d.)**

Operatori normali Di nuovo, $X \equiv \mathcal{H}$ sia uno spazio di Hilbert. Per qualsiasi operatore limitato, $\|A^*A\| = \|A\|^2$, se poi A è normale, allora

$$\left\|A^2\right\|^2 = \left\|A^{2*}A^2\right\| = \|A^*A^*AA\| = \left\|(A^*A)^*(A^*A)\right\| = \|A^*A\|^2 = \|A\|^4$$

cioè

$$\left\|A^2\right\| = \|A\|^2$$

Ne viene che per ogni $n = 2^k$,

$$\|A^n\| = \|A\|^n$$

sicché per ogni $n + m = 2^k$ vale

$$\|A\|^{n+m} = \left\|A^{n+m}\right\| \leq \|A^n\| \|A^m\| \leq \|A^n\| \|A\|^m \leq \|A\|^{n+m}$$

perciò

$$\|A^n\| \|A^m\| = \|A^n\| \|A\|^m ,$$

infine, per ogni m

$$\|A^m\| = \|A\|^m$$

Se ne conclude che se A è un operatore normale, allora

$$r(A) = \|A\| .$$

Proposizione I.2 *Il raggio spettrale di un operatore normale limitato su uno spazio di Hilbert è pari alla sua norma.*

Esempio I.1 In generale il raggio spettrale non coincide con la norma di un operatore. Consideriamo ad esempio, per $X = \mathbb{C}^2$, l'operatore

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

allora gli autovalori di A hanno prodotto e somma pari a 0, cioè $\sigma(A) = \{0\}$. Il raggio spettrale è dunque nullo, ma $A \neq 0$, sicché $\|A\| \neq 0$.

Tra gli operatori negli spazi di Hilbert, un ruolo speciale spetta agli autoaggiunti. Questi ultimi hanno spettro reale

Proposizione I.3 *Lo spettro di un operatore autoaggiunto limitato è contenuto nell'intervallo* $[-\|A\|, \|A\|] \subset \mathbb{R}$.

Dimostrazione Sia λ un numero non reale. Allora $(A - \lambda\mathbb{I})$ ha nucleo banale (cioè λ non è un autovalore), infatti se esistesse $x \neq 0$ tale che $Ax = \lambda x$, allora $\lambda(x, x) = (x, Ax) = (Ax, x) = \bar{\lambda}(x, x)$, da cui $\lambda \in \mathbb{R}$, assurdo. L'immagine di $A - \lambda\mathbb{I}$ è densa, infatti

$$R^\perp(A - \lambda\mathbb{I}) = \ker\left(A^* - \bar{\lambda}\mathbb{I}\right) = \ker\left(A - \bar{\lambda}\mathbb{I}\right) = \{0\} .$$

Vediamo che $(A - \lambda\mathbb{I})^{-1}$ definito sul denso $R(A - \lambda\mathbb{I})$ è limitato. Posto $\lambda \equiv \alpha + i\beta$, abbiamo

$$\|(A - \lambda\mathbb{I})x\|^2 = ((A - \alpha - i\beta)x, (A - \alpha - i\beta)x) = \|(A - \alpha\mathbb{I})x\|^2 +$$

$$\begin{aligned} & +i\beta\left(x,\left(A-\alpha\mathbb{I}\right)x\right)-i\beta\left(\left(A-\alpha\mathbb{I}\right)x,x\right)+\left\|\beta x\right\|^{2} \\ = \ & \left\|\left(A-\alpha\mathbb{I}\right)x\right\|^{2}+\left\|\beta x\right\|^{2}\geq\beta^{2}\left\|x\right\|^{2} \end{aligned}$$

perciò

$$\left\|\left(A-\lambda\mathbb{I}\right)x\right\|\geq\beta\left\|x\right\|\Longrightarrow\left\|z\right\|\geq\beta\left\|\left(A-\lambda\mathbb{I}\right)^{-1}z\right\|$$

cioè

$$\left\|\left(A-\lambda\mathbb{I}\right)^{-1}\right\|\leq\frac{1}{\beta}$$

$\left(A-\lambda\mathbb{I}\right)^{-1}$ è un operatore chiuso limitato sul dominio denso, perciò ha dominio pari a $\mathcal{H}$, ma essendo il suo dominio il range di $\left(A-\lambda\mathbb{I}\right)$, si conclude che $\left(A-\lambda\mathbb{I}\right)$ è biunivoco e ha inverso limitato, cioè λ appartiene al risolvente di A.

(c.v.d.) Per il teorema sul raggio spettrale, si ha la tesi.

I.2 Il teorema spettrale per operatori limitati

In questa sezione ci occupiamo del teorema spettrale per gli operatori normali limitati. Rimandiamo al seguito l'analisi degli operatori illimitati, per i quali tratteremo esclusivamente il caso autoaggiunto. D'ora in avanti torniamo a porre $X=\mathcal{H}$ spazio di Hilbert.

I.2.1 Il calcolo funzionale continuo

Introduzione Il teorema spettrale afferma che ogni operatore autoaggiunto è una variabile aleatoria, o, equivalentemente, è un operatore di moltiplicazione in un opportuno spazio $L^{2}\left(M,d\mu\right)$. Questo significa che dato un operatore autoaggiunto limitato A su $\mathcal{H}$ è sempre possibile trovare uno spazio di misura $\left(M,d\mu\right)$ e un isomorfismo $U:\mathcal{H}\to L^{2}\left(M,d\mu\right)$ tali che

$$\left(UAU^{-1}f\right)\left(x\right)=F\left(x\right)f\left(x\right)$$

per ogni $f\in L^{2}\left(M,d\mu\right)$ per una certa F a valori reali (visto che A è autoaggiunto, tale dovrà essere F) essenzialmente limitata.
Come si vede il teorema spettrale enunciato sommariamente sopra è una generalizzazione del caso finito dimensionale in accordo al quale esiste $U:V\to\mathbb{C}^{n}$ per cui

$$\left(UAU^{-1}f\right)_{i}=\lambda_{i}f_{i}$$

per ogni $i\in J_{n}$ e per ogni $f=\left(f_{1},\ldots,f_{n}\right)\in\mathbb{C}^{n}$, per certi λ_{i} reali.

Programma della sottosezione Nella pratica, lo spazio M sarà dato dall'unione di copie di $\mathbb{R}$ mentre F sarà x, perciò il problema più grosso che dobbiamo affrontare è quello della costruzione di certe misure. Adesso daremo un senso alla scrittura $f\left(A\right)$ con f continua, poi considereremo le misure definite dai funzionali $f\mapsto\left(\psi,f\left(A\right)\psi\right)$ via Riesz-Markov.
Cominciamo a considerare il caso in cui $f\left(x\right)=\sum_{n}c_{n}x^{n}$ per $\left|x\right|<R$, allora, posto $f\left(A\right)\equiv\sum_{n}c_{n}A^{n}$, $f\left(A\right)$ avrà senso se $\left\|A\right\|<R$. Dunque, data $f\left(x\right)$ da essa si ottiene $f\left(A\right)$ se f è analitica in un dominio comprendente l'intero spettro di A.
Il fatto importante riguardante gli operatori autoaggiunti è che se P è un polinomio

$$\left\|P\left(A\right)\right\|=\sup_{\lambda\in\sigma\left(A\right)}\left|P\left(\lambda\right)\right|$$

sicché, poiché grazie al teorema di Stone-Weierstraß i polinomi sono densi nello spazio delle funzioni continue, la trasformazione che conserva la norma tra lo spazio dei polinomi sullo spettro e la C^{*}-algebra degli autoaggiunti limitati, può essere estesa in modo unico a isomorfismo di C^{*}-algebre: dalle funzioni continue sullo spettro all'insieme degli operatori $f\left(A\right)$.
Lo scopo della presente sottosezione è la dimostrazione del fondamentale

Teorema I.3 (del calcolo funzionale continuo) *Sia A un operatore autoaggiunto limitato su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Allora esiste un'unica mappa $\phi:\mathcal{C}\left(\sigma\left(A\right)\right)\to L\left(\mathcal{H}\right)$ avente le seguenti proprietà*

[(a)]

(a) *ϕ è uno *-omomorfismo di algebre, cioè*

$$\begin{aligned} \phi(fg) &= \phi(f)\phi(g) \quad \phi(\lambda f) = \lambda\phi(f) \\ \phi(1) &= \mathbb{I} \quad \phi(\bar{f}) = \phi^*(f) \end{aligned}$$

(b) *ϕ è continuo, cioè $\|\phi\| \le C\|f\|_\infty$*

(c) *sia f la funzione $f(x) = x$, allora $\phi(f) = A$*

Inoltre, si rinviene che ϕ ha le seguenti proprietà

[(d)]

(d) *se $A\psi = \lambda\psi$ allora $\phi(f)\psi = f(\lambda)\psi$*

(e) *$\sigma(\phi(f)) = f(\sigma(A))$ (*spectral mapping theorem*)*

(f) *se $f \ge 0$ allora $\phi(f) \ge 0$*

(g) *$\|\phi(f)\| = \|f\|_\infty$*

Per marcare la dipendenza da A di ϕ si scrive anche $\phi_A(f)$ o, direttamente, $f(A)$.

Dimostrazione in più passi del teorema L'idea della dimostrazione è molto semplice: i punti (a) e (c) determinano la forma di ϕ sui polinomi $P(x)$; dal teorema di Stone-Weierstraß, l'insieme dei polinomi è denso in $\mathcal{C}(\sigma(A))$ (ricordiamo che lo spettro è chiuso e limitato, sicché compatto), perciò se mostriamo che

$$\|P(A)\| = \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |P(\lambda)| = \|P\|_\infty \tag{I.3}$$

abbiamo esistenza ed unicità di ϕ dal teorema di estensione degli operatori continui su uno spazio completo.
Per provare la (I.3) cominciamo con il mostrare un caso particolare di (e)

Lemma I.1 *Sia $P(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n$ e allora $P(A) = \sum_{n=0}^N a_n A^n$. Risulta*

$$\sigma(P(A)) = P(\sigma(A)).$$

Dimostrazione Sia $\lambda \in \sigma(A)$, vogliamo vedere che $P(\lambda)$ appartiene a $\sigma(P(A))$. Ora $x = \lambda$ è la radice del polinomio $P(x) - P(\lambda)$ perciò esiste un polinomio Q di modo che

$$P(x) - P(\lambda) = (x-\lambda)Q(x)$$

sicché

$$P(A) - P(\lambda) = (A-\lambda)Q(A)$$

poiché $(A-\lambda)$ non ammette inversa (è non iniettivo o non suriettivo) tale sarà anche $P(A) - P(\lambda)$ di modo che $P(\lambda) \in \sigma(P(A))$.

Viceversa, sia $\mu \in \sigma(P(A))$ e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ le radici di $P(x) - \mu$ allora

$$P(x) - \mu = a(x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_n)$$

e quindi

$$P(A) - \mu = a(A-\lambda_1)\ldots(A-\lambda_n)$$

se $P(A) - \mu$ è non iniettivo (non suriettivo), allora uno dei termini a secondo membro è non iniettivo (non suriettivo) e con ciò λ_i appartiene allo spettro di A, dunque, come si voleva,

$$\mu = P(\lambda_i), \ \lambda_i \in \sigma(A).$$

(c.v.d.)

Siamo adesso in grado di dimostrare l'eguaglianza cruciale (I.3)

Lemma I.2 *Sia A un operatore autoaggiunto limitato, allora*

$$\|P(A)\| = \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |P(\lambda)|$$

Dimostrazione Vale

$$\|P(A)\|^2 = \|P^*(A)P(A)\| = \|\bar{P}P(A)\| = \sup_{\lambda \in \sigma(\bar{P}P(A))} |\lambda|$$

ma $\lambda \in \sigma(\bar{P}P(A))$ se e solo se esiste $\mu \in \sigma(A)$ talché $\lambda = \bar{P}P(\mu)$ dal lemma precedente, dunque

$$\|P(A)\|^2 = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\bar{P}P(\lambda)| = \left(\sup_{\lambda \in \sigma(A)} |P(\lambda)|\right)^2$$

(c.v.d.)

Conclusione della dimostrazione del teorema del calcolo funzionale continuo Si pone $\phi(P) \equiv P(A)$ per ogni polinomio in modo da rispettare (a) e (b), allora

$$\|\phi(P)\| = \|P\|_\infty$$

sicché ϕ ammette un'unica estensione con dominio $\mathcal{C}(\sigma(A))$, poiché i polinomi sono un'algebra contenente 1, contenente i complessi coniugati e separante i punti (quindi si applica Stone-Weierstraß).
Usando la continuità le proprietà (a), (b), (c) e (g) sono ovvie. Se $\tilde{\phi}$ soddisfa le tre richieste come ϕ, allora coincide con ϕ sui polinomi e, per continuità, su tutto $\mathcal{C}(\sigma(A))$. Proviamo (d). Sia $f \equiv P$, allora

$$P(A)\psi = \sum_{n=0}^{N} a_n A^n \psi = \sum_{n=0}^{N} a_n \lambda^n \psi = P(\lambda)\psi$$

usando la continuità, se $P_n \to f$,

$$f(A)\psi = \left(\lim_{n\to\infty} P_n(A)\right)\psi = \lim_{n\to\infty}(P_n(A)\psi) = \lim_{n\to\infty}(P_n(\lambda)\psi) = \left(\lim_{n\to\infty} P_n(\lambda)\right)\psi = f(\lambda)\psi$$

Per provare (f), abbiamo che se $f \geq 0$, allora $f = g^2$ con g reale e $g \in \mathcal{C}(\sigma(A))$, sicché

$$\phi(f) = \phi^2(g)$$

con $\phi(g)$ autoaggiunto (perché g è limite di polinomi reali, $\phi(g)$ è limite di autoaggiunti), da cui $\phi(f) \geq 0$.
Infine, (e). Si tratta di vedere se $\phi(f) - \mu$ è invertibile. D'altra parte,

$$\phi(f) - \mu = \phi(f - \mu),$$

perciò se $f(\lambda) = \mu$ non ha soluzione in $\sigma(A)$, allora

$$\phi(f-\mu)\,\phi\left(\frac{1}{f-\mu}\right) = \mathbb{I}$$

perciò $\mu \in \rho(\phi(f))$. In altre parole, $\mu \in \sigma(\phi(f))$ implica che esiste $\lambda \in \sigma(A)$ talché $\mu = f(\lambda)$.
Viceversa, se $\lambda \in \sigma(A)$ e P_n è il polinomio approssimante f, allora $P_n(\lambda) \in \sigma(P_n(A))$, cioè $P_n(A) - P_n(\lambda)$ non è invertibile. Poiché $P_n(A) - P_n(\lambda)$ converge uniformemente a $\phi(f) - f(\lambda)$, si ha che $f(A) - f(\lambda)$ non è invertibile e quindi $f(\lambda) \in \sigma(\phi(f))$.

(c.v.d.)

Osservazione I.3 L'algebra $\mathcal{A}$ degli operatori del tipo $f(A)$ è commutativa e chiusa sotto aggiunzione. Inoltre, poiché la norma di $f(A)$ è la norma del sup in $\mathcal{C}(\sigma(A))$, $\mathcal{A}$ è completa e chiusa in norma. Perciò $\mathcal{A}$ è una C^*-algebra di operatori.
Si può vedere che $\mathcal{A} = R(\phi)$ è la C^*-algebra generata da A, cioè la più piccola C^*-algebra contenente $\mathcal{A}$. Di certo la C^*-algebra generata è contenuta in $\mathcal{A}$. Vediamo che accade il viceversa, cioè che ogni C^*-algebra $\mathcal{B}$ contenente A, contiene anche $\mathcal{A}$. La cosa è ovvia. Fissata una qualsiasi $\mathcal{B}$ essa deve contenere i polinomi di A essendo un'algebra contenente A. Sia $f(A) \in \mathcal{A}$, allora $f(A) = \lim_{n\to\infty} P_n(A)$, perciò $f(A)$ è limite di elementi in $\mathcal{B}$, infine $f(A) \in \mathcal{B}$. ▪

Osservazione I.4 Dall'osservazione precedente discende che $\mathcal{C}(\sigma(A))$ e la C^*-algebra generata dall'operatore A sono isometricamente isomorfe. Questo fatto è un risultato particolare del **teorema di Gel'fand** del quale ci occuperemo in seguito. ▪

Concludiamo con due proposizioni molto semplici e utili nella pratica

Proposizione I.4 *Sia $\{A_n\}$ una successione di operatori limitati e autoaggiunti convergente in norma ad A. Sia $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, allora la successione $\{f(A_n)\}$ converge in norma a $f(A)$.*

Dimostrazione Anzitutto notiamo che A è autoaggiunto e limitato, perciò ha senso considerare $f(A)$. La successione $\{A_n\}$ è convergente perciò limitata, ne viene che esiste M tale che

$$\|A_n\| \leq M, \ \|A\| \leq M$$

per ogni n. Consideriamo allora l'intervallo reale $[-M, M]$. Poiché f è ivi continua, per il teorema di Weierstraß, esiste una successione di polinomi P_m che converge uniformemente a f in $[-M, M]$.

Fissiamo $\varepsilon > 0$, allora esiste $\bar{m}$ talché

$$\sup_{x\in[-M,M]} |f(x) - P_{\bar{m}}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

D'altra parte, per il teorema del calcolo funzionale continuo, per ogni n

$$\begin{aligned} \|f(A_n) - P_{\bar{m}}(A_n)\| &= \sup_{x\in\sigma(A_n)} |f(x) - P_{\bar{m}}(x)| \leq \sup_{x\in[-M,M]} |f(x) - P_{\bar{m}}(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \\ \|f(A) - P_{\bar{m}}(A)\| &= \sup_{x\in\sigma(A)} |f(x) - P_{\bar{m}}(x)| \leq \sup_{x\in[-M,M]} |f(x) - P_{\bar{m}}(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

dal momento che

$$\begin{aligned} \sigma(A_n) &\subset [-\|A_n\|, \|A_n\|] \subset [-M, M] \\ \sigma(A) &\subset [-\|A\|, \|A\|] \subset [-M, M] \end{aligned}$$

Perciò

$$\|f(A) - f(A_n)\| \leq \|f(A) - P_{\bar{m}}(A)\| + \|P_{\bar{m}}(A) - P_{\bar{m}}(A_n)\| + \|P_{\bar{m}}(A_n) - f(A_n)\|$$

il primo e il terzo addendo stanno sotto a $\varepsilon/3$, per quanto riguarda il secondo, siccome $\bar{m}$ è fissato e A_n converge a A, troviamo $\nu(\varepsilon)$ tale che se $n > \nu(\varepsilon)$, allora

$$\|P_{\bar{m}}(A) - P_{\bar{m}}(A_n)\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

(c.v.d.) la qual cosa conclude la nostra dimostrazione.

Proposizione I.5 *Sia A un operatore autoaggiunto limitato. Se U è un operatore unitario e f è una funzione continua su $\mathbb{R}$, allora $f(U^*AU) = f(A)$.*

Dimostrazione Posto $B \equiv U^*AU$ abbiamo che B è autoaggiunto e limitato e perciò ha senso considerare $f(B)$. Poiché A e B hanno la stessa norma, $M \equiv \|A\| = \|B\|$, consideriamo l'intervallo reale $[-M, M]$. In esso determiniamo, via il teorema di Weierstraß, una successione di polinomi P_m che converga uniformemente a f. Allora, $P_m(A)$ converge uniformemente a $f(A)$ e $P_m(B)$ a $f(B)$, per il teorema del calcolo operatoriale continuo. Ora, $P_m(B) = P_m(U^*AU) = U^*P_m(A)U$, sicché

$$\begin{aligned} f(U^*AU) &= \lim_{m\to\infty} P_m(U^*AU) = \lim_{m\to\infty} U^*P_m(A)U = \\ &= U^*\left(\lim_{m\to\infty} P_m(A)\right)U = U^*f(A)U \end{aligned}$$

(c.v.d.) poiché il limite di $P_m(A)$ esiste ed è pari a $f(A)$.

I.2.2 Funzioni boreliane e calcolo misurabile

Misura spettrale Grazie al calcolo operatoriale continuo (basato su quello polinomiale), siamo in grado di introdurre la misura spettrale. Fissiamo A operatore limitato autoaggiunto. Sia $\psi \in \mathcal{H}$ e consideriamo il funzionale positivo

$$f \in \mathcal{C}(\sigma(A)) \mapsto (\psi, f(A)\psi),$$

allora, per il teorema di Riesz-Markov esiste un'unica misura boreliana μ_ψ sul compatto $\sigma(A)$ talché

$$(\psi, f(A)\psi) = \int_{\sigma(A)} f(\lambda)\, d\mu_\psi(\lambda)$$

La misura μ_ψ si definisce **misura spettrale associata al vettore** ψ.
Sempre in forza del teorema di Riesz-Markov, fissati due vettori ψ e ζ troviamo la misura **complessa** boreliana $\mu_{\psi,\zeta}$ tale che, per ogni $f \in \mathcal{C}(\sigma(A))$,

$$(\psi, f(A)\zeta) = \int_{\sigma(A)} f(\lambda)\, d\mu_{\psi,\zeta}(\lambda)$$

Usiamo la misura spettrale per estendere l'isomorfismo ϕ definito sulle funzioni continue a $\hat{\phi}$ definito sulle boreliane. Prima di procedere, vediamo alcuni semplici fatti riguardanti le funzioni boreliane.

Funzioni boreliane

Come sappiamo dal primo capitolo del primo volume, una funzione si dice boreliana se è misurabile rispetto alla σ-algebra di Borel, la quale è la più piccola σ-algebra che contiene la topologia dello spazio in esame.
In altre parole, una funzione boreliana è caratterizzata dal fatto che l'immagine inversa di ogni aperto (o di un chiuso, o di un intervallo, o di un boreliano...!) è un boreliano. Ogni funzione boreliana, in quanto misurabile, è limite puntuale di una successione di funzioni boreliane semplici (funzioni che assumono un numero finito di valori, ciascuno su un boreliano).

Funzioni continue e funzioni boreliane

In generale, i limiti puntuali di funzioni continue definiscono funzioni boreliane. Infatti, se $f_n(x) \to f(x)$ allora i punti x tali che $f(x) \in]a,b[$ sono quelli per cui, da un certo n in poi, risulta $f_n(x) \in]a,b[$; ne viene che l'insieme degli x siffatti è l'unione per $k \geq n$ di $f_k^{-1}(]a,b[)$ e con ciò è un boreliano. Utilizzando lo stesso argomento si ha poi che l'algebra delle funzioni boreliane è chiusa sotto limite puntuale.
Vogliamo dimostrare che, nel caso in cui lo spazio topologico di misura X sia metrico, le boreliane su di esso, $\mathcal{B}(X)$, costituiscono il più piccolo insieme chiuso sotto limite puntuale a contenere $\mathcal{C}(X)$.
A questo scopo, denotiamo con $\mathcal{A}$ il più piccolo insieme chiuso sotto limite puntuale contenente $\mathcal{C}(X)$. Per quanto detto sopra, di certo $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(X)$. Vogliamo vedere che vale il viceversa.
Intanto facciamo vedere che $\mathcal{A}$ è automaticamente uno spazio vettoriale di funzioni su X. Poniamo

$$\mathcal{A}_1 = \{f \in \mathcal{A} \,|\, \lambda f + g \in \mathcal{A}\; \forall \lambda \in \mathbb{C}, g \in \mathcal{C}(X)\}$$

Ovviamente $\mathcal{A}_1$ contiene $\mathcal{C}(X)$. Ma $\mathcal{A}_1$ è anche chiuso per limite puntuale. Sia $\{f_n\} \subset \mathcal{A}_1$ convergente a f. Allora $f \in \mathcal{A}$ e $\lambda f_n + g \in \mathcal{A}$, visto che $\lambda f_n + g$ converge a $\lambda f + g$ e visto che $\mathcal{A}$ è chiuso per limite puntuale, $\lambda f + g \in \mathcal{A}$, cioè $f \in \mathcal{A}_1$. Sicché $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$. Posto

$$\mathcal{A}_2 = \{f \,|\, \lambda f + g \in \mathcal{A}, \forall \lambda \in \mathbb{C}, g \in \mathcal{A}\},$$

poiché $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_2$ contiene $\mathcal{C}(X)$. Ma $\mathcal{A}_2$ è chiuso sotto limite puntuale. Se $\{f_n\} \subset \mathcal{A}_2$ converge a f, allora $f \in \mathcal{A}$, inoltre $\lambda f_n + g \in \mathcal{A}$ e converge a $\lambda f + g$, sicché $\lambda f + g \in \mathcal{A}$ e $f \in \mathcal{A}_2$. Infine, $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}$ e $\mathcal{A}$ risulta automaticamente uno spazio vettoriale.
Sia

$$\mathcal{X} \equiv \{A \in \mathcal{P}(X) \,|\, \chi_A \in \mathcal{A}\},$$

mostriamo che $\mathcal{X}$ è una σ-algebra. In primo luogo, poiché la funzione identicamente nulla è continua, abbiamo $\emptyset \in \mathcal{X}$. Poiché la stessa cosa vale per la funzione identicamente 1, anche X appartiene a $\mathcal{X}$. Preso $A \in \mathcal{X}$, abbiamo

$$\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$$

da cui, siccome $\mathcal{A}$ è uno spazio vettoriale, $A^c \in \mathcal{X}$. Sia ora $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$, vogliamo vedere che

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{X}$$

Se ridefiniamo gli A_n in modo da renderli tutti disgiunti otteniamo una numerabilità di insiemi tutti ancora in $\mathcal{X}$ (perché, o essi stessi in $\mathcal{X}$, o intersezioni di almeno due $A_n \in \mathcal{X}$) con unione A, perciò supponiamo pure che gli A_n siano disgiunti. Allora

$$\chi_A = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \chi_{A_n}$$

essendo la successione a secondo membro (equilimitata da 1) convergente ovunque. Poiché $\mathcal{A}$ è chiuso per limiti puntuali, si ha $A \in \mathcal{X}$.
Mostriamo che se D è un insieme chiuso, allora $D \in \mathcal{X}$. Cominciamo con il vedere che D è intersezione numerabile di aperti (incapsulati), cioè che D chiuso in uno spazio metrico è in realtà G_δ.
Si tratta solo di vedere che

$$D = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{x\in D} B(x, 1/n) \equiv \bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n,$$

perché a quel punto avremmo la tesi, essendo l'unione qualsiasi di aperti ancora un aperto e avendosi

$$Z_{n+1} \subset Z_n$$

visto che se $x \in Z_{n+1}$ allora esiste $y \in D$ talché $x \in B(y, 1/(n+1))$, ma allora $y \in B(y, 1/n)$, cioè $x \in Z_n$.
Se $x \in D$ allora x appartiene all'intersezione degli Z_n. Viceversa, per ogni n, $x \in Z_n$, cioè esiste $x_n \in D$ tale che

$$d(x, x_n) < 1/n,$$

siccome $x_n \to x$ e D è chiuso, allora $x \in D$.
Non ci resta che dimostrare che esiste una successione di funzioni continue che converge puntualmente a χ_D. Fissiamo n, allora per il lemma di Urysohn (che vale poiché X è metrico e con ciò normale), esiste una funzione continua f_n nulla in Z_n^c, pari a 1 in D e a valori in $[0, 1]$. Mostriamo che f_n converge puntualmente a χ_D. Sia $x \in D$, allora il limite delle $f_n(x)$ vale banalmente 1. Se invece $x \notin D$, visto che

$$D^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c$$

allora $x \in A_k^c$ per qualche k e perciò per ogni $n \geq k$ vale

$$\chi_{A_n} = 0,$$

la tesi.
Ora, $\mathcal{X}$ è una σ-algebra contenente i chiusi, perciò contiene i boreliani, visto che essi formano la più piccola σ-algebra contenente i chiusi. Questo significa che $\mathcal{A}$ contiene le funzioni caratteristiche dei boreliani, quindi le funzioni semplici sui boreliani i cui limiti puntuali danno tutte le funzioni boreliane. Ne concludiamo $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}$.

Teorema I.4 *In uno spazio metrico X, l'algebra delle funzioni boreliane costituisce il più piccolo insieme di funzioni su X chiuso per limite puntuale e contenente le funzioni continue su X.*

Vogliamo caratterizzare l'insieme delle funzioni boreliane **limitate** su X nel caso in cui esso sia compatto. D'ora in poi denoteremo tale insieme con $\mathcal{B}(X)$. Diciamo che

Teorema I.5 *In uno spazio metrico compatto X, l'algebra delle funzioni boreliane limitate costituisce il più piccolo insieme di funzioni su X chiuso per limite puntuale equilimitato e contenente le funzioni continue su X.*

Dimostrazione Basta ripercorrere la dimostrazione del teorema precedente notando che se X è compatto le funzioni continue su di esso sono automaticamente limitate.

Anzitutto, è ovvio che il limite puntuale di una successione equilimitata di boreliane dà una funzione limitata. Per il teorema precedente, essa è anche boreliana.

Per quanto concerne il viceversa, notiamo che nella dimostrazione del teorema precedente i chiusi avevano funzioni caratteristiche approssimate con successioni di funzioni continue equilimitate (da 1) e che le boreliane sono limite puntuale **crescente** di funzioni semplici, perciò le boreliane limitate sono limite puntuale equilimitato di funzioni semplici. **(c.v.d.)**

Osservazione I.5 Attenzione che non è vero che ogni funzione boreliana in uno spazio metrico è limite puntuale di funzioni continue. Questo perché l'insieme delle funzioni che sono limite puntuale di continue **non** è chiuso sotto limite puntuale. Come mostreremo tra poco, è vero invece che le boreliane sono limiti puntuali quasi ovunque di continue rispetto a misure regolari. ▪

Osservazione I.6 In uno spazio topologico normale, la più piccola σ-algebra rispetto alla quale le continue siano misurabili è quella di Baire, cioè quella generata dai G_δ chiusi. Ripercorrendo la dimostrazione del teorema di sopra, si mostra che $\mathcal{A}$ contiene le funzioni caratteristiche dei Baire, perciò le funzioni semplici dei Baire e, in definitiva, tutte le funzioni di Baire. Ne viene che il più piccolo insieme chiuso per limite puntuale e contenente le continue è l'algebra delle funzioni di Baire. Negli spazi metrici, i G_δ chiusi sono tutti e soli i chiusi, perciò la σ-algebra di Borel e Baire coincidono e ci si riconduce al teorema di sopra. ▪

Boreliane come limiti quasi ovunque di funzioni continue

Visto che la misura che consideriamo è regolare, per il teorema di densità delle funzioni continue a supporto compatto in L^1 su uno spazio X che sia anche Haussdorf localmente compatto (come è quello individuato dal teorema spettrale), abbiamo che ogni funzione boreliana limitata che andremo a considerare è ottenibile come limite puntuale quasi ovunque (rispetto alla misura μ boreliana regolare su X) di funzioni continue. Infatti, se f è una funzione boreliana essenzialmente limitata su (X, μ), allora è ivi L^1 e perciò è limite L^1 di funzioni continue (a supporto compatto). Ma allora esiste una sottosuccessione della successione convergente L^1 a f, che converge puntualmente quasi ovunque a f. La sottosuccessione individua la successione di funzioni continue cercata.
Ora, quasi ovunque, $|f| \leq M$, perciò definiamo

$$g_n(x) \equiv \begin{cases} f_n(x), & \text{se } |f(x)| \leq M+1 \\ M+1, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Poiché, quasi ovunque, $f_n(x) \to f(x)$ per n sufficientemente grande

$$|f_n(x)| \leq M+1$$

cioè $f_n(x) = g_n(x)$ di modo che $g_n(x) \to f(x)$. Ne viene che riusciamo a costruire f come limite puntuale quasi ovunque di una successione di funzioni continue equilimitate.
In definitiva, abbiamo provato la seguente

Proposizione I.6 *Se (X, μ) è lo spazio di misura individuato dal teorema spettrale (allora X è di Haussdorf localmente compatto e μ è regolare) si ha che ogni funzione boreliana essenzialmente limitata è limite puntuale quasi ovunque di una successione di funzioni continue equilimitate a supporto compatto.*

Calcolo operatoriale misurabile

Torniamo alla costruzione del calcolo operatoriale misurabile. Fissati due vettori ψ e ζ ha perfettamente senso considerare la quantità

$$\int_{\sigma(A)} f(\lambda)\, d\mu_{\psi,\zeta}(\lambda) \equiv \left(\psi, \hat{\phi}(f)\,\zeta\right) \tag{I.4}$$

Vogliamo dimostrare che $\left(\psi, \hat{\phi}(f)\,\zeta\right)$ è una forma sesquilineare. Se mostreremo poi che si tratta di una forma limitata, avremo che la (I.4) definisce un operatore lineare limitato e che questo coincide con $\phi(f)$ per le funzioni continue.

$\left(\psi, \hat{\phi}(f)\,\zeta\right)$ come forma sesquilineare

Definiamo $\mathcal{A}$ l'insieme delle funzioni boreliane limitate f tali che $\left(\psi, \hat{\phi}(f)\,\zeta\right)$ è una forma sesquilineare. Certamente $\mathcal{A}$ contiene le funzioni continue per il teorema del calcolo continuo. Se mostriamo che $\mathcal{A}$ è chiuso sotto limiti puntuali equilimitati, abbiamo dal teorema sulla caratterizzazione delle boreliane limitate, che $\mathcal{A}$ coincide con $\mathcal{B}(\sigma(A))$, come volevamo.

Sia dunque $\{f_n\} \subset \mathcal{A}$ una successione equilimitata (diciamo da M) convergente ovunque a f. Vogliamo vedere che $\left(\psi, \hat{\phi}(f)\zeta\right)$ è una forma sesquilineare. Vediamo la linearità nella seconda variabile (dopodiché in modo analogo si mostra l'antilinearità nella prima variabile):

$$\left(\psi, \hat{\phi}(f)(\zeta_1 + \kappa\zeta_2)\right) = \int_{\sigma(A)} f(\lambda)\, d\mu_{\psi,\zeta_1+\kappa\zeta_2} = \int_{\sigma(A)} \lim_{n\to+\infty} f_n(\lambda)\, d\mu_{\psi,\zeta_1+\kappa\zeta_2}(\lambda),$$

poiché $|f_n| \leq M$ per ogni n e poiché tutte le misure $\mu_{\psi,\zeta}$ sono finite, applicando il teorema della convergenza dominata due volte, abbiamo

$$\begin{aligned}
\left(\psi, \hat{\phi}(f)(\zeta_1 + \kappa\zeta_2)\right) &= \lim_{n\to+\infty} \int_{\sigma(A)} f_n(\lambda)\, d\mu_{\psi,\zeta_1+\kappa\zeta_2}(\lambda) = \lim_{n\to+\infty} \left(\psi, \hat{\phi}(f_n)(\zeta_1 + \kappa\zeta_2)\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\psi, \hat{\phi}(f_n)\zeta_1\right) + \kappa \lim_{n\to+\infty} \left(\psi, \hat{\phi}(f_n)\zeta_2\right) = \\
&= \int_{\sigma(A)} \lim_{n\to+\infty} f_n(\lambda)\, d\mu_{\psi,\zeta_1}(\lambda) + \kappa \int_{\sigma(A)} \lim_{n\to+\infty} f_n(\lambda)\, d\mu_{\psi,\zeta_2}(\lambda) = \\
&= \left(\psi, \hat{\phi}(f)\zeta_1\right) + \kappa \left(\psi, \hat{\phi}(f)\zeta_2\right)
\end{aligned}$$

Per ogni $f \in \mathcal{B}(\sigma(A))$, $\left(\psi, \hat{\phi}(f)\zeta\right)$ è una forma sesquilineare, d'altra parte

$$\begin{aligned}
\left|\left(\psi, \hat{\phi}(f)\zeta\right)\right| &= \left|\int_{\sigma(A)} f(\lambda)\, d\mu_{\psi,\zeta}\right| \leq \left|\sup_{\lambda\in\sigma(A)} |f(\lambda)| \int_{\sigma(A)} d\mu_{\psi,\zeta}\right| = \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |f(\lambda)| \left|\int_{\sigma(A)} d\mu_{\psi,\zeta}\right| = \\
&= \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |f(\lambda)|\, |(\psi,\zeta)| \leq \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |f(\lambda)|\, \|\psi\|\, \|\zeta\|
\end{aligned}$$

sicché $\hat{\phi}(f)$ è effettivamente un operatore limitato su $\mathcal{H}$.
Passiamo a considerare $\hat{\phi} : \mathcal{B}(\sigma(A)) \to L(\mathcal{H})$. Mostriamo che si tratta di uno $*$-omomorfismo. Per procedere, ci occorre il seguente semplice

Lemma I.3 *Sia $\{f_n\} \subset \mathcal{B}(\sigma(A))$ una successione equilimitata convergente ovunque a f. Allora $\hat{\phi}(f_n)$ converge debolmente a $\hat{\phi}(f)$.*

Dimostrazione Si tratta di applicare in modo ovvio il teorema della convergenza dominata sfruttando la finitezza di ogni $\mu_{\psi,\zeta}$ e il fatto che per ogni n $|f_n - f| \leq 2M$.
(c.v.d.)

$\hat{\phi}$ come *-omomorfismo Grazie al lemma concludiamo immediatamente che per ogni $f \in \mathcal{B}(\sigma(A))$ risulta

$$\hat{\phi}^*(f) = \hat{\phi}(\bar{f}),$$

infatti, sia $\mathcal{A}$ l'insieme delle funzioni boreliane limitate sullo spettro per le quali valga la proprietà di coniugazione di cui sopra. Allora $\mathcal{C}(\sigma(A)) \subset \mathcal{A}$. Inoltre, $\mathcal{A}$ è chiuso sotto limite puntuale equilimitato: se $\{f_n\} \subset \mathcal{A}$ è una successione equilimitata converge puntualmente a f, allora $f \in \mathcal{B}(\sigma(A))$ e

$$\hat{\phi}(\bar{f}) = \mathrm{w-}\lim_{n\to+\infty} \hat{\phi}(\bar{f}_n) = \mathrm{w-}\lim_{n\to+\infty} \hat{\phi}^*(f_n) = \left[\mathrm{w-}\lim_{n\to+\infty} \hat{\phi}(f_n)\right]^* = \hat{\phi}^*(f)$$

Passiamo al prodotto. Poniamo

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ f \in \mathcal{B}(\sigma(A)) \,\middle|\, \hat{\phi}(fg) = \hat{\phi}(f)\hat{\phi}(g)\ \forall g \in \mathcal{C}(\sigma(A)) \right\}$$

Si tratta di vedere che $\mathcal{B}_1$ è chiuso sotto limite puntuale equilimitato per concludere che coincide con $\mathcal{B}(\sigma(A))$ dal momento che contiene $\mathcal{C}(\sigma(A))$ in forza del calcolo continuo.
Sia $\{f_n\} \subset \mathcal{B}_1$ una successione equilimitata convergente ovunque a f, allora, notando che $f_n g \to fg$, e applicando il lemma precedente,

$$\hat{\phi}(fg) = \mathrm{w-}\lim_{n\to+\infty} \hat{\phi}(f_n g) = \mathrm{w-}\lim_{n\to+\infty} \hat{\phi}(f_n)\hat{\phi}(g) = \hat{\phi}(f)\hat{\phi}(g)$$

sicché $f \in \mathcal{B}_1$.

A questo punto poniamo
$$\mathcal{B}_2 = \left\{ f \in \mathcal{B}(\sigma(A)) \middle| \hat{\phi}(fg) = \hat{\phi}(f)\hat{\phi}(g)\ \forall g \in \mathcal{B}(\sigma(A)) \right\}$$
Visto che $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}(\sigma(A))$, abbiamo che $\mathcal{C}(\sigma(A)) \subset \mathcal{B}_2$. Mostriamo che $\mathcal{B}_2$ è chiuso sotto limite puntuale. Sia $\{f_n\} \subset \mathcal{B}_2$ convergente a $f \in \mathcal{B}(\sigma(A))$. Allora, per ogni g boreliana limitata $f_n g$ converge puntualmente equilimitatamente a fg, perciò, ancora
$$\hat{\phi}(fg) = \mathrm{w}-\lim_{n\to+\infty} \hat{\phi}(f_n g) = \mathrm{w}-\lim_{n\to+\infty} \hat{\phi}(f_n)\hat{\phi}(g) = \hat{\phi}(f)\hat{\phi}(g),$$
infine, $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}(\sigma(A))$.

A questo punto possiamo raffinare il lemma di sopra mostrando che la convergenza di $\hat{\phi}(f_n)$ a $\hat{\phi}(f)$ è forte, se f_n è una successione equilimitata di boreliane convergente a f. Infatti,
$$\left\| \left[\hat{\phi}(f) - \hat{\phi}(f_n)\right]\psi \right\|^2 = \left\| \left[\hat{\phi}(f - f_n)\right]\psi \right\|^2 = \left(\psi, \hat{\phi}\left(|f - f_n|^2\right)\psi\right) = \int |f - f_n|^2 \, d\mu_\psi$$
applicando il teorema della convergenza dominata di Lebesgue, si ha la tesi.

Unicità di $\hat{\phi}$ Conclusa la costruzione dello *-omomorfismo $\hat{\phi}$ ci chiediamo se sia unico. Ricordiamo che la sua restrizione a $\mathcal{C}(\sigma(A))$, ϕ, corrisponde all'unico *-omomorfismo limitato che associa a $\lambda \mapsto \lambda$ l'operatore A. Se richiediamo pure che $\hat{\phi}$ mappi successioni equilimitate di boreliane in successioni fortemente convergenti di operatori, abbiamo che $\hat{\phi}$ è unico.

Per assurdo esistano due *-omomorfismi ϕ_1 e ϕ_2 con le proprietà dette. Per quanto visto essi debbono coincidere su $\mathcal{C}(\sigma(A))$, sicché
$$\mathcal{A} = \{ f \in \mathcal{B}(\sigma(A)) \,|\, \phi_1(f) = \phi_2(f) \}$$
contiene $\mathcal{C}(\sigma(A))$. Sia $\{f_n\} \subset \mathcal{A}$ una successione equilimitata convergente a f. Allora
$$\phi_1(f) = \lim_{n\to+\infty} \phi_1(f_n) = \lim_{n\to+\infty} \phi_2(f_n) = \phi_2(f)$$
come volevamo.

Abbiamo dunque provato la prima parte del seguente

Teorema I.6 (calcolo misurabile) *Sia A un operatore limitato autoaggiunto su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Esiste un'unica mappa $\hat{\phi}$ da $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ in $L(\mathcal{H})$ di modo che*

(i) *$\hat{\phi}$ è uno *-omomorfismo;*

(ii) *$\hat{\phi}$ è continuo in norma;*

(iii) *se $f(\lambda) = \lambda$ allora $\hat{\phi}(f) = A$;*

(iv) *se $\{f_n\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ è una successione equilimitata convergente a f puntualmente, allora $\hat{\phi}(f_n) \xrightarrow{s} \hat{\phi}(f)$.*

Inoltre, $\hat{\phi}$ ha le seguenti proprietà

[(v)]

(v) *se $A\psi = \lambda\psi$, allora $\hat{\phi}(f)\lambda = f(\lambda)\psi$;*

(vi) *se $f \geq 0$, allora $\hat{\phi}(f) \geq 0$;*

(vii) *se $B \in L(\mathcal{H})$e $[A, B] = 0$, allora $[\phi(f), B] = 0$.*

Dimostrazione Dobbiamo solo vedere le proprietà aggiuntive. Cominciamo da (v). Come al solito sfruttiamo il fatto che la cosa vale per le funzioni continue (valendo per i polinomi). Sia, al solito, $\mathcal{A}$ l'insieme delle boreliane per cui vale la tesi. Visto che $\mathcal{C}(\sigma(A)) \subset \mathcal{A}$, dobbiamo vedere che $\mathcal{A}$ è chiuso sotto limite puntuale. D'altra parte se $\{f_n\} \subset \mathcal{A}$ è una successione equilimitata convergente a f, per (iv),
$$\hat{\phi}(f)\psi = \lim_{n\to} \hat{\phi}(f_n)\psi = \lim_{n\to} f_n(\lambda)\psi = f(\lambda)\psi.$$

Per quanto concerne (vi), abbiamo

$$\left(\psi, \hat{\phi}(f)\psi\right) = \int d\mu_\psi(\lambda)\ f(\lambda) \geq 0$$

Infine, (vii). La tesi vale per i polinomi, dunque per le funzioni continue. Essendo $\mathcal{A}$ l'insieme delle boreliane limitate per cui vale la tesi, resta da vedere che $\mathcal{A}$ è chiuso sotto limite puntuale equilimitato: per ogni $\psi \in \mathcal{H}$,

$$B\hat{\phi}(f)\psi = B \lim_{n\to+\infty} \hat{\phi}(f_n)\psi = \lim_{n\to+\infty} B\hat{\phi}(f_n)\psi = \lim_{n\to+\infty} \hat{\phi}(f_n) B\psi = \hat{\phi}(f) B\psi.$$

Il teorema resta dimostrato per quanto concerne le $f \in \mathcal{B}(\sigma(A))$. Poiché $\sigma(A)$ è chiuso, ogni boreliano Ω su $\mathbb{R}$ è tale che $\sigma(A) \cap \Omega$ è un boreliano dello spettro, perciò possiamo estendere il teorema a $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, una volta cambiata ogni funzione boreliana della retta f con $f\chi_{\sigma(A)}$ che appartiene a $\mathcal{B}(\sigma(A))$. Il cambiamento, per altro, è ininfluente perché per definizione gli elementi di matrice sono integrali calcolati sullo spettro, di modo che la moltiplicazione per $\chi_{\sigma(A)}$ è automatica.

(c.v.d.)

Torneremo sul calcolo misurabile una volta dimostrato il teorema spettrale. Quest'ultimo si basa sul calcolo continuo e consente una diversa costruzione del calcolo misurabile.

I.2.3 Il teorema spettrale

Cominciamo con l'introdurre la seguente

Definizione I.4 *Un vettore $\psi \in \mathcal{H}$ è chiamato* **ciclico** *per A se le combinazioni lineari finite dei vettori $\{A^n\psi\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono dense in $\mathcal{H}$.*

Non tutti gli operatori ammettono vettori ciclici, però se li hanno vale

Lemma I.4 *Sia A un operatore limitato e autoaggiunto con un vettore ciclico ψ. Allora esiste un operatore unitario*

$$U : \mathcal{H} \to L^2\left(\sigma(A), d\mu_\psi\right)$$

talché, in senso L^2,

$$\left(UAU^{-1}f\right)(\lambda) = \lambda f(\lambda).$$

Dimostrazione Usiamo il teorema del calcolo funzionale continuo. Sia $f \in \mathcal{C}(\sigma(A))$, allora definiamo U come

$$U\phi(f)\psi \equiv f$$

Dobbiamo vedere che U è ben definito, cioè che se $\phi(f)\psi = \phi(g)\psi$ allora $f = g$. Infatti,

$$\begin{aligned}\|\phi(f)\psi\|^2 &= (\phi(f)\psi, \phi(f)\psi) = (\psi, \phi^*(f)\phi(f)\psi) = (\psi, \phi(f^*f)\psi) = \\ &= \int d\mu_\psi(\lambda)\ |f(\lambda)|^2\end{aligned}$$

per cui se $\phi(f)\psi = \phi(g)\psi$, allora $\phi(f-g)\psi = 0$ e quindi $\|f-g\|_{L^2} = 0$, cioè $f = g$.

L'espressione di sopra dimostra anche che, sul dominio posto, U conserva la norma.

Riassumendo, abbiamo che U è definito sullo spazio

$$\{\phi(f)\psi \,|\, f \in \mathcal{C}(\sigma(A))\}$$

ed ivi è isometrico. Poiché ψ è ciclico, il dominio è denso in $\mathcal{H}$ e, in forza del teorema di estensione degli operatori continui, abbiamo che U è ben definito su tutto $\mathcal{H}$ ed è un'isometria. Ora, poiché $\mathcal{C}(\sigma(A))$ è denso in $L^2\left(\sigma(A), d\mu_\psi\right)$ U ha immagine densa, ma, essendo un'isometria, è allora suriettivo[1]. In definitiva, U è un operatore unitario. Per concludere, abbiamo, se $f \in \mathcal{C}(\sigma(A))$,

$$\phi(f)\psi = U^{-1}U\phi(f)\psi = U^{-1}f$$

[1] al solito, se per ogni ψ esiste $\{\varphi_n\}$ talché $U\varphi_n \to \psi$, si ha $\{U\varphi_n\}$ di Cauchy, dunque $\{\varphi_n\}$ di Cauchy, perciò $\varphi_n \to \varphi$, dunque, $U\varphi_n \to U\varphi = \psi$, perciò U è suriettivo.

perciò, se con x indichiamo la funzione identica su $\sigma(A)$, abbiamo

$$UAU^{-1}f = UA\phi(f)\psi = U\phi(x)\phi(f)\psi = U\phi(xf)\psi = xf$$

cioè

$$\left(UAU^{-1}f\right)(\lambda) = (xf)(\lambda) = \lambda f(\lambda)$$

(c.v.d.) Per continuità, estendiamo il risultato ottenuto a tutte le $f \in L^2\left(\sigma(A), d\mu_\psi\right)$.

Chiaramente, ci basta modificare i risultati in assenza di un vettore ciclico, per avere il teorema spettrale. Andiamo allora a compiere la seguente *zornication*

Lemma I.5 *Sia A un operatore limitato autoaggiunto su uno spazio di Hilbert separabile $\mathcal{H}$. Allora esiste una decomposizione di $\mathcal{H}$ in somma diretta come*

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n=1}^{N} \mathcal{H}_n$$

con $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ talché

(i) *ciascun $\mathcal{H}_n$ è A-invariante;*

(ii) *per ogni n esiste $\psi_n \in \mathcal{H}_n$ ciclico per $\left.A\right|_{\mathcal{H}_n}$.*

Dimostrazione Sia S l'insieme di tutte le famiglie M di sottospazi H_β, $\beta \in B_M$, tali che

(i) $H_\beta \perp H_{\beta'}$ per $\beta \neq \beta' \in B_M$;

(ii) $AH_\beta \subset H_\beta$ per ogni $\beta \in B_M$;

(iii) in H_β esiste un vettore ciclico per $\left.A\right|_{H_\beta}$, $\beta \in B_M$.

L'insieme S è parzialmente ordinato rispetto alla relazione di inclusione $\subset$. Sia $S' \subset S$ totalmente ordinato, allora

$$M' = \bigcup_{M \in S'} M$$

è un confine superiore per S' e, inoltre, appartiene a S. Vediamo il perché di quest'ultima affermazione. Siano H_β e $H_{\beta'} \in M'$, allora esistono M_1 e M_2 in S' tali che $H_\beta \in M_1$ e $H_{\beta'} \in M_2$. Tuttavia, M' è totalmente ordinato quindi, per fissare le idee, $M_1 \subset M_2$ (o il contrario), perciò H_β e $H_{\beta'} \in M_2$ da cui godono delle proprietà (i), (ii) e (iii), come volevamo dimostrare. S soddisfa le ipotesi del lemma di Zorn, perciò esiste in S una famiglia massimale M_0. Siano $\mathcal{H}_n$ i sottospazi contenuti in M_0 e, posto $N \equiv \# M_0$ (poiché $\mathcal{H}$ è separabile, $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$), consideriamo

$$H \equiv \bigoplus_{i=1}^{N} \mathcal{H}_i.$$

Per assurdo sia $\xi \in H^\perp \setminus \{0\}$ allora consideriamo

$$H_\xi \equiv \operatorname{Span}\left\langle \left\{ f(A)\xi \,|\, f \in \mathcal{C}(\sigma(A)) \right\} \right\rangle$$

Abbiamo che H_ξ è ortogonale a ogni $\mathcal{H}_n$, infatti, se $\psi \in \mathcal{H}_n$ allora $f^*(A)\psi \in \mathcal{H}_n$,

$$(\psi, f(A)\xi) = (f^*(A)\psi, \xi) = 0$$

Dunque, $M \equiv M_0 \cup H_\xi \in S$ e contiene M_0, la qual cosa è assurda essendo M_0 massimale.

(c.v.d.) Perciò $H^\perp = \{0\}$ e $H = \mathcal{H}$.

Teorema I.7 (spettrale) *Sia A un operatore limitato autoaggiunto sullo spazio di Hilbert separabile $\mathcal{H}$. Allora esistono* *le misure* $\{\mu_n\}_{n\in J_N}$ *su* $\sigma(A)$, $N \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$, *e l'operatore unitario*

$$U : \mathcal{H} \to \bigoplus_{n=1}^{N} L^2\left(\sigma\left(A\right), d\mu_n\right)$$

di modo che, se scriviamo

$$\psi \in \bigoplus_{n=1}^{N} L^2\left(\sigma\left(A\right), d\mu_n\right)$$

come N*-upla* $(\psi_1, \ldots, \psi_N)$, *la componente* n*-esima gode della proprietà*

$$\left(UAU^{-1}\psi\right)_n(\lambda) = \lambda\psi_n(\lambda).$$

Questa realizzazione di A *via l'operatore unitario* U *si chiama* **rappresentazione spettrale** *di* A.

Dimostrazione Si usa il lemma precedente per determinare la decomposizione di $\mathcal{H}$ in somma diretta degli $\mathcal{H}_n$ e il lemma I.4 su ciascun $\mathcal{H}_n$.

(c.v.d.)

Corollario I.2 *Sia* A *un operatore limitato autoaggiunto sullo spazio di Hilbert separabile* $\mathcal{H}$. *Allora esistono uno spazio di misura finita* (M, μ), *una funzione limitata misurabile* F *su* M *e una mappa unitaria* $U : \mathcal{H} \to L^2(M, d\mu)$ *di modo che*

$$\left(UAU^{-1}f\right)(m) = F(m)\, f(m).$$

Dimostrazione Si scelgano i vettori ciclici di cui nel lemma I.5 ϕ_n di modo che $\|\phi_n\| = 2^{-n}$ e sia

$$M \equiv \bigcup_{n=1}^{N} \sigma_n(A)$$

dove $\sigma_n(A)$ è l'n-esima copia dello spettro. Passiamo a dotare M di una σ-algebra. Dato $B \subset M$, vale

$$B = \bigcup_{n=1}^{N} B_n,\ B_n \subset \sigma_n(A)$$

diciamo che B è misurabile se e solo se ciascun B_n è un misurabile. La famiglia di insiemi ottenuti è banalmente una σ-algebra: infatti, se $\left\{B^i\right\}$ è una famiglia numerabile disgiunta di insiemi in M abbiamo

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B^i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{n=1}^{N} B_n^i = \bigcup_{n=1}^{N} \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_n^i$$

e la tesi segue dal fatto che per ogni n

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_n^i$$

è misurabile. Adesso occupiamoci della misura: poniamo

$$\mu(B) = \sum_{n=1}^{N} \mu_n(B_n)$$

dove, essendo $\mu_n(\sigma_n(A)) = 2^{-n}$, la serie è certamente convergente e lo spazio M ha misura finita.

Mostriamo che μ è realmente una misura. L'unico aspetto non banale è la misura di una unione numerabile disgiunta. Consideriamo la solita famiglia numerabile $\left\{B^i\right\}$ di sottoinsiemi disgiunti in M, abbiamo, visto che per ogni n $\left\{B_n^i\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ è una famiglia numerabile disgiunta in $\sigma_n(A)$,

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B^i\right) &= \mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\bigcup_{n=1}^{N} B_n^i\right) = \sum_{n=1}^{N}\mu_n\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_n^i\right) = \\ &= \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{\infty}\mu_n\left(B_n^i\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{N}\mu_n\left(B_n^i\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\mu_n\left(B^i\right)\end{aligned}$$

dove le serie si scambiano perché a termini positivi.

Un punto m di M è una coppia $m \equiv (\lambda, n)$ con $\lambda \in \sigma(A)$ e $n \in J_N$ (n indica la copia $\sigma(A)$ cui appartiene a m), inoltre, se f è misurabile

$$\int_M f(m)\, d\mu(m) = \sum_{n=1}^{N}\int f(\lambda, n)\, d\mu_n(\lambda)$$

visto che così vale per le funzioni caratteristiche e dunque per quelle semplici.

Dimostriamo che la nostra costruzione è legata a quella del teorema spettrale, cioè che $L^2(M,\mu)$ è isometricamente isomorfo a

$$H \equiv \bigoplus_{n=1}^{N} L^2(\sigma(A), d\mu_n)$$

La cosa è ovvia, presa $f \in L^2(M, d\mu)$ essa identifica $(Vf)_n \equiv f_n(\lambda) \equiv f(\lambda, n) \in L^2(\sigma(A), d\mu_n)$, per ogni n e inoltre

$$\|Vf\|_H^2 = \sum_{n=1}^{N}\|f_n\|_{\mu_n}^2 = \sum_{n=1}^{N}\int |f(\lambda,n)|^2\, d\mu_n(\lambda) = \|f\|_\mu^2$$

visto che V è banalmente invertibile, si ha la tesi. $\mathcal{H}$ è isometricamente isomorfo a $L^2(\sigma(A), d\mu)$.

Dato $\psi(m) = \psi(\lambda, n) \in L^2(M, d\mu)$ si ottiene $\psi_n(\lambda) \in H$ di modo che

$$VUAU^{-1}V^{-1}\psi(m) = V(\lambda\psi_n(\lambda)) = \lambda\psi(\lambda, n) = F(m)\psi(m)$$

essendo

$$F(m) = F(\lambda, n) = \lambda$$

con $F : M \to \sigma(A)$ chiaramente limitata e misurabile. La tesi si ottiene in modo banale
(c.v.d.) ridefinendo U come VU.

Riassumendo la sostanza della prova del corollario, abbiamo che con la mappa U ogni elemento $\psi \in \mathcal{H}$ si scrive in $L^2(M,\mu)$ come $\psi(\lambda, n)$ sicché

$$\begin{aligned}(\psi,\phi) &= \sum_n\int d\mu_n(\lambda)\,\overline{\psi(\lambda;n)}\phi(\lambda;n) \\ (\psi, A\phi) &= \sum_n\int d\mu_n(\lambda)\,\overline{\psi(\lambda;n)}\lambda\phi(\lambda;n)\end{aligned}$$

che – in qualche modo – rendono rigorosamente le **formule di Dirac** (nelle quali l'integrazione sullo spettro di A è sostituita da una somma formale sugli autovalori). Le misure $d\mu_n$ si dicono **misure spettrali**.

I.2.4 Teorema spettrale e calcolo operatoriale

Calcolo continuo Torniamo al calcolo operatoriale. Per quanto concerne il calcolo operatoriale continuo, vogliamo mostrare che per ogni $f \in \mathcal{C}(\sigma(A))$

$$\phi(f) = U^{-1}f(F(m))U$$

dove U implementa la trasformazione unitaria da $\mathcal{H}$ a $L^2(M,\mu)$.

La tesi vale banalmente per i polinomi, dal momento che, se λ è la funzione identica sullo spettro, allora

$$\phi(\lambda) = A = U^{-1}F(m)U$$

e perciò, dal momento che

$$A^n = \left(UF(m)U^{-1}\right)^n = UF^n(m)U^{-1}$$

la tesi vale sui polinomi.
Infine, se P_n è una successione di polinomi che converge uniformemente a f sullo spettro, allora

$$\phi(f) = \lim_{n\to+\infty} \phi(P_n) = \lim_{n\to+\infty} U^{-1}P_n(F(m))U = U^{-1}\left(\lim_{n\to+\infty} P_n(F(m))\right)U$$

siccome il limite diviene nella norma uniforme su M e $F(m) = F(\lambda, n) = \lambda$, si conclude che

$$\lim_{n\to+\infty} P_n(F(m)) = f(F(m))$$

da cui la tesi.

Calcolo misurabile Il calcolo misurabile si ottiene in modo del tutto simile. Data $f \in \mathcal{B}(\sigma(A))$ consideriamo l'applicazione

$$f \mapsto U^{-1}f(F(m))U \in L(\mathcal{H})$$

che coincide con ϕ su $\mathcal{C}(\sigma(A))$ e perciò mappa l'identità sullo spettro in A. Poiché U è unitario, l'applicazione considerata è uno *-omomorfismo:

$$\begin{array}{rcl} f + \lambda g & \mapsto & U^{-1}f(F(m))U + \lambda U^{-1}g(F(m))U \\ fg & \mapsto & U^{-1}f(F(m))UU^{-1}g(F(m))U \\ \bar{f} & \mapsto & U^{-1}\bar{f}(F(m))U = \left(U^{-1}f(F(m))U\right)^* \end{array}$$

visto che U è unitario e che $f(F(m))$ è un operatore limitato di moltiplicazione su $L^2(M, \mu)$. L'applicazione considerata è continua,

$$\left\|U^{-1}f(F(m))U\right\| = \|f(F(m))\|_{L^\infty(M,\mu)} \le \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |f(\lambda)|$$

Infine, se $\{f_n\} \subset \mathcal{B}(\sigma(A))$ è una successione equilimitata convergente puntualmente a f, allora

$$\left\|U^{-1}\left[f_n(F(m)) - f(F(m))\right]U\psi\right\|^2 = \left\|\left|f_n(F(m)) - f(F(m))\right|^2 \psi(m)\right\|^2$$

sicché

$$\left\|U^{-1}\left[f_n(F(m)) - f(F(m))\right]U\psi\right\| = \sum_{k=1}^{N} \int d\mu_k \, |f_n(\lambda) - f(\lambda)|^2 |\psi_k(\lambda)|^2$$

Ciascun integrale è maggiorato da

$$\int d\mu_k \, |f_n(\lambda) - f(\lambda)|^2 |\psi_k(\lambda)|^2 \le 4M^2 \int d\mu_k \, |\psi_k(\lambda)|^2 \in \ell^1$$

sicché si può applicare il teorema della convergenza dominata una prima volta spostando entro la somma il limite per $n \to +\infty$. La seconda applicazione consente di portare il limite entro l'integrale la qual cosa essendo possibile perché $4M^2 |\psi_k(\lambda)|^2 \in L^2(\sigma(A), \mu_k)$, infine, si ha convergenza. Allora $f \mapsto U^{-1}f(F(m))U$ coincide con $\hat{\phi}$.

I.2.5 Proiezioni spettrali

Proiettori spettrali associati ad A Dato il calcolo operatoriale misurabile, possiamo costruire gli operatori $\chi_\Omega(A)$ essendo Ω un boreliano della retta reale. Posto

$$E(\Omega) \equiv \chi_\Omega(A) = \hat{\phi}(\chi_\Omega)$$

abbiamo

$$E^2(\Omega) = \hat{\phi}(\chi_\Omega)\hat{\phi}(\chi_\Omega) = \hat{\phi}\left(\chi_\Omega^2\right) = \hat{\phi}(\chi_\Omega) = E(\Omega)$$

sicché $E(\Omega)$ è un proiettore. $E(\Omega)$ è un proiettore ortogonale, dal momento che

$$E^*(\Omega) = \hat{\phi}(\bar{\chi}_\Omega) = \hat{\phi}(\chi_\Omega) = E(\Omega).$$

Le proprietà della famiglia dei proiettori $E(\Omega)$ sono riportate nella seguente

Proposizione I.7 *La famiglia di proiettori $\{E(\Omega)\,|\Omega$ boreliano$\}$ associata all'operatore autoaggiunto limitato A soddisfa le seguenti proprietà*

(i) *ogni $E(\Omega)$ è un proiettore ortogonale;*

(ii) $E(\emptyset) = 0$, $E((-a,a)) = \mathbb{I}$ *per qualche a;*

(iii) *se Ω è l'unione disgiunta di una successione formata da un'infinità numerabile di insiemi Ω_n boreliani, allora*

$$E(\Omega) = \text{s}-\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N E(\Omega_n);$$

(iv) $E(\Omega_1\cap\Omega_2) = E(\Omega_1)\,E(\Omega_2)$.

Dimostrazione Il primo punto è già stato dimostrato. Veniamo al secondo. La funzione caratteristica dell'insieme vuoto è nulla, perciò $E(\emptyset) = 0$. Per ogni Ω ciò che conta realmente è $\Omega\cap\sigma(A)$ nella costruzione di $\chi_\Omega(A)$, essendo

$$(\psi, \chi_\Omega(A)\,\psi) = \int_{\sigma(A)} \chi_\Omega(\lambda)\; d\mu_\psi(\lambda)$$

Poiché lo spettro è limitato, esiste a talché $\sigma(A)\subset(-a,a)$, allora

$$\chi_{(.-a,a)}(A) = \chi_{(-a,a)\cup\sigma(A)}(A) = \chi_{\sigma(A)}(A) = A^0 = \mathbb{I}$$

Passiamo a (iii). Se

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^\infty \Omega_n$$

abbiamo che puntualmente vale

$$\chi_\Omega(\lambda) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N \chi_{\Omega_n}(\lambda)$$

sicché, dal calcolo operatoriale misurabile, abbiamo che $E(\Omega) = \chi_\Omega(A)$ è il limite forte di

$$\sum_{n=1}^N \chi_{\Omega_n}(A)$$

per $N\to\infty$.

Infine, (iv). Ovviamente, $\chi_{\Omega_1\cap\Omega_2}(\lambda) = \chi_{\Omega_1}(\lambda)\,\chi_{\Omega_2}(\lambda)$, perciò

$$E(\Omega_1\cap\Omega_2) = E(\Omega_1)\,E(\Omega_2).$$

(c.v.d.)

Definizione I.5 *Una famiglia di proiettori che obbediscano alle (i),(ii) e (iii) della proposizione precedente si dice* misura *(limitata)* a valori di proiezione.

Osservazione I.7 Nella definizione non abbiamo incluso (iv) perché essa discende da (i) e da (iii). Vedremo tra poco perché. Anzitutto se consideriamo $B\subset A$, abbiamo

$$E(A) = E(B) + E(A\backslash B)$$

da cui

$$E(A) - E(B) = E(A\backslash B)$$

cioè, visto che i proiettori sono positivi, $E(B) \leq E(A)$. Inoltre, quadrando

$$E(A) + E(B) - 2E(A)E(B) = E(A) - E(B)$$

cioè

$$E(B) = E(A)E(B).$$

Poi, se A e B sono insiemi generici, per quanto visto sopra

$$\begin{aligned} E(A \cup B) &= E(A \backslash (A \cap B)) + E(B \backslash (A \cap B)) + E(A \cap B) = \\ &= E(A) - E(A \cap B) + E(B) - E(A \cap B) + E(A \cap B) = \\ &= E(A) + E(B) - E(A \cap B) \end{aligned}$$

Quadrando e usando ancora i risultati di prima

$$\begin{aligned} E(A) + E(B) - E(A \cap B) &= E(A) + E(B) + E(A \cap B) + 2E(A)E(B) - 4E(A \cap B) \\ E(A \cap B) &= E(A)E(B) \end{aligned}$$

e ritroviamo la (iv). Si noti che essa attesta

$$E(A)E(B) = E(B)E(A).$$

■

Misura associata a una m.v.p. Una misura a valori di proiezione definisce in modo univoco una misura ordinaria sui boreliani, consideriamo infatti, per ogni $\psi \in \mathcal{H}$

$$\tilde{\mu}_{\psi}(\Omega) \equiv (\psi, E(\Omega)\psi) \leq \|\psi\|^2$$

Grazie alle proprietà della misura a valori di proiezione, $\tilde{\mu}_{\psi}$ è una misura. La cosa è immediata:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{\psi}(\emptyset) &= (\psi, 0\psi) = 0 \\ \tilde{\mu}_{\psi}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n\right) &= \left(\psi, \sum_{n=1}^{+\infty} E(\Omega_n)\psi\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (\psi, E(\Omega_n)\psi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \tilde{\mu}_{\psi}(\Omega_n) \end{aligned}$$

dove si è fatto uso della continuità del prodotto scalare.
Se consideriamo la misura a valori proiezione definita dalla proiezione spettrale $\chi_{\Omega}(A)$, allora troviamo che $\tilde{\mu}_{\psi} = \mu_{\psi}$. La misura a valori proiezione data dalla famiglia delle proiezioni spettrali associate ad A si chiama **misura a valori proiezione** (m.v.p.) **spettrale associata ad** A.
Presi due vettori in $\mathcal{H}$ possiamo pure definire la misura complessa

$$\tilde{\mu}_{\psi,\varphi}(\Omega) = (\psi, E(\Omega)\varphi).$$

Si vede subito che la misura $\tilde{\mu}_{\psi,\varphi}(\Omega)$ si ottiene dalla $\tilde{\mu}_{\psi}(\Omega)$ usando la formula di polarizzazione.

Proprietà della misura complessa Valgono immediatamente le proprietà

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{\psi,\varphi+\varphi'}(\Omega) &= \tilde{\mu}_{\psi,\varphi}(\Omega) + \tilde{\mu}_{\psi,\varphi'}(\Omega) \\ \tilde{\mu}_{\psi,\alpha\varphi}(\Omega) &= \alpha\tilde{\mu}_{\psi,\varphi}(\Omega) \\ \overline{\tilde{\mu}_{\psi,\varphi}(\Omega)} &= \tilde{\mu}_{\varphi,\psi}(\Omega) \end{aligned}$$

Integrazione in una m.v.p. Se $E(\Omega)$ è una generica m.v.p. possiamo integrare in essa. Data f boreliana limitata sul supporto della m.v.p., definiamo l'operatore

$$B_f \equiv \int f(\lambda)\, dE(\lambda)$$

come l'unico talché

$$(\psi, B_f\psi) \equiv \int f(\lambda)\, d\tilde{\mu}_{\psi}(\lambda)$$

Vediamo che la cosa è effettivamente possibile. Si tratta di dimostrare che la forma

$$(\psi, B_f\varphi) \equiv \int f(\lambda)\, d\tilde{\mu}_{\psi,\varphi}(\lambda)$$

è sesquilineare limitata. A quel punto B è, da uno dei corollari al teorema di rappresentazione di Riesz, un operatore lineare limitato e come tale univocamente determinato da $(\psi, B_f \psi)$. Ora, se f è una funzione caratteristica, per le proprietà di $\tilde{\mu}_{\psi,\varphi}$ elencate sopra, la forma è sesquilineare; la stessa cosa vale allora per le funzioni semplici e, infine, per le f boreliane limitate. Queste ultime, essendo misurabili, sono limiti puntuali di successioni f_n di funzioni semplici che possiamo assumere equilimitate, allora, dal teorema di Lebesgue della convergenza dominata,

$$\begin{aligned}(\psi, B_f(\varphi+\alpha\zeta)) &= \lim_{n\to\infty}\int f_n(\lambda)\, d\tilde{\mu}_{\psi,\varphi+\alpha\zeta}(\lambda) = \\ &= \lim_{n\to\infty}\int f_n(\lambda)\, d\tilde{\mu}_{\psi,\varphi}(\lambda) + \lim_{n\to\infty}\alpha\int f_n(\lambda)\, d\tilde{\mu}_{\psi,\zeta}(\lambda) = \\ &= \int f(\lambda)\, d\tilde{\mu}_{\psi,\varphi}(\lambda) + \alpha\int f(\lambda)\, d\tilde{\mu}_{\psi,\zeta}(\lambda) = (\psi, B_f\varphi) + \alpha(\psi, B_f\zeta)\end{aligned}$$

Solitamente si scrive formalmente

$$d\tilde{\mu}_{\psi,\varphi}(\lambda) \equiv d(\psi, E(\lambda)\varphi)$$

di modo che

$$(\psi, B_f\psi) \equiv \int f(\lambda)\, d(\psi, E(\lambda)\psi).$$

Teorema I.8 *Se $E(\Omega)$ è una misura a valori proiezione e f una funzione boreliana limitata, allora si definisce in modo unico l'operatore denotato come*

$$B_f \equiv \int f(\lambda)\, dE(\lambda)$$

di modo che

$$(\psi, B_f\psi) = \int f(\lambda)\, d(\psi, E(\lambda)\psi)$$

Sia $f(\lambda) = \chi_\Omega(\lambda)$, allora

$$\left(\psi, B_{\chi_\Omega}\psi\right) = \int \chi_\Omega(\lambda)\, d(\psi, E(\lambda)\psi) = \tilde{\mu}_\psi(\Omega)$$

d'altra parte

$$\tilde{\mu}_\psi(\Omega) = (\psi, E(\Omega)\psi)$$

perciò $B_{\chi_\Omega} = E(\Omega)$.
L'applicazione $f \mapsto B_f$ è uno *-omomorfismo che gode, essenzialmente, delle proprietà di $\hat{\phi}$:

Teorema I.9 *Sia data una misura a valori proiezione $\{E(\Omega)\}_{\Omega\in\mathcal{B}(\mathbb{R})}$, allora l'applicazione da $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ in $L(\mathcal{H})$ che associa*

$$f \mapsto B_f = \int f(\lambda)\, dE(\lambda)$$

è uno *-omomorfismo continuo tale che se $\{f_n\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ è equilimitata e converge puntualmente a f, allora B_f è il limite forte della successione $\{B_{f_n}\}$.

Dimostrazione Cominciamo dalla linearità: B_f è univocamente determinato dai suoi elementi di matrice i quali sono dati dagli integrali nelle misure $d\tilde{\mu}_{\psi,\zeta}(\lambda) = d(\psi, E(\lambda)\zeta)$:

$$\begin{aligned}(\psi, B_{f+\alpha g}\zeta) &= \int f+\alpha g\, d\tilde{\mu}_{\psi,\zeta} = \int f\, d\tilde{\mu}_{\psi,\zeta} + \alpha\int g\, d\tilde{\mu}_{\psi,\zeta} = \\ &= (\psi, B_f\zeta) + \alpha(\psi, B_g\zeta) = (\psi, (B_f+\alpha B_g)\zeta).\end{aligned}$$

Veniamo alla coniugazione

$$\left(\psi, B_{\bar{f}}\zeta\right) = \int \bar{f}\, d\tilde{\mu}_{\psi,\zeta} = \overline{\int f\, \overline{d\tilde{\mu}_{\psi,\zeta}}} = \overline{\int f\, d\tilde{\mu}_{\zeta,\psi}} = \overline{(\zeta, B_f\psi)} = (B_f\psi, \zeta)$$

da cui

$$B_{\bar{f}} = B_f^*.$$

Come al solito, il prodotto è più complicato. Risulta conveniente dimostrare prima che se f_n converge equilimitatamente a f, allora B_f è il limite debole di B_{f_n}. Abbiamo

$$(\psi, B_{f-f_n}\zeta) = \int f - f_n \, d\mu_{\psi,\zeta}$$

e, usando il teorema della convergenza dominata si ha subito la tesi.

Consideriamo ora due funzioni caratteristiche, χ_{Ω_1} e χ_{Ω_2}, abbiamo

$$\begin{aligned}\left(\psi, B_{\chi_{\Omega_1}} B_{\chi_{\Omega_2}}\zeta\right) &= (\psi, E(\Omega_1) E(\Omega_2)\zeta) = (\psi, E(\Omega_1 \cap \Omega_2)\zeta) = \\ &= \int \chi_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \, d\tilde{\mu}_{\psi,\zeta} = \int \chi_{\Omega_1}\chi_{\Omega_2} \, d\tilde{\mu}_{\psi,\zeta} = \\ &= \left(\psi, B_{\chi_{\Omega_1} \cap \chi_{\Omega_2}}\zeta\right)\end{aligned}$$

da cui

$$B_{\chi_{\Omega_1}} B_{\chi_{\Omega_2}} = B_{\chi_{\Omega_1} \cap \chi_{\Omega_2}}$$

Per linearità, la tesi vale anche per le funzioni semplici che sono combinazioni lineari finite di funzioni caratteristiche. Siano f una funzione boreliana e s una funzione semplice. f si ottiene come limite puntuale equilimitato di funzioni semplici s_n, di modo che

$$B_f B_s = \text{w}-\lim_{n\to\infty} B_{s_n} B_s = \text{w}-\lim_{n\to\infty} B_{s_n s} = B_{fs}$$

Infine, se g è una funzione boreliana approssimata come limite puntuale equilimitato da t_n successione di funzioni semplici,

$$B_g B_f = \text{w}-\lim_{n\to\infty} B_{t_n} B_f = \text{w}-\lim_{n\to\infty} B_{t_n f} = B_{gf}$$

Quest'ultimo punto ci consente di scrivere, se $\{f_n\}$ è equilimitata e converge ovunque a f,

$$\|(B_f - B_{f_n})\psi\|^2 = \|(B_{f-f_n})\psi\|^2 = \left(\psi, B_{|f-f_n|^2}\psi\right) = \int |f - f_n|^2 \, d\tilde{\mu}_\psi \to 0$$

per il teorema della convergenza dominata.

Per la continuità

$$\begin{aligned}\|B_f\psi\|^2 &= \left(\psi, B_{|f|^2}\psi\right) = (\sup|f|)^2 \int d\tilde{\mu}_\psi = (\sup|f|)^2 \|\psi\|^2 \\ \|B_f\| &\le \sup|f|\end{aligned}$$

(c.v.d.)

Teorema spettrale e m.v.p. Sia ora A autoaggiunto e limitato. Mostriamo che se $E(\lambda)$ è la sua m.v.p. spettrale allora

$$A = \int \lambda \, dE(\lambda).$$

A questo scopo basta notare che

$$(\psi, A\psi) = \int_{\sigma(A)} \lambda \, d\mu_\psi(\lambda) = \int_{\sigma(A)} \lambda \, d(\psi, E(\lambda)\psi)$$

essendo, per definizione,

$$d\mu_\psi(\lambda) = d(\psi, E(\lambda)\psi).$$

Viceversa, sia A autoaggiunto e limitato e sia $P(\Omega)$ una generica m.v.p. talché

$$A = \int \lambda \, dP(\lambda)$$

allora $P(\Omega)$ è proprio la m.v.p. spettrale.

L'applicazione che a ogni funzione boreliana limitata f associa l'operatore

$$B_f = \int f(\lambda) \, dP(\lambda)$$

è uno *-omomorfismo tale che ad A è associata la funzione $\lambda \mapsto \lambda$, e tale che se f è approssimata come limite puntuale da una successione equilimitata f_n, allora B_f è il limite forte di B_{f_n}. Per unicità dello *-omomorfismo descritto (teorema del calcolo operatoriale misurabile), abbiamo

$$B_f = f(A).$$

Ne viene che

$$E(\Omega) = \chi_\Omega(A) = \int \chi_\Omega(\lambda)\, dP(\lambda) = P(\Omega)$$

come volevamo.

Teorema I.10 (teorema spettrale - formulazione m.v.p.) *Dato un operatore autoaggiunto limitato A su uno spazio di Hilbert separabile, esiste una corrispondenza uno a uno tra A e una misura a valori proiezione $E(\Omega)$ data da*

$$\begin{aligned} A &\longmapsto \{E(\Omega)\},\ E(\Omega) \equiv \chi_\Omega(A) \\ \{E(\Omega)\} &\longmapsto A = \int \lambda\, dE(\lambda) \end{aligned}$$

Prima di concludere c'è da notare che la scrittura

$$f(A) = \int f(\lambda)\, dE(\lambda)$$

non è soltanto vera in senso debole, ma definita l'integrazione alla Riemann, sarebbe possibile dare un significato in senso forte a $f(A)$. La cosa non ci interessa minimamente.

I.2.6 Rappresentazione spettrale congiunta

Impostazione del problema Siano $A_1, \ldots, A_n$ operatori limitati **commutanti** autoaggiunti sullo spazio di Hilbert separabile $\mathcal{H}$. Poniamo per comodità $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_n)$, si pensi alle tre componenti della posizione in meccanica quantistica, ad esempio.
Vogliamo dare una rappresentazione spettrale simultanea degli operatori considerati. Come è noto, in dimensione finita la cosa è banalmente possibile: esiste un'unica trasformazione unitaria che diagonalizza ciascun A_i.

Commutazione dei singoli proiettori spettrali Consideriamo $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ insiemi boreliani sulla retta reale. Se con E_i indichiamo la m.v.p. spettrale associata all'operatore A_i, vogliamo dimostrare che i proiettori $E_i(\Omega_i)$ commutano tra loro, di modo che l'operatore

$$E_1(\Omega_1)\ldots E_n(\Omega_n)$$

è ancora un proiettore.
La cosa è molto semplice. Fissiamo A_i e consideriamo una qualsiasi funzione boreliana limitata f in A_k. Dal teorema del calcolo misurabile, abbiamo che A_i commuta con $f(A_k)$. Ancora, se g è una boreliana in A_i, applicando il teorema del calcolo misurabile, rinveniamo che $g(A_i)$ commuta con $f(A_k)$. In definitiva, prese le funzioni caratteristiche in luogo di f e g troviamo la tesi.

Misura di Riemann generata dai proiettori Sui plurirettangoli $\Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$, contenuti nel prodotto cartesiano degli spettri

$$\Pi \equiv \sigma(A_1) \times \ldots \times \sigma(A_n),$$

definiamo la misura

$$\mu'_\psi(\Omega) = (\psi, E_1(\Omega_1)\ldots E_n(\Omega_n)\psi)$$

di modo che μ'_ψ sia una misura di Riemann. Ne abbiamo che le funzioni continue su Π sono integrabili (sommabili, poiché Π è un compatto) rispetto a ciascuna μ'_ψ.

Estensione a una misura boreliana Poiché l'applicazione

$$\mathcal{C}(\Pi) \ni f \mapsto \int_\Pi f(\boldsymbol{\lambda})\, d\mu'_\psi$$

è un funzionale continuo e positivo sulle funzioni continue e poiché Π è compatto, possiamo applicare il teorema di Riesz-Markov, in modo da estendere μ'_ψ a una misura boreliana μ_ψ:

per ogni $f \in \mathcal{C}(\sigma(\Pi))$

$$\int_\Pi f(\boldsymbol{\lambda})\, d\mu'_\psi = \int_\Pi f(\boldsymbol{\lambda})\, d\mu_\psi.$$

Mostriamo che μ_ψ assume lo stesso valore sui plurirettangoli. Fissiamo un plurirettangolo Ω. Data la semplice struttura di un plurirettangolo, riusciamo a costruire in modo ovvio due successioni incapsulate di plurirettangoli Ω'_n e Ω''_n di modo che

$$\begin{aligned} \Omega''_n &\subset \Omega \subset \Omega'_n \\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega''_n &= \Omega = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega'_n. \end{aligned}$$

Sempre in modo ovvio, costruiamo due successioni di funzioni continue, positive, limitate da 1, f'_n e f''_n tali rispettivamente da valere 1 su Ω e 0 fuori da Ω'_n, 1 su Ω''_n e 0 fuori da Ω. Evidentemente,

$$f'_n \to \chi_\Omega \leftarrow f''_n,$$

Inoltre, dal teorema della convergenza dominata

$$\begin{aligned} \mu_\psi(\Omega) &= \lim_{n\to\infty} \int f'_n\, d\mu_\psi \geq \mu'_\psi(\Omega) \\ \mu_\psi(\Omega) &= \lim_{n\to\infty} \int f''_n\, d\mu_\psi \leq \mu'_\psi(\Omega) \end{aligned}$$

da cui la tesi.

Calcolo operatoriale per le funzioni semplici sui plurirettangoli Abbiamo allora una misura boreliana μ_ψ tale che, su ogni plurirettangolo $\Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$, risulta

$$\mu_\psi(\Omega) = (\psi, E_1(\Omega_1)\ldots E_n(\Omega_n)\psi) = \int d\mu_\psi\, \chi_\Omega$$

poiché $E_1(\Omega_1)\ldots E_n(\Omega_n) = \chi_{\Omega_1}(A_1)\ldots\chi_{\Omega_n}(A_n)$ e poiché $\chi_{\Omega_1}(\lambda_1)\ldots\chi_{\Omega_n}(\lambda_n) = \chi_\Omega(\boldsymbol{\lambda})$ possiamo porre

$$E_1(\Omega_1)\ldots E_n(\Omega_n) \equiv \chi_\Omega(\mathbf{A})$$

Definiamo pure dati, due plurirettangoli $\Omega^{(1)}$ e $\Omega^{(2)}$,

$$\left(\chi_{\Omega^{(1)}} + \kappa\chi_{\Omega^{(2)}}\right)(\mathbf{A}) \equiv \chi_{\Omega^{(1)}}(\mathbf{A}) + \kappa\chi_{\Omega^{(2)}}(\mathbf{A}) = E_1\left(\Omega_1^{(1)}\right)\ldots E_n\left(\Omega_n^{(1)}\right) + \kappa E_1\left(\Omega_1^{(2)}\right)\ldots E_n\left(\Omega_n^{(2)}\right)$$

di modo che

$$\left(\psi, \left(\chi_{\Omega^{(1)}} + \kappa\chi_{\Omega^{(2)}}\right)(\mathbf{A})\psi\right) = \int d\mu_\psi\, \chi_{\Omega^{(1)}} + \kappa \int d\mu_\psi\, \chi_{\Omega^{(2)}} = \int d\mu_\psi\, \left(\chi_{\Omega^{(1)}} + \kappa\chi_{\Omega^{(2)}}\right)$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} \chi_{\Omega^{(1)}}(\mathbf{A})\,\chi_{\Omega^{(2)}}(\mathbf{A}) &= E_1\left(\Omega_1^{(1)}\right)\ldots E_n\left(\Omega_n^{(1)}\right) E_1\left(\Omega_1^{(2)}\right)\ldots E_n\left(\Omega_n^{(2)}\right) = \\ &= E_1\left(\Omega_1^{(1)}\right) E_1\left(\Omega_1^{(2)}\right)\ldots E_n\left(\Omega_n^{(1)}\right) E_n\left(\Omega_n^{(2)}\right) = \\ &= E_1\left(\Omega_1^{(1)} \cap \Omega_1^{(2)}\right)\ldots E_n\left(\Omega_n^{(1)} \cap \Omega_n^{(2)}\right) = \\ &= \chi_{\Omega^{(1)}\cap\Omega^{(2)}}(\mathbf{A}) = \left(\chi_{\Omega^{(1)}}\chi_{\Omega^{(2)}}\right)(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

e

$$\chi^*_\Omega(\mathbf{A}) = E^*_n(\Omega_n)\ldots E^*_1(\Omega_1) = E^*_1(\Omega_1)\ldots E^*_n(\Omega_n) = \bar{\chi}_\Omega(\mathbf{A})$$

In generale, se s è una funzione semplice definita sui plurirettangoli in Π, risulta ben posto l'operatore $s(\mathbf{A})$; siccome il prodotto di funzioni semplici sui plurirettangoli è ancora una funzione semplice sui plurirettangoli, l'applicazione $s \mapsto s(\mathbf{A})$ è uno *-omomorfismo e vale

$$(\psi, s(\mathbf{A})\psi) = \int d\mu_\psi(\boldsymbol{\lambda})\; s(\boldsymbol{\lambda})$$

Calcolo funzionale continuo Sia M una costante positiva tale che per ogni $k \in J_n$ si abbia $\sigma(A_k) \subset [-M, M]$. Suddiviso l'intervallo $[-M, M]$ in n intervalli identici e considerato su ciascun intervallo la funzione

caratteristica moltiplicata per la media dell'identità sull'intervallo detto, costruiamo una successione $\{s_m\}$ equilimitata (da M) di funzioni semplici sui rettangoli che converge ovunque su ogni spettro $\sigma(A_k)$ alla funzione identica $\lambda \mapsto \lambda$.
Per il teorema del calcolo misurabile, abbiamo

$$A_k = \text{s}-\lim_{m\to\infty} s_m(A_k)$$

perciò

$$A_1 \dots A_n = \text{s}-\lim_{m\to\infty} s_m(A_1)\dots s_m(A_n)$$

Notiamo che ciascuna $s_m(\lambda_i)$ è una funzione semplice sui plurirettangoli anche vista in Π, perciò sfruttando quanto visto nel paragrafo precedente abbiamo

$$s_m(A_1)\dots s_m(A_n) = S_m(\mathbf{A})$$

avendo definito $S_m(\boldsymbol{\lambda}) = s_m(\lambda_1)\dots s_m(\lambda_n)$. Dunque, usando il teorema della convergenza dominata

$$\begin{aligned}(\psi, A_1\dots A_n\psi) &= \lim_{m\to\infty}(\psi, S_m(\mathbf{A})\psi) = \lim_{m\to\infty}\int_\Pi d\mu_\psi(\boldsymbol{\lambda})\ S_m(\boldsymbol{\lambda}) = \\ &= \lim_{m\to\infty}\int_\Pi d\mu_\psi(\boldsymbol{\lambda})\ s_m(\lambda_1)\dots s_m(\lambda_n) = \\ &= \int_\Pi d\mu_\psi(\boldsymbol{\lambda})\ \lim_{m\to\infty} s_m(\lambda_1)\dots s_m(\lambda_n) = \\ &= \int_\Pi d\mu_\psi(\boldsymbol{\lambda})\ \lambda_1\dots\lambda_n\end{aligned}$$

Poiché si può ragionare in modo analogo sulle potenze di A_i e poiché l'estensione alle combinazioni lineari è immediata, abbiamo che, per ogni P polinomio su Π,

$$(\psi, P(\mathbf{A})\psi) = \int_\Pi d\mu_\psi(\boldsymbol{\lambda})\ P(\boldsymbol{\lambda})$$

Abbiamo pure, essendo gli A_k autoaggiunti

$$\begin{aligned}\|P(\mathbf{A})\psi\|^2 &= (\psi, P^*(\mathbf{A})P(\mathbf{A})\psi) = \left(\psi, \bar{P}(\mathbf{A})P(\mathbf{A})\psi\right) = \\ &= \int_\Pi d\mu_\psi\ |P(\lambda)|^2 \le (\sup|P|)^2\|\psi\|^2\end{aligned}$$

cioè

$$\|P(\mathbf{A})\| \le \sup|P|$$

Quest'ultima diseguaglianza ci consente di introdurre il calcolo funzionale continuo tramite il teorema di estensione per gli operatori lineari continui, visto che l'insieme dei polinomi è denso nella norma uniforme su Π.

Teorema spettrale per il caso ciclico

Una volta costruito il teorema del calcolo funzionale continuo, si procede come nel caso di un solo operatore per dimostrare il teorema spettrale.
Esista un vettore ciclico in $\mathcal{H}$ per l'insieme degli operatori $A_1,\dots,A_n$. Vogliamo mostrare che esiste un operatore unitario U tra $\mathcal{H}$ e $L^2\left(\Pi, d\mu_\psi\right)$ talché ciascun A_i è il moltiplicatore per λ_i su Π. Sia $f \in \mathcal{C}(\Pi)$, allora definiamo U come

$$Uf(\mathbf{A})\psi \equiv f$$

Vediamo che U è ben definito, cioè che se $f(\mathbf{A})\psi = g(\mathbf{A})\psi$, allora $f = g$ in senso L^2. Infatti, presa $h \in \mathcal{C}(\Pi)$

$$\|h(\mathbf{A})\psi\|^2 = \int |h|^2\ d\mu_\psi = \|h\|^2 = \|Uh(\mathbf{A})\psi\|^2$$

posto $h = f - g$ si ha la tesi. Si ha pure che U è una isometria.
Riassumendo, abbiamo che U è definito sullo spazio

$$\{f(\mathbf{A})\psi\,|f \in \mathcal{C}(\Pi)\}$$

ed ivi è isometrico. Poiché ψ è ciclico, il dominio di U è denso in $\mathcal{H}$ e, in forza del teorema di estensione degli operatori continui, abbiamo che U è ben definito su tutto $\mathcal{H}$ ed è un'isometria. Ora, poiché $\mathcal{C}(\Pi)$ è denso in $L^2\left(\Pi, d\mu_\psi\right)$, U ha immagine densa, ma, essendo un'isometria, è suriettivo. In definitiva, U è un operatore unitario. Per concludere, abbiamo, se $f \in \mathcal{C}(\Pi)$,

$$UA_iU^{-1}f = UA_if(\mathbf{A})\psi = U(\lambda_i f)(\mathbf{A})\psi = \lambda_i f$$

cioè

$$\left(UA_iU^{-1}f\right)(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (\lambda_i f)(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \lambda_i f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

Per la continuità di UA_iU^{-1}, estendiamo il risultato ottenuto a tutte le $f \in L^2\left(\Pi, d\mu_\psi\right)$.

Generalizzazione

Ancora zornicando, decomponiamo $\mathcal{H}$ in sottospazi ortogonali in cui esiste un vettore ciclico, perciò, procedendo esattamente come nel caso di un solo operatore, troviamo

Teorema I.11 (rappresentazione spettrale congiunta)

Siano $A_1, \ldots, A_n$ n operatori limitati autoaggiunti commutanti sullo spazio di Hilbert separabile $\mathcal{H}$. Allora esistono uno spazio di misura finita (M, μ), n funzioni limitate misurabili F_i su M e una mappa unitaria $U : \mathcal{H} \to L^2(M, d\mu)$ di modo che

$$\left(UA_iU^{-1}f\right)(m) = F_i(m)\, f(m).$$

Teorema spettrale per operatori normali

Sia A un operatore normale limitato, cioè $A \in L(\mathcal{H})$ e $AA^* = A^*A$. Vogliamo vedere allora che $A = B + iC$ con B e C operatori autoaggiunti limitati e commutanti. Poniamo

$$\begin{aligned}(\psi, B\psi) &= \operatorname{Re}(\psi, A\psi)\\ (\psi, C\psi) &= \operatorname{Im}(\psi, A\psi)\end{aligned}$$

di modo che se B e C sono operatori lineari limitati ben definiti sono autoaggiunti perché ammettono solo valori medi reali.
Per vedere che B e C sono ben definiti, scriviamo

$$(\varphi, B\psi) \equiv \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{4\omega_i} \operatorname{Re}(\varphi + \omega_i\psi, A(\varphi + \omega_i\psi))$$

dove le ω_i sono le 4 radici dell'unità. Ci basta vedere, in base al teorema di Riesz, che la forma definita sopra è sesquilineare e limitata. Abbiamo

$$\begin{aligned}(\varphi, B\psi) &= \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{4\omega_i} \operatorname{Re}\left[(\varphi, A(\varphi + \omega_i\psi)) + \bar{\omega}_i(\psi, A(\varphi + \omega_i\psi))\right] =\\ &= \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{4\omega_i} \operatorname{Re}\left[(\varphi, A\varphi) + \omega_i(\varphi, A\psi) + \bar{\omega}_i(\psi, A\varphi) + (\psi, A\psi)\right] =\\ &= \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left[(\varphi, A\psi) + (\psi, A\varphi)\right] - \frac{i}{2}\operatorname{Re} i\left[(\varphi, A\psi) - (\psi, A\varphi)\right] =\\ &= \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left[(\varphi, A\psi) + (\psi, A\varphi)\right] + \frac{i}{2}\operatorname{Im}\left[(\varphi, A\psi) - (\psi, A\varphi)\right] =\\ &= \frac{1}{2}(\varphi, A\psi) + \frac{1}{2}(A\varphi, \psi)\end{aligned}$$

che è una forma limitata (in quanto A è limitato), lineare in ψ e antilineare in φ, come si voleva. perciò B è autoaggiunto e limitato. Stesso discorso per C. A questo punto

$$\begin{aligned}AA^* &= B^2 - iBC + iCB + C^2\\ A^*A &= B^2 - iCB + iBC + C^2\end{aligned}$$

ma essendo A normale,

$$[B, C] = (BC - CB) = -(BC - CB) = -[B, C] \Longrightarrow [B, C] = 0.$$

Per il teorema di rappresentazione spettrale congiunta, B e C si rappresentano come moltiplicatori su uno spazio di misura, e così anche $A = B + iC$. Concludiamo

Teorema I.12 (spettrale per operatori normali)

Sia A un operatore limitato normale sullo spazio di Hilbert separabile $\mathcal{H}$. Allora esistono uno spazio di misura finita (M, μ), una funzione limitata misurabile complessa F su M e una *mappa unitaria* $U : \mathcal{H} \to L^2(M, d\mu)$ *di modo che*

$$\left(UAU^{-1}f\right)(m) = F(m)\, f(m)\,.$$

Poiché gli operatori unitari sono normali e limitati, abbiamo che il teorema spettrale vale anche per **operatori unitari**.

I.3 Proprietà spettrali

I.3.1 Decomposizione di Lebesgue e classificazione dello spettro

Decomposizione di Lebesgue e sua interpretazione

Al termine del capitolo I del primo volume abbiamo dimostrato che ogni misura boreliana regolare sulla retta reale μ ammette la decomposizione seguente

$$\mu = \mu_{\text{pp}} + \mu_{\text{ac}} + \mu_{\text{s}}$$

dove μ_{pp} è una misura puntuale e $\mu_{\text{c}} = \mu_{\text{ac}} + \mu_{\text{s}}$ è una misura continua (rispetto ad essa ogni singolo punto ha misura nulla) tale che μ_{ac} è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue e μ_{s} è singolare rispetto alla misura di Lebesgue.

Concentrazione di una misura

Il significato della decomposizione di Lebesgue si comprende meglio introdotto il concetto di **concentrazione** di una misura. Data una misura μ, essa si dice concentrata su un insieme misurabile A se $\mu(Y) = 0$ per ogni misurabile Y contenuto in A^c. Se μ_1 e μ_2 sono ortogonali (o mutuamente singolari) allora esiste A tale che $\mu_1(A) = 0$ e $\mu_2(A^c) = 0$. Preso un qualsiasi misurabile $Y_1 \subset A$, si ha $\mu_1(Y_1) = 0$; viceversa, se $Y_2 \subset A^c$ è misurabile, allora $\mu_2(Y_2) = 0$. Ne segue che μ_1 è concentrata in A^c e μ_2 in A. In altre parole, due misure mutuamente singolari sono concentrate su insiemi disgiunti.
La misura puntuale μ_{pp} è concentrata sui punti di P (numerabile) definito da

$$P = \{x \,|\mu(\{x\}) \neq 0\}$$

laddove

$$\mu_{\text{c}}(P) = 0.$$

Ne deriva che le misure $\mu_{\text{pp}}, \mu_{\text{ac}}$ e μ_{s} sono concentrate su tre insiemi $A_{\text{pp}}, A_{\text{ac}}$ e A_{s} disgiunti.

Decomposizione di Lebesgue di $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$

Presa $f \in L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ consideriamo

$$\begin{aligned} f_{\text{pp}}(x) &\equiv f(x)\,\chi_{A_{\text{pp}}} \in L^2\left(\mathbb{R}, d\mu_{\text{pp}}\right) \\ f_{\text{ac}}(x) &\equiv f(x)\,\chi_{A_{\text{ac}}} \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_{\text{ac}}) \\ f_{\text{s}}(x) &\equiv f(x)\,\chi_{A_{\text{s}}} \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_{\text{s}}) \end{aligned}$$

chiaramente

$$f = f_{\text{pp}} + f_{\text{ac}} + f_{\text{s}}$$

e inoltre $f_{\text{pp}}, f_{\text{ac}}$ e f_{s} sono mutuamente ortogonali (nell'integrale che dà il prodotto scalare compaiono i prodotti di $\chi_{A_{\text{pp}}}, \chi_{A_{\text{ac}}}, \chi_{A_{\text{s}}}$ che danno 0). Abbiamo così dimostrato il seguente

Teorema I.13 *Se μ è una misura boreliana regolare su $\mathbb{R}$ e $\mu_{\text{pp}} + \mu_{\text{ac}} + \mu_{\text{s}}$ è la sua decomposizione di Lebesgue, allora*

$$L^2(\mathbb{R}, d\mu) = L^2\left(\mathbb{R}, d\mu_{\text{pp}}\right) \oplus L^2(\mathbb{R}, d\mu_{\text{ac}}) \oplus L^2(\mathbb{R}, d\mu_{\text{s}})$$

La decomposizione di Lebesgue (formulata nel teorema appena dimostrato) gioca un ruolo fondamentale nella classificazione spettrale di un operatore.

Definizione I.6 *Sia A un operatore autoaggiunto limitato sullo spazio di Hilbert separabile $\mathcal{H}$. Poniamo*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{pp}} &\equiv \left\{\psi \,\middle|\, \mu_\psi \text{ è una misura puramente puntuale}\right\}; \\ \mathcal{H}_{\text{ac}} &\equiv \left\{\psi \,\middle|\, \mu_\psi \text{ è una misura assolutamente continua}\right\}; \\ \mathcal{H}_{\text{s}} &\equiv \left\{\psi \,\middle|\, \mu_\psi \text{ è una misura continua singolare}\right\}. \end{aligned}$$

Decomposizione di Lebesgue e teorema spettrale

Se $\{\mu_i\}_{i\in J_N}$ (N eventualmente infinito) è una famiglia spettrale associata ad A, abbiamo che $\mathcal{H}$ è isomorfo (in senso hilbertiano) a

$$\bigoplus_{i=1}^{N} L^2(\mathbb{R}, d\mu_i) = \bigoplus_{i=1}^{N} L^2\left(\mathbb{R}, d\mu_{i,\mathrm{pp}}\right) \oplus \bigoplus_{i=1}^{N} L^2\left(\mathbb{R}, d\mu_{i,\mathrm{ac}}\right) \oplus \bigoplus_{i=1}^{N} L^2\left(\mathbb{R}, d\mu_{i,\mathrm{s}}\right)$$

Vogliamo mostrare che i tre addendi della decomposizione di sopra sono isomorfi ordinatamente a $\mathcal{H}_{\mathrm{pp}}$, $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}$ e $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$.
Il punto è che, da un lato

$$\mu_\psi(F) = (\psi, \chi_F(A)\psi) = \int_F d\mu_\psi$$

e dall'altro

$$\begin{aligned}
(\psi, \chi_F(A)\psi) &= \sum_{i=1}^{N} (\psi_i, \chi_F(A)\psi) = \sum_{i=1}^{N} \int_F |\psi_i(x)|^2 \, d\mu_i = \\
&= \sum_{i=1}^{N} \int_F |\psi_i(x)|^2 \, d\mu_{i,\mathrm{pp}} + \sum_{i=1}^{N} \int_F |\psi_i(x)|^2 \, d\mu_{i,\mathrm{ac}} + \sum_{i=1}^{N} \int_F |\psi_i(x)|^2 \, d\mu_{i,\mathrm{s}} = \\
&= \sum_{i=1}^{N} \int_F |\psi_i(x)|^2 \chi_{i,\mathrm{pp}} \, d\mu_i + \sum_{i=1}^{N} \int_F |\psi_i(x)|^2 \chi_{i,\mathrm{ac}} \, d\mu_i + \sum_{i=1}^{N} \int_F |\psi_i(x)|^2 \chi_{i,\mathrm{s}} \, d\mu_i
\end{aligned}$$

Ciascuno dei tre addendi associa ad ogni misurabile F un numero, in modo tale che (come è ovvio verificare) ciascuno dei tre addendi è una misura. Il primo addendo definisce una misura puntuale. Consideriamo la somma del secondo e del terzo addendo. Se F ha misura di Lebesgue nulla, allora il secondo addendo è nullo, perciò definisce una misura assolutamente continua rispetto a quella di Lebesgue. Il terzo addendo è una misura singolare. Consideriamo l'unione B degli B_i tali che $\mu_{i,\mathrm{s}}(B_i) = 0$ e $m(B_i^c) = 0$ (con m denotiamo la misura di Lebesgue), allora, su B il terzo addendo è nullo, come $m(B^c) = 0$ (tutto grazie al fatto che le ψ_i sono funzioni misurabili), perciò il terzo addendo costituisce una misura continua singolare.
Infine, se $j = 1, 2, 3$ indica i suffissi pp, ac e s

$$\mu_{\psi,j}(F) = \sum_{i=1}^{N} \int_F |\psi_i(x)|^2 \chi_{i,j} \, d\mu_{i,j}$$

Se $\psi \in \mathcal{H}_j$, allora, per ogni F, e per $J_3 \ni k \neq j$

$$0 = \sum_{i=1}^{N} \int_F |\psi_i(x)|^2 \chi_{i,k} \, d\mu_i \Longrightarrow 0 = \int_F |\psi_i(x)|^2 \chi_{i,k} \, d\mu_i$$

sicché, per ogni $i \in J_N$

$$\psi_i(x)\, \chi_{i,k} = 0$$

da cui l'immagine secondo l'isomorfismo spettrale U di ψ è un elemento in $\bigoplus L^2\left(\mathbb{R}, d\mu_{i,j}\right)$, ossia

$$U\mathcal{H}_j \subset \bigoplus_{i=1}^{N} L^2\left(\mathbb{R}, d\mu_{i,j}\right)$$

Ora, se mostriamo che $U\mathcal{H}_j$ è denso in $\bigoplus L^2\left(\mathbb{R}, d\mu_{i,j}\right)$, abbiamo l'eguaglianza nell'espressione di sopra e perciò la tesi. Si tratta di vedere che ogni $\psi(x) \in L^2\left(\mathbb{R}, d\mu_{i,j}\right)$ (i qualsiasi) è immagine di ψ in $\mathcal{H}_j$. Abbiamo

$$\mu_\psi(F) = (\psi, \chi_F(A)\psi) = \int_F |\psi(x)|^2 \, d\mu_i = \int_F |\psi(x)|^2 \, d\mu_{i,j}$$

Da cui μ_ψ è puntuale se $j = 1$, assolutamente continua se $j = 2$ e singolare continua se $j = 3$, come visto prima. In definitiva, $\psi \in \mathcal{H}_j$.
Abbiamo così dimostrato il seguente

Teorema I.14 *Dato un operatore autoaggiunto limitato A su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ esso induce la seguente* *decomposizione*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\rm pp} \oplus \mathcal{H}_{\rm ac} \oplus \mathcal{H}_{\rm s}$$

ciascuno dei tre sottospazi è A-invariante. $A|_{\mathcal{H}_{\rm pp}}$ *ha un set completo di autovettori;* $A|_{\mathcal{H}_{\rm ac}}$ *ha misure spettrali tutte assolutamente continue;* $A|_{\mathcal{H}_{\rm s}}$ *ha misure spettrali tutte singolari continue.*

Dimostrazione La prima parte dell'asserto è stata dimostrata sopra. Il fatto che i tre sottospazi siano A-invarianti si legge, via l'operatore unitario U, in rappresentazione spettrale. Che $A|_{\mathcal{H}_{\rm pp,ac,s}}$ abbia misure spettrali tutte puramente puntuali, assolutamente continue o singolari discende direttamente dalle definizioni. Per quanto riguarda $A|_{\mathcal{H}_{\rm pp}}$, ogni elemento di $L^2\left(\mathbb{R}, d\mu_{i,\rm pp}\right)$ si scrive come

$$\sum_{x\in P_i} f\left(x\right) \frac{\chi_{\{x\}}}{\mu_{i,\rm pp}^{1/2}\left(\{x\}\right)}$$

con $\{f\left(x\right)\}_{x\in P} \in \ell^2$. Ne viene che $\chi_{\{x\}}/\mu_{i,\rm pp}^{1/2}\left(\{x\}\right)$ è un s.o.n.c. di $L^2\left(\mathbb{R}, d\mu_{i,\rm pp}\right)$, poiché è anche un insieme di autovettori all'autovalore x per l'operatore di moltiplicazione per x, si conclude la tesi modulo il teorema spettrale. **(c.v.d.)**

A questo punto introduciamo una nuova decomposizione dello spettro usando quanto dimostrato fin qui

Definizione I.7 *Sia A un operatore limitato autoaggiunto su $\mathcal{H}$, allora definiamo*

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rm pp}\left(A\right) &\equiv \{\lambda\,|\lambda \text{ autovalore di } A\}\,;\\
\sigma_{\rm c}^{'}\left(A\right) &\equiv \sigma\left(A|_{\mathcal{H}_{\rm ac}\oplus\mathcal{H}_{\rm s}}\right);\\
\sigma_{\rm ac}\left(A\right) &\equiv \sigma\left(A|_{\mathcal{H}_{\rm ac}}\right);\\
\sigma_{\rm s}\left(A\right) &\equiv \sigma\left(A|_{\mathcal{H}_{\rm s}}\right);
\end{aligned}$$

gli insiemi introdotti si dicono, rispettivamente, **spettro puramente puntuale**, **continuo**[2], **assolutamente continuo**, **singolare** *(o singolare continuo).*

Alcuni autori preferiscono definire $\sigma_{\rm pp}$ come lo spettro della restrizione di A ad $\mathcal{H}_{\rm pp}$, in quel caso l'unione di $\sigma_{\rm pp}$, $\sigma_{\rm ac}$ e $\sigma_{\rm s}$ porta a σ. Si noti che gli insiemi non sono necessariamente disgiunti e che $\sigma_{\rm s}$ non ha necessariamente misura di Lebesgue nulla. In ogni caso, risulta

Proposizione I.8 *Per A autoaggiunto limitato valgono i seguenti fatti*

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rm c}'\left(A\right) &= \sigma_{\rm ac}\left(A\right) \cup \sigma_{\rm s}\left(A\right)\\
\sigma\left(A\right) &= \sigma_{\rm pc}^{a}\left(A\right) \cup \sigma_{\rm c}'\left(A\right)
\end{aligned}$$

Prima di dimostrare la proposizione conviene vedere il seguente semplice

Lemma I.6 *Sia A un operatore limitato su $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ con $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ A-invarianti. Allora*

$$\sigma\left(A\right) = \sigma\left(A|_{\mathcal{H}_1}\right) \cup \sigma\left(A|_{\mathcal{H}_2}\right)$$

Dimostrazione La tesi vale se e solo se

$$\rho\left(A\right) = \rho\left(A|_{\mathcal{H}_1}\right) \cap \rho\left(A|_{\mathcal{H}_2}\right)$$

Sia $\lambda \in \rho\left(A\right)$, allora $A - \lambda$ è un operatore biunivoco. Ne viene che, per $i \in J_2$,

$$\begin{aligned}
\ker\left(A-\lambda\right)|_{\mathcal{H}_i} &= \{0\}\\
\left(A-\lambda\right)|_{\mathcal{H}_i} &\subset \mathcal{H}_i
\end{aligned}$$

[2] d'ora in poi, salvo avviso contrario, con spettro continuo intenderemo sempre $\sigma_{\rm c}'$, anziché il già introdotto $\sigma_{\rm c}$.

perciò se mostriamo che nella seconda espressione vale l'eguaglianza, abbiamo che $\lambda \in \rho\left(A|_{\mathcal{H}_i}\right)$. Prendiamo (è indifferente) $i = 1$. Sia $v \in \mathcal{H}_1$, allora esiste $w = w_1 + w_2$ tale che

$$(A - \lambda)\, w = v$$

dunque

$$v = (A - \lambda)\, w_1 + (A - \lambda)\, w_2$$

e siccome $v \in \mathcal{H}_1$, $(A - \lambda)\, w_i \in \mathcal{H}_i$, si conclude $w_2 \in \ker(A - \lambda)$, cioè $w_2 = 0$.

Abbiamo allora

$$\rho(A) \subset \rho\left(A|_{\mathcal{H}_1}\right) \cap \rho\left(A|_{\mathcal{H}_2}\right).$$

Mostriamo il viceversa. Sia $\lambda \in \rho\left(A|_{\mathcal{H}_1}\right) \cap \rho\left(A|_{\mathcal{H}_2}\right)$. Ora, se fosse

$$(A - \lambda)(v_1 + v_2) = 0$$

allora

$$(A - \lambda)\, v_1 = -(A - \lambda)\, v_2$$

cioè

$$(A - \lambda)\, v_i \in \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2,$$

ossia

$$(A - \lambda)|_{\mathcal{H}_i}\, v_i = 0 \Longrightarrow v_i = 0$$

Dunque, $A - \lambda$ è iniettivo. Vediamo la biunivocità. Dato $w \in \mathcal{H}$ allora $w = w_1 + w_2$, con $w_i \in \mathcal{H}_i$, sicché esistono $v_i \in \mathcal{H}_i$ controimmagini secondo $A - \lambda$ di w_i, cioè

$$(A - \lambda)(v_1 + v_2) = w_1 + w_2 = w,$$

(c.v.d.) la tesi.

Dimostrazione della proposizione La prima parte è dimostrata direttamente dal lemma. Per la seconda, si tratta di vedere che

$$\sigma_{\mathrm{pp}}^a(A) = \sigma\left(A|_{\mathcal{H}_{\mathrm{pp}}}\right)$$

ossia, bisogna dimostrare che se B è un operatore autoaggiunto che ammette una base ortonormale di autovettori, allora il suo spettro è la chiusura dell'insieme dei suoi autovalori:

$$\sigma(B) = \sigma_{\mathrm{pp}}^a(B)$$

Poiché $\sigma(B)$ è chiuso e $\sigma_{\mathrm{pp}}(B) \subset \sigma(B)$, abbiamo immediatamente

$$\sigma_{\mathrm{pp}}^a(B) \subset \sigma(B)$$

Sia ora $\lambda \in \sigma(B) \setminus \sigma_{\mathrm{pp}}(B)$, allora $B - \lambda$ è iniettivo ma ha immagine densa in $\mathcal{H}$. Sia $\{e_n\}$ la base ortonormale di autovettori di B, $Be_n = \lambda_n e_n$. Poiché, per ogni $x \in \mathcal{H}$,

$$(B - \lambda)\, x = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda)(e_n, x)\, e_n$$

abbiamo che $w \in R(B - \lambda)$ se e solo se troviamo $x \in \mathcal{H}$

$$(e_n, w) = (\lambda_n - \lambda)(e_n, x)$$

cioè se e solo se

$$\left\{\frac{(e_n, w)}{\lambda_n - \lambda}\right\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2.$$

Ora, ammettiamo che $R(B - \lambda) \neq \mathcal{H}$, $\lambda_n \neq \lambda$ per ogni n, ma che $\lambda \notin \sigma_{\mathrm{pp}}^a(B)$. Allora esiste un $\varepsilon_0 > 0$ tale che

$$|\lambda_n - \lambda| > \varepsilon_0$$

per cui, per ogni $w \in \mathcal{H}$

$$\left|\frac{(e_n, w)}{\lambda_n - \lambda}\right|^2 < \frac{1}{\varepsilon_0^2} \left|(e_n, w)\right|^2 \in \ell^1,$$

(c.v.d.) cioè $R(B - \lambda) = \mathcal{H}$, contro l'ipotesi.

I.3.2 Proiettori spettrali e spettro. Spettro discreto ed essenziale

Le proiezioni spettrali costituiscono uno strumento interessante nello studio dello spettro di un operatore. Se A è un operatore limitato autoaggiunto ed E_A è la sua famiglia spettrale, abbiamo

Proposizione I.9 $\lambda \in \sigma(A)$ *se e solo se* $E_A(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) \neq 0$ *per qualunque* $\varepsilon > 0$.

Dimostrazione Ammettiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ sia $E_A(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) \neq 0$. Esiste allora $\psi \neq 0$ nel range del proiettore detto. Dunque,

$$\|(A - \lambda)\psi\| = \|(A - \lambda) E_A(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)\psi\| = \left(\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} |x|^2 \, d\mu_\psi(x)\right)^{1/2} \leq \varepsilon \|\psi\|$$

Questo significa che se $(A - \lambda)$ ha inverso, esso non è limitato: per ogni $M > 0$ esiste ϕ talché

$$\left\|(A - \lambda)^{-1} \phi\right\| \geq M \|\phi\|.$$

Ne abbiamo che $\lambda \in \sigma(A)$.

Viceversa, se esiste un $\varepsilon > 0$ talché il proiettore $E_A(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) = 0$, introduciamo la funzione g da $\sigma(A)$ in $\mathbb{R}$ data da

$$g(\lambda') \equiv \begin{cases} 0, & \lambda' \in B(\lambda, \varepsilon) \\ 1/(\lambda' - \lambda), & \lambda' \notin B(\lambda, \varepsilon) \end{cases}$$

g è chiaramente boreliana, inoltre

$$\sup |g| \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

per cui g è pure limitata. Possiamo considerare $g(A)$ e otteniamo, in rappresentazione spettrale,

$$(A - \lambda) g(A) \mapsto \begin{cases} 0, & \lambda' \in B(\lambda, \varepsilon) \\ 1, & \lambda' \notin B(\lambda, \varepsilon) \end{cases} = \chi_{\sigma(A) \setminus B(\lambda, \varepsilon)}(\lambda')$$

cioè

$$(A - \lambda) g(A) = E_A(\sigma(A) \setminus B(\lambda, \varepsilon))$$

Ora, per le proprietà di una misura a valori proiettori,

$$\mathbb{I} = E_A(\sigma(A) \setminus B(\lambda, \varepsilon)) + E_A(B(\lambda, \varepsilon)) = E_A(\sigma(A) \setminus B(\lambda, \varepsilon))$$

cioè

$$(A - \lambda) g(A) = \mathbb{I}$$

(c.v.d.) da cui $\lambda \notin \sigma(A)$.

Occupiamoci adesso degli autovalori

Teorema I.15 *Sia A un operatore autoaggiunto limitato, allora valgono i seguenti fatti*

(i) *se $\lambda \in \sigma(A)$ è un punto isolato, allora è un autovalore di A;*

(ii) *$\lambda \in \sigma(A)$ è un autovalore di A se e solo se $E_A(\{\lambda\}) \neq 0$;*

(iii) *se λ è un autovalore di A, allora $E_A(\{\lambda\})$ è il proiettore sull'autospazio $E(\lambda, A)$ relativo a λ.*

Dimostrazione Sia $\lambda \in \sigma(A)$ isolato, allora esiste $\varepsilon > 0$ per cui

$$(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon) \cap \sigma(A) = \{\lambda\},$$

allora

$$0 \neq E_A(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon) = E_A(\{\lambda\})$$

perciò esiste $\psi \in \mathcal{H}$ normalizzato talché

$$E_A(\{\lambda\})\,\psi = \psi$$

Calcoliamo $AE_A(\{\lambda\})\,\psi$ in rappresentazione spettrale, troviamo

$$AE_A(\{\lambda\})\,\psi \mapsto x\chi_{\{\lambda\}}1 = \lambda\chi_{\{\lambda\}}1 \in L^2\left(\sigma(A), d\mu_\psi\right),$$

da cui,

$$A\psi = AE_A(\{\lambda\})\,\psi = \lambda E_A(\{\lambda\})\,\psi = \lambda\psi. \tag{I.5}$$

Questo dimostra (i).

Ammettiamo ora che $E_A(\{\lambda\})$ sia diverso da 0. Abbiamo appena visto che questo implica che λ è un autovalore di A. Inoltre dalla (I.5) abbiamo che

$$R(E_A(\{\lambda\})) \subset E(\lambda, A)$$

Resta da vedere il viceversa per dimostrare (iii).

Sia $P_A(\lambda)$ il proiettore su $E(\lambda, A)$, allora, grazie alla relazione appena ottenuta,

$$P_A(\lambda)\,E_A(\{\lambda\}) = E_A(\{\lambda\})\,P_A(\lambda) = E_A(\{\lambda\}).$$

Per ogni $\psi \in \mathcal{H}$, abbiamo

$$AP_A(\lambda)\,\psi = \lambda P_A(\lambda)\,\psi$$

da cui

$$0 = \|(A-\lambda)\,P_A(\lambda)\,\psi\|^2 = \int_{\sigma(A)} |x-\lambda|^2 \, d\mu_{P_A(\lambda)\psi}$$

Poniamo, per $n \in \mathbb{N}^\times$,

$$f_n(x) \equiv \begin{cases} 1, & |x-\lambda| \geq 1 \\ |x-\lambda|^{1/n} & |x-\lambda| < 1 \end{cases}$$

abbiamo, per ogni ψ,

$$f_n(A)\,P_A(\lambda)\,\psi = f_n(\lambda)\,P_A(\lambda)\,\psi = 0$$

sicché, per ogni n,

$$0 = \|f_n(A)\,P_A(\lambda)\,\psi\|^2 = \int_{\sigma(A)} |f_n|^2 \, d\mu_{P_A(\lambda)\psi}$$

Poiché f_n converge puntualmente dominatamente a $\chi_{\sigma(A)\setminus\{\lambda\}}$, abbiamo

$$0 = \int_{\sigma(A)} \chi_{\sigma(A)\setminus\{\lambda\}} \, d\mu_{P_A(\lambda)\psi}$$

sicché, per ogni ψ,

$$0 = (P_A(\lambda)\,\psi, (\mathbb{I} - E_A(\{\lambda\}))\,P_A(\lambda)\,\psi)$$

cioè

$$P_A(\lambda) = P_A(\lambda)\,E_A(\{\lambda\})\,P_A(\lambda)$$

e, dunque, se λ è un autovalore $E_A(\{\lambda\}) \neq 0$ (altrimenti $P_A(\lambda) = 0$), la qual cosa completa la dimostrazione di (ii). Torniamo ad occuparci di (iii). Poiché, come abbiamo visto sopra ipotizzando che $E_A(\{\lambda\}) \neq 0$,

$$P_A(\lambda)\,E_A(\{\lambda\}) = E_A(\{\lambda\})\,P_A(\lambda) = E_A(\{\lambda\})$$

concludiamo

$$P_A(\lambda) = E_A(\{\lambda\})\,P_A(\lambda) = P_A(\lambda)\,E_A(\{\lambda\}),$$

da cui

$$R(P_A(\lambda)) = E(\lambda, A) \subset R(E_A(\{\lambda\})),$$

(c.v.d.) la tesi.

I risultati ottenuti suggeriscono l'introduzione di una nuova suddivisione dello spettro

Definizione I.8 *Diciamo che $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$,* **spettro essenziale** *di A, se e solo se $E_A(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)$ è infinito dimensionale per ogni $\varepsilon > 0$. Il complemento in $\sigma(A)$ di $\sigma_{\mathrm{ess}}(A)$, $\sigma_{\mathrm{disc}}(A)$, si dice* **spettro discreto** *di A.*

Dalla definizione, $\lambda \in \sigma_{\mathrm{disc}}(A)$ se e solo se esiste un $\varepsilon > 0$ per cui $E_A(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)$ è finito dimensionale. Vediamo alcuni risultati circa la decomposizione in spettro discreto ed essenziale:

Teorema I.16 *Lo spettro essenziale è chiuso.*

Dimostrazione Sia $\{\lambda_n\} \subset \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$ una successione convergente a λ. Dunque, ogni intervallo I contenente λ contiene un intorno J centrato su un qualche λ_n, dunque

$$R(E_A(I)) \supset R(E_A(J))$$

(c.v.d.) con $\dim R(E_A(J)) = +\infty$, da cui la tesi.

Teorema I.17 *$\lambda \in \sigma_{\mathrm{disc}}(A)$ se e solo se è un punto isolato di A ed è un autovalore di A con degenerazione finita.*

Dimostrazione Se λ è un punto isolato di $\sigma(A)$ allora esso è un autovalore di A come abbiamo dimostrato sopra. Abbiamo che esiste $\varepsilon > 0$ per cui

$$E_A(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon) = E_A(\{\lambda\})$$

e $E_A(\{\lambda\})$ è il proiettore sull'autospazio $E(\lambda, A)$. Dunque, se λ è un autovalore di
(c.v.d.) degenerazione finita, $E_A(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)$ è finito dimensionale e abbiamo la tesi.

In altri termini, il teorema asserisce che $\sigma_{\mathrm{disc}}(A)$ è contenuto nell'insieme degli autovalori di A che hanno degenerazione finita.

Teorema I.18 *$\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$ se e solo se vale almeno una delle seguenti affermazioni*

(i) *$\lambda \in \sigma_{\mathrm{ac}}(A) \cup \sigma_{\mathrm{s}}(A)$;*

(ii) *λ è un punto limite di $\sigma_{\mathrm{pp}}(A)$;*

(iii) *λ è un autovalore con degenerazione infinita.*

Dimostrazione Se vale (ii), allora λ non è un punto isolato dello spettro, perciò non può appartenere allo spettro discreto e dunque è in quello essenziale. Discorso analogo se vale la (iii).

Vediamo che succede se vale (i). Vogliamo mostrare che λ non è isolato e con ciò non può appartenere a $\sigma_{\mathrm{disc}}(A)$. Ammettiamo che $\lambda \in \sigma_{\mathrm{c}}'(A)$ sia un punto isolato dello spettro. Poiché λ non è un autovalore, abbiamo

$$E_A(\{\lambda\}) = 0,$$

d'altra parte esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B(\lambda, \varepsilon) \cap \sigma(A) = \{\lambda\}$, perciò

$$E_A(B(\lambda, \varepsilon)) = E_A(\{\lambda\}) = 0$$

ossia $\lambda \notin \sigma(A)$ contro l'ipotesi.

Il viceversa dice che se $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}$, allora valgono (i) o (ii) o (iii). Dimostriamo la contronominale: se non valgono né (i), né (ii), né (iii), allora $\lambda \in \sigma_{\mathrm{disc}}$. In altre parole, l'ipotesi è che (i′), $\lambda \notin \sigma'_{\mathrm{c}}(A)$, **e** $\left(\mathrm{ii}'\right)$ λ sia un punto isolato di $\sigma_{\mathrm{pp}}(A)$, **e** $\left(\mathrm{iii}'\right)$ λ non sia un autovalore con degenerazione infinita.

Da (i′) abbiamo che $\lambda \in \sigma^{a}_{\mathrm{pp}}(A)$, ma da $\left(\mathrm{ii}'\right)$ abbiamo che esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $\lambda \neq \lambda' \in \sigma_{\mathrm{pp}}(A)$, vale

$$\left|\lambda - \lambda'\right| > \varepsilon$$

sicché $\lambda \in \sigma_{\mathrm{pp}}(A)$. Poiché $\lambda \in \sigma(A)$ che è chiuso, esiste una successione $\{\lambda_n\} \subset \sigma(A)$ di modo che $\lambda_n \to \lambda$. Se ammettiamo che λ non sia isolato in $\sigma(A)$, grazie alla diseguaglianza di sopra, possiamo supporre che $\{\lambda_n\} \subset \sigma'_{\mathrm{c}}(A)$, ma siccome quest'ultimo insieme è chiuso, si ha $\lambda \in \sigma'_{\mathrm{c}}(A)$, contrariamente a (i′). Infine, λ è un punto isolato di $\sigma(A)$ e un autovalore con degenerazione finita, in forza di $\left(\mathrm{iii}'\right)$. Perciò $\lambda \in \sigma_{\mathrm{disc}}(A)$. **(c.v.d.)**

L'ultimo risultato è il

Teorema I.19 (criterio di Weyl) *Sia A un operatore limitato autoaggiunto.*

(i) $\lambda \in \sigma(A)$ *se e solo se esiste una successione di vettori normalizzati $\psi_n \in \mathcal{H}$, tale che*

$$\lim_{n\to\infty} \left\|(A-\lambda)\psi_n\right\| = 0.$$

(ii) $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$ *se e solo se la successione di sopra forma un set ortonormale.*

Dimostrazione La prima parte è molto facile. Per ogni $\varepsilon > 0$, $E_A(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon) \neq 0$, perciò posto $\varepsilon \equiv 1/n$, $n \in \mathbb{N}^{\times}$, troviamo per ogni n un vettore ψ_n normalizzato nel range di $E_A(\lambda - 1/n, \lambda + 1/n)$, per cui

$$\left\|(A-\lambda)\psi_n\right\| = \left\|(A-\lambda)E_A(\lambda-1/n,\lambda+1/n)\psi_n\right\| = \left(\int_{-1/n}^{+1/n} |x|^2 \, d\mu_\psi(x)\right)^{1/2} \leq \frac{2}{n^{3/2}} \to 0$$

Vediamo il viceversa. Ammettiamo che $(A-\lambda)$ sia invertibile e consideriamo la successione $\zeta_n \equiv (A-\lambda)\psi_n \in R(A-\lambda)$. Poiché $(A-\lambda)^{-1}$ è continuo e $\zeta_n \to 0$, abbiamo $\psi_n \to 0$, la qual cosa è assurda, perché gli ψ_n sono normalizzati.

Sia ora $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$, nel costruire la successione degli ψ_n di cui sopra, curiamoci sempre di scegliere ψ_{n+1} ortogonale a $\psi_1, \ldots, \psi_n$ la qualcosa è possibile perché i range dei proiettori sono infinito-dimensionali.

Per quanto riguarda il viceversa, conviene provare la contronominale. Se $\lambda \in \sigma_{\mathrm{disc}}(A)$, allora per ogni s.o.n. $\{e_n\}$ esistono una sottosuccessione, mappata da k_n, e un $\varepsilon > 0$ per cui $\left\|(A-\lambda)e_{k_n}\right\| > \varepsilon$, per ogni n.

Visto che $\lambda \in \sigma_{\mathrm{disc}}(A)$ esso è un punto isolato dello spettro ed un autovalore con degenerazione finita. Scomponiamo ogni vettore del s.o.n. come $e_n = e'_n + e''_n$, con $e'_n \in \ker(A-\lambda)$ ed $e''_n \in \ker^{\perp}(A-\lambda)$. Poiché $\{e'_n\}$ è una successione limitata appartenente a un chiuso di dimensione finita, essa ammette una sottosuccessione convergente. Se k_n è la mappa di tale sottosuccessione, abbiamo che e''_{k_n} non converge, altrimenti e_{k_n}, che è un s.o.n., avrebbe limite forte. Passando eventualmente a una ulteriore sottosuccessione, che diremo ancora mappata da k_n, abbiamo che esiste $\varepsilon'' > 0$

$$\left\|e''_{k_n}\right\| > \varepsilon'' \ \forall n.$$

Ora, ciascun e''_{k_n} è autovettore del proiettore $\mathbb{I} - E_A(\{\lambda\}) = E_A(\sigma(A)\setminus\{\lambda\})$, perciò

$$\begin{aligned}
\left\|(A-\lambda)e''_{k_n}\right\| &= \left\|(A-\lambda)E_A(\sigma(A)\setminus\{\lambda\})e''_{k_n}\right\| = \left(\int_{\sigma(A)\setminus\{\lambda\}} |x-\lambda|^2 \, d\mu_{e''_{k_n}}(x)\right)^{1/2} \geq \\
&\geq d(\lambda, \sigma(A)\setminus\{\lambda\})\left\|e''_{k_n}\right\| > d(\lambda,\sigma(A)\setminus\{\lambda\})\,\varepsilon'' \equiv \varepsilon
\end{aligned}$$

dove si è usata l'ipotesi che λ fosse un punto isolato di $\sigma(A)$. Dunque,

$$\left\|(A-\lambda)e_{k_n}\right\| = \left\|(A-\lambda)e_{k''_n}\right\| > \varepsilon$$

come volevamo. **(c.v.d.)**

I.4 Il teorema spettrale per gli operatori illimitati

In questa sezione ci occupiamo dell'estensione dei concetti della teoria spettrale agli operatori illimitati densamente definiti. Come vedremo tale estensione sarà soltanto un fatto tecnico. Le idee della teoria spettrale sono state tutte esposte nello studio del caso limitato.

I.4.1 Spettro di operatori illimitati

Lo spettro di un operatore si definisce solo se questo è chiudibile.

Definizione I.9 *Sia T un operatore chiuso su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Un complesso λ appartiene all'***insieme risolvente** *di T, $\rho(T)$, se e solo se $T-\lambda\mathbb{I}$ è una biiezione di $D(T)$ in $\mathcal{H}$ con inversa limitata. Se $\lambda \in \rho(T)$ si definisce* **risolvente** *l'operatore $R_\lambda(T) \equiv (T-\lambda\mathbb{I})^{-1}$.*

L'insieme risolvente di un operatore chiudibile T, si definisce banalmente come $\rho\left(\bar{T}\right)$. Come nel caso limitato, definiamo lo **spettro** di T come $\sigma(T) \equiv \rho^c(T)$. Definizioni analoghe al caso limitato per lo spettro residuo e per lo spettro puntuale.
Notiamo che dal teorema del grafico chiuso si conclude che se $T-\lambda\mathbb{I}$ è una biiezione di $D(T)$ su $\mathcal{H}$, allora automaticamente $R_T(\lambda)$ è un operatore limitato (infatti $(\lambda-T)^{-1}$ è ben definito su $R(\lambda-T)=\mathcal{H}$ perché $T-\lambda\mathbb{I}$ è iniettivo, inoltre è chiuso, perciò, dal teorema del grafico chiuso, continuo).
Proprio come nel caso limitato (la dimostrazione è identica), si ottiene

Teorema I.20 *Sia T un operatore chiuso densamente definito. Allora $\rho(T)$ è un sottoinsieme aperto del piano complesso sul quale il risolvente $R_T(\lambda)$ è una funzione analitica. Inoltre,*

$$R_T\left(\lambda'\right)-R_T(\lambda)=\left(\lambda-\lambda'\right)R_T(\lambda)\,R_T\left(\lambda'\right).$$

I.4.2 Il teorema spettrale per gli operatori autoaggiunti

Visto che ci occuperemo d'ora in poi solo di operatori autoaggiunti, per comodità del lettore, riportiamo qui il risultato fondamentale che avevamo ottenuto in merito nel capitolo III del primo volume:

Teorema I.21 *Sia $T \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$ un operatore simmetrico.*

(i) *Sono equivalenti le seguenti affermazioni*

- (a) *T è autoaggiunto;*
- (b) *$D(T^*) \subset D(T)$;*
- (c) *T è chiuso e $\ker(T^* \pm i\mathbb{I})=\{0\}$;*
- (d) *$R(T \pm i\mathbb{I})=\mathcal{H}$.*

(ii) *Sono equivalenti le seguenti affermazioni*

- (a) *T è essenzialmente autoaggiunto;*
- (b) *$D(T^*) \subset D\left(\bar{T}\right)$;*
- (c) *$\ker(T^* \pm i\mathbb{I})=\{0\}$;*
- (d) *$R(T \pm i\mathbb{I})$ è denso in $\mathcal{H}$.*

Veniamo ad alcune semplici proprietà dello spettro di un operatore autoaggiunto.

Proposizione I.10 *Un operatore autoaggiunto ha spettro residuo vuoto.*

Dimostrazione Consideriamo i $\lambda \in \mathbb{C}$ tali che $A-\lambda\mathbb{I}$ è iniettivo, ma non suriettivo, cioè $\lambda \in \sigma(A)\setminus\sigma_{\mathrm{p}}(A)$. Se A è autoaggiunto, allora l'immagine di $A-\lambda\mathbb{I}$ deve essere densa. Infatti,

$$R(A-\lambda\mathbb{I})^\perp=\ker\left(A-\bar{\lambda}\mathbb{I}\right)=\{0\}$$

L'ultima eguaglianza sussiste perché, altrimenti, $\bar{\lambda}$ sarebbe autovalore di A, cioè esisterebbe $\psi \in D(A)$ per cui

$$\begin{aligned} 0 &= \left\|\left(A-\bar{\lambda}\right)\psi\right\|^2 = \left(\psi, (A-\lambda)\left(A-\bar{\lambda}\right)\psi\right) = \left(\psi, \left(A-\bar{\lambda}\right)(A-\lambda)\psi\right) = \\ &= ((A-\lambda)\psi, (A-\lambda)\psi) = \|(A-\lambda)\psi\|^2 = 0 \end{aligned}$$

(c.v.d.) sicché avremmo $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A)$, contro l'ipotesi.

Proposizione I.11 *Lo spettro di un operatore autoaggiunto è contenuto in $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione Sia λ un numero non reale. Allora $(A-\lambda\mathbb{I})$ ha nucleo banale (cioè λ non è un autovalore), infatti se esistesse $D(A) \ni x \neq 0$ tale che $Ax = \lambda x$, allora $\lambda(x,x) = (x, Ax) = (Ax, x) = \bar{\lambda}(x,x)$, da cui $\lambda \in \mathbb{R}$, assurdo. L'immagine di $A-\lambda\mathbb{I}$ è densa, infatti

$$R^{\perp}(A-\lambda\mathbb{I}) = \ker\left(A^* - \bar{\lambda}\mathbb{I}\right) = \ker\left(A-\bar{\lambda}\mathbb{I}\right) = \{0\}.$$

Vediamo che $(A-\lambda\mathbb{I})^{-1}$ definito sul denso $R(A-\lambda\mathbb{I})$ è limitato. Posto $\lambda \equiv \alpha + i\beta$, abbiamo, se $x \in D(A)$,

$$\begin{aligned} \|(A-\lambda\mathbb{I})x\|^2 &= ((A-\alpha-i\beta)x, (A-\alpha-i\beta)x) = \|(A-\alpha\mathbb{I})x\|^2 + \\ &\quad + i\beta(x, (A-\alpha\mathbb{I})x) - i\beta((A-\alpha\mathbb{I})x, x) + \|\beta x\|^2 \\ &= \|(A-\alpha\mathbb{I})x\|^2 + \|\beta x\|^2 \geq \beta^2\|x\|^2 \end{aligned}$$

perciò, per ogni $z \in R(A-\lambda\mathbb{I})$

$$\|(A-\lambda\mathbb{I})x\| \geq \beta\|x\| \Longrightarrow \|z\| \geq \beta\left\|(A-\lambda\mathbb{I})^{-1}z\right\|$$

cioè

$$\left\|(A-\lambda\mathbb{I})^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\beta}$$

Ne viene che, essendo $(A-\lambda\mathbb{I})^{-1}$ limitato su un dominio denso, la sua chiusura avrà dominio $\mathcal{H}$, ma $(A-\lambda\mathbb{I})^{-1}$ è chiuso perché tale è $A-\lambda\mathbb{I}$, dunque

$$\begin{aligned} \overline{(A-\lambda\mathbb{I})^{-1}} &= (A-\lambda\mathbb{I})^{-1} \\ \mathcal{H} = D\left(\overline{(A-\lambda\mathbb{I})^{-1}}\right) &= D\left((A-\lambda\mathbb{I})^{-1}\right) = R(A-\lambda\mathbb{I}) \end{aligned}$$

Si ha dunque che $(A-\lambda\mathbb{I})$ è una biiezione di $\mathcal{H}$ in sé ed ammette inverso limitato, perciò
(c.v.d.) $\lambda \in \rho(A)$.

Fatte queste semplici considerazioni, siamo già in grado di dimostrare il

Teorema I.22 (spettrale) *Sia A un operatore autoaggiunto su uno spazio di Hilbert separabile $\mathcal{H}$ con dominio $D(A)$. Allora esistono uno spazio di misura finita (M,μ), un operatore unitario $U : \mathcal{H} \to L^2(M,\mu)$, una funzione F a valori reali finita μ-quasi ovunque di modo che*

(i) *$\psi \in D(A)$ se e solo se $F(m)(U\psi)(m) \in L^2(M,\mu)$;*

(ii) *se $\varphi \in UD(A)$, allora*

$$\left(UAU^{-1}\varphi\right)(m) = F(m)\varphi(m).$$

Dimostrazione Poiché A è autoaggiunto, $A \pm i$ ha inverso limitato definito su $\mathcal{H}$. Poiché $(A \pm i)^{-1} = R_{\pm i}(A)$ abbiamo che $(A+i)^{-1}$ e $(A-i)^{-1}$ commutano. L'eguaglianza

$$\begin{aligned} \left((A-i)\psi, (A+i)^{-1}(A+i)\zeta\right) &= \left(\psi, (A+i)(A+i)^{-1}(A+i)\zeta\right) \\ &= \left((A-i)^{-1}(A-i)\psi, (A+i)\zeta\right) \end{aligned}$$

unita al fatto che $R(A \pm i) = \mathcal{H}$, mostra che

$$(A - i)^{-1} = \left[(A + i)^{-1}\right]^*$$

di modo che $(A + i)^{-1}$ viene a essere un operatore normale.

Usando il teorema spettrale per gli operatori normali limitati, abbiamo che esistono uno spazio di misura finita (M, μ) un operatore unitario $U : \mathcal{H} \to L^2(M, \mu)$ e una funzione misurabile complessa e limitata $g(m)$ di modo che, per ogni $\varphi(m) \in L^2(M, \mu)$,

$$\left[U (A + i)^{-1} U^{-1}\varphi\right](m) = g(m)\,\varphi(m)$$

Poiché il kernel di $(A + i)^{-1}$ è banale, $g(m) \neq 0$ quasi ovunque, perciò la funzione

$$F(m) = \frac{1}{g(m)} - i$$

è quasi ovunque finita.

Ora, supponiamo che $\psi \in D(A)$, allora esiste ζ di modo che

$$\psi = (A + i)^{-1}\zeta$$

sicché

$$U\psi = U (A + i)^{-1} U^{-1}U\zeta = gU\zeta$$

poiché Fg è essenzialmente limitata, abbiamo $FU\psi = FgU\zeta \in L^2(M, \mu)$.

Viceversa, se $FU\psi \in L^2(M, \mu)$, allora esiste $\zeta \in \mathcal{H}$ di modo che

$$U\zeta = (F + i)\,U\psi,$$

perciò

$$gU\zeta = U\psi$$

di modo che

$$(A + i)^{-1}\zeta = \psi \Longrightarrow \psi \in R(A + i)^{-1} = D(A).$$

Proviamo (ii). Se $\psi \in D(A)$, allora esiste $\zeta \in \mathcal{H}$ talché $(A + i)^{-1}\zeta = \psi$, sicché

$$\begin{aligned} U\psi &= U (A + i)^{-1} U^{-1}U\zeta = gU\zeta \\ U\zeta &= g^{-1}U\psi \end{aligned}$$

e

$$A\psi = \zeta - i\psi$$

perciò

$$UA\psi = U\zeta - iU\psi = \left(\frac{1}{g} - i\right)U\psi = FU\psi.$$

Non ci resta che mostrare che F è una funzione reale. Ma poiché il moltiplicatore per F è unitariamente equivalente ad A il quale è un operatore autoaggiunto, si conclude che F deve
(c.v.d.) essere reale (come dimostrato nel capitolo V del primo volume).

Calcolo funzionale operatoriale

A questo punto, andiamo a costurire il calcolo funzionale. Chiaramente ci serviremo dell'operatore unitario U che implementa l'isomorfismo tra $L^2(M, \mu)$ e $\mathcal{H}$. Per ogni $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, porremo

$$f(A)\,\psi \equiv U^{-1} f(F(m))\,U\psi.$$

Teorema I.23 (calcolo operatoriale)

Sia A un operatore autoaggiunto sullo spazio seprabile $\mathcal{H}$. Allora esiste un'unica mappa ϕ dalle funzioni boreliane limitate sulla retta reale in $L(\mathcal{H})$ di modo che

(i) *ϕ è uno *-omomorfismo;*

(ii) *ϕ è continuo in norma*

$$\|\phi(f)\| \leq \sup|f|;$$

(iii) *se* $\{f_n\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *è una successione talché* $f_n(x) \to x$ *per ogni* x *e* $|f_n(x)| \leq |x|$*, allora, per ogni* $\psi \in D(A)$,

$$A\psi = \lim_{n\to\infty} \phi(f_n)\psi;$$

(iv) *se* $\{f_n\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *è una successione equilimitata convergente ovunque a* f*, allora*

$$\phi(f) = \mathrm{s-}\lim_{n\to+\infty} \phi(f_n).$$

Inoltre,

[(v)*]*

(v) *se* $A\psi = \lambda\psi$*, allora per ogni* $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*,* $\phi(f)\psi = f(\lambda)\psi$*; più in generale se un sottospazio è invariante sotto* A *lo è anche sotto* $\phi(f)$*, per ogni* $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*;*

(vi) *se* $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *è non negativa, allora* $\phi(f) \geq 0$.

Dimostrazione Mostriamo che l'applicazione $f \mapsto f(A) \equiv \phi(f)$, definita sopra, gode delle proprietà (i)-(iv). Abbiamo

$$\begin{aligned} \phi(f+\alpha g) &= U^{-1}[f(F(m)) + \alpha g(F(m))]U = U^{-1}f(F(m))U + \alpha U^{-1}g(F(m))U = \\ &= \phi(f) + \alpha\phi(g) \end{aligned}$$

Sfruttando il fatto che $U^{-1} = U^*$, abbiamo

$$\phi^*(f) = [U^* f(F(m))U]^* = U^*\bar{f}(F(m))U = \phi(\bar{f}).$$

Per quanto concerne la moltiplicazione

$$\begin{aligned} \phi(fg) &= U^{-1}f(F(m))g(F(m))U = U^{-1}f(F(m))UU^{-1}g(F(m))U = \\ &= \phi(f)\phi(g). \end{aligned}$$

Per completare il punto (i) è banale notare che $\phi(1) = \mathbb{I}$.

(ii) Vediamo che ϕ è continuo in norma:

$$\begin{aligned} \|\phi(f)\psi\|^2 &= \left(\psi, \phi\left(|f|^2\right)\psi\right) = \left(U\psi, |f(F(m))|^2 U\psi\right) = \\ &= \int |f(F(m))|^2 |\psi(m)|^2 d\mu \leq (\sup|f|)^2 \|\psi\|^2 \end{aligned}$$

da cui

$$\|\phi(f)\| \leq \sup|f|.$$

Adesso il punto (iii): sia $\psi \in D(A)$

$$\begin{aligned} \|(\phi(f_n) - A)\psi\|^2 &= \left\|U^{-1}(f_n(F(m)) - F(m))U\psi\right\|^2 = \\ &= \int |f_n(F(m)) - F(m)|^2 |\psi(m)|^2 d\mu \end{aligned}$$

d'altra parte, per l'ipotesi secondo cui $|f_n(x)| \leq |x|$,

$$|f_n(F(m)) - F(m)| \leq 2|F(m)|$$

visto che $\psi \in D(A)$, abbiamo

$$|F(m)|^2 |\psi(m)|^2 \in L^1(M,\mu),$$

sicché per il teorema della convergenza dominata, concludiamo

$$\lim_{n\to\infty} \|(\phi(f_n) - A)\psi\| = 0.$$

Vediamo (iv). Per $\psi \in \mathcal{H}$ qualsiasi,

$$\begin{aligned} \|(\phi(f_n) - \phi(f))\psi\|^2 &= \|\phi(f_n - f)\psi\|^2 = \\ &= \int |f_n(F(m)) - f(F(m))|^2 |\psi(m)|^2 d\mu \end{aligned}$$

ma, per ipotesi esiste $M > 0$ di modo che

$$|f_n(F(m)) - f(F(m))| \leq M,$$

quindi applicando il teorema della convergenza dominata troviamo la tesi.

L'unicità della costruzione è un problema più complicato. Cominciamo con il vedere che la funzione boreliana limitata $1/(x-i)$ ammette come immagine $(A-i)^{-1}$ solo in forza delle proprietà (i)-(iv). Infatti, presa f_n successione di boreliane limitate convergente a x e tale che $|f_n(x)| \leq |x|$,

$$\begin{aligned}(A-i)\,\phi\left(\frac{1}{x-i}\right) &= \text{s-}\lim_{n\to\infty}\phi\left(f_n(x)-i\right)\phi\left(\frac{1}{x-i}\right) = \\ &= \text{s-}\lim_{n\to\infty}\phi\left(\frac{f_n(x)-i}{x-i}\right) = \phi(1) = \mathbb{I}\end{aligned}$$

e analogamente per il prodotto permutato. Dunque,

$$\begin{aligned}\phi\left(\frac{x+i}{x-i}\right) &= \phi(1) + 2i\,(A-i)^{-1} = (A-i)^{-1}(A-i) + 2i\,(A-i)^{-1} = \\ &= (A+i)(A-i)^{-1} \equiv V\end{aligned}$$

Mostriamo che quest'ultima proprietà unita alle (i), (ii) e (iv) garantisce l'unicità. Infatti,

$$\phi\left(\frac{x-i}{x+i}\right) = V^{-1} = V^*$$

perciò sono univocamente determinate

$$\begin{aligned}\phi\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) &= \frac{V+V^*}{2} \\ \phi\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) &= \frac{V-V^*}{2i}\end{aligned}$$

ne viene che ϕ è univocamente determinato sui polinomi nelle variabili di sopra, cioè sulle funzioni

$$P\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}, \frac{2x}{x^2+1}\right) = P(\cos\alpha, \sin\alpha)$$

Tramite il teorema di Weierstraß, abbiamo che con polinomi di questo genere possiamo approssimare uniformemente ogni funzione continua sulla retta per cui esistono e sono eguali i limiti per $x \to \pm\infty$. In particolare si approssimano uniformemente le funzioni continue a supporto compatto e, con queste ultime, si approssimano ovunque, puntualmente, equilimitatemente tutte le funzioni continue limitate (in modo banale). Dati, dunque, due omomorfismi ϕ_1 e ϕ_2 essi coincidono sulle funzioni continue limitate e hanno immagine eguale sui limiti puntuali equilimitati, perciò coincidono su tutte le boreliane limitate.

Il punto (vi) è veramente evidentemente. Il (v) si risolve con la stessa strategia dell'unicità. Per mostrare la tesi nel caso delle funzioni continue, si tratta di vedere che

$$\phi\left(\frac{x+i}{x-i}\right)\psi = \frac{\lambda+i}{\lambda-i}\psi$$

la cosa essendo praticamente ovvia dato che

$$\begin{aligned}\psi &= (A-i)^{-1}(A-i)\,\psi \\ \frac{1}{\lambda-i}\psi &= (A-i)^{-1}\psi \\ \frac{\lambda+i}{\lambda-i}\psi &= (A+i)(A-i)^{-1}\psi\end{aligned}$$

Visto che la tesi vale sui polinomi, sulle funzioni continue a supporto compatto, passando al limite puntuale, sulle funzioni continue limitate, essa si applica, con il solito metodo, a tutte le funzioni boreliane limitate, come si voleva.

Per quanto concerne il discorso dell'invarianza è analogo. Ci basta dimostrarla su

$$\phi\left(\frac{x+i}{x-i}\right)\psi$$

dal momento che il sottospazio è chiuso e si agisce per limiti forti nell'estensione. È sufficiente dimostare che se H è A-invariante, allora è pure $(A-i)^{-1}$-invariante. Si tratta di vedere che se $\zeta \in H$, allora $\psi \equiv (A-i)^{-1}\zeta$ appartiene a H. Cioè che se per $\zeta \in H$ esiste ψ di modo che

$$(A-i)\,\psi = \zeta,$$

allora $\psi \in H$. Ora, sia P il proiettore su H, allora PAP è autoaggiunto, perciò dato ζ esiste $\psi \in \mathcal{H}$ di modo che $P\psi \in D(A)$ e

$$PAP\psi - i\psi = \zeta$$

Sia $\psi = \psi_1 + \psi_2$ con $P\psi = \psi_1 \in H$ e $\psi_2 \in H^\perp$, allora

$$PAP\psi_1 - i\psi_1 - i\psi_2 = \zeta$$

da cui $\psi_2 = 0$. Perciò dato $\zeta \in H$ esiste $\psi \in H \cap D(A)$ per cui

$$PAP\psi - i\psi = \zeta$$

siccome $\psi \in H$ e H è A-invariante,

$$(A-i)\,\psi = \zeta.$$

(c.v.d.)

Misure spettrali Il calcolo funzionale operatoriale consente di introdurre, anche nel caso illimitato, le misure e i proiettori spettrali. Sia f una funzione continua a supporto compatto su $\mathbb{R}$, poiché $\mathbb{R}$ è localmente compatto, possiamo applicare il teorema di Riesz-Markov considerando il funzionale

$$\mathcal{C}_c(\mathbb{R}) \ni f \mapsto (\psi, \phi(f)\,\psi)$$

per un fissato $\psi \in \mathcal{H}$. Il funzionale considerato è positivo e continuo, grazie al teorema del calcolo operatoriale, essendo

$$|(\psi, \phi(f)\,\psi)| \le \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} |f(\lambda)|\,\|\psi\|,$$

esiste perciò un'unica misura boreliana μ_ψ di modo che

$$(\psi, \phi(f)\,\psi) = \int d\mu_\psi(\lambda)\; f(\lambda).$$

Vettori ciclici Definiamo un vettore $\psi \in \mathcal{H}$ **ciclico** se

$$\{\phi(f)\,\psi\,|f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})\}^a = \mathcal{H}$$

Se A ammette un vettore ciclico, A è il moltiplicatore per x sullo spazio $L^2\left(\mathbb{R}, \mu_\psi\right)$:

Lemma I.7 (mupsi) *Sia A un operatore autoaggiunto con un vettore ciclico ψ. Allora esiste un operatore unitario*

$$U : \mathcal{H} \to L^2\left(\mathbb{R}, d\mu_\psi\right)$$

talché, in senso L^2,

$$\left(UAU^{-1}f\right)(\lambda) = \lambda f(\lambda)$$

per ogni f tale che $\lambda f(\lambda) \in L^2$.

Dimostrazione Usiamo il teorema del calcolo funzionale continuo. Sia $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, allora definiamo U come

$$U\phi(f)\,\psi \equiv f$$

Dobbiamo vedere che U è ben definito, cioè che se $\phi(f)\,\psi = \phi(g)\,\psi$ allora $f = g$. Infatti,

$$\begin{aligned}\|\phi(f)\,\psi\|^2 &= (\phi(f)\,\psi, \phi(f)\,\psi) = (\psi, \phi^*(f)\,\phi(f)\,\psi) = (\psi, \phi(f^*f)\,\psi) = \\ &= \int d\mu_\psi(\lambda)\;|f(\lambda)|^2\end{aligned}$$

per cui se $\phi(f)\psi = \phi(g)\psi$, allora $\phi(f-g)\psi = 0$ e quindi $\|f-g\|_{L^2} = 0$, cioè $f = g$.

L'espressione di sopra dimostra anche che, sul dominio posto, U conserva la norma.

Riassumendo, abbiamo che U è definito sullo spazio

$$\{\phi(f)\psi \,|\, f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})\}$$

ed ivi è isometrico. Poiché ψ è ciclico, il dominio è denso in $\mathcal{H}$ e, in forza del teorema di estensione degli operatori continui, abbiamo che U è ben definito su tutto $\mathcal{H}$ ed è un'isometria. Ora, poiché $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ è denso in $L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi)$ U ha immagine densa, ma, essendo un'isometria, è allora suriettivo. In definitiva, U è un operatore unitario.

Notiamo che, per ogni $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, vale

$$\phi(f)\psi = U^{-1}U\phi(f)\psi = U^{-1}f$$

Se $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, allora $U^{-1}f \in D(A)$. Per mostrare questo usiamo il teorema spettrale. Si tratta di vedere che $\phi(f)\psi \in D(A)$, cioè

$$F(m)\, f(F(m))\, \psi(m) \in L^2(M, \mu)$$

A questo scopo, ci basta vedere che $F(m)\, f(F(m))$ è una funzione L^2, ma essendo (M, μ) uno spazio di misura finita, si tratta solo di vedere che la suddetta funzione è limitata. Se f è limitata da M e ha supporto contenuto in una palla di raggio R, allora

$$|F(m)\, f(F(m))| \leq MR.$$

Infatti, per $|F(m)| > R$, la funzione a primo membro è nulla. Per $|F(m)| \leq R$, la tesi è ovvia. Dunque, se con $h_n(x)$ indichiamo una successione dominata da x e convergente ovunque a x,

$$U\phi(h_n)\, U^{-1}f = U\phi(h_n)\,\phi(f)\,\psi = U\phi(h_n f)\,\psi = h_n f$$

Passiamo al limite per $n \to +\infty$. Poiché U è un operatore unitario, a primo membro troviamo $UAU^{-1}f$; a secondo membro dobbiamo eseguire il limite in senso L^2:

$$\int d\mu_\psi \; |h_n - x|^2 \, |f|^2 \to 0$$

per il teorema della convergenza dominata. Dunque, per ogni $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, si ha

$$UAU^{-1}f = xf$$

Il moltiplicatore per x su $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ è essenzialmente autoaggiunto e ha per chiusura il moltiplicatore per x con dominio sulle g tali che $xg \in L^2$. Poiché l'operatore a primo membro è autoaggiunto e coincide con quello a secondo membro su un dominio di essenziale autoaggiunzione per quello a secondo membro, si ha che UAU^{-1} è il moltiplicatore per x sul dominio detto.

(c.v.d.)

Adesso facciamo intervenire la solita zornication:

Lemma I.8 *Sia A un operatore autoaggiunto su uno spazio di Hilbert separabile $\mathcal{H}$. Allora esiste una decomposizione di $\mathcal{H}$ in somma diretta come*

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n=1}^{N} \mathcal{H}_n$$

con $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ talché

(i) *ciascun $\mathcal{H}_n$ è A-invariante;*

(ii) *per ogni n esiste $\psi_n \in \mathcal{H}_n$ ciclico per $A|_{\mathcal{H}_n}$.*

Dimostrazione Sia S l'insieme di tutte le famiglie M di sottospazi H_β, $\beta \in B_M$, tali che

(i) $H_\beta \perp H_{\beta'}$ per $\beta \neq \beta' \in B_M$;

(ii) $AH_\beta \subset H_\beta$ per ogni $\beta \in B_M$;

(iii) in H_β esiste un vettore ciclico per $A|_{H_\beta}$, $\beta \in B_M$.

L'insieme S è parzialmente ordinato rispetto alla relazione di inclusione $\subset$. Sia $S' \subset S$ totalmente ordinato, allora

$$M' = \bigcup_{M \in S'} M$$

è un confine superiore per S' e, inoltre, appartiene a S. Vediamo il perché di quest'ultima affermazione. Siano H_β e $H_{\beta'} \in M'$, allora esistono M_1 e M_2 in S' tali che $H_\beta \in M_1$ e $H_{\beta'} \in M_2$. Tuttavia, M' è totalmente ordinato quindi, per fissare le idee, $M_1 \subset M_2$ (o il contrario), perciò H_β e $H_{\beta'} \in M_2$ da cui godono delle proprietà (i), (ii) e (iii), come volevamo dimostrare. S soddisfa le ipotesi del lemma di Zorn, perciò esiste in S una famiglia massimale M_0. Siano $\mathcal{H}_n$ i sottospazi contenuti in M_0 e, posto $N \equiv \# M_0$ (poiché $\mathcal{H}$ è separabile, $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$), consideriamo

$$H \equiv \bigoplus_{i=1}^{N} \mathcal{H}_i.$$

Per assurdo sia $\xi \in H^\perp \setminus \{0\}$ allora consideriamo

$$H_\xi \equiv \{\phi(f)\xi \,|\, f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})\}^a$$

Abbiamo che H_ξ è ortogonale a ogni $\mathcal{H}_n$, infatti, se $\psi \in \mathcal{H}_n$ allora $\phi^*(f)\psi \in \mathcal{H}_n$,

$$(\psi, \phi(f)\xi) = (\phi^*(f)\psi, \xi) = 0$$

Dunque, $M \equiv M_0 \cup H_\xi \in S$ e contiene M_0, la qual cosa è assurda essendo M_0 massimale.

(c.v.d.) Perciò $H^\perp = \{0\}$ e $H = \mathcal{H}$.

Questo ci consente di riscrivere il teorema spettrale come nel caso limitato

Teorema I.24 *Sia A un operatore autoaggiunto sullo spazio di Hilbert separabile $\mathcal{H}$. Allora esistono le misure boreliane sulla retta reale $\{\mu_n\}_{n \in J_N}$, $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, e l'operatore unitario*

$$U : \mathcal{H} \to \bigoplus_{n=1}^{N} L^2(\mathbb{R}, d\mu_n)$$

di modo che, se scriviamo

$$\psi \in \bigoplus_{n=1}^{N} L^2(\mathbb{R}, d\mu_n)$$

come N-upla $(\psi_1, \ldots, \psi_N)$, la componente n-esima gode della proprietà

$$\left(UAU^{-1}\psi\right)_n(\lambda) = \lambda \psi_n(\lambda).$$

Realizzazione concreta della rappresentazione spettrale Poiché lo spazio

$$\bigoplus_{n=1}^{N} L^2(\mathbb{R}, d\mu_n)$$

è isomemtricamente isomorfo a uno spazio $L^2(M, \mu)$ dove M è dato dall'unione di N copie di $\mathbb{R}$, ne abbiamo che lo spazio $L^2(M, \mu)$, di cui nel teorema spettrale, ammette come realizzazione concreta proprio l'unione di N copie di $\mathbb{R}$.

Misure a valori proiezione Nel caso illimitato diciamo che la famiglia $\{E(\Omega)\}$ (al variare di Ω nei boreliani su $\mathbb{R}$) è una misura a valori proiezione se

(i) ciascun $E(\Omega)$ è un proiettore;

(ii) $E(\emptyset) = 0$; $E(\mathbb{R}) = \mathbb{I}$;

(iii) se Ω è l'unione disgiunta della famiglia numerabile di boreliani $\{\Omega_n\}$, allora

$$E(\Omega) = \text{s-}\lim_{n \to +\infty} E(\Omega_n);$$

(iv) $E(\Omega_1) E(\Omega_2) = E(\Omega_1 \cap \Omega_2)$.

Un operatore autoaggiunto A individua immediatamente la m.v.p.

$$E(\Omega) \equiv \phi(\chi_\Omega).$$

Viceversa, sia data una m.v.p. $\{E(\Omega)\}$, consideriamo allora la misura complessa

$$\tilde{\mu}_{\psi,\zeta}(\Omega) = (\psi, E(\Omega)\zeta)$$

per la quale valgono subito le proprietà

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{\psi,\varphi+\varphi'}(\Omega) &= \tilde{\mu}_{\psi,\varphi}(\Omega) + \tilde{\mu}_{\psi,\varphi'}(\Omega) \\ \tilde{\mu}_{\psi,\alpha\varphi}(\Omega) &= \alpha\tilde{\mu}_{\psi,\varphi}(\Omega) \\ \overline{\tilde{\mu}_{\psi,\varphi}(\Omega)} &= \tilde{\mu}_{\varphi,\psi}(\Omega) \end{aligned}$$

Definiamo, per ogni funzione boreliana limitata $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, la seguente

$$(\psi, B_f\zeta) \equiv \int d\tilde{\mu}_{\psi,\zeta}\, f(\lambda).$$

Si tratta di una forma sesquilineare limitata, di modo che B_f è, effettivamente, un operatore limitato.

La tesi è ovvia sulle funzioni caratteristiche, dunque, sulle funzioni semplici. Ogni f si ottiene come limite puntuale equilimitato di funzioni semplici, dunque, la tesi vale in generale.

Come nel caso limitato, si scrive

$$d\tilde{\mu}_{\psi,\varphi}(\lambda) \equiv d(\psi, E(\lambda)\varphi)$$

di modo che

$$(\psi, B_f\psi) \equiv \int f(\lambda)\; d(\psi, E(\lambda)\psi).$$

Teorema I.25 *Se $E(\Omega)$ è una misura a valori proiezione e f una funzione boreliana limitata, allora si definisce in modo unico l'operatore denotato come*

$$B_f \equiv \int f(\lambda)\; dE(\lambda)$$

di modo che

$$(\psi, B_f\psi) = \int f(\lambda)\; d(\psi, E(\lambda)\psi)$$

Sia $f(\lambda) = \chi_\Omega(\lambda)$, allora

$$\left(\psi, B_{\chi_\Omega}\psi\right) = \int \chi_\Omega(\lambda)\; d(\psi, E(\lambda)\psi) = \tilde{\mu}_\psi(\Omega)$$

d'altra parte

$$\tilde{\mu}_\psi(\Omega) = (\psi, E(\Omega)\psi)$$

perciò $B_{\chi_\Omega} = E(\Omega)$.

Visto che la dimostrazione non cambia in nulla, vale ancora

Teorema I.26 *Sia data una misura a valori proiezione $\{E(\Omega)\}$, allora l'applicazione da $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ in $L(\mathcal{H})$ che associa*

$$f \mapsto B_f = \int f(\lambda)\; dE(\lambda)$$

è uno *-omomorfismo continuo tale che se $\{f_n\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ è equilimitata e converge puntualmente a f, allora B_f è il limite forte della successione $\{B_{f_n}\}$.

Consideriamo adesso la m.v.p. spettrale $E(\Omega) = \phi(\chi_\Omega)$ e $\mu_{\psi,\zeta} = \tilde{\mu}_{\psi,\zeta}$. L'ultima eguaglianza si ottiene scrivendo i chiusi come limiti puntuali equilimitati di funzioni continue, usando il calcolo funzionale, e poi estendendo a tutti i boreliani al solito modo.

Mostriamo che $B_f = \phi(f)$. La tesi è valida sulle funzioni caratteristiche, per definizione. Poiché ϕ e B sono omorfismi, la tesi si estende alle funzioni semplici. Ma tutte le boreliane limitate, sono limiti puntuali equilimitati di funzioni semplici, in definitiva, per ogni $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\phi(f) = B_f.$$

In particolare, se h_n converge a x ed è dominata da x, allora B_{h_n} converge fortemente su $D(A)$ ad A.

Funzioni boreliane illimitate

Dato un vettore $\psi \in D(A)$, per quanto dimostrato sopra si ha

$$(\psi, A\psi) = \int d\mu_\psi \, x.$$

Usando la polarizzazione e le proprietà di $\tilde{\mu}_\psi = \mu_\psi$

$$(\psi, A\zeta) = \int d\mu_{\psi,\zeta} \, x.$$

Vogliamo dimostrare che

$$D(A) = \left\{ \psi \middle| \int d\mu_\psi(\lambda) \, |\lambda|^2 < +\infty \right\}$$

La cosa è molto semplice $\psi \in D(A)$ se e solo se

$$+\infty > \int d\mu(m) \, |F(m)\psi(m)|^2 = \sum_{n=1}^{N} \int d\mu_n(\lambda) \, |\lambda\psi_n(\lambda)|^2$$

e ci basta prendere ψ come uno dei vettori ciclici ψ_n per concludere la tesi.

L'ultimo ragionamento suggerisce di estendere il calcolo funzionale alle funzioni illimitate. Sia g una qualsiasi boreliana, diciamo che $g(A)$ è l'operatore che su $L^2(M,\mu)$ è il moltiplicatore per $g(F(m))$, allora

$$D(g(A)) = \left\{ \psi \middle| \int d\mu_\psi(\lambda) \, |g(\lambda)|^2 < +\infty \right\}$$

come si vede dal fatto che $\psi \in D(A)$ se e solo se

$$+\infty > \int d\mu(m) \, |g(F(m))\psi(m)|^2 = \sum_{n=1}^{N} \int d\mu_n(\lambda) \, |g(\lambda)\psi_n(\lambda)|^2$$

Ora, per ogni $\psi \in D(g(A))$, ragionando come per A,

$$(\psi, g(A)\psi) = \int d\mu_\psi(\lambda) \, g(\lambda),$$

e polarizzando

$$(\psi, g(A)\zeta) = \int d\mu_{\psi,\zeta}(\lambda) \, g(\lambda)$$

Scriveremo

$$g(A) = \int g(\lambda) \, dE(\lambda)$$

Notiamo che se g è una funzione a valori reali, allora $g(A)$ è unitariamente equilvalente al moltiplicatore per $g(F(m))$ su $L^2(M,\mu)$, ma sul dominio detto esso è autoaggiunto, perciò $g(A)$ è autoaggiunto.

Teorema spettrale e m.v.p.

Sia ora A autoaggiunto e limitato. Abbiamo appena visto che se $E(\lambda)$ è la sua m.v.p. spettrale allora

$$A = \int \lambda \, dE(\lambda).$$

Viceversa, sia A autoaggiunto e sia $P(\Omega)$ una generica m.v.p. talché

$$A = \int \lambda \, dP(\lambda)$$

allora $P(\Omega)$ è proprio la m.v.p. spettrale.

L'applicazione che a ogni funzione boreliana limitata f associa l'operatore

$$B_f = \int f(\lambda)\, dP(\lambda)$$

è uno *-omomorfismo chiuso sotto limite equilimitato puntuale. Sia h_n, dominata da x convergente a x, e siano $\psi, \zeta \in D(A)$, allora

$$\begin{aligned}
\left|\left(\psi, \left(B_{h_n} - A\right)\zeta\right)\right| &= \left|\int d\tilde{\mu}_{\psi,\zeta}(\lambda)\, \left(h_n(\lambda) - \lambda\right)\right| = \left|\sum_{r=1}^{4} \frac{1}{4\omega_r} \int d\tilde{\mu}_{\psi+\omega_r\zeta}(\lambda)\, \left(h_n(\lambda) - \lambda\right)\right| \\
&\leq \sum_{r=1}^{4} \frac{1}{4\omega_r} \int d\tilde{\mu}_{\psi+\omega_r\zeta}(\lambda)\, \left|h_n(\lambda) - \lambda\right|
\end{aligned}$$

siccome $2|\lambda|$ è sommabile rispetto a $d\tilde{\mu}_{\psi+\omega_r\zeta}$, applicando il teorema di Lebesgue, concludiamo che B_{h_n} converge debolmente ad A. Non ci resta che vedere che $B_{h_n}\zeta$ è di Cauchy. Ma per questo basta notare che

$$\left\|B_{h_n-h_m}\zeta\right\|^2 = \int d\mu_\zeta\, \left|h_n - h_m\right|^2$$

e, ancora, basta applicare il teorema della convergenza dominata essendo $4|\lambda|^2$ sommabile rispetto a μ_ζ.
Se ne deduce, per l'unicità del calcolo operatoriale, che $\phi(\chi_\Omega) = B_{\chi_\Omega} = P(\Omega)$, cioè $P(\Omega)$ è la m.v.p. spettrale.

Teorema I.27 (teorema spettrale - formulazione m.v.p.) *Dato un operatore autoaggiunto A su uno spazio di Hilbert separabile, esiste una corrispondenza uno a uno tra A e una misura a valori proiezione $E(\Omega)$ data da*

$$A \longmapsto \{E(\Omega)\}, \; E(\Omega) \equiv \chi_\Omega(A)$$
$$\{E(\Omega)\} \longmapsto A = \int \lambda\, dE(\lambda)$$

Se g è una funzione boreliana, allora si definisce l'operatore

$$g(A) = \int g(\lambda)\, dE(\lambda)$$

sul dominio

$$D(g) \equiv \left\{\psi \left| \int g(\lambda)\, d(\psi, E(\lambda)\psi) < +\infty \right.\right\},$$

se g è reale, allora $g(A)$ è autoaggiunto sul dominio $D(g)$, inoltre, se g è limitata, allora $g(A) = \phi(g)$.

I.4.3 Classificazione spettrale

Riproduciamo adesso la classificazione spettrale che già avevamo introdotto per gli operatori limitati. Poiché nella sottosezione precedente abbiamo imparato che tutti i risultati validi nel caso limitato restano sostanzialmente validi nel caso illimitato, non dovremo apportare troppi cambiamenti rispetto a quanto già studiato.
La ricostruzione delle misure spettrali operata nella precedente sottosezione, ci permette di riproporre la

Definizione I.10 *Sia A un operatore autoaggiunto sullo spazio di Hilbert separabile $\mathcal{H}$. Poniamo*

$$\mathcal{H}_{\text{pp}} \equiv \left\{\psi \left| \mu_\psi \text{ è una misura puramente puntuale} \right.\right\};$$
$$\mathcal{H}_{\text{ac}} \equiv \left\{\psi \left| \mu_\psi \text{ è una misura assolutamente continua} \right.\right\};$$
$$\mathcal{H}_{\text{s}} \equiv \left\{\psi \left| \mu_\psi \text{ è una misura continua singolare} \right.\right\}.$$

Senza la benché minima variazione rispetto al caso di A limitato, si dimostra

Teorema I.28 *Dato un operatore autoaggiunto A su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ esso induce la seguente decomposizione*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathrm{pp}} \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{ac}} \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{s}}$$

ciascuno dei tre sottospazi è A-invariante. $A|_{\mathcal{H}_{\mathrm{pp}}}$ ha un set completo di autovettori; $A|_{\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}}$ ha misure spettrali tutte assolutamente continue; $A|_{\mathcal{H}_{\mathrm{s}}}$ ha misure spettrali tutte singolari continue.

A questo punto è nuovamente possibile porre

Definizione I.11 *Sia A un operatore autoaggiunto su $\mathcal{H}$, allora definiamo*

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{pp}}(A) &\equiv \{\lambda \,|\, \lambda \text{ autovalore di } A\};\\ \sigma_{\mathrm{c}}'(A) &\equiv \sigma\left(A|_{\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}\oplus\mathcal{H}_{\mathrm{s}}}\right);\\ \sigma_{\mathrm{ac}}(A) &\equiv \sigma\left(A|_{\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}}\right);\\ \sigma_{\mathrm{s}}(A) &\equiv \sigma\left(A|_{\mathcal{H}_{\mathrm{s}}}\right);\end{aligned}$$

gli insiemi introdotti si dicono, rispettivamente, **spettro puramente puntuale**, **continuo**, **assolutamente continuo**, **singolare** *(o singolare continuo).*

Come nel caso limitato,

Lemma I.9 *Sia A un operatore autoaggiunto su $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ con $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ A-invarianti. Allora*

$$\sigma(A) = \sigma\left(A|_{\mathcal{H}_1}\right) \cup \sigma\left(A|_{\mathcal{H}_2}\right)$$

Dimostrazione Esplicitiamo la tesi:

$$\rho(A) = \rho\left(A|_{\mathcal{H}_1}\right) \cap \rho\left(A|_{\mathcal{H}_2}\right).$$

Sia $\lambda \in \rho(A)$, allora $(A-\lambda)^{-1}$ esiste ed è limitato. La restrizione su $\mathcal{H}_i$ di $(A-\lambda)$ è dunque iniettiva. Ma è anche suriettiva, infatti

$$(A-\lambda)^{-1} = \phi\left(\frac{1}{x-\lambda}\right)$$

con $1/(x-\lambda)$ funzione limitata (poiché $\lambda \notin \sigma(A)$). Per il teorema del calcolo funzionale, allora

$$(A-\lambda)^{-1}\mathcal{H}_i \subset \mathcal{H}_i$$

Perciò, dato $\zeta \in \mathcal{H}_i$ si ha che $\psi = (A-\lambda)^{-1}\zeta$ è in $\mathcal{H}_i$, sicché $(A-\lambda)$ ristretto a $\mathcal{H}_i$ è suriettivo. In definitiva, $\lambda \in \rho\left(A|_{\mathcal{H}_i}\right)$ per ciascun $i \in J_2$.

Sia $\lambda \in \rho\left(A|_{\mathcal{H}_1}\right) \cap \rho\left(A|_{\mathcal{H}_2}\right)$. Dato $w \in \mathcal{H}$ allora $w = w_1 + w_2$, con $w_i \in \mathcal{H}_i$, sicché esiste $v_i \in \mathcal{H}_i$ controimmagine secondo $A-\lambda$ di w_i, cioè

$$(A-\lambda)(v_1+v_2) = w_1 + w_2 = w,$$

Vediamo l'iniettività. Sia v tale che $(A-\lambda)v = 0$. Siccome A è autoaggiunto $\bar{\lambda} \in \rho(A)$, perciò, per ogni $w_i \in \mathcal{H}_i$, esiste z_i di modo che $w_i = \left(A-\bar{\lambda}\right)z_i$, allora

$$(w_i, v) = \left(\left(A-\bar{\lambda}\right)z_i, v\right) = (z_i, (A-\lambda)v) = 0$$

(c.v.d.) Ne viene che $v \in \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$, cioè $v = 0$.

Proposizione I.12 *Per A autoaggiunto valgono i seguenti fatti*

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{c}}'(A) &= \sigma_{\mathrm{ac}}(A) \cup \sigma_{\mathrm{s}}(A)\\ \sigma(A) &= \sigma_{\mathrm{pc}}^{a}(A) \cup \sigma_{\mathrm{c}}'(A)\end{aligned}$$

Dimostrazione

La prima parte è dimostrata direttamente dal lemma. Perciò concentriamoci sulla seconda. Bisogna dimostrare che se B è un operatore autoaggiunto che ammette una base ortonormale di autovettori, allora il suo spettro è la chiusura dell'insieme dei suoi autovalori:

$$\sigma(B) = \sigma^a_{\text{pp}}(B)$$

Poiché $\sigma(B)$ è chiuso e $\sigma_{\text{pp}}(B) \subset \sigma(B)$, abbiamo immediatamente

$$\sigma^a_{\text{pp}}(B) \subset \sigma(B)$$

Sia ora $\lambda \in \sigma(B) \backslash \sigma_{\text{pp}}(B)$, allora $B-\lambda$ è iniettivo ma ha immagine densa in $\mathcal{H}$ e diversa da $\mathcal{H}$. Sia $\{e_n\} \subset D(B)$ la base ortonormale di autovettori di B, $Be_n = \lambda_n e_n$. Per ogni $x \in D(B)$, abbiamo

$$Bx = \sum_{n=1}^{+\infty} (e_n, Bx)\, e_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n (e_n, x)\, e_n$$

perciò

$$(B-\lambda)\, x = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda)(e_n, x)\, e_n$$

Abbiamo che $w \in R(B-\lambda)$ se e solo se troviamo $x \in \mathcal{H}$

$$(e_n, w) = (\lambda_n - \lambda)(e_n, x)$$

cioè se e solo se

$$\left\{ \frac{(e_n, w)}{\lambda_n - \lambda} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2.$$

Ora, ammettiamo che $\lambda \notin \sigma^a_{\text{pp}}(A)$. Allora esiste un $\varepsilon_0 > 0$ tale che

$$|\lambda_n - \lambda| > \varepsilon_0$$

per cui, per ogni $w \in \mathcal{H}$,

$$\left| \frac{(e_n, w)}{\lambda_n - \lambda} \right|^2 < \frac{1}{\varepsilon_0^2} |(e_n, w)|^2 \in \ell^1,$$

(c.v.d.) cioè $R(A-\lambda) = \mathcal{H}$, contro l'ipotesi.

Proiettori spettrali e spettro Le proiezioni spettrali costituiscono uno strumento interessante nello studio dello spettro di un operatore. Se A è un operatore limitato autoaggiunto ed E_A è la sua famiglia spettrale, abbiamo, ripetendo quasi alla lettera la vecchia dimostrazione,

Proposizione I.13 *$\lambda \in \sigma(A)$ se e solo se $E_A(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon) \neq 0$ per qualunque $\varepsilon > 0$.*

Dimostrazione Ammettiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ sia $E_A(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon) \neq 0$. Poiché A è densamente definito, esiste $D(A) \ni \psi \neq 0$ nel range del proiettore detto. Dunque,

$$\|(A-\lambda)\,\psi\| = \|(A-\lambda)\, E_A(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)\,\psi\| = \left(\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} |x|^2 \, d\mu_\psi(x) \right)^{1/2} \leq \varepsilon \|\psi\|$$

Questo significa che se $(A-\lambda)$ ha inverso, esso non è limitato: per ogni $M > 0$ esiste ϕ talché

$$\left\| (A-\lambda)^{-1} \phi \right\| \geq M \|\phi\|.$$

Ne abbiamo che $\lambda \in \sigma(A)$.

Viceversa, se esiste un $\varepsilon > 0$ talché il proiettore $E_A(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon) = 0$, introduciamo la funzione g data da

$$g(\lambda') \equiv \begin{cases} 0, & \lambda' \in B(\lambda, \varepsilon) \\ 1/(\lambda' - \lambda), & \lambda' \notin B(\lambda, \varepsilon) \end{cases}$$

g è chiaramente boreliana, inoltre

$$\sup |g| \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

per cui g è pure limitata. Possiamo considerare $g(A)$ e otteniamo, in rappresentazione spettrale,

$$(A-\lambda)\, g(A) \mapsto \begin{cases} 0, & \lambda' \in B(\lambda,\varepsilon) \\ 1, & \lambda' \notin B(\lambda,\varepsilon) \end{cases} = \chi_{\mathbb{R}\backslash B(\lambda,\varepsilon)}(\lambda')$$

cioè

$$(A-\lambda)\, g(A) = E_A(\mathbb{R}\backslash B(\lambda,\varepsilon))$$

Ora, per le proprietà di una misura a valori proiettori,

$$\mathbb{I} = E_A(\mathbb{R}\backslash B(\lambda,\varepsilon)) + E_A(B(\lambda,\varepsilon)) = E_A(\mathbb{R}\backslash B(\lambda,\varepsilon))$$

cioè

$$(A-\lambda)\, g(A) = \mathbb{I}$$

(c.v.d.) da cui $\lambda \notin \sigma(A)$.

Proposizione I.14 *Ogni aperto contenuto nell'insieme risolvente di A ha misura μ_ψ nulla.*

Dimostrazione Sia $D \subset \rho(A)$ un aperto. Consideriamo la successione $\{a_n\}$ dei razionali contenuti in D. Per ogni a_n esiste un $\varepsilon_n \in \mathbb{Q}$, di modo che

$$E(a_n - \varepsilon_n, a_n + \varepsilon_n) = 0$$

di modo che

$$\mu_\psi(a_n - \varepsilon_n, a_n + \varepsilon_n) = 0$$

Siccome l'unione delle palle $B(a_n, \varepsilon_n)$ è numerabile e ricopre D, abbiamo

$$\mu_\psi(D) = 0$$

(c.v.d.)

Dalla proposizione si ottiene che $\mu_\psi(\rho(A)) = 0$, perciò, come si aveva (per costruzione) nel caso limitato,

$$(\psi, g(A)\,\psi) = \int_{\sigma(A)} g(\lambda)\; d\mu_\psi(\lambda)$$

Definizione I.12 *Data una misura si definisce il suo supporto, come il complemento del più grande aperto di misura nulla. Data una famiglia spettrale $\{\mu_n\}$ si definisce il suo supporto come*

$$\operatorname{supp}\{\mu_n\} = \left(\bigcup_{n=1}^{N} \operatorname{supp}\mu_n\right)^a$$

Proposizione I.15 *Il supporto di una misura spettrale associata all'operatore autoaggiunto A coincide con $\sigma(A)$.*

Dimostrazione $\rho(A)$ è contenuto nel complemento al supporto di μ_n per ogni n, quindi

$$\begin{aligned} \rho(A) &\subset (\operatorname{supp}\mu_n)^c \\ \operatorname{supp}\mu_n &\subset \sigma(A) \\ \operatorname{supp}\{\mu_n\} &\subset \sigma(A) \end{aligned}$$

Poiché ogni $\lambda \in \sigma(A)$ ammette un intorno di misura non nulla rispetto a una qualche μ_ψ, e dunque a una qualche μ_n, concludiamo che $\rho(A) \cup D$, con D aperto incluso in $\sigma(A)$, ha misura non nulla per qualche n per ogni D. Ne viene che, per un qualche n, $\sigma(A) = \rho(A)^c = \operatorname{supp}\mu_n$, cioè

$$\sigma(A) \subset \operatorname{supp}\{\mu_n\}$$

(c.v.d.)

Occupiamoci adesso degli autovalori: ancora ripetendo quasi parola per parola la dimostrazione del caso limitato,

Teorema I.29 *Sia A un operatore autoaggiunto, allora valgono i seguenti fatti*

(i) *se $\lambda \in \sigma(A)$ è un punto isolato, allora è un autovalore di A;*

(ii) *$\lambda \in \sigma(A)$ è un autovalore di A se e solo se $E_A(\{\lambda\}) \neq 0$;*

(iii) *se λ è un autovalore di A, allora $E_A(\{\lambda\})$ è il proiettore sull'autospazio $E(\lambda, A)$ relativo a λ.*

Dimostrazione Sia $\lambda \in \sigma(A)$ isolato, allora esiste $\varepsilon > 0$ per cui

$$(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) \cap \sigma(A) = \{\lambda\},$$

allora

$$0 \neq E_A(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) = E_A(\{\lambda\})$$

perciò esiste $\psi \in D(A)$ normalizzato talché

$$E_A(\{\lambda\})\psi = \psi$$

Calcoliamo $AE_A(\{\lambda\})\psi$ in rappresentazione spettrale, troviamo

$$AE_A(\{\lambda\})\psi \mapsto x\chi_{\{\lambda\}}(x)1 = \lambda\chi_{\{\lambda\}}1 \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi),$$

da cui,

$$A\psi = AE_A(\{\lambda\})\psi = \lambda E_A(\{\lambda\})\psi = \lambda\psi. \tag{I.6}$$

Questo dimostra (i).

Ammettiamo ora che $E_A(\{\lambda\})$ sia diverso da 0. Abbiamo appena visto che questo implica che λ è un autovalore di A. Inoltre dalla (I.6) abbiamo che

$$R(E_A(\{\lambda\})) \subset E(\lambda, A)$$

Resta da vedere il viceversa per dimostrare (iii).

Sia $P_A(\lambda)$ il proiettore su $E(\lambda, A)$, allora, grazie alla relazione appena ottenuta,

$$P_A(\lambda)E_A(\{\lambda\}) = E_A(\{\lambda\})P_A(\lambda) = E_A(\{\lambda\}).$$

Per ogni $\psi \in D(A)$, abbiamo

$$AP_A(\lambda)\psi = \lambda P_A(\lambda)\psi$$

da cui

$$0 = \|(A - \lambda)P_A(\lambda)\psi\|^2 = \int |x - \lambda|^2 \, d\mu_{P_A(\lambda)\psi}(x)$$

Poniamo, per $n \in \mathbb{N}^\times$,

$$f_n(x) \equiv \begin{cases} 1, & |x - \lambda| \geq 1 \\ |x - \lambda|^{1/n} & |x - \lambda| < 1 \end{cases}$$

abbiamo, per ogni ψ,

$$f_n(A)P_A(\lambda)\psi = f_n(\lambda)P_A(\lambda)\psi = 0$$

sicché, per ogni n,

$$0 = \|f_n(A)P_A(\lambda)\psi\|^2 = \int |f_n|^2 \, d\mu_{P_A(\lambda)\psi}$$

Poiché f_n converge puntualmente dominatamente a $\chi_{\mathbb{R}\setminus\{\lambda\}}$, abbiamo

$$0 = \int \chi_{\mathbb{R}\setminus\{\lambda\}} \, d\mu_{P_A(\lambda)\psi}$$

sicché, per ogni ψ,

$$0 = (P_A(\lambda)\psi, (\mathbb{I} - E_A(\{\lambda\}))P_A(\lambda)\psi)$$

cioè

$$P_A(\lambda) = P_A(\lambda)E_A(\{\lambda\})P_A(\lambda)$$

e, dunque, se λ è un autovalore $E_A(\{\lambda\}) \neq 0$ (altrimenti $P_A(\lambda) = 0$), la qual cosa completa la dimostrazione di (ii). Torniamo ad occuparci di (iii). Poiché, come abbiamo visto sopra ipotizzando che $E_A(\{\lambda\}) \neq 0$,

$$P_A(\lambda)\, E_A(\{\lambda\}) = E_A(\{\lambda\})\, P_A(\lambda) = E_A(\{\lambda\})$$

concludiamo

$$P_A(\lambda) = E_A(\{\lambda\})\, P_A(\lambda) = P_A(\lambda)\, E_A(\{\lambda\}),$$

da cui

$$R(P_A(\lambda)) = E(\lambda, A) \subset R(E_A(\{\lambda\})),$$

(c.v.d.) la tesi.

I risultati ottenuti suggeriscono l'introduzione di una nuova suddivisione dello spettro

Definizione I.13 *Diciamo che $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(A)$,* **spettro essenziale** *di A, se e solo se $E_A(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$ è infinito dimensionale per ogni $\varepsilon > 0$. Il complemento in $\sigma(A)$ di $\sigma_{\text{ess}}(A)$, $\sigma_{\text{disc}}(A)$, si dice* **spettro discreto** *di A.*

Dalla definizione, $\lambda \in \sigma_{\text{disc}}(A)$ se e solo se esiste un $\varepsilon > 0$ per cui $E_A(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$ è finito dimensionale. Vediamo alcuni risultati circa la decomposizione in spettro discreto ed essenziale: ancora, ripetiamo le dimostrazioni mutuandole dal caso limitato, **dimostrazione immutata**

Teorema I.30 *Lo spettro essenziale è chiuso.*

Dimostrazione Sia $\{\lambda_n\} \subset \sigma_{\text{ess}}(A)$ una successione convergente a λ. Dunque, ogni intervallo I contenente λ contiene un intorno J centrato su un qualche λ_n, dunque

$$R(E_A(I)) \supset R(E_A(J))$$

(c.v.d.) con $\dim R(E_A(J)) = +\infty$, da cui la tesi.

Dimostrazione senza variazioni.

Teorema I.31 *$\lambda \in \sigma_{\text{disc}}(A)$ se e solo se è un punto isolato di $\sigma(A)$ ed è un autovalore di A con degenerazione finita.*

Dimostrazione Se λ è un punto isolato di $\sigma(A)$ allora esso è un autovalore di A come abbiamo dimostrato sopra. Abbiamo che esiste $\varepsilon > 0$ per cui

$$E_A(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) = E_A(\{\lambda\})$$

e $E_A(\{\lambda\})$ è il proiettore sull'autospazio $E(\lambda, A)$. Dunque, se λ è un autovalore di **(c.v.d.)** degenerazione finita, $E_A(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$ è finito dimensionale e abbiamo la tesi.

In altri termini, il teorema asserisce che $\sigma_{\text{disc}}(A)$ è contenuto nell'insieme degli autovalori di A che hanno degenerazione finita. Nella prossima dimostrazione **nessuna variazione**

Teorema I.32 *$\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(A)$ se e solo se vale almeno una delle seguenti affermazioni*

(i) *$\lambda \in \sigma_{\text{ac}}(A) \cup \sigma_{\text{s}}(A)$;*

(ii) *λ è un punto limite di $\sigma_{\text{pp}}(A)$;*

(iii) *λ è un autovalore con degenerazione infinita.*

Dimostrazione Se vale (ii), allora λ non è un punto isolato dello spettro, perciò non può appartenere allo spettro discreto e dunque è in quello essenziale. Discorso analogo se vale la (iii).

Vediamo che succede se vale (i). Vogliamo mostrare che λ non è isolato e con ciò non può appartenere a $\sigma_{\text{disc}}(A)$. Ammettiamo che $\lambda \in \sigma'_{\text{c}}(A)$ sia un punto isolato dello spettro. Poiché λ non è un autovalore, abbiamo

$$E_A(\{\lambda\}) = 0,$$

d'altra parte esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B(\lambda, \varepsilon) \cap \sigma(A) = \{\lambda\}$, perciò

$$E_A(B(\lambda, \varepsilon)) = E_A(\{\lambda\}) = 0$$

ossia $\lambda \notin \sigma(A)$ contro l'ipotesi.

Il viceversa dice che se $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}$, allora valgono (i) o (ii) o (iii). Dimostriamo la contronominale: se non valgono né (i), né (ii), né (iii), allora $\lambda \in \sigma_{\text{disc}}$. In altre parole, l'ipotesi è che (i′), $\lambda \notin \sigma'_{\text{c}}(A)$, **e** (ii') λ sia un punto isolato di $\sigma_{\text{pp}}(A)$, **e** (iii') λ non sia un autovalore con degenerazione infinita.

Da (i′) abbiamo che $\lambda \in \sigma^a_{\text{pp}}(A)$, ma da (ii') abbiamo che esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $\sigma_{\text{pp}}(A) \ni \lambda' \neq \lambda$, vale

$$\left|\lambda - \lambda'\right| > \varepsilon$$

sicché $\lambda \in \sigma_{\text{pp}}(A)$. Poiché $\lambda \in \sigma(A)$ che è chiuso, esiste una successione $\{\lambda_n\} \subset \sigma(A)$ di modo che $\lambda_n \to \lambda$. Se ammettiamo che λ non sia isolato in $\sigma(A)$, grazie alla diseguaglianza di sopra, possiamo supporre che $\{\lambda_n\} \subset \sigma'_{\text{c}}(A)$, ma siccome quest'ultimo insieme è chiuso, si ha $\lambda \in \sigma'_{\text{c}}(A)$, contrariamente a (i′). Infine, λ è un punto isolato di $\sigma(A)$ e un autovalore con degenerazione finita, in forza di (iii'). Perciò $\lambda \in \sigma_{\text{disc}}(A)$. **(c.v.d.)**

L'ultimo risultato è il

Teorema I.33 (criterio di Weyl) *Sia A un operatore limitato autoaggiunto.*

(i) $\lambda \in \sigma(A)$ *se e solo se esiste una successione di vettori normalizzati* $\psi_n \in D(A)$, *tale che*

$$\lim_{n\to\infty} \|(A-\lambda)\psi_n\| = 0.$$

(ii) $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(A)$ *se e solo se la successione di sopra forma un set ortonormale.*

Dimostrazione La prima parte è molto facile. Per ogni $\varepsilon > 0$, $E_A(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon) \neq 0$, perciò posto $\varepsilon \equiv 1/n$, $n \in \mathbb{N}^\times$, troviamo per ogni n un vettore $\psi_n \in D(A)$ normalizzato nel range di $E_A(\lambda - 1/n, \lambda + 1/n)$, per cui

$$\|(A-\lambda)\psi_n\| = \|(A-\lambda)E_A(\lambda-1/n, \lambda+1/n)\psi_n\| = \left(\int_{-1/n}^{+1/n} |x|^2 \, d\mu_\psi(x)\right)^{1/2} \leq \frac{2}{n^{3/2}} \to 0$$

Vediamo il viceversa. Ammettiamo che $(A-\lambda)$ sia biiettivo e consideriamo la successione $\zeta_n \equiv (A-\lambda)\psi_n \in R(A-\lambda)$. Poiché $(A-\lambda)^{-1}$ è continuo e $\zeta_n \to 0$, abbiamo $\psi_n \to 0$, la qual cosa è assurda, perché gli ψ_n sono normalizzati.

Sia ora $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(A)$, nel costruire la successione degli ψ_n di cui sopra, curiamoci sempre di scegliere ψ_{n+1} ortogonale a $\psi_1, \ldots, \psi_n$ la qualcosa è possibile perché i range dei proiettori sono infinito-dimensionali.

Per quanto riguarda il viceversa, conviene provare la contronominale. Se $\lambda \in \sigma_{\text{disc}}(A)$, allora per ogni s.o.n. $\{e_n\}$ esistono una sottosuccessione, mappata da k_n, e un $\varepsilon > 0$ per cui $\|(A-\lambda)e_{k_n}\| > \varepsilon$, per ogni n.

Visto che $\lambda \in \sigma_{\text{disc}}(A)$ esso è un punto isolato dello spettro ed un autovalore con degenerazione finita. Scomponiamo ogni vettore del s.o.n. come $e_n = e'_n + e''_n$, con $e'_n \in \ker(A-\lambda)$ ed $e''_n \in \ker^\perp(A-\lambda)$. Poiché $\{e'_n\}$ è una successione limitata appartenente a un chiuso di dimensione finita, essa ammette una sottosuccessione convergente. Se k_n è la mappa di tale sottosuccessione, abbiamo che e''_{k_n} non converge, altrimenti e_{k_n}, che è un s.o.n., avrebbe limite forte. Passando eventualmente a una ulteriore sottosuccessione, che diremo ancora mappata da k_n, abbiamo che esiste $\varepsilon'' > 0$

$$\left\|e''_{k_n}\right\| > \varepsilon'' \; \forall n.$$

Ora, ciascun e''_{k_n} è autovettore del proiettore $\mathbb{I} - E_A(\{\lambda\}) = E_A(\mathbb{R}\setminus\{\lambda\})$, perciò

$$\begin{aligned} \left\|(A-\lambda)e''_{k_n}\right\| &= \left\|(A-\lambda)E_A(\mathbb{R}\setminus\{\lambda\})e''_{k_n}\right\| = \left(\int_{\sigma(A)\setminus\{\lambda\}} |x-\lambda|^2 \, d\mu_{e''_{k_n}}(x)\right)^{1/2} \geq \\ &\geq d(\lambda, \sigma(A)\setminus\{\lambda\})\left\|e''_{k_n}\right\| > d(\lambda, \sigma(A)\setminus\{\lambda\})\varepsilon'' \equiv \varepsilon \end{aligned}$$

dove si è usata l'ipotesi che λ fosse un punto isolato di $\sigma(A)$. Dunque,

$$\|(A-\lambda)e_{k_n}\| = \left\|(A-\lambda)e_{k''_n}\right\| > \varepsilon$$

(c.v.d.) come volevamo.

I.5 Complementi

In questa sezione ci occupiamo di alcuni argomenti complementari, ma comunque interessanti, quali l'integrazione sugli spazi di Banach e la formula di Stone per il risolvente.

I.5.1 Integrazione sugli spazi di Banach

Funzioni semplici e regolari Consideriamo il caso di una funzione $f: I \to X$ dove $I = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ e X è uno spazio di Banach. Una funzione di questo genere che abbia immagine finita, cioè in un numero finito n di punti $\{x_i\}_{i\in J_n} \subset X$, di modo che

$$f^{-1}(\{x_i\})$$

sia un boreliano per ogni $i \in J_n$, si dice **semplice**. Chiamiamo $S(I, X)$ l'insieme delle funzioni semplici. Si tratta di uno spazio vettoriale (nel considerare $f + \lambda g$, si partisce I secondo le controimmagini di f, poi di g, e si considera la partizione raffinata) che può essere normato tramite la norma uniforme:

$$\|f\| \equiv \sup_{t\in I} \|f(t)\|$$

Consideriamo il completamento di $S(I, X)$ con la norma uniforme e denotiamolo con $R(I, X)$, spazio delle funzioni regolari.

Funzioni continue Notiamo che $\mathcal{C}(I, X) \subset R(I, X)$. Infatti, sia $f \in \mathcal{C}(I, X)$ e consideriamo la successione di funzioni semplici

$$f_n(t) \equiv \sum_{i=0}^{n-1} f(s_i)\,\chi_{[s_i, s_{i+1})}(t),$$

dove, ovviamente,

$$s_i = t_0 + i\frac{t_1 - t_0}{n}.$$

Poiché I è compatto, f è uniformemente continua, perciò fissato ε esiste n_ε di modo che, se $|t - s| < 1/n_\varepsilon$, allora

$$|f(t) - f(s)| < \varepsilon,$$

da cui, per ogni t, e per ogni $n > n_\varepsilon$

$$|f(t) - f_n(t)| < \varepsilon$$

da cui f_n converge uniformemente a f.

Definizione dell'integrale Per $f \in S(I, X)$ definiamo la mappa a valori in X

$$\int_I f(t)\, dt \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i m\left(f^{-1}(\{x_i\})\right)$$

dove m è la misura di Lebesgue sulla retta reale. La mappa definita è lineare, come si vede considerando le partizioni associate alle controimmagini degli addendi...

Vale poi

$$\left\| \int_I f(t)\, dt \right\| \leq \|f\| \sum_{i=1}^{n} m\left(f^{-1}(\{x_i\})\right) = \|f\| (t_1 - t_0)$$

di modo che la mappa definita è limitata su $S(I, X)$. Per il teorema di estensione degli operatori continui, estendiamo $\int$ a $R(I, X)$. La norma della mappa rimane $(t_1 - t_0)$.

Una diseguaglianza... Per ogni $f \in S(I, X)$

$$\left\| \int_I f(t)\, dt \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \, m\left(f^{-1}(\{x_i\})\right) = \int_I \|f(t)\|\, dt,$$

data $f \in R(I, X)$ esiste $\{f_n\} \subset S(I, X)$ di modo che $\|f - f_n\| \to 0$ e

$$\int_I f(t)\, dt = \lim_{n \to +\infty} \int_I f_n(t)\, dt$$

da cui

$$\left\| \int_I f(t)\, dt \right\| = \left\| \lim_{n \to +\infty} \int_I f_n(t)\, dt \right\| = \lim_{n \to +\infty} \left\| \int_I f_n(t)\, dt \right\| \leq \lim_{n \to +\infty} \int_I \|f_n(t)\|\, dt$$

Ora,

$$\sup_{t \in I} |\|f(t)\| - \|f_n(t)\|| \leq \sup_{t \in I} \|f(t) - f_n(t)\| \to 0$$

perciò $\|f_n\|$ converge uniformemente a $\|f\|$, dunque, scambiando limite ed integrale, otteniamo

$$\left\| \int_I f(t)\, dt \right\| \leq \int_I \|f(t)\|\, dt.$$

Funzionale sotto segno di integrale Sia ℓ un funzionale lineare continuo su X, allora

$$\ell\left(\int_I f(t)\, dt\right) = \int_I \ell(f(t))\, dt$$

Infatti, la tesi vale in modo banale sulle funzioni semplici. Data $f \in R(I, X)$ pari al limite uniforme di $\{f_n\} \subset S(I, X)$, abbiamo,

$$\ell\left(\int_I f(t)\, dt\right) = \ell\left(\lim_{n \to +\infty} \int_I f_n(t)\, dt\right) = \lim_{n \to +\infty} \int_I \ell(f_n(t))\, dt,$$

d'altra parte, per ogni t

$$|\ell(f_n(t)) - \ell(f(t))| \leq \|\ell\| \, \|f_n - f\|$$

da cui, $\ell(f_n(t))$ converge uniformemente a $\ell(f(t))$, perciò

$$\ell\left(\int_I f(t)\, dt\right) = \int_I \ell(f(t))\, dt$$

come volevamo.

Integrazione sulla retta reale Se I coincide con $\mathbb{R}$, diciamo che $f : I \to X$ è integrabile se $f \in R([-r, r], X)$ per ogni r e se $\|f(t)\|$ è integrabile secondo Lebesgue. Allora poniamo

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt \equiv \lim_{r \to +\infty} \int_{[-r,r]} f(t)\, dt.$$

Ancora,

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt = \lim_{r \to +\infty} \int_{[-r,r]} f(t)\, dt \leq \lim_{r \to +\infty} \int_{[-r,r]} \|f(t)\|\, dt = \int_{\mathbb{R}} \|f(t)\|\, dt$$

poiché $\|f(t)\|$ è integrabile.

Inoltre, se ℓ è un funzionale continuo

$$\ell\left(\int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt\right) = \lim_{r \to +\infty} \ell\left(\int_{[-r,r]} f(t)\, dt\right) = \lim_{r \to +\infty} \int_{[-r,r]} \ell(f(t))\, dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \ell(f(t))\, dt$$

dove l'ultima eguaglianza segue dal fatto che $\ell(f(t))$ è integrabile secondo Lebesgue, visto che

$$|\ell(f(t))| \le \|\ell\| \, \|f(t)\| .$$

Derivazione Diciamo che $f \in \mathcal{C}^1(I, X)$ se, per ogni t esiste

$$\frac{d}{dt} f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t+\varepsilon) - f(t)}{\varepsilon}.$$

In particolare, se $f \in \mathcal{C}(I, X)$, allora

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds$$

appartiene a $\mathcal{C}^1(I, X)$ e ha f per derivata, infatti,

$$\|F(t+\varepsilon) - F(t) - f(t)\varepsilon\| = \left\| \int_t^{t+\varepsilon} (f(s) - f(t))\, ds \right\| \le \int_t^{t+\varepsilon} \|f(s) - f(t)\|\, ds \le 2\varepsilon \|f\| ,$$

dunque, come detto, se $f \in \mathcal{C}(I, X)$, allora

$$\frac{d}{dt} \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds = f(t) .$$

Estensione delle definizioni Soffermiamoci sul caso hilbertiano. Sono interessanti le applicazioni $t \mapsto \psi(t) \in \mathcal{H}$ e $t \mapsto A(t) \in L(\mathcal{H})$. Se $\psi(t)$ è integrabile su I, allora

$$\left(\varphi, \int_I \psi(t)\, dt\right) = \int_I (\varphi, \psi(t))\, dt$$

poiché $(\varphi, \cdot)$ è un funzionale lineare continuo su $\mathcal{H}$. Analogamente, se $A(t)$ è integrabile su I, allora

$$\left(\varphi, \left(\int_I A(t)\, dt\right) \psi\right) = \int_I (\varphi, A\psi)\, dt$$

poiché

$$L(\mathcal{H}) \ni C \mapsto (\varphi, C\psi)$$

è un funzionale lineare limitato su $L(\mathcal{H})$.
Quanto detto suggerisce di considerare la seguente estensione

Definizione I.14 *Una funzione $I \ni t \mapsto \psi(t) \in \mathcal{H}$ si dice integrabile se $\|\psi(t)\| \in L^1(I, dt)$ e per ogni φ la funzione $(\varphi, \psi(t))$ risulta misurabile in t. In questo caso si definisce integrale di $\psi(t)$ il vettore tale che per ogni $\varphi \in \mathcal{H}$*

$$\left(\varphi, \int_I \psi(t)\, dt\right) = \int_I (\varphi, \psi(t))\, dt$$

La definizione è ben posta, perché se $\|\psi(t)\|$ è sommabile, allora

$$\left| \int_I (\varphi, \psi(t))\, dt \right| \le \int_I |(\varphi, \psi(t))|\, dt \le \|\varphi\| \int_I \|\psi(t)\|\, dt < +\infty$$

e inoltre

$$\varphi \mapsto \int_I (\varphi, \psi(t))\, dt$$

è un funzionale continuo antilineare, perciò, dal teorema di Riesz, si conclude l'esistenza dell'integrale di $\psi(t)$.
Analogamente

Definizione I.15 *Una funzione $I \ni t \mapsto A(t) \in \mathcal{H}$ si dice integrabile se $\|A(t)\| \in L^1(I, dt)$ e per ogni $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ la funzione $(\varphi, A(t)\psi)$ risulta misurabile in t. In questo caso si definisce integrale di $A(t)$*

l'operatore tale che

$$\left(\varphi, \left(\int_I A(t)\ dt\right)\psi\right) = \int_I (\varphi, A(t)\psi)\ dt$$

La definizione è ben posta, infatti

$$(\varphi, A(t)\psi) \leq \|\varphi\|\,\|\psi\|\,\|A(t)\| \in L^1(I, dt),$$

inoltre

$$(\varphi, \psi) \mapsto \int_I (\varphi, A(t)\psi)\ dt$$

è una forma sesquilineare limitata.
Abbiamo subito la seguente

Proposizione I.16 *Se $A(t)$ è integrabile, allora $\psi(t) = A(t)\psi$ è integrabile e vale*

$$\left(\int dt\, A(t)\right)\psi = \int dt\ (A(t)\psi)$$

Dimostrazione Che $A(t)\psi$ sia integrabile è ovvio. Inoltre,

$$\left(\varphi, \left(\int dt\, A(t)\right)\psi\right) = \int dt\ (\varphi, A(t)\psi) = \left(\varphi, \int dt\ (A(t)\psi)\right).$$

(c.v.d.)

Funzioni parametriche di A Sia ora $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione boreliana limitata tale che $f(\cdot, \lambda)$ sia integrabile in t per ogni λ. Definiamo allora

$$F(\lambda) = \int dt\, f(t, \lambda)$$

Dato A operatore autoaggiunto è ben definito l'operatore $F(A)$. Vogliamo vedere che

$$F(A) = \int dt\, f(t, A)$$

Anzitutto, $t \mapsto f(t, A)$ è integrabile: infatti

$$\int_I \|f(t, A)\|\ dt \leq \sup|f|\, m(I)$$

e

$$\int_I dt\, (\varphi, f(t, A)\psi) = \int_I dt \int d\mu_{\varphi,\psi}(\lambda)\ f(t, \lambda),$$

poiché $dt \otimes d\mu_{\varphi,\psi}$ è uno spazio di misura finita e f è limitata e misurabile, abbiamo che $f(t, A)$ è effettivamente integrabile, e, dal teorema di Fubini

$$\left(\varphi, \left(\int_I dt\, f(t, A)\right)\psi\right) = \int_I d\mu_{\varphi,\psi}(\lambda) \int dt\, f(t, \lambda) = \int_I d\mu_{\varphi,\psi}(\lambda)\, F(\lambda) = (\varphi, F(A)\psi)$$

come volevamo.
In definitiva, abbiamo dimostrato il seguente

Lemma I.10 *Supponiamo che $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sia una funzione boreliana limitata tale che $f(\cdot, \lambda)$ sia integrabile per ogni λ. Poniamo*

$$F(\lambda) \equiv \int_I f(t, \lambda)\ dt.$$

Per ogni operatore autoaggiunto A è ben definito l'operatore

$$F(A) = \int_I f(t, A)\ dt$$

$$F(A)\psi = \int_I f(t, A)\psi\, dt$$

Lemma I.11 *Sia $f : \mathbb{R} \to L(\mathcal{H})$ integrabile e sia $A \in L(\mathcal{H})$, allora*

$$A \int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} Af(t)\, dt$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\, A\, dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, A\, dt$$

Dimostrazione Che $f(t)\, A$ e $Af(t)$ sono integrabile è ovvio. Inoltre,

$$\begin{aligned}\left(\varphi, A \int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt\, \psi\right) &= \int_{\mathbb{R}} dt\, (A^*\varphi, f(t)\, \psi) = \int_{\mathbb{R}} dt\, (\varphi, Af(t)\, \psi) = \\ &= \left(\varphi, \int_{\mathbb{R}} Af(t)\, dt\, \psi\right)\end{aligned}$$

(c.v.d.) l'altro asserto è analogo.

I.5.2 Formula di Stone

Dimostrazione della formula di Stone Consideriamo la funzione

$$f(t, \lambda) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{t + i\varepsilon - \lambda} - \frac{1}{t - i\varepsilon - \lambda}\right)$$

essa è boreliana limitata per ogni t e λ reali. Integriamola in t per $t \in [t_1, t_2]$ in modo da ottenere $F_\varepsilon(\lambda)$. Allora, per quanto visto in precedenza,

$$F_\varepsilon(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{t_1}^{t_2} dt\, (R_A(t + i\varepsilon) - R_A(t - i\varepsilon))$$

Poiché, per $\varepsilon \downarrow 0$,

$$F_\varepsilon(t) \to \frac{1}{2}\left(\chi_{[t_1,t_2]}(t) + \chi_{]t_1,t_2[}(t)\right)$$

in modo equilimitato, si ha

$$\text{s-}\lim_{\varepsilon\downarrow 0} F_\varepsilon(A) = \text{s-}\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{2\pi i}\int_{t_1}^{t_2} dt\, (R_A(t + i\varepsilon) - R_A(t - i\varepsilon)) = \frac{1}{2}\left(E([t_1, t_2]) + E(]t_1, t_2[)\right)$$

che è la formula di Stone.

Proiettori spettrali e risolvente Se Γ è una curva differenziabile a valori in $\rho(A)$, abbiamo che è ben definito l'operatore

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R_A(z)\, dz$$

Inoltre,

$$\begin{aligned}\left(\varphi, \left[\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R_A(z)\, dz\right]\psi\right) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\varphi, R_A(z)\,\psi)\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma dz \int d\mu_{\varphi,\psi}(\lambda)\, \frac{1}{z - \lambda} = \\ &= \int d\mu_{\varphi,\psi}(\lambda)\, \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma dz \frac{1}{z - \lambda} = \int d\mu_{\varphi,\psi}(\lambda)\, \chi_\Omega(\lambda) = \\ &= (\varphi, E(\Omega)\,\psi)\end{aligned}$$

essendo Ω l'intersezione dell'interno di Γ con $\mathbb{R}$. Dunque,

$$E(\Omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R_A(z)\, dz$$

Autospazi e residui del risolvente In particolare, se λ_0 è un punto isolato dello spettro, ivi

$$\operatorname{Res} R_A(\lambda_0) = E(\{\lambda_0\})$$

cioè il residuo di $R_A(z)$ nei punti isolati dello spettro è proprio il proiettore sull'autospazio relativo al punto isolato stesso.

Capitolo II

Operatori compatti e traccia

Per completare la teoria degli operatori limitati sugli spazi di Hilbert, occorre ancora rendere conto di alcune importanti classi di operatori. Si tratta degli operatori compatti, di quelli classe traccia e di quelli di Hilbert-Schmidt che sono fondamentali in meccanica statistica, perché rappresentano le cosiddette matrici densità.

II.1 Operatori positivi e decomposizione polare

II.1.1 Operatori positivi

Definizione II.1 *Sia B un operatore limitato sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. B si dice* **positivo** *se $(x, Bx) \geq 0$ per ogni x in $\mathcal{H}$. Se B è positivo scriviamo $B \geq 0$. La scrittura $A \geq B$ significa che $A - B$ è un operatore positivo.*

Ogni operatore positivo è autoaggiunto. Infatti, A è limitato e inoltre ammette valori medi reali. Per ogni operatore A in $L(\mathcal{H})$ si ha che A^*A è positivo, $(x, A^*Ax) = (Ax, Ax) = \|Ax\|^2 \geq 0$.

Proposizione II.1 *Sia A un operatore positivo, allora $\sigma(A) \subset [0, +\infty[$.*

Dimostrazione Anzitutto A, essendo autoaggiunto, ha spettro reale. Vediamo allora che se $\lambda < 0$, allora $(A - \lambda\mathbb{I})^{-1}$ esiste ed è limitato. Se λ è negativo, allora non può essere un autovalore di A, altrimenti,

$$(x, Ax) = \lambda(x, x) < 0$$

la qual cosa è assurda.

Perciò $(A - \lambda\mathbb{I})$ è iniettivo. Vediamo che ha immagine densa,

$$R^{\perp}(A - \lambda\mathbb{I}) = \ker(A^* - \lambda\mathbb{I}) = \ker(A - \lambda\mathbb{I}) = \{0\}.$$

Ora, per ogni $x \in \mathcal{H}$, risulta

$$\begin{aligned}\|(A - \lambda\mathbb{I})x\|^2 &= ((A - \lambda\mathbb{I})x, (A - \lambda\mathbb{I})x) = (x, (A - \lambda\mathbb{I})(A - \lambda\mathbb{I})x) = \\ &= \|Ax\|^2 - 2\lambda(x, Ax) + \lambda^2\|x\|^2 \geq \lambda^2\|x\|^2\end{aligned}$$

visto che $-2\lambda(x, Ax) \geq 0$. Quindi, per ogni $z \in D(A - \lambda\mathbb{I})^{-1}$

$$\left\|(A - \lambda\mathbb{I})^{-1}z\right\| \leq \frac{1}{|\lambda|}\|z\|$$

(c.v.d.) la tesi.

Un operatore autoaggiunto positivo ammette dunque radice quadrata. Avendo spettro nella semiretta reale positiva, è ben definito l'operatore $\sqrt{A}$ che risulta autoaggiunto e tale che

$$\left(\sqrt{A}\right)^2 = A,$$

il tutto grazie al teorema spettrale.

Lemma II.1 (della radice quadrata) *Dato un operatore positivo limitato A, esiste ed è unico un operatore positivo limitato B talché $A = B^2$.*

Dimostrazione L'esistenza l'abbiamo già mostrata, basta porre $B \equiv \sqrt{A}$. Veniamo all'unicità. Sia B' talché $(B')^2 = A$ e $B' \geq 0$. Ne viene che

$$B'A = (B')^3 = AB'$$

perciò B' commuta con A. Siccome B è una funzione continua di A, allora B' commuta con B. Perciò

$$\begin{aligned} (B - B')\, B\, (B - B') + (B - B')\, B'\, (B - B') &= (B + B')\, (B - B')\, (B - B') = \\ &= \left(B^2 - B'^2\right) (B - B') = 0 \end{aligned}$$

poiché ambo gli addendi a primo membro sono positivi, essi devono essere entrambi zero. Ne viene che la loro differenza deve essere nulla, cioè

$$(B - B')^3 = 0$$

Ma siccome $B - B'$ è un operatore autoaggiunto (dunque normale)

$$\|B - B'\|^4 = \left\|(B - B')^4\right\| = 0$$

(c.v.d.) sicché $\|B - B'\| = 0$, cioè $B = B'$.

Possiamo adesso definire $|A|$:

Definizione II.2 *Sia A un operatore in $L(\mathcal{H})$. Definiamo $|A| \in L(\mathcal{H})$ come $|A| = \sqrt{A^*A}$.*

La definizione è chiaramente ben posta. Notiamo che $|\lambda A| = |\lambda|\, |A|$, ma non sono in generale vere le proprietà che si hanno per i numeri complessi, cioè $AB = |A|\, |B|$ o $|A| = |A^*|$.

Proposizione II.2 *Se $\{A_n\}$ è una successione di operatori limitati positivi che converge in norma ad A positivo, allora $\left\{\sqrt{A_n}\right\}$ converge in norma a $\sqrt{A}$. Se $\{A_n\} \subset L(\mathcal{H})$ è una successione qualsiasi, allora $\{|A_n|\}$ converge in norma a $|A|$.*

Dimostrazione La seconda parte è un ovvio corollario della prima. La prima parte è invece un caso particolare della proposizione I.4 una volta che si sia notato che la radice è continua su $[0, +\infty[$

(c.v.d.) e tutti gli spettri coinvolti sono contenuti in tale insieme.

II.1.2 Isometrie parziali

Isometrie parziali Chiamiamo **isometria parziale** un operatore limitato U che sia una isometria sullo spazio chiuso $(\ker U)^\perp$. Ora,

$$\mathcal{H} = (\ker U)^\perp + \ker U$$

e U mappa $(\ker U)^\perp$ in $R(U)$. Siccome U è una isometria su $(\ker U)^\perp$ è presto visto che $R(U)$ è uno spazio chiuso, perciò

$$\mathcal{H} = R(U) + R^\perp(U)\,.$$

Se chiamiamo $(\ker U)^\perp$ lo **spazio iniziale** di U e $R(U)$ lo **spazio finale** di U, ne abbiamo che U è un operatore unitario tra il suo spazio iniziale e il suo spazio finale (che come abbiamo visto sono ambedue di Hilbert).
Poiché U è una isometria da $(\ker U)^\perp$ in $R(U)$, abbiamo, per ogni $x, y \in (\ker U)^\perp$

$$(Ux, Uy) = (x, y)$$

come si vede subito usando la polarizzazione.

Aggiunto di una isometria parziale

Occupiamoci di U^*. Abbiamo che $\ker U^* = R^\perp(U)$, perciò lo spazio iniziale di U^* è proprio $R(U)$. Inoltre, poiché si ha a che fare con operatori limitati, $\ker U = R^\perp(U^*)$. Perciò lo spazio finale di U^* è $(\ker U)^\perp$. Vediamo che U^* è una isometria su $R(U)$. Infatti, sia $x \in R(U)$, allora esiste $z \in (\ker U)^\perp$ tale che $x = Uz$ e x e z hanno la stessa norma. Abbiamo

$$\begin{aligned}\|U^*x\|^2 &= \|U^*Uz\|^2 = (U^*Uz, U^*Uz) = (U(U^*Uz), Uz) = (U^*Uz, z) = \\ &= (Uz, Uz) = \|z\|^2 = \|x\|^2\end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che U^*Uz appartiene a $(\ker U)^\perp$.

Proiettori sugli spazi iniziale e finale

Infine, consideriamo

$$\begin{aligned}P_{\mathrm{i}} &\equiv U^*U \\ P_{\mathrm{f}} &\equiv UU^*\end{aligned}$$

e mostriamo che essi sono, ordinatamente, il proiettore sullo spazio iniziale e sullo spazio finale di U. Infatti, sia $x \in (\ker U)^\perp$, allora

$$\begin{aligned}(U^*Ux - x, U^*Ux - x) &= \|x\|^2 - (x, U^*Ux) - (U^*Ux, x) + (U^*Ux, U^*Ux) = \\ &= 2\|x\|^2 - 2(Ux, Ux) = 0\end{aligned}$$

perciò $U^*Ux = x$. Se poi $x \in (\ker U)^\perp$, vale $x = 0$. Questo mostra la tesi per il primo proiettore. Vediamo il secondo. Per quanto trovato UU^* è il proiettore sullo spazio iniziale di U^*, cioè $R(U)$, ossia lo spazio finale di U.
Riassumendo

Proposizione II.3 *Sia U una isometria parziale. Allora U^* è una isometria parziale dallo spazio finale di U al suo spazio iniziale. Inoltre,*

$$\begin{aligned}P_{\mathrm{i}} &\equiv U^*U \\ P_{\mathrm{f}} &\equiv UU^*\end{aligned}$$

sono, ordinatamente, il proiettore sullo spazio iniziale e sullo spazio finale di U.

In generale, una isometria è una isometria parziale avente spazio iniziale esteso a tutto $\mathcal{H}$. Allora vale $U^*U = \mathbb{I}$, ma $UU^* = \mathbb{I}|_{R(U)}$.

II.1.3 Decomposizione polare

Sfruttando le strutture introdotte nelle precedenti sottosezioni, siamo finalmente in grado di dimostrare il

Teorema II.1 (di decomposizione polare) *Sia A un operatore lineare limitato sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Allora esiste una isometria parziale U tale che $A = U|A|$. U è univocamente determinato dalla condizione* $\ker U = \ker A$. *Inoltre, $R(U) = R^a(A)$.*

Dimostrazione Definiamo U su $R(|A|)$ nel modo seguente

$$U(|A|\psi) = A\psi$$

per ogni $\psi \in \mathcal{H}$. Poiché

$$\||A|\psi\|^2 = \left(\psi, |A|^2\psi\right) = (\psi, A^*A\psi) = (A\psi, A\psi) = \|A\psi\|^2$$

abbiamo che U è ben definito (cioè se $|A|\psi = |A|\varphi$ vale $A\psi = A\varphi$) ed è una isometria su $R(|A|)$. Perciò U si estende per continuità a una isometria da $R^a(|A|)$ a $R^a(A)$. Estendiamo U a tutto $\mathcal{H}$ ponendolo 0 su $R^\perp(|A|) = \ker|A|$. Ora, $|A|\psi = 0$ implica, per l'espressione di sopra, $A\psi = 0$, valendo pure il viceversa, si ha $\ker U = R^\perp(|A|) = \ker(A)$.

Non ci resta che mostrare l'unicità di U. Se U' è una seconda isometria parziale tale che $U'|A| = A$ e $\ker U' = \ker U = \ker A$. Abbiamo che U' e U coincidono su $\ker A$. Ora,

$$(\ker A)^\perp = (\ker|A|)^\perp = R^a(|A|)$$

perciò dobbiamo confrontare U e U' su $R^a(|A|)$. Poiché coincidono su $R(A)$, essi coincidono anche su $R^a(A)$ e perciò $U = U'$ ovunque. (c.v.d.)

Osservazione II.1 Sia $A = U|A|$. Consideriamo la decomposizione di $\mathcal{H}$ in $\ker|A| = \ker A$ e nel suo ortogonale. Siccome l'ortogonale di $\ker|A|$ coincide con lo spazio iniziale di U, abbiamo

$$|A|\psi = |A|(P_{\ker^\perp A} + P_{\ker A})\psi = |A|P_{\mathrm{i}}\psi + |A|P_{\ker|A|}\psi = |A|P_{\mathrm{i}}\psi$$

d'altra parte $P_{\mathrm{i}} = U^*U$ sicché

$$|A| = |A|U^*U = (|A|U^*)U = (U|A|)^*U = A^*U$$

ma, visto che $|A|$ è autoaggiunto,

$$|A| = |A|^* = U^*A$$

cioè $A = U|A|$ e $|A| = U^*A$. ■

II.2 Operatori compatti

II.2.1 Il teorema di Ascoli

Vogliamo motivare l'introduzione degli operatori compatti a partire dagli operatori integrali. A questo scopo ci occorrono alcuni strumenti di base dell'analisi funzionale, probabilmente noti al lettore (magari dal corso di Analisi II), e che andiamo di seguito a ricapitolare.
In primo luogo, formalizziamo uno di quegli *strumenti generali della matematica* che abbiamo, peraltro, già avuto modo di usare, il *trucco della diagonalizzazione*:

Lemma II.2 *Sia data la famiglia $\{f_{n,m}\} \subset \mathbb{R}$ indicizzata dalle coppie di interi (n,m). Se la famiglia è equilimitata, cioè esiste $C \geq 0$ talché*

$$|f_{n,m}| \leq C \;\forall n, m \in \mathbb{N},$$

allora esiste una sottosuccessione mappata da k_n tale che, per ogni $m \in \mathbb{N}$, $\{f_{k_n,m}\}$ è convergente per $n \to \infty$.

Dimostrazione Poniamo $m = 1$ e consideriamo la successione $\{f_{n,1}\}$ in $\mathbb{R}$. Poiché essa è limitata da C, per il teorema di Bolzano, esiste una sua sottosuccessione convergente a $f_{\infty,1} \in \mathbb{R}$. Chiamiamo la mappa di questa sottosuccessione $k_n^{(1)}$. Ora, passiamo a considerare $\left\{f_{k_n^{(1)},2}\right\} \subset \mathbb{R}$, sottosuccessione di $\{f_{n,2}\}$; ancora essa è limitata e perciò ammette una sottosuccessione, mappata da $k_n^{(2)}$, convergente a $f_{\infty,2} \in \mathbb{R}$. Per induzione costruiamo una famiglia indicizzata da m di sottosuccessioni mappate da $k_n^{(m)}$ tali che

$$\lim_{n\to\infty} f_{k_n^{(m)},m} = f_{\infty,m}$$

Ora, per costruzione $\left\{f_{k_n^{(m)},m}\right\}$ è una sottosuccessione di $\left\{f_{k_n^{(m-1)},m}\right\}$, cioè se $q \leq m$ si ha che $\left\{f_{k_n^{(m)},m}\right\}$ è una sottosuccessione di $\left\{f_{k_n^{(q)},m}\right\}$. Questo, evidentemente, si traduce con il fatto che, fissati n, m e $q \leq m$, esiste un l talché

$$k_n^{(m)} = k_l^{(q)}$$

con $n \leq l$.
Vogliamo vedere che esiste il limite per $n \to \infty$ della successione

$$\left\{f_{k_n^{(n)},m}\right\} \subset \mathbb{R}.$$

Notiamo che essa è effettivamente una sottosuccessione di $\{f_{n,m}\}$. Infatti, esiste $l \geq n$ per cui

$$k_n^{(n)} = k_l^{(1)} \geq l$$

di modo che

$$k_n^{(n)} \geq n.$$

Fissato m e fissato $\varepsilon > 0$, troviamo ν talché se $n > \nu$ allora

$$\left| f_{k_n^{(m)},m} - f_{\infty,m} \right| < \varepsilon$$

Preso $\mu \geq m$, abbiamo che per ogni $n > \nu$ esiste $l \geq n > \nu$ di modo che

$$k_n^{(\mu)} = k_l^{(m)}$$

perciò

$$\left| f_{k_n^{(\mu)},m} - f_{\infty,m} \right| = \left| f_{k_l^{(m)},m} - f_{\infty,m} \right| < \varepsilon$$

In particolare, preso $\mu \equiv n \geq m$ e $n > \nu$, troviamo

$$\left| f_{k_n^{(n)},m} - f_{\infty,m} \right| < \varepsilon,$$

(c.v.d.) cioè la tesi.

Introduciamo adesso le nozioni di **equicontinuità**

Definizione II.3 *Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni da uno spazio metrico (X, d_X) a uno spazio metrico (Y, d_Y). Diciamo che $\mathcal{F}$ è una famiglia* **equicontinua** *se e solo se per ogni prefissato $\varepsilon > 0$ e per ogni $x \in X$, esiste un $\delta(x, \varepsilon) > 0$ talché, per ogni $f \in \mathcal{F}$,*

$$d_X(x, x') < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Diciamo che $\mathcal{F}$ è **uniformemente equicontinua** *se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta(\varepsilon) > 0$, talché, per ogni $x \in X$ e per ogni $f \in \mathcal{F}$,*

$$d_X(x, x') < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Come accade per la continuità e la continuità uniforme, vale la seguente

Proposizione II.4 *Se $\mathcal{F}$ è una famiglia equicontinua di funzioni definite su uno spazio metrico compatto a valori in $\mathbb{R}$, allora $\mathcal{F}$ è uniformemente equicontinua.*

Dimostrazione Fissiamo $\varepsilon > 0$. Allora per ogni $x \in X$ esiste $r(x)$ talché se $d(x, x') < r(x)$ allora $|f(x) - f(x')| < \varepsilon/2$. Per ogni $x \in X$ consideriamo la palla $B(x, r(x)/2)$. L'insieme di tali palle costituisce un ricoprimento aperto di X. Poiché X è compatto, estraiamo un sottoricoprimento finito di X, cioè

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \delta_i)$$

avendo posto

$$\delta_i \equiv \frac{r(x_i)}{2}.$$

Sia $\delta \equiv \min\{\delta_i\}$. Preso un qualunque $x \in X$ esiste x_i talché $x \in B(x_i, \delta_i)$. Scelto x' di modo che $d(x, x') < \delta$, abbiamo

$$d(x_i, x') \leq d(x_i, x) + d(x, x') < \delta_i + \delta \leq 2\delta_i = r(x_i)$$

sicché

$$|f(x) - f(x')| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x') - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(c.v.d.) la qual cosa equivale alla tesi, essendo δ dipendente dal solo ε.

Teorema II.2 *Sia $\{f_n\} \subset (Y, d_Y)$ una successione equicontinua di funzioni definite su (X, d_X). Se f_n converge puntualmente su X alla funzione f a valori in (Y, d_Y), allora f è continua.*

Dimostrazione Presi $\varepsilon > 0$ e $x \in X$, esiste $\delta \equiv \delta(x,\varepsilon) > 0$, tale che se $d_X(x,x') < \delta$ allora $d_Y(f_n(x), f_n(x')) < \varepsilon/2$, perciò, per la continuità nelle due variabili di d_Y,

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

(c.v.d.)

Teorema II.3 *Sia $\{f_n\}$ una successione equicontinua di funzioni definite su (X, d_X) a valori nello spazio metrico completo (Y, d_Y). Se f_n converge puntualmente su un denso $D \subset X$ allora f_n converge puntualmente ovunque in X.*

Dimostrazione La prova è un semplice argomento $\varepsilon/3$. Sia $x \in D$ e mostriamo che $f_n(x)$ è una successione di Cauchy. Abbiamo, per la diseguaglianza triangolare,

$$d_Y(f_n(x), f_m(x)) \leq d_Y(f_n(x), f_n(x')) + d_Y(f_n(x'), f_m(x')) + d_Y(f_m(x'), f_m(x)).$$

Ora, fissato $\varepsilon > 0$ troviamo δ talché se $d_X(x,x') < \delta$ allora, per ogni k

$$d_Y(f_k(x), f_k(x')) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'altra parte, siccome D è denso in X troviamo $x' \in D$ talché $d_X(x,x') < \delta$. Siccome $f_n(x')$ converge, essa è di Cauchy, perciò troviamo ν per cui se $n, m > \nu$, allora

$$d_Y(f_n(x'), f_m(x')) < \frac{\varepsilon}{3}$$

e con questo, se $n, m > \nu$, per ogni $x \in X$

$$d_Y(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon.$$

Si noti che, poiché Y è completo, il limite di f_n è una funzione a valori in Y che, per il teorema precedente è continua. **(c.v.d.)**

Concentriamoci adesso sulle funzioni a valori in $[0,1]$. Dimostreremo il ben noto teorema di Ascoli.

Teorema II.4 *Sia $\{f_n\}$ una successione uniformemente equicontinua di funzioni definite su $[0,1]$. Se $\{f_n\}$ converge puntualmente a f per ogni $x \in [0,1]$, allora la convergenza è uniforme.*

Dimostrazione Come abbiamo dimostrato, f è una funzione continua. Ma essendo definita su un compatto è anche uniformemente continua, perciò per ogni prefissato ε esiste un $\delta_1 \equiv \delta_1(\varepsilon)$ tale che

$$|x - y| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'altra parte, poiché f_n è uniformemente equicontinua, per ogni ε esiste un $\delta_2 \equiv \delta_2(\varepsilon)$ talché, per ogni n

$$|x - y| < \delta_2 \Longrightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sicché fissiamo $\delta \equiv \min\{\delta_1, \delta_2\}$ in modo da verificare simultaneamente le due condizioni di sopra.

In $[0,1]$ scegliamo i punti $y_1, \ldots, y_m$ in modo che $|y_i - y_{i+1}| = \delta/2 < \delta$. Poiché l'insieme degli y_i è finito, troviamo ν in modo che se $n > \nu$ allora, per ogni $i \in J_m$,

$$|f_n(y_i) - f(y_i)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

In definitiva, siccome per ogni x esiste un i per cui $|x - y_i| < \delta$, si ha

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_n(y_i)| + |f_n(y_i) - f(y_i)| + |f(y_i) - f(x)| < \varepsilon$$

(c.v.d.)

Teorema II.5 (di Ascoli) *Sia $\{f_n\}$ una successione equicontinua ed equilimitata di funzioni definite su $[0,1]$, allora esiste una sottosuccessione convergente uniformemente.*

Dimostrazione Sia $D \equiv \mathbb{Q} \cap [0,1]$ allora D è un denso in $[0,1]$. Sia $q_1 < q_2 < \ldots < q_n < \ldots$ una numerazione dei punti di D (che è numerabile). Consideriamo la famiglia di reali indicizzata da n, m, $\{f_n(q_m)\}$, poiché essa è equilimitata, per il *trucco della diagonalizzazione*, se ne può estrarre una sottosuccessione convergente

$$\lim_{n\to\infty} f_{k_n}(q_m) = f(q_m)$$

Visto che f_{k_n} converge puntualmente su un denso ed è equicontinua, converge puntualmente ovunque in $[0,1]$. Il teorema precedente può essere applicato, perché su un compatto equicontinuità ed equicontinuità uniforme sono equivalenti. Questo reca immediatamente alla tesi. **(c.v.d.)**

II.2.2 Operatori compatti

Un esempio di operatore compatto Per introdurre gli operatori compatti ci serviamo di un interessante esempio. Si consideri l'operatore K definito sulla varietà lineare $\mathcal{C}([0,1])$ dall'espressione seguente

$$(K\phi)(x) \equiv \int_0^1 \kappa(x,x')\,\phi(x')\,dx'$$

La funzione $\kappa(x,x')$ è continua sul quadrato $[0,1]\times[0,1]$ e si dice **kernel** dell'**operatore integrale** K.
Abbiamo

$$|(K\phi)(x)| \le \int_0^1 |\kappa(x,x')\,\phi(x')|\,dx' \le \sup_{x,x'\in[0,1]} |\kappa(x,x')| \sup_{x'\in[0,1]} |\phi(x')|$$

cioè, se normiamo $\mathcal{C}([0,1])$ con la norma del superiore, abbiamo

$$\|K\phi\|_\infty \le \left(\sup_{x,x'\in[0,1]} |\kappa(x,x')|\right) \|\phi\|_\infty$$

cioè l'operatore K è continuo.
Sia $B(0,M] \subset \mathcal{C}([0,1])$ l'insieme delle funzioni aventi norma minore o eguale a M. Poiché κ è continua sul quadrato che è un compatto, κ è una funzione uniformemente continua, perciò dato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $|x - x'| < \delta$, allora

$$|\kappa(x,y) - \kappa(x',y)| < \varepsilon$$

per ogni $y \in [0,1]$. Ne viene che se $\phi \in B(0,M]$, allora

$$|(K\phi)(x) - (K\phi)(x')| \le \int_0^1 |\kappa(x,y) - \kappa(x',y)|\,\phi(y)\,dy \le \varepsilon M$$

Questo mostra che la famiglia di funzioni $K(B(0,M])$ è (uniformemente) equicontinua, poiché

$$\|K\phi\|_\infty \le \|K\|\,M,$$

possiamo usare il teorema di Ascoli e concludere che ogni successione in $B(0,M]$ è mappata in una successione in $K(B(0,M])$ che ammette una sottosuccessione convergente.
Se in uno spazio metrico tutte le successioni ammettono una sottosuccessione convergente, si ha che tale spazio ha chiusura compatta e si dice **precompatto**.
Ne deriva che $K(B(0,M])$ è un precompatto di $\mathcal{C}([0,1])$, cioè

Proposizione II.5 *L'operatore integrale K definito su $\mathcal{C}([0,1])$ con la norma del superiore manda insiemi limitati in insiemi precompatti.*

Poniamo la

Definizione II.4 *Siano X e Y due spazi di Banach. Un operatore $T \in L(X,Y)$ si dice* **compatto** *se manda sottoinsiemi limitati di X in sottoinsiemi precompatti di Y.*

Equivalentemente, T è compatto se mappa successioni limitate in X in successione di Y che ammettono una sottosuccessione convergente.

La proposizione precedente mostra, dunque, che K è un operatore compatto.

Esempio II.1 Un altre classe di operatori che sono compatti sono gli operatori di **rango finito**, tali che, cioè,

$$\dim R(T) \equiv m < +\infty.$$

In questo caso, fissata una base di versori $\{y_1, \ldots, y_m\}$ in $R(T)$, abbiamo, per ogni x,

$$Tx = \sum_{i=1}^{m} a_i y_i$$

Sia, ora, x_n una successione in $\mathcal{H}$, di modo che ogni x_n individua la m-upla $a_i^{(n)}$. La applicazione che da x_n reca alla m-upla $a_i^{(n)}$ è composizione di trasformazioni lineari (T e il passaggio alle coordinate) limitate (la seconda perché lineare tra spazi di dimensione finita, $R(T)$ e $\mathbb{C}^m$) perciò, per ogni n

$$\max_{i \in J_m} \left| a_i^{(n)} \right| \le k \|x_n\| \le k \sup_n \|x_n\|$$

Dunque tutte le successioni di $\mathbb{C}^m$, $\left\{ a_i^{(n)} \right\}$ sono limitate. Preso $i = 1$, estraiamo da $a_1^{(n)}$ una sottosuccessione convergente (teorema di Bolzano), $a_1^{(k_n)}$. Da $a_2^{(k_n)}$ estraiamo una sottosuccessione convergente e così via, di modo che, alla fine otteniamo $a_i^{(j_n)}$ convergente in ogni i. Infine, $\{Tx_{j_n}\}$ è convergente. ▪

Teorema II.6 *Un operatore su uno spazio di Hilbert è compatto se mappa successioni debolmente convergenti in successioni fortemente convergenti.*

Dimostrazione Sia T compatto. Sia x_n una successione in $\mathcal{H}$ convergente debolmente a x. Consideriamo, per ogni z, la successione (x_n, z). Essa è convergente in $\mathbb{C}$, perciò ivi limitata, dunque, per ogni n

$$|(x_n, z)| \le M_z$$

Siccome $(x_n, \cdot)$ è un operatore limitato di norma $\|x_n\|$, per il teorema dell'uniforme limitatezza, abbiamo che esiste M, talché, per ogni M,

$$\|x_n\| \le M$$

cioè x_n è limitata.

Poniamo $y_n \equiv Tx_n$, allora, per ogni $z \in \mathcal{H}$

$$\lim_{n\to\infty} (Tx_n - Tx, z) = \lim_{n\to\infty} (x_n - x, T^* z) = 0$$

cioè $y_n = Tx_n$ converge debolmente a $y \equiv Tx$. Supponiamo, per assurdo, che y_n non converga forte a y. Allora esiste un $\varepsilon_0 > 0$ e una sottosuccessione $\{y_{k_n}\}$ di $\{y_n\}$, tali che, per ogni n

$$\|y_{k_n} - y\| \ge \varepsilon_0$$

Poiché la successione $\{x_{k_n}\}$ è limitata e T è compatto, y_{k_n} ha una sottosuccessione convergente a $\tilde{y} \neq y$. Questa sottosuccessione deve convergere debolmente a $\tilde{y}$, la qual cosa è assurda, poiché, per unicità del limite, deve convergere debolmente a y. **(c.v.d.)**

Sia, viceversa, T tale da mandare successioni convergenti deboli in successioni convergenti forti: vediamo che è compatto.
Sia $D \subset \mathcal{H}$ un insieme limitato. Dobbiamo dimostrare che per ogni $\{x_n\} \subset D$, la successione $\{Tx_n\}$ ammette una sottosuccessione convergente. A questo scopo, basta mostrare che $\{x_n\}$ ammette una sottosuccessione $\{x_{k_n}\}$ che converge debolmente. In tal caso, infatti, avremmo che $\{Tx_{k_n}\}$ converge forte ed è sottosuccessione di $\{Tx_n\}$.
Dimostriamo allora il seguente

Teorema II.7 *In uno spazio di Hilbert separabile ogni successione limitata ammette una sottosuccessione convergente debolmente.*

Dimostrazione Sia $\{x_n\}$ la successione limitata in $\mathcal{H}$. Poiché $\mathcal{H}$ è separabile, fissiamo un s.o.n.c. $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}$. La varietà lineare $E \equiv \mathcal{V}\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ (combinazioni lineari finite dei vettori del s.o.n.c.) è densa in $\mathcal{H}$.

Consideriamo, per ogni fissato i

$$\ell_n(e_i) \equiv (x_n, e_i) \in \mathbb{C}$$

Per ogni i, n

$$|\ell_n(e_i)| = |(x_n, e_i)| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|.$$

Dal *trucco di diagonalizzazione*, esiste allora la mappa k_n talché, per ogni i,

$$\lim_{n\to\infty} \ell_{k_n}(e_i) \equiv \ell(e_i) \in \mathbb{C}$$

Mostriamo che ℓ, definito su E e a valori in $\mathbb{C}$, è lineare e limitato. Per la linearità, se $\sum a_i e_i \in E$,

$$\ell\left(\sum a_i e_i\right) = \lim_{n\to\infty} \sum a_i (x_{k_n}, e_i) = \sum a_i \lim_{n\to\infty} (x_{k_n}, e_i) = \sum a_i \ell(e_i);$$

per la continuità,

$$\left|\ell\left(\sum a_i e_i\right)\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\left(x_{k_n}, \sum a_i e_i\right)\right| \leq \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|\right) \left\|\sum a_i e_i\right\|.$$

Dal teorema di estensione, abbiamo che ℓ si estende a un operatore continuo e definito sull'intero $\mathcal{H}$ che denoteremo ancora come ℓ. Poiché ℓ appartiene al duale di $\mathcal{H}$, dal teorema di Riesz, abbiamo che esiste $x \in \mathcal{H}$ per cui, per ogni $z \in \mathcal{H}$,

$$\ell(z) = (x, z).$$

In particolare, per ogni vettore $v \in E$,

$$\lim_{k_n\to\infty} (x_{k_n}, v) = \ell(v) = (x, v)$$

Se z è un vettore qualsiasi in $\mathcal{H}$, esiste la successione $\{z_m\} \subset E$ con $z_m \to z$, perciò

$$|(x_{k_n} - x, z)| \leq |(x_{k_n} - x, z - z_m)| + |(x_{k_n} - x, z_m)|$$

Poiché $\{x_n\}$ è limitata possiamo considerare il reale

$$M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_{k_n} - x\|.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$, allora troviamo $\bar{m}$ tale che $\|z - z_{\bar{m}}\| < \varepsilon/(2M)$. Preso questo $\bar{m}$, troviamo ν tale che se $n > \nu$ allora

$$|(x_{k_n} - x, z_{\bar{m}})| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Perciò, se $n > \nu$

$$\begin{aligned} |(x_{k_n} - x, z)| &\leq |(x_{k_n} - x, z - z_{\bar{m}})| + |(x_{k_n} - x, z_{\bar{m}})| \leq \\ &\leq \|x_{k_n} - x\| \|z - z_{\bar{m}}\| + |(x_{k_n} - x, z_{\bar{m}})| < \\ &< M\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Ne viene che

$$\lim_{n\to\infty} (x_{k_n}, z) = (x, z)$$

(c.v.d.) In definitiva, abbiamo provato che $\{x_{k_n}\}$ converge debolmente a x.

Ne abbiamo, come detto, il seguente

Teorema II.8 *In uno spazio di Hilbert separabile un operatore è compatto se e solo se mappa successioni convergenti debolmente in successioni convergenti fortemente.*

Abbiamo, adesso, il seguente

Teorema II.9 *Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e sia T un operatore limitato su $\mathcal{H}$. Valgono allora i seguenti* *fatti*

(i) *se* $\{T_n\}$ *è una successione di operatori compatti che convergono in norma a* T*, allora* T *è compatto;*

(ii) *se* S *è un operatore limitato e* S *o* T *sono compatti, allora* ST *è compatto;*

(iii) T *è compatto se e solo se* T^* *è compatto.*

Dimostrazione Vediamo (i). Consideriamo una successione limitata $\{x_m\}$ in $\mathcal{H}$. Preso l'operatore compatto T_1 determiniamo una sottosuccessione $\left\{x_m^{(1)}\right\}$ di $\{x_m\}$ tale che

$$\lim_{m\to\infty} T_1 x_m^{(1)} = z_1$$

Siccome $\left\{x_m^{(1)}\right\}$ è limitata, estraiamo da essa una sottosuccessione $\left\{x_m^{(2)}\right\}$ tale che

$$\lim_{m\to\infty} T_2 x_m^{(2)} = z_2,$$

naturalmente,

$$\lim_{m\to\infty} T_1 x_m^{(2)} = z_1.$$

Procediamo induttivamente. Adesso consideriamo la successione $\{y_k\}$ dove

$$y_k \equiv x_k^{(k)}$$

come al solito (*trucco della diagonalizzazione*), per ogni n

$$\lim_{k\to\infty} T_n y_k = z_n.$$

Poniamo

$$M \equiv 2\sup_{k\in\mathbb{N}} \|y_k\|,$$

allora

$$\begin{aligned}\|Ty_k - Ty_m\| &\leq \|Ty_k - T_n y_k\| + \|T_n y_k - T_n y_m\| + \|T_n y_m - Ty_m\| \leq \\ &\leq M\|T - T_n\| + \|T_n y_k - T_n y_m\|\end{aligned}$$

Fissato $\varepsilon > 0$ troviamo n sufficientemente grande affinché $\|T - T_n\| < \varepsilon/(2M)$, a quel punto, visto che $T_n y_k$ è di Cauchy, esiste ν talché se $k, m > \nu$ allora $\|T_n y_k - T_n y_m\| < \varepsilon/2$, da cui

$$\|Ty_k - Ty_m\| < \varepsilon,$$

cioè Ty_k è una successione convergente. In questo modo, abbiamo estratto da Tx_m una sottosuccessione convergente, infine, T è compatto.

Siano T compatto e S limitato. Sia $\{x_n\}$ una successione limitata in $\mathcal{H}$, allora $\{Tx_n\}$ ammette una sottosuccessione convergente $\{Tx_{k_n}\}$ a $z \in \mathcal{H}$. Allora

$$\|STx_{k_n} - Sz\| \leq \|S\|\,\|Tx_{k_n} - z\| \to 0,$$

perciò ST è compatto. Consideriamo ora $\{Sx_n\}$ essa è ancora una successione limitata, visto che S è limitato, dunque esiste una sua sottosuccessione $\{Sx_{m_n}\}$ tale che TSx_{m_n} converge. In definitiva, TS è compatto.

Se A è compatto, A^* è limitato, perciò AA^* è compatto. Quindi, per ogni successione $\{x_n\}$ limitata, esiste una sottosuccessione $\{x_{k_n}\}$ tale che $\{AA^* x_{k_n}\}$ è convergente. Ora,

$$\begin{aligned}\|A^* x_{k_n} - A^* x_{k_m}\|^2 &= \left([x_{k_n} - x_{k_m}], AA^*[x_{k_n} - x_{k_m}]\right) \leq \\ &\leq \|x_{k_n} - x_{k_m}\|\,\|AA^*(x_{k_n} - x_{k_m})\|\end{aligned}$$

(c.v.d.) ed essendo la successione di partenza limitata, si conclude la tesi.

Poiché la somma e le combinazioni lineari di compatti danno operatori compatti, si conclude

Proposizione II.6 *La classe degli operatori compatti su* $\mathcal{H}$, $L_{\mathrm{C}}(\mathcal{H})$, *è un ideale bilatero chiuso e stabile per aggiunzione della* C^**-algebra* $L(\mathcal{H})$.

Un ultima proprietà degli operatori compatti sugli spazi di Hilbert è la seguente

Proposizione II.7 *Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert separabile. Allora ogni operatore compatto su $\mathcal{H}$ si ottiene come limite in norma di una successione di operatori di rango finito.*

Dimostrazione Sia T un operatore compatto. Sia $\{e_i\}$ un s.o.n.c. in $\mathcal{H}$. Definiamo la successione di numeri reali

$$\lambda_n = \sup_{v \in \{e_1,\ldots,e_n\}^\perp, \|v\|=1} \|Tv\|$$

Chiaramente λ_n è una successione decrescente non negativa, perciò ammette limite non negativo, $\lambda \geq 0$.

Scegliamo una successione $\{v_n\}$ di modo che

$$v_n \in \{e_1, \ldots, e_n\}^\perp, \ \|v_n\| = 1, \ \|Tv_n\| \geq \frac{\lambda}{2}$$

(tutti i requisiti sono evidentemente ben definiti).

Ora, per ogni i

$$\ell(e_i) = \lim_{n\to\infty} (v_n, e_i) = 0$$

sicché su $E \equiv \mathcal{V}\{e_i\}$, si ha che $\ell = 0$. Preso $x \in \mathcal{H}$ e $\bar{x} \in E$,

$$|(v_n, x)| \leq |(v_n, x - \bar{x})| + |(v_n, \bar{x})|$$

da cui, se prendiamo $\bar{x}$ talché $\|x - \bar{x}\| < \varepsilon/2$ e n più grande di ν di modo che $|(v_n, \bar{x})| < \varepsilon/2$, troviamo

$$|(v_n, x)| < \varepsilon.$$

In fondo, v_n converge debolmente a 0. Allora, come abbiamo dimostrato, Tv_n converge (fortemente) a $T0 = 0$. Perciò, essendo $\|Tv_n\| \geq \lambda/2$, $\lambda = 0$. Dunque, posto

$$T_n \equiv \sum_{i=1}^{n} (e_i, \cdot)\, Te_i,$$

abbiamo

$$\|T - T_n\| = \lambda_n$$

(c.v.d.) perciò $T_n \to T$ in norma.

Proposizione II.8 *Sia A un operatore compatto e autoaggiunto e sia f una funzione continua su $\mathbb{R}$. Allora $f(A)$ è un operatore compatto.*

Dimostrazione Sul compatto $[-\|A\|, \|A\|]$ determiniamo, via il teorema di Weierstraß, una successione di polinomi P_m che converge uniformemente a f. Allora, per il teorema del calcolo funzionale operatoriale, $P_m(A)$ converge in norma a $f(A)$. Poiché $P_m(A)$ è banalmente compatto e l'insieme degli operatori compatti è chiuso per limiti in norma, concludiamo che $f(A)$ è compatto. **(c.v.d.)**

II.2.3 L'alternativa di Fredholm

Alternativa di Fredholm Il fatto di base che rende molto importante lo studio degli operatori compatti è la cosiddetta **alternativa di Fredholm**: se A è compatto, allora o $A\psi = \psi$ ammette soluzione non banale, oppure esiste $(\mathbb{I} - A)^{-1}$ limitato (o, equivalentemente, $\mathbb{I} - A$ è un operatore biunivoco). Cioè o 1 è un autovalore, oppure appartiene al risolvente di A. L'alternativa di Fredholm è banalmente rispettata per tutti gli operatori in dimensione finita, infatti $\mathbb{I} - A$ è iniettivo se e solo se è suriettivo. Ne viene che la dimostrazione dell'alternativa di Fredholm riposerà sul fatto che gli operatori compatti sono limiti in norma di operatori di rango finito.

Dal punto di vista della soluzione di equazioni, l'alternativa di Fredholm è uno strumento potente. Essa ci dice che se per ogni φ esiste al più uno ψ talché

$$\varphi + A\psi = \psi$$

(cioè la soluzione dell'omogenea è banale), allora per ogni φ esiste sempre un tale ψ (poiché $(\mathbb{I} - A)^{-1}$ esiste limitato). In altri termini, *unicità e compattezza implicano esistenza.*
Come abbiamo accennato, l'alternativa di Fredholm è una proprietà spettrale. Perciò cominciamo con il dimostrare il seguente

Teorema II.10 *Sia A un operatore compatto e sia $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, allora*

(i) $\ker(\lambda - A)$ *ha dimensione finita;*

(ii) $R(\lambda - A)$ *è chiuso.*

Dimostrazione Se ogni chiuso e limitato (basta anche la sfera oppure la palla chiusa unitaria) in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ è compatto, allora $\mathcal{H}$ ha dimensione finita. Infatti, ammettiamo che ogni chiuso limitato (o la palla chiusa o la sfera di raggio uno) sia compatto, ma che lo spazio di Hilbert abbia dimensione infinita. Consideriamo allora la sfera unitaria (o la palla chiusa) di $\mathcal{H}$ e una sua qualunque successione di vettori indipendenti (cosa possibile perché siamo in dimensione infinita). Ortogonalizziamo (od ortonormalizziamo) la successione, ottenenendo un s.o.n. $\{e_n\}$ di $\mathcal{H}$. Ora,

$$\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$$

perciò non esiste una sottosuccessione di $\{e_n\}$ che sia convergente. Infine, la sfera unitaria è non compatta, la qual cosa è assurda.

Dobbiamo allora mostrare che la palla chiusa unitaria in $\ker(\lambda - A)$ è compatta (i). Sia allora $\{x_n\}$ una successione nella palla chiusa unitaria intersecata con il kernel di $\lambda - A$. Allora la successione $\{Ax_n\}$ ammette una sottosuccessione convergente, perciò $\{\lambda x_n\}$ e, essendo $\lambda \neq 0$, $\{x_n\}$ ammettono una sottosuccessione convergente.

Vogliamo dimostrare adesso che $R(\lambda - A)$ è un insieme chiuso. Ammettiamo il contrario. Allora esiste una successione $\{(\lambda - A)\, x_n\}$ che converge forte a $y \notin R(\lambda - A)$. Di certo allora $y \neq 0$, e perciò, per n abbastanza grande, $x_n \notin \ker(\lambda - A)$. Supponiamo allora che nessun x_n appartenga al kernel di $\lambda - A$ e, poiché quest'ultimo è chiuso, la distanza δ_n di ogni x_n da esso è strettamente positiva. Per ogni x_n scegliamo $u_n \in \ker(\lambda - A)$, di modo che $\|x_n - u_n\| < 2\delta_n$. Poniamo

$$k_n \equiv \|x_n - u_n\|$$

e mostriamo che $k_n \to +\infty$. Se questo fosse non è vero, allora la successione $\{x_n - u_n\}$ sarebbe limitata, così dalla $\{A(x_n - u_n)\}$ si estrarrebbe una sottosuccessione convergente, perciò, essendo

$$x_n - u_n = \frac{1}{\lambda}\left[(\lambda - A)(x_n - u_n) + A(x_n - u_n)\right] = \frac{1}{\lambda}\left[(\lambda - A)\, x_n + A(x_n - u_n)\right]$$

sarebbe possibile estrarre una sottosuccessione convergente a $\bar{y}$ da $x_n - u_n$. Allora, il limite di $\lambda - A$ calcolato su quest'ultima successione, $(\lambda - A)\,\bar{y}$, eguaglierebbe il limite di $\lambda - A$ su x_n, cioè y, ossia

$$y = (\lambda - A)\,\bar{y}$$

da cui $y \in R(\lambda - A)$, assurdo. Abbiamo allora che k_n diverge. Posto $v_n = (x_n - u_n)/k_n$, abbiamo

$$(\lambda - A)\, v_n = \frac{1}{k_n}(\lambda - A)\, x_n \xrightarrow{s} 0$$

Inoltre,

$$v_n = \frac{1}{\lambda}\left[(\lambda - A)\, v_n + Av_n\right]$$

perciò, visto che v_n è una successione di versori, possiamo estrarre da essa una sottosuccessione fortemente convergente a $\bar{v} \in \ker(\lambda - A)$.

Poniamo $w_n = u_n + k_n \bar{v} \in \ker(\lambda - A)$, abbiamo

$$\begin{aligned} \|x_n - w_n\| &\geq \delta_n \\ \|x_n - w_n\| &= \|x_n - u_n - k_n \bar{v}\| = k_n \|v_n - \bar{v}\| < 2\delta_n \|v_n - \bar{v}\| \end{aligned}$$

da cui

$$\delta_n < 2\delta_n \|v_n - \bar{v}\|$$

cioè

$$\frac{1}{2} < \|v_n - \bar{v}\|$$

(c.v.d.) la qual cosa è assurda.

Dal punto (i) abbiamo che ogni eventuale autovalore di un operatore compatto, sarebbe relativo a un autospazio di dimensione finita. Veniamo all'alternativa di Fredholm.

Teorema II.11 *Sia A un operatore compatto in $\mathcal{H}$ e sia $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$: se λ non è autovalore di A, allora appartiene al risolvente di A.*

Dimostrazione Se λ non è autovalore di $\mathcal{H}$ e λ non appartiene al risolvente, allora $(\lambda - A)$ è iniettivo, ma non suriettivo. Perciò, siccome $\mathcal{H}_1 \equiv R(\lambda - A)$ ha da essere chiuso, $\mathcal{H}_1$ è un sottospazio proprio di $\mathcal{H}$. Analogamente, poiché $(\lambda - A)$ è una biiezione tra $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}_1$, allora

$$\mathcal{H}_2 \equiv (\lambda - A)\,\mathcal{H}_1$$

deve essere un sottospazio proprio di $\mathcal{H}_1$. Agendo induttivamente,

$$\mathcal{H}_{n+1} \equiv (\lambda - A)\,\mathcal{H}_n$$

è un sottospazio proprio di $\mathcal{H}_n$. Costruiamo, così, una successione di sottospazi incapsulati $\mathcal{H}_n$. Fissato $\delta > 0$, esiste un versore x_0 di $\mathcal{H}$ tale che $d(x_0, \mathcal{H}_1) > \delta$. Procedendo per induzione costruiamo una successione limitata $\{x_n\}$ tale che $d(x_n, \mathcal{H}_{n+1}) > \delta$. Ora, se $n > m$

$$\frac{1}{\lambda} A(x_m - x_n) = x_m - \left[x_n + \frac{1}{\lambda}\left((\lambda - A)\,x_m - (\lambda - A)\,x_n\right)\right]$$

con il secondo addendo (a secondo membro) che appartiene a $\mathcal{H}_{m+1}$, perciò

$$\left|\frac{1}{\lambda}\right| \|A(x_m - x_n)\| > \delta$$

cioè $\{Ax_n\}$ non ammette sottosuccessione convergenti (non potendo queste essere di Cauchy).

(c.v.d.) Assurdo.

In definitiva, lo spettro di A contenuto in $\mathbb{C}^\times$ è solo puntuale. Occupiamoci allora dello spettro puntuale

Teorema II.12 (Riesz-Schauder) *Sia A un operatore compatto in uno spazio di Hilbert separabile $\mathcal{H}$, allora lo spettro degli autovalori di A ha, al più, cardinalità numerabile. Se lo spettro degli autovalori ha cardinalità numerabile, allora gli autovalori formano una successione convergente a* 0.

Dimostrazione Se $\dim \mathcal{H} < +\infty$, allora, poiché autovettori relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti, $\#\sigma_{\mathrm{p}}(A) \leq \dim \mathcal{H}$.

Adesso $\mathcal{H}$ abbia dimensione numerabile. Per dimostrare il teorema, dobbiamo fare vedere che per ogni r, $B(0, r) \cap \sigma_{\mathrm{p}}(A)$ contiene un numero al più finito di punti. Supponiamo pure che ciò sia falso. Allora esistono un raggio ε e una successione $\{\lambda_n\}$ di autovalori distinti, tali che, per ogni n

$$\varepsilon \leq |\lambda_n| \leq \|A\|$$

Per ogni n consideriamo l'autospazio $E(\lambda_n, A) = \ker(\lambda_n - A)$ e costruiamo la sequenza di spazi di Hilbert

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0 &= E(\lambda_0, A)\\ \mathcal{H}_n &= \mathcal{V}\{E(\lambda_i, A)\,|i \le n\}\end{aligned}$$

Poiché autospazi relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti, abbiamo che $\mathcal{H}_n$ è un sottospazio proprio di $\mathcal{H}_{n+1}$, di modo che è possibile scegliere x_n in $\mathcal{H}_n$ di norma 1 e tale che

$$d(x_n, \mathcal{H}_{n-1}) > \delta$$

Consideriamo allora la successione $\{x_n\}$. Sia $n > m$, allora

$$\begin{aligned}Ax_n - Ax_m &= \lambda_n\left(x_n - \frac{1}{\lambda_n}y_{m,n}\right)\\ y_{m,n} &= (\lambda_n - A)\,x_n + Ax_m\end{aligned}$$

Mostriamo che $y_{m,n}$ che appartiene a $\mathcal{H}_{n-1}$. Abbiamo $x_m \in \mathcal{H}_m \subset \mathcal{H}_{n-1}$ e $x_n \in \mathcal{H}_n$ perciò possiamo scrivere

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} k_i y_i$$

con $y_i \in E(\lambda_i, A)$ e

$$x_m = \sum_{i=1}^{m} p_i z_i$$

con $z_i \in E(\lambda_i, A)$, dunque

$$\begin{aligned}(\lambda_n - A)\,x_n &= \sum_{i=1}^{n} k_i(\lambda_n - A)\,y_i = \sum_{i=1}^{n-1} k_i(\lambda_n - \lambda_i)\,y_i \in \mathcal{H}_{n-1}\\ Ax_m &= \sum_{i=1}^{m} p_i A z_i = \sum_{i=1}^{m} p_i \lambda_i z_i \in \mathcal{H}_m \subset \mathcal{H}_n\end{aligned}$$

Ne viene allora che

$$\|Ax_n - Ax_m\| \ge |\lambda_n|\,\delta \ge \varepsilon\delta > 0$$

(c.v.d.) la qual cosa è assurda, essendo A compatto.

Ancora sugli autovalori degli operatori compatti

Teorema II.13 (di Hilbert-Schmidt) *Sia A un operatore autoaggiunto compatto su $\mathcal{H}$ (separabile di dimensione infinita). Allora esiste un s.o.n.c. $\{\phi_n\}$ di autovettori di A: $A\phi_n = \lambda_n\phi_n$, la successione λ_n può essere riarrangiata in modo che converga a 0.*

Dimostrazione Per ogni autovalore di A scegliamo un s.o.n.c. nel relativo autospazio. Sia $\{\phi_n\}$ la collezione degli autovettori normalizzati così ottenuti. Sia $M = \operatorname{Span}\langle\phi_n\rangle$. Allora $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$. Poiché A è limitato mappa M in M e, quindi, visto che A è autoaggiunto, $M^\perp$ in $M^\perp$. Sia $\tilde{A}$ la restrizione di A a $M^\perp$. Allora $\tilde{A}$ è autoaggiunto (prodotto di autoaggiunti, usando il proiettore su $M^\perp$) e compatto. Dal teorema di Riesz-Schauder, qualsiasi $\lambda \neq 0$ in $\sigma\left(\tilde{A}\right)$ è un autovalore di $\tilde{A}$ e perciò di A, ma visto che tutti gli autovettori di A sono in M, si conclude che $\tilde{A}$ ha raggio spettrale nullo. Quindi $\left\|\tilde{A}\right\| = 0$, cioè $\tilde{A} = 0$. Ne viene che se $\varphi \in M^\perp$ allora $A\varphi = 0$, cioè $\varphi \in M$, dunque $M^\perp = \{0\}$. Infine, $M = \mathcal{H}$.

La successione λ_n ha come punto limite 0: se 0 non appartiene allo spettro puntuale, poiché fuori da ogni palla nell'origine il numero degli autovalori è finito, ma questi hanno degenerazione finita, perciò sono in numero infinito; se 0 appartiene allo spettro puntuale ma **(c.v.d.)** con degenerazione finita, per lo stesso argomento di sopra; viceversa i $\lambda_n = 0$ sono infiniti.

Come ultimo punto riguardo gli operatori compatti vediamo il seguente

Teorema II.14 (forma canonica degli operatori compatti) *Sia A un operatore compatto qualunque su uno spazio di Hilbert separabile $\mathcal{H}$. Esistono due set ortonormali $\{\psi_n\}_{n=1}^N, \{\phi_n\}_{n=1}^N$ e dei numeri reali positivi $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$ con $\lambda_n \to 0$ (se N è infinito) di modo che*

$$A = \sum_{n=1}^N \lambda_n (\psi_n, \cdot) \phi_n$$

dove la somma converge ad A in norma (se N è infinito). I numeri λ_n sono detti **valori singolari** *di A.*

Dimostrazione Poiché A è compatto, A^*A è compatto e autoaggiunto. Dal teorema di Hilbert-Schmidt esiste allora un s.o.n. $\{\psi_n\}_{n=1}^N$ talché

$$A^*A\psi_n = \mu_n\psi_n$$

con $\mu_n \neq 0$ e tale che A^*A è nullo sullo spazio ortogonale a $\{\psi_n\}_{n=1}^N$. Poiché A^*A è positivo, $\mu_n > 0$. Poniamo $\lambda_n \equiv \sqrt{\mu_n}$, e

$$\phi_n \equiv \frac{1}{\lambda_n} A\psi_n$$

La famiglia $\{\phi_n\}_{n=1}^N$ è ortonormale, infatti, se $n \neq m$

$$(\phi_n, \phi_m) = \frac{1}{\lambda_n\lambda_m} (A^*A\psi_n, \psi_m) = \frac{\lambda_n}{\lambda_m} (\psi_n, \psi_m) = 0$$

Se $\psi \in \{\psi_n\}^\perp$ allora $A\psi = 0$, infatti,

$$A^*A\psi = 0$$

dunque o $A\psi = 0$ o $A\psi \in \ker A^* = R^\perp(A)$, ma $A\psi \in R(A)$, cioè $A\psi = 0$.

Ne viene che, per ogni ψ

$$A\psi = A\sum_{n=1}^N (\psi_n, \psi) \psi_n = \sum_{n=1}^N (\psi_n, \psi) A\psi_n = \sum_{n=1}^N \lambda_n (\psi_n, \psi) \phi_n$$

Ora, posto

$$A_i = \sum_{n=1}^N \lambda_n (\psi_n, \cdot) \phi_n,$$

abbiamo

$$\|A - A_i\| = \sup_{\|\psi\|=1} \left\| \sum_{n=i+1}^N (\psi_n, \psi) A\psi_n \right\| = \sup_{\|\psi\|=1, \psi\in\{\psi\}_{n=1}^{i\,\perp}} \|A\psi\|$$

Ma

$$\sup_{\|\psi\|=1, \psi\in\{\psi\}_{n=1}^{i\,\perp}} \|A\psi\|^2 = \sup_{\|\psi\|=1, \psi\in\{\psi\}_{n=1}^{i\,\perp}} (\psi, A^*A\psi) = \sup_{n>i} \mu_n$$

da cui

$$\lim_{i\to\infty} \|A - A_i\| = \lim_{i\to\infty} \sup_{n>i} \lambda_n = \limsup_{i\to\infty} \lambda_i = 0$$

(c.v.d.)

Osservazione II.2 Notiamo che i valori singolari di A non sono altro che gli autovalori di $|A|$ il quale, a sua volta, è compatto. Infatti, se A è compatto, A^*A è compatto e autoaggiunto, dunque $\sqrt{A^*A} = |A|$ è compatto per la proposizione II.8. Vediamo che gli autovalori di $|A|$ sono i valori singolari di A. Ora, i valori singolari sono dati dalle radici degli autovalori di A^*A. D'altra parte, dato B autoaggiunto tale che $B\phi = \lambda\phi$, allora, per f continua su $\mathbb{R}$, si ha

$$f(B)\phi = f(\lambda)\phi.$$

La cosa è certamente vera per i polinomi, ma siccome $f(B)$ è il limite in norma di una successione di polinomi sullo spettro che convergono uniformemente a f sullo spettro, si ha la tesi. Infine, gli autovalori di $|A| = \sqrt{A^*A}$ sono esattamente le radici degli autovalori di A^*A. ▪

II.3 Operatori classe traccia e operatori di Hilbert-Schmidt

II.3.1 Traccia e operatori classe traccia

Traccia di un operatore Una nozione molto importante in meccanica quantistica è la traccia di un operatore. Essa viene introdotta in analogia a quanto si fa in dimensione finita, somma degli elementi di matrice diagonali, ma siccome adesso si ha a che fare con somme infinite è ragionevole aspettarsi che non per tutti gli operatori sia possibile definire una traccia.

Classe traccia Come nella costruzione dell'integrale, cominciamo a definire la traccia, $\mathrm{Tr}\,\cdot$, sugli operatori positivi. Poi, come per L^1, definiremo la **classe traccia,** $\mathcal{T}_1$, nella quale includeremo tutti gli operatori limitati tali che $\mathrm{Tr}\,|A| < +\infty$. Quindi, vedremo che la traccia è un funzionale lineare su $\mathcal{T}_1$.

Proposizione II.9 *Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert separabile e sia $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^\times}$ un suo s.o.n.c. Allora per ogni operatore positivo limitato A definiamo*

$$\mathrm{Tr}\,A = \sum_{n=1}^{\infty} (e_n, Ae_n)$$

traccia *di A. La traccia è indipendente dal set ortonormale scelto per calcolarla e inoltre gode delle seguenti proprietà*

(i) $\mathrm{Tr}\,(A+B) = \mathrm{Tr}\,A + \mathrm{Tr}\,B$;

(ii) $\mathrm{Tr}\,(\lambda A) = \lambda\,\mathrm{Tr}\,A$, *per ogni* $\lambda \geq 0$;

(iii) *per ogni operatore unitario U,* $\mathrm{Tr}\left(UAU^{-1}\right) = \mathrm{Tr}\,A$;

(iv) *se* $0 \leq A \leq B$, *allora* $\mathrm{Tr}\,A \leq \mathrm{Tr}\,B$.

Dimostrazione Date le basi $\{e_n\}, \{u_n\}$ abbiamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} (e_n, Ae_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\|A^{1/2}e_n\right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \left|\left(u_m, A^{1/2}e_n\right)\right|^2$$

poiché la doppia serie è a termini positivi, possiamo riordinarla scambiando le serie,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} (e_n, Ae_n) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \left|\left(u_m, A^{1/2}e_n\right)\right|^2 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \left|\left(A^{1/2}u_m, e_n\right)\right|^2 = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left\|A^{1/2}u_m\right\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} (u_m, Au_m)\end{aligned}$$

da cui la traccia è indipendente dalla base scelta.

Le proprietà (i), (ii) e (iv) sono del tutto ovvie. Vediamo la (iv). A questo scopo è sufficiente calcolare la traccia di UAU^{-1} utilizzando il s.o.n.c. Ue_n, allora

$$\mathrm{Tr}\left(UAU^{-1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (Ue_n, UAe_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (e_n, Ae_n) = \mathrm{Tr}\,A.$$

(c.v.d.)

Definizione II.5 *Un operatore $A \in L(\mathcal{H})$ si dice* **classe traccia** *se e solo se* $\mathrm{Tr}\,|A| < +\infty$. *La famiglia degli operatori siffatti si indica con $\mathcal{T}_1$.*

Prima di procedere oltre ci occorre il seguente

Lemma II.3 *Ogni operatore $B \in L(\mathcal{H})$ si può scrivere come combinazione lineare di quattro operatori unitari.*

Dimostrazione Visto che

$$B = \frac{1}{2}(B + B^*) - \frac{i}{2}[i(B - B^*)]$$

B è combinazione lineare di due autoaggiunti. Supponiamo allora che A sia autoaggiunto e, a parte un fattore ininfluente visto che si passa a combinazione lineari, abbia norma inferiore a 1. Allora gli operatori

$$A \pm i\sqrt{\mathbb{I} - A^2}$$

sono unitari (è una semplicissima verifica) e

$$A = \frac{1}{2}\left(A + i\sqrt{\mathbb{I} - A^2}\right) + \frac{1}{2}\left(A - i\sqrt{\mathbb{I} - A^2}\right)$$

(c.v.d.) la tesi.

Le proprietà degli operatori classe traccia sono le seguenti

Proposizione II.10 *$\mathcal{T}_1$ è uno $*$-ideale di $L(\mathcal{H})$, cioè*

(i) *$\mathcal{T}_1$ è uno spazio vettoriale;*

(ii) *se $A \in \mathcal{T}_1$ e $B \in L(\mathcal{H})$, allora AB e $BA \in \mathcal{T}_1$;*

(iii) *se $A \in \mathcal{T}_1$, allora $A^* \in \mathcal{T}_1$.*

Dimostrazione Siccome $|\lambda A| = |\lambda|\,|A|$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, si ha che se $A \in \mathcal{T}_1$, alloea $\lambda A \in \mathcal{T}_1$. Ora supponiamo che $A, B \in \mathcal{T}_1$. Vogliamo dimostrare che $A + B \in \mathcal{T}_1$. Siano U, V e W le isometrie parziali tali che

$$\begin{aligned} A + B &= U\,|A + B| \\ A &= V\,|A| \\ B &= W\,|B| \end{aligned}$$

Allora, per l'osservazione susseguente al teorema di decomposizione polare,

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\,|A + B| &= \sum_{n=1}^{\infty} (e_n, U^*(A + B)\,e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} |(e_n, U^*(A + B)\,e_n)| \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |(e_n, U^* A e_n)| + \sum_{n=1}^{\infty} |(e_n, U^* B e_n)| = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |(e_n, U^* V\,|A|\,e_n)| + \sum_{n=1}^{\infty} |(e_n, U^* W\,|B|\,e_n)| \end{aligned}$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |(e_n, U^* V\,|A|\,e_n)| &= \sum_{n=1}^{\infty} \left|\left(|A|^{1/2}\,V^* U e_n, |A|^{1/2}\,e_n\right)\right| \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left\||A|^{1/2}\,V^* U e_n\right\| \left\||A|^{1/2}\,e_n\right\| \end{aligned}$$

dove la diseguaglianza di Cauchy può essere utilizzata perché l'ultima serie è prodotto di due successioni ℓ^2, perciò è ℓ^1. Che la seconda successione sia ℓ^2 è ovvio,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\||A|^{1/2}\,e_n\right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (e_n, |A|\,e_n) = \mathrm{Tr}\,|A| < +\infty;$$

al contrario, la verifica sulla seconda successione è più complicata:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left\||A|^{1/2}V^*Ue_n\right\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}(V^*Ue_n,|A|V^*Ue_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(e_n,U^*(V^*|A|V)Ue_n)=\\ &= \mathrm{Tr}\,(U^*(V^*|A|V)U)\end{aligned}$$

Per calcolare l'ultima traccia scegliamo un s.o.n.c. adattato al kernel di U, di modo che troviamo

$$\mathrm{Tr}\,(U^*(V^*|A|V)U)=\sum_{n=1}^{\infty}(Ue_n,(V^*|A|V)Ue_n)=\left.\mathrm{Tr}\right|_{\ker^{\perp}U}(V^*|A|V)\leq\mathrm{Tr}\,(V^*|A|V)$$

ancora, per calcolare quest'ultima traccia, prendiamo un s.o.n.c. adattato a $\ker V$, e concludiamo

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\||A|^{1/2}V^*Ue_n\right\|^2\leq\mathrm{Tr}\,|A|$$

Questo giustifica le diseguaglianze di sopra e ci concenste pure di usare la diseguaglianza di Cauchy-Schwartz in ℓ^2, per ottenere

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(e_n,U^*V|A|e_n)|\leq\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left\||A|^{1/2}V^*Ue_n\right\|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left\||A|^{1/2}e_n\right\|^2\right)^{1/2}\leq\mathrm{Tr}\,|A|$$

Infine,

$$\mathrm{Tr}\,|A+B|\leq\mathrm{Tr}\,|A|+\mathrm{Tr}\,|B|.$$

Passiamo a (ii). Poiché ogni $B\in L(\mathcal{H})$ è combinazione di quattro unitari, preso U unitario ci basta vedere che se $A\in\mathcal{T}_1$ allora anche AU e UA appartengono a $\mathcal{T}_1$. La cosa è ovvia visto che

$$\begin{aligned}|UA| &= \sqrt{A^*U^*UA}=\sqrt{A^*A}=|A|\\ |AU| &= \sqrt{U^*A^*AU}=f(U^*A^*AU)=U^*f(A^*A)U=U^{-1}|A|U\end{aligned}$$

(il passaggio nella seconda espressione è basato sulla proposizione I.5), usando il punto (iii) della proposizione predendente, si ha $\mathrm{Tr}\,|AU|=\mathrm{Tr}\,|A|$.

Infine, abbiamo il punto (iii). Sia $A=U|A|$ e $A^*=V|A^*|$. Allora

$$|A^*|=V^*A^*=V^*|A|U^*$$

Siccome $|A|\in\mathcal{T}_1$ e V^* e U^* sono operatori limitati, da (ii), abbiamo $|A^*|\in\mathcal{T}_1$, quindi
(c.v.d.) $V|A^*|=A^*\in\mathcal{T}_1$.

Un fatto strutturale molto importante per $\mathcal{T}_1$ è il seguente (non facile!!)

Teorema II.15 *In $\mathcal{T}_1$ definiamo*

$$\|A\|_1\equiv\mathrm{Tr}\,|A|$$

allora $(\mathcal{T}_1,\|\cdot\|_1)$ è uno spazio di Banach.

Dimostrazione Sappiamo che $\mathcal{T}_1$ è uno spazio vettoriale. Abbiamo già visto che

$$\|A+B\|_1=\mathrm{Tr}\,|A+B|\leq\mathrm{Tr}\,|A|+\mathrm{Tr}\,|B|=\|A\|_1+\|B\|_1$$

perciò vale la diseguaglianza triangolare. Abbiamo anche notato che

$$\|\lambda A\|_1=|\lambda|\,\mathrm{Tr}\,|A|=|\lambda|\,\|A\|_1$$

sicché non ci resta che dimostrare che se $\mathrm{Tr}\,|A|=0$ allora $A=0$. Per ogni $0\neq v\in\mathcal{H}$, completando v a un s.o.n.c. (dopo averlo normalizzato), abbiamo

$$0=\frac{1}{\|v\|}(v,|A|v)+\sum_{n=2}^{\infty}(e_n,|A|e_n)$$

ma siccome la serie è a termini positivi, per ogni $v \neq 0$

$$(v, |A| v) = 0$$

sicché $|A| = 0$. Dunque, $\mathcal{H} = \ker |A| = \ker A$, cioè A è l'operatore nullo.

Allora $(\mathcal{T}_1, \|\cdot\|_1)$ è uno spazio normato. Vediamo che si tratta di uno spazio completo. Cominciamo con il vedere che

$$\|A\| \leq \|A\|_1$$

Dato un qualsiasi vettore non nullo x e data la base ortonormale $\{e_n\}$ abbiamo, visto che $|A|^{1/2}$ è limitato e $|A|$ è classe traccia, usando la diseguaglianza di Cauchy-Schwartz al finito e poi passando al limite,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=1}^{N} (e_n, x) |A|^{1/2} e_n \right\| &\leq \sum_{n=1}^{N} |(e_n, x)| \left\| |A|^{1/2} e_n \right\| \leq \|x\| \left(\sum_{n=1}^{N} \left\| |A|^{1/2} e_n \right\|^2 \right)^{1/2} \\
\left\| |A|^{1/2} x \right\| &\leq \|x\| (\operatorname{Tr} |A|)^{1/2}
\end{aligned}$$

da cui

$$\left\| |A|^{1/2} \right\|^2 \leq \operatorname{Tr} |A| = \|A\|_1$$

D'altra parte, essendo $|A|$ autoaggiunto,

$$\left\| |A|^{1/2} \right\|^2 = \sup_{\|\psi\|=1} (\psi, |A| \psi) = \| |A| \|$$

sicché

$$\| |A| \| \leq \|A\|_1$$

Ora,

$$\|A\| \leq \|U\| \, \| |A| \| \leq \| |A| \| \leq \|A\|_1$$

Dunque, se $\{A_n\}$ è una successione in $\mathcal{T}_1$ di Cauchy, allora $\{A_n\}$ è una successione di Cauchy nella norma operatoriale, perciò esiste un operatore limitato tale che

$$\lim_{n \to \infty} \|A - A_n\| = 0.$$

Dobbiamo vedere che A appartiene a $\mathcal{T}_1$ e che il limite vale pure rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$. Abbiamo, per ogni fissato $\varepsilon > 0$, $\nu(\varepsilon)$ tale che se $n, m > \nu$, allora

$$\sum_{i=1}^{\infty} (e_i, |A_n - A_m| e_i) < \varepsilon/4,$$

dunque, visto che la serie è a termini positivi, per ogni M intero

$$\sum_{i=1}^{M} (e_i, |A_n - A_m| e_i) < \varepsilon/4$$

Ora, se passiamo al limite per $n \to \infty$, per ogni M,

$$\sum_{i=1}^{M} (e_i, |A - A_m| e_i) \leq \varepsilon/4 < \varepsilon/2$$

visto che la somma è finita e che se $B_n \to B$, allora $|B_n| \to |B|$. Infine, passando al limite per $M \to \infty$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} (e_i, |A - A_m| e_i) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$$

cioè, dato $\varepsilon > 0$ esiste $\nu(\varepsilon)$ tale che, per ogni $m > \nu(\varepsilon)$,

$$\|A - A_m\| = \operatorname{Tr} |A - A_m| < \varepsilon$$

(c.v.d.) Poiché $A = A_m + (A - A_m)$, si conclude che $A \in \mathcal{T}_1$ e che $\mathcal{T}_1$ è completo.

Operatori compatti Siamo pronti ad occuparci del rapporto tra la classe traccia e $L_{\mathrm{C}}(\mathcal{H})$.

Teorema II.16 *Ogni operatore classe traccia è compatto. Viceversa, un operatore compatto è classe traccia se e solo se i suoi valori singolari, λ_n, sono tali che $\sum \lambda_n < +\infty$.*

Dimostrazione Poiché $A \in \mathcal{T}_1$, $|A| \in \mathcal{T}_1$ e dunque $|A|^2 \in \mathcal{T}_1$. Ne viene che per ogni base ortonormale $\{e_n\}$

$$\operatorname{Tr}\left(|A|^2\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2 < \infty.$$

Supponiamo adesso che $\phi \in \{e_1, \ldots, e_N\}^{\perp}$, $\|\phi\| = 1$, allora

$$\operatorname{Tr}\left(|A|^2\right) \geq \sum_{n=1}^{N} \|Ae_n\|^2 + \|A\phi\|^2,$$

dunque

$$\|A\phi\|^2 \leq \operatorname{Tr}\left(|A|^2\right) - \sum_{n=1}^{N} \|Ae_n\|^2$$

da cui

$$\lim_{N\to\infty} \sup\left\{\|A\phi\| \,\middle|\, \phi \in \{e_1, \ldots, e_N\}^{\perp}, \|\phi\| = 1\right\} = 0$$

cioè A è realizzato come limite in norma dell'operatore di rango finito

$$A_N \equiv \sum_{n=1}^{N} (e_n, \cdot)\, Ae_n,$$

sicché A è compatto.

Viceversa, sia A compatto. Allora $|A|$ è compatto e ammette un s.o.n.c. di autovettori agli autovalori λ_n che coincidono con i valori singolari di A. Utilizzando il s.o.n.c. di autovettori per calcolare la traccia di $|A|$, abbiamo

$$\operatorname{Tr}|A| = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$$

(c.v.d.) da cui si ha la tesi.

Teorema II.17 *L'insieme degli operatori di rango finito è $\|\cdot\|_1$-denso in $\mathcal{T}_1$.*

Dimostrazione Sia $A \in \mathcal{T}_1$. Consideriamo il kernel di A e una base ortonormale completa adattata ad esso. Sia N (infinito, altrimenti non ci sarebbe nulla da dimostrare) la codimensione del kernel e siano i vettori $\{e_1, \ldots, e_N\}$ una base per l'ortogonale di $\ker A$.

Consideriamo, per ogni N, l'operatore di rango finito

$$A_N = \sum_{n=1}^{i} (e_n, \cdot)\, Ae_n$$

Abbiamo

$$\{e_1, \ldots, e_N\} \subset \ker(A - A_N) = \ker|A - A_N|$$

perciò

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}|A - A_N| &= \sum_{n=N+1}^{+\infty} (e_n, |A - A_N|\, e_n) \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} (e_n, |A|\, e_n) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} (e_n, |A_N|\, e_n) = \\
&= \sum_{n=N+1}^{+\infty} (e_n, |A|\, e_n) \overset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Si noti che la diseguaglianza usata discende dalla diseguaglianza traingolare della traccia che vale anche per una set ortonormale non completo, perché nella dimostrazione la completezza non entra mai. **(c.v.d.)**

II.3.2 Operatori di Hilbert-Schmidt

Operatori di Hilbert-Schmidt

Finora abbiamo trattato la classe traccia che abbiamo paragonato a ℓ^1, occupiamoci allora dell'analogo di ℓ^2, l'insieme $\mathcal{T}_2$ degli operatori di Hilbert-Schmidt (HS).
Abbiamo visto che l'insieme degli operatori di rango finito è contenuto in $\mathcal{T}_1$, adesso vedremo che $\mathcal{T}_1$ è contenuto in $\mathcal{T}_2$ e che entrambi questi spazi sono inclusi nell'insieme $L_{\mathrm{C}}(\mathcal{H})$ degli operatori compatti.
Introdotti gli operatori HS ci occuperemo anche della definizione della traccia per operatori $\mathcal{T}_1$ non necessariamente positivi.

Definizione II.6 *Un operatore $A \in L(\mathcal{H})$ si dice di* **Hilbert-Schmidt** *se e solo se* $\operatorname{Tr} A^*A < +\infty$. *La famiglia di tutti gli operatori di Hilbert-Schmidt si denota con $\mathcal{T}_2$.*

Confronto tra $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$

Nell'analizzare la classe degli operatori di Hilbert-Schmidt seguiremo un itinerario analogo a quello utilizzato per studiare la classe traccia. Risulta comunque utile stabilire subito una relazione tra gli spazi $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$. Abbiamo già visto che se $A \in \mathcal{T}_1$, allora $A^* \in \mathcal{T}_1$ e $A^*A \in \mathcal{T}_1$, cioè $A \in \mathcal{T}_2$, sicché $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$.
Abbiamo visto pure che $\mathcal{T}_1$ è incluso nell'insieme degli operatori compatti, mostriamo che la stessa cosa succede per $\mathcal{T}_2$:

Teorema II.18 *Ogni operatore di Hilbert-Schmidt è compatto. Viceversa un operatore compatto è di Hilbert-Schmidt se e solo se la successione dei suoi valori singolari è ℓ^2.*

Dimostrazione Se $\{e_n\}$ è una base ortonormale, allora

$$\operatorname{Tr} A^*A = \sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2 < \infty$$

Preso $x \in \{e_1, \ldots, e_N\}^\perp$ normalizzato, abbiamo evidentemente

$$\operatorname{Tr} A^*A \geq \sum_{n=1}^{N} \|Ae_n\|^2 + \|Ax\|^2$$

sicché

$$\|Ax\|^2 \leq \operatorname{Tr} A^*A - \sum_{n=1}^{N} \|Ae_n\|^2$$

Dunque

$$\sup\left\{ \|Ax\| \,\middle|\, x \in \{e_1, \ldots, e_N\}^\perp, \|x\| = 1 \right\} = \|A - A_N\| \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

dove

$$A_N = \sum_{n=1}^{N} (e_n, \cdot)\, Ae_n$$

è un operatore di rango finito. Ne viene che A è compatto.
Viceversa, A^*A è compatto e perciò ammette un s.o.n.c. di autovettori i cui autovalori sono i quadrati dei valori singolari di A, perciò

$$\operatorname{Tr} A^*A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2$$

da cui la tesi. **(c.v.d.)**

Relazione tra $\|\cdot\|, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$

Abbiamo, dunque, che $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2 \subset L_{\mathrm{C}}(\mathcal{H})$. L'insieme degli operatori di rango finito è $\|\cdot\|$-denso in ciascuno di questi spazi di operatori.
Se $A \in \mathcal{T}_1$ allora

$$\operatorname{Tr} A^* A = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 , \ \operatorname{Tr}|A| = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|$$

essendo

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| \geq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2$$

si conclude

$$\|A\|_1 = \operatorname{Tr}|A| \geq \sqrt{\operatorname{Tr} A^* A} \equiv \|A\|_2$$

Poiché $|A|$ è compatto e autoaggiunto

$$\||A|\| = \sup \sigma(|A|) = \sup_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i$$

ma i λ_i si accumulano a zero e $\||A|\| = \|A\|$, perciò

$$\|A\| = \sup_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i = \max_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i$$

da cui ritroviamo la nota diseguaglianza

$$\|A\| \leq \operatorname{Tr}|A| .$$

D'altra parte, per ogni $A \in \mathcal{T}_2$, per ogni x

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^{M} (e_n, x) A e_n \right\| &\leq \sum_{n=1}^{M} |(e_n, x)| \, \|Ae_n\| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |(e_n, x)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2 \right)^{1/2} \\ \|Ax\| &\leq \|x\| \, \|A\|_2 \end{aligned}$$

da cui

$$\|A\| \leq \|A\|_2$$

Riassumendo

Teorema II.19 *Se un operatore A appartiene a $\mathcal{T}_1$ allora*

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_1 ,$$

se $A \in \mathcal{T}_2$, allora

$$\|A\| \leq \|A\|_2 .$$

Struttura di $\mathcal{T}_2$ Veniamo alla struttura di $\mathcal{T}_2$

Teorema II.20 *$\mathcal{T}_2$ è uno $*$-ideale bilatero di $L(\mathcal{H})$ e $\|\cdot\|_2$ è una norma su $\mathcal{T}_2$.*

Dimostrazione Siano $\lambda \in \mathbb{C}$ e $A \in \mathcal{T}_2$, allora, andando a considerare l'operatore λA, abbiamo

$$\operatorname{Tr}(\lambda A)^* (\lambda A) = |\lambda|^2 \operatorname{Tr}(A^* A) < +\infty,$$

sicché $\lambda A \in \mathcal{T}_2$.
Siano $A, B \in \mathcal{T}_2$ e consideriamo $A + B$, abbiamo

$$\|A+B\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|(A+B) e_n\|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\|Ae_n\| + \|Be_n\||^2 \right)$$

e utilizzando la diseguaglianza di Minkowski

$$\begin{aligned} \|A+B\|_2 &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\|Ae_n\| + \|Be_n\||^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Be_n\|^2 \right)^{1/2} = \\ &= \|A\|_2 + \|B\|_2 \end{aligned}$$

Abbiamo così provato che $\mathcal{T}_2$ è uno spazio vettoriale e che $\|\cdot\|_2$ soddisfa la diseguaglianza triangolare. Per vedere, infine, che si tratta di una norma, abbiamo che se $\|A\|_2 = 0$, allora i valori singolari di A sono tutti nulli e con ciò A è nullo.

Sia $A \in \mathcal{T}_2$ e sia T un operatore limitato. Abbiamo in modo immediato che $TA \in \mathcal{T}_2$, infatti

$$\|TA\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|TAe_n\|^2 \leq \|T\| \sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2 < +\infty$$

Per quanto riguarda AT basta mostrare la tesi per T unitario (dal momento che ogni limitato è combinazione lineare di quattro unitari), perciò, se U è unitario

$$\|AU\|_2^2 = \mathrm{Tr}\,(U^* A^* AU) = \mathrm{Tr}\,(A^* A) < +\infty$$

Infine, se $A \in \mathcal{T}_2$, allora consideriamone la decomposizione polare, $A = U\,|A|$, con $|A| \in \mathcal{T}_2$ e U limitato. Essendo $A^* = |A|\, U^*$, si conclude che $A^* \in \mathcal{T}_2$.

Per inciso, si noti

$$\mathrm{Tr}\, AA^* = \mathrm{Tr}\, U\,|A|^2\, U^* \leq \mathrm{Tr}\,|A|^2 = \mathrm{Tr}\, A^* A$$

da cui, invertendo i ruoli di A e A^*

$$\mathrm{Tr}\, A^* A \leq \mathrm{Tr}\, AA^*$$

cioè

$$\mathrm{Tr}\, A^* A = \mathrm{Tr}\, AA^*,$$

ossia

$$\|A\|_2 = \|A^*\|_2\,.$$

(c.v.d.)

Proposizione II.11 *$A \in \mathcal{T}_2$ se e solo esiste una base ortonormale $\{e_n\}$ tale che $\{\|Ae_n\|\} \in \ell^2$.*

Dimostrazione Infatti, visto che le serie sono a termini positivi e perciò possono essere scambiate,

$$\begin{aligned} +\infty \quad > \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} |(u_m, Ae_n)|^2 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |(A^* u_m, e_n)|^2 = \\ = \quad & \sum_{m=1}^{\infty} \|A^* u_m\|^2 \end{aligned}$$

da cui $A^* \in \mathcal{T}_2$ e con ciò $A \in \mathcal{T}_2$.

(c.v.d.)

$\mathcal{T}_2$, a differenza di $\mathcal{T}_1$ e in analogia a ℓ_2, è uno spazio di prodotto scalare:

Teorema II.21 *Se $A, B \in \mathcal{T}_2$, allora per ogni base ortonormale $\{e_n\}$ la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (e_n, A^* Be_n)$$

è assolutamente sommabile e il suo limite, $(A, B)_2$, è indipendente dalla scelta della base.

Dimostrazione L'assoluta convergenza è molto facile da dimostrare

$$\sum_{n=1}^{M} |(e_n, A^* Be_n)| = \sum_{n=1}^{M} |(Ae_n, Be_n)| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Be_n\|^2\right)^{1/2}$$

siccome il primo membro ammette limite per $M \to \infty$, abbiamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(e_n, A^* Be_n)| \leq \|A\|_2\, \|B\|_2 < +\infty$$

Per quanto riguarda l'indipendenza dalla base, scriviamo

$$A^*B = \sum_{r=1}^{4} \frac{1}{4\omega_r} (B+\omega_r A)^* (B+\omega_r A) \equiv \sum_{r=1}^{4} \alpha_r C_r^* C_r$$

dove $\omega_r = 1, -1, i, -i$. Ciascun C_r, come combinazione di operatori di Hilbert-Schmidt, è un operatore di Hilbert-Schmidt, perciò, per ogni base u_n la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n, C_r^* C_r u_n) < +\infty$$

Utilizziamo questa decomposizione di A^*B per cambiare base nel calcolo della traccia:

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (e_n, A^*Be_n) &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N}\sum_{r=1}^{4} \alpha_r (e_n, C_r^*C_r e_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{r=1}^{4} \alpha_r \sum_{n=1}^{N} (e_n, C_r^*C_r e_n) = \\
&= \sum_{r=1}^{4} \alpha_r \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (e_n, C_r^*C_r e_n) = \sum_{r=1}^{4} \alpha_r \sum_{n=1}^{\infty} (e_n, C_r^*C_r e_n) = \\
&= \sum_{r=1}^{4} \alpha_r \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (u_n, C_r^*C_r u_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{r=1}^{4} \alpha_r \sum_{n=1}^{N} (u_n, C_r^*C_r u_n) = \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N}\sum_{r=1}^{4} \alpha_r (u_n, C_r^*C_r u_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (u_n, A^*Bu_n)
\end{aligned}$$

da cui è ben definito

$$(A,B)_2 \equiv \sum_{n=1}^{\infty} (e_n, A^*Be_n)$$

(c.v.d.) per una qualsiasi base ortonormale $\{e_n\}$.

$(\cdot,\cdot)_2$ come prodotto scalare

Vediamo che $(\cdot,\cdot)_2$ è un prodotto scalare: abbiamo, se $A, B \in \mathcal{T}_2$

$$\begin{aligned}
(B,A)_2 &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (e_n, B^*Ae_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (Be_n, Ae_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \overline{(Ae_n, Be_n)} = \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \overline{(e_n, A^*Be_n)} = \overline{\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (e_n, A^*Be_n)} = \overline{\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (e_n, A^*Be_n)} = \\
&= \overline{(A,B)_2}
\end{aligned}$$

e, infine, se $A, B, C \in \mathcal{T}_2$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, procedendo come prima (non ripetiamo pedantemente i passaggi come abbiamo fatto finora)

$$(A, B+\lambda C)_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (Ae_n, Be_n) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} (Ae_n, Ce_n) = (A,B)_2 + \lambda (A,C).$$

Completezza di $\mathcal{T}_2$

Notiamo allora che $\|\cdot\|_2$ è una norma prehilbertiana essendo generata da $(\cdot,\cdot)_2$. Se mostriamo che $\mathcal{T}_2$ è uno spazio di Banach in $\|\cdot\|_2$, ne abbiamo che esso è uno spazio di Hilbert.

La dimostrazione della completezza procede come nel caso di $\mathcal{T}_1$, cioè mima quella di ℓ^p. Anzitutto se $\{A_n\} \subset \mathcal{T}_2$ è di Cauchy in $\|\cdot\|_2$ allora è di Cauchy in $\|\cdot\|$ e perciò esiste

$$\|\cdot\| - \lim_{n\to\infty} A_n \equiv A.$$

Vediamo che A è anche il limite nella norma $\|\cdot\|_2$. Fissiamo $\varepsilon > 0$, allora esiste $\nu(\varepsilon)$ talché se $n, m > \nu(\varepsilon)$, allora

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(e_i, |A_n - A_m|^2 e_i\right) < \varepsilon^2$$

da cui, essendo la serie a termini positivi, per ogni intero M,

$$\sum_{i=1}^{M}\left(e_i,\left|A_n-A_m\right|^2 e_i\right)<\varepsilon^2,$$

ora, se passiamo al limite per $n\to\infty$, abbiamo che A_n-A_m converge in $\|\cdot\|$ a $A-A_m$, perciò si ha convergenza in $\|\cdot\|$, e – a maggior ragione – debole, di $|A_n-A_m|^2$ a $|A-A_m|^2$, sicché per ogni M, per ogni $m>\nu(\varepsilon)$

$$\sum_{i=1}^{M}\left(e_i,\left|A-A_m\right|^2 e_i\right)<\varepsilon^2$$

da cui

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(e_i,\left|A-A_m\right|^2 e_i\right)<\varepsilon^2,$$

la tesi.

Teorema II.22 *Lo spazio $\mathcal{T}_2$ degli operatori di Hilbert-Schmidt è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare*

$$(A,B)_2=\sum_{n=1}^{\infty}(e_n,A^*Be_n)$$

dove $\{e_n\}$ è una base ortonormale qualsiasi.

Lo spazio degli operatori di rango finito è denso anche in $\mathcal{T}_2$

Teorema II.23 *Lo spazio degli operatori di rango finito è $\|\cdot\|_2$-denso in $\mathcal{T}_2$.*

Dimostrazione Sia $\{e_n\}$ una base ortonormale e sia A_N l'operatore $A\in\mathcal{T}_2$ troncato sui primi N vettori della base. Allora

$$\|A-A_N\|_2^2=\sum_{n=1}^{\infty}\|(A-A_N)\,e_n\|^2=\sum_{n=N+1}^{\infty}\|Ae_n\|^2\stackrel{N\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

(c.v.d.)

Un ultimo fatto strutturale importante riguardo la relazione tra $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ è il seguente

Teorema II.24 *$A\in\mathcal{T}_1$ se e solo esistono due operatori $B,C\in\mathcal{T}_2$ di modo che $A=BC$.*

Dimostrazione Se $A=BC$, allora $|A|=U^*BC$. Definiamo $D\equiv U^*B$, poiché U^* è limitato, $D,D^*\in\mathcal{T}_2$, allora

$$\operatorname{Tr}|A|=\sum_{n=1}^{\infty}(e_n,|A|\,e_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(e_n,DCe_n)=(D^*,C)_2<+\infty$$

Viceversa, sia $A\in\mathcal{T}_1$, allora $|A|$ è un operatore compatto autoaggiunto, perciò, per ogni x

$$|A|\,x=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\,(e_n,x)\,e_n$$

dove $\{e_n\}$ è la base di autovettori di $|A|$ agli autovalori $\{\lambda_n\}\in\ell_1$. Definiamo

$$Cx\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{1/2}\,(e_n,x)\,e_n,$$

allora C è un operatore in $\mathcal{T}_2$. Inoltre, $C^2=|A|$, perciò

$$A=U\,|A|=UC^2=BC$$

(c.v.d.) con $B\equiv UC\in\mathcal{T}_2$.

Definizione della traccia per operatori in $\mathcal{T}_1$

Siamo finalmente in grado di introdurre la traccia per operatori qualunque in $\mathcal{T}_1$. Infatti, se $A \in \mathcal{T}_1$, allora esistono B^* e C in $\mathcal{T}_2$ tali che $A = B^*C$, perciò, possiamo definire

$$\operatorname{Tr} A = (B, C)_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (e_n, Ae_n)$$

dove $\{e_n\}$ è una base ortonormale qualunque.
Le proprietà della traccia che restano così da vedere sono raccolte nel seguente

Teorema II.25 *Valgono*

(i) *la traccia è una mappa lineare da $\mathcal{T}_1$ in $\mathbb{R}$;*

(ii) *se $A \in \mathcal{T}_1$, allora $\operatorname{Tr} A^* = \overline{\operatorname{Tr} A}$;*

(iii) *se $A \in \mathcal{T}_1$ e $B \in L(\mathcal{H})$, allora $\operatorname{Tr} AB = \operatorname{Tr} BA$.*

Dimostrazione I punti (i) e (ii) sono del tutto ovvi. Vediamo (iii). Poiché B può essere scritto come combinazione lineare di quattro unitari, è sufficiente dimostrare la tesi nel caso in cui B sia unitario. Allora

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} AB &= \sum_{n=1}^{\infty} (e_n, ABe_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (B^*Be_n, ABB^*Be_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (B^*u_n, Au_n) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (u_n, BAu_n) = \operatorname{Tr} BA \end{aligned}$$

(c.v.d.) dove abbiamo posto $u_n \equiv Be_n$ e abbiamo usato il fatto che $B^*B = BB^* = \mathbb{I}$.

Alcune annotazioni

Prima di chiudere notiamo che non è sufficiente, affinché $A \in \mathcal{T}_1$, che risulti per **una** base ortonormale $\{e_n\}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(e_n, Ae_n)| < \infty$$

(sarebbe vero se usassimo $|A|$ al posto di A).
Se A è autoaggiunto, dal teorema spettrale, risulta che possiamo scrivere $A = A^+ - A^-$ con A^+ e A^- positivi, e tali che $A^+A^- = 0$, $|A| = A^+ + A^-$, perciò

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} A &= \operatorname{Tr} A^+ - \operatorname{Tr} A^- \\ \operatorname{Tr} |A| &= \operatorname{Tr} A^+ + \operatorname{Tr} A^- \end{aligned}$$

da cui $A \in \mathcal{T}_1$ se e solo se $\operatorname{Tr} A_\pm < +\infty$.

Un'applicazione Infine, un'applicazione riguardante la realizzazione concreta di $\mathcal{T}_2$ nel caso in cui $\mathcal{H} = L^2(M, d\mu)$,

Teorema II.26 *Sia $\mathcal{H} = L^2(M, d\mu)$ e sia $A \in L(\mathcal{H})$. Allora $A \in \mathcal{T}_2$ se e solo se esiste una funzione*

$$k \in L^2(M \times M, d\mu \otimes d\mu)$$

talché

$$(Af)(x) = \int k(x, y) f(y)\, d\mu(y)$$

Inoltre,

$$\|A\|_2^2 = \int |k(x, y)|^2\, d\mu(x)\, d\mu(y).$$

Dimostrazione Sia

$$k \in L^2(M \times M, d\mu \otimes d\mu)$$

e sia K l'operatore integrale associato:

$$(Kf)(x) = \int k(x,y) f(y)\ d\mu(y)$$

Mostriamo che Kf è ben definito. Poiché $K \in L^2$, per il teorema di Fubini, $\psi_x(y) = k(x,y) \in L^2(d\mu(y))$. Ne viene che l'integrale che definisce K esiste finito quasi ovunque. Inoltre, usando la diseguaglianza di Hölder,

$$|Kf(x)| \le \int |k(x,y)|\,|f(y)|\ d\mu(y) \le \|\psi_x\|_{L^2} \|f\|_{L^2}$$

La funzione Kf è misurabile, infatti per ogni $g \in L^2$, la funzione $\Phi(x,y) = k(x,y) f(y) g(x)$ è sommabile su $M \times M$, quindi, dal teorema di Fubini, anche la funzione

$$x \mapsto \int \Phi(x,y)\ d\mu(y)$$

è misurabile su M e, per l'arbitrarietà di g, lo sarà anche Kf. Inoltre,

$$\begin{aligned} \int |Kf(x)|^2\, d\mu(x) &\le \int \|\psi_x\|_{L^2}^2 \|f\|_{L^2}^2\ d\mu(x) \le \|f\|_{L^2}^2 \int d\mu(x)\, d\mu(y)\, |k(x,y)| = \\ &= \|f\|_{L^2}^2 \|k\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

cioè

$$\|K\| \le \|k\|_{L^2}$$

Sia $\{\phi_n\}$ una base ortonormale per $L^2(M)$, allora $\left\{\phi_n(x)\,\overline{\phi_m(y)}\right\}$ è una base ortonormale per $L^2(M \times M)$, sicché

$$k(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \alpha_{nm} \phi_n(x)\, \overline{\phi_m(y)}$$

poniamo

$$k_N(x,y) \equiv \sum_{n,m=1}^{N} \alpha_{nm} \phi_n(x)\, \overline{\phi_m(y)}$$

e consideriamo la successione K_N degli operatori integrali associati (rispettivamente) a k_N. K_N è un operatore di rango finito, essendo

$$K_N f = \sum_{n,m=1}^{N} \alpha_{nm} \phi_n(x) \int \overline{\phi_m(y)} f(y)\ d\mu(y) = \sum_{n,m=1}^{N} \alpha_{nm} (\phi_m, f)\, \phi_n$$

Inoltre, visto che k_N converge L^2 a k, si ha che K_N converge in norma a K. Ne viene che K è un operatore compatto. Inoltre,

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} K^* K &= \sum_{n=1}^{\infty} \|K\phi_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \sum_{i,m=1}^{\infty} \alpha_{im} (\phi_m, \phi_n)\, \phi_i \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \sum_{i,m=1}^{\infty} \alpha_{in} \phi_i \right\|^2 = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_{in}|^2 = \|k\|_{L^2}^2 < +\infty \end{aligned}$$

Abbiamo così mostrato che $k \mapsto K$ è una isometria da $L^2(M \times M)$ in $\mathcal{T}_2$, perciò ha immagine chiusa (basta notare che se Ux_n converge, allora x_n è di Cauchy: $\|x_n - x_m\| = \|Ux_n - Ux_m\|$). Se mostriamo che ha dominio denso abbiamo che l'isometria trovata ha immagine in tutto $\mathcal{T}_2$ ed è perciò biunivoca. Ma siccome gli operatori di rango finito sono chiaramente immagini di nuclei in $L^2(M \times M)$ e costituiscono un denso in $\mathcal{T}_2$, concludiamo la tesi. **(c.v.d.)**

Il teorema dà anche una semplice condizione sufficiente affinché un operatore sia compatto (condizione non necessaria dal momento che $\mathcal{T}_2$ non esaurisce l'insieme dei compatti). Viceversa, abbiamo anche una condizione sufficiente affinché un operatore su $L^2(M)$ sia integrale: deve essere di Hilbert-Schmidt.

Capitolo III

Autoaggiunzione ed esistenza di dinamiche

Questo capitolo costituisce un punto di raccordo con il primo volume: riprendiamo, infatti, alcuni aspetti molto tecnici legati all'autoaggiunzione e ci occupiamo dell'esistenza di una dinamica. Con questo capitolo concludiamo l'introduzione di strumenti atti alla comprensione rigorosa della meccanica quantistica elementare.

III.1 Operatori autoaggiunti

III.1.1 Richiami sulle definizioni

Autoaggiunzione Cominciamo il nostro capitolo con alcuni brevi richiami agli operatori autoaggiunti sugli spazi di Hilbert. Un operatore A densamente definito su $\mathcal{H}$ si dice **autoaggiunto** se coincide con il suo aggiunto A^*, cioè se A è simmetrico, i.e., $A \subset A^*$, e $D(A^*) \subset D(A)$.

Alcune definizioni Consideriamo un operatore simmetrico A densamente definito, il suo aggiunto, A^*, risulta densamente definito, perciò aggiuntabile, dunque A è chiudibile (A è chiudibile se e solo se A^* è aggiuntabile) e risulta

$$\bar{A} = A^{**}$$

Dunque, se A è **simmetrico**, risulta

$$A \subset A^{**} \subset A^*$$

visto che A^* è una estensione chiusa di A e $A^{**} = \bar{A}$ è la più piccola estensione chiusa (equivalentemente, l'ultima inclusione deriva dall'aggiunzione della relazione $A \subset A^*$)
Se A è **simmetrico chiuso**, allora

$$A = A^{**} \subset A^*,$$

se invece A è **autoaggiunto**, allora

$$A = A^{**} = A^*$$

Un ultima nozione utile è quella di operatore **essenzialmente autoaggiunto**, per il quale

$$A \subset A^{**} = A^*$$

cioè, A è simmetrico e ha chiusura autoaggiunta (A si estende a un operatore simmetrico semplicemente chiudendo).
Infine, se A è chiuso e $D \subset D(T)$ è tale che

$$\overline{A|_D} = A$$

allora D si dice un **core** per A.

Osservazione III.1 Se A è essenzialmente autoaggiunto, allora ammette un'unica estensione autoaggiunta, ed essa è data da $\bar{A} = A^{**}$. Infatti, sia B un'estensione autoaggiunta di A, allora B è chiuso e

$A \subset B$, dunque $A^{**} \subset B$. Perciò

$$B = B^* \subset (A^{**})^* = A^{**}$$

da cui

$$B = A^{**} = \bar{A}$$

■

Sia A un operatore autoaggiunto e sia D un core per A, allora $A|_D$ è essenzialmente autoaggiunto. Spesso è difficile individuare domini di autoaggiunzione, mentre è agevole determinare determinare domini di essenziale autoaggiunzione. Poiché un operatore essenzialmente autoaggiunto ne individua univocamente uno autoaggiunto, nella pratica conviene specificare non il dominio di A autoaggiunto, ma un suo core.

Teorema spettrale Per concludere, ricordiamo che, come visto nel primo capitolo, gli operatori autoaggiunti ammettono rappresentazione spettrale come operatori di moltiplicazione per una funzione reale su uno spazio $L^2(M, \mu)$. Poiché questi ultimi sono autoaggiunti, si conclude che gli operatori autoaggiunti sono tutti e soli gli operatori che ammettono una interpretazione probabilistica.

III.1.2 Il criterio base per l'autoaggiunzione

Autoaggiunzione e autovalori complessi Apparentemente la nozione di autoaggiunzione è molto complicata, perché coinvolge concetti sottili come i domini. Tuttavia, lo stabilire che un operatore è autoaggiunto non è così proibitivo, visto che esiste un criterio molto semplice che, in ultima analisi, si riferisce allo spettro puntuale dell'operatore.

Tale criterio è già stato presentato nel corso del primo volume, ma noi qui lo deriveremo nuovamente per ricordare le strutture fondamentali dell'autoaggiunzione.

Supponiamo che A sia un operatore autoaggiunto e che $\psi \in D(A) = D(A^*)$ sia tale che $A^*\psi = i\psi$, allora $A\psi = i\psi$ e

$$-i(\psi, \psi) = (i\psi, \psi) = (A\psi, \psi) = (\psi, A^*\psi) = (\psi, A\psi) = i(\psi, \psi)$$

da cui $\psi = 0$. Lo stesso ragionamento vale per ogni $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ al posto di i. Ne viene che lo spettro puntuale di A è tutto reale (tutto lo spettro, del resto).

Vale di più, come dimostrato nel primo volume,

Teorema III.1 *Sia A un operatore simmetrico su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti*

(i) A *è autoaggiunto;*

(ii) A *è chiuso e* $\ker(A^* \pm i) = \{0\}$*;*

(iii) $R(A \pm i) = \mathcal{H}$.

Dimostrazione Se A è autoaggiunto, allora A è chiuso e vale $\ker(A \pm i) = \{0\}$ come detto sopra. Supponiamo che valga (ii) e dimostriamo (iii). Abbiamo

$$(R(A \pm i))^{\perp} = \ker(A^* \mp i) = \{0\}$$

perciò $A \pm i$ ha range denso. Non ci resta che mostrare che $R(A \pm i)$ è chiuso. Sia $\{\psi_n\} \subset D(A)$ tale che

$$(A \pm i)\psi_n \to \psi_{\pm}$$

allora, dato che per $\psi \in D(A)$, visto che A è simmetrico, vale

$$\begin{aligned} \|(A \pm i)\psi\|^2 &= \|A\psi\|^2 \pm i(A\psi, \psi) \mp i(\psi, A\psi) + \|\psi\|^2 = \\ &= \|A\psi\|^2 + \|\psi\|^2 \end{aligned}$$

Dunque, visto che $(A \pm i)\psi_n$ è di Cauchy, tali sono $A\psi_n$ e ψ_n che dunque convergono. Poiché A è chiuso, se chiamiamo ψ_0 il vettore tale che $\psi_n \to \psi_0$ abbiamo $\psi_0 \in D(A)$ e $A\psi_n \to A\psi_0$,

da cui

$$\psi_\pm = (A \pm i)\,\psi_0$$

e perciò abbiamo la tesi.
Ci basta ora vedere che (iii) implica (i). Poiché A è simmetrico, dobbiamo solo mostrare che $D(A^*) \subset D(A)$. Sia $\psi \in D(A^*)$. Visto che $R(A \pm i) = \mathcal{H}$, esiste $\zeta \in D(A)$ per cui

$$(A^* \pm i)\,\psi = (A \pm i)\,\zeta$$

poiché $\psi - \zeta \in D(A^*)$ abbiamo

$$(A^* \pm i)\,(\psi - \zeta) = 0,$$

(c.v.d.) ma $\ker(A^* \pm i) = R(A \mp i)^\perp = \{0\}$, perciò $\psi = \zeta$, dunque $\psi \in D(A)$.

Teorema III.2 *Sia A un operatore simmetrico su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti*

(i) *A è essenzialmente autoaggiunto;*

(ii) $\ker(A^* \pm i) = \{0\}$*;*

(iii) $(R(A \pm i))^a = \mathcal{H}$*.*

Dimostrazione Se A è essenzialmente autoaggiunto, allora A^* è autoaggiunto, perciò

$$\ker(A^{**} \pm i) = \{0\}$$

ma $A^{**} = A^*$, sicché si ha la tesi.
Vediamo che (ii) implica (iii). Da $\ker(A^* \pm i) = \{0\}$ si ha

$$R(A \mp i)^\perp = \mathcal{H}$$

perciò $R(A \mp i\mathbb{I})$ è denso in $\mathcal{H}$.
Infine, (iii) implica (i). Siccome

$$A \subset A^{**} = \bar{A} \subset A^*,$$

si tratta di vedere che $D(A^*) \subset D(A^{**}) = D(\bar{A})$. Cioè che se $\psi \in D(A^*)$, allora esiste una successione $\{\psi_n\} \subset D(A)$ convergente a ψ e tale che $A\psi_n$ è convergente. Per ipotesi, esiste una successione $\{\psi_n^\pm\} \subset D(A)$ tale che

$$(A \pm i)\,\psi_n^\pm \to (A^* \pm i)\,\psi$$

Ma, come visto nella dimostrazione del teorema precedente, il fatto che $(A \pm i)\,\psi_n^\pm$ converga, implica che convergono pure $\psi_n^\pm$, diciamo a $\psi_0^\pm$, e $A\psi_n^\pm$, questa a $\bar{A}\psi_0^\pm = A^*\psi_0^\pm$. Dunque,

$$(A^* \pm i)\,\psi_0^\pm = (A^* \pm i)\,\psi$$

(c.v.d.) cioè $\psi - \psi_0^\pm \in \ker(A^* \pm i) = R(A \mp i)^\perp = \{0\}$, dunque $\psi = \psi_0^\pm$ e con ciò $\psi \in D(\bar{A})$.

Osservazione III.2 Nei teoremi dimostrati, possiamo sostituire alla coppia $\pm i$ la coppia $z, \bar{z}$ per ogni $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, come si vede subito. ▪

Teorema III.3 *Un operatore simmetrico densamente definito su uno spazio di Hilbert è essenzialmente autoaggiunto se e solo se ha spettro reale.*

Dimostrazione Consideriamo un operatore simmetrico avente spettro reale. Consideriamo $A \pm i$, poiché $\pm i \in \rho(A)$, tale operatore deve essere suriettivo, dunque

$$R(A \pm i) = \mathcal{H},$$

perciò A è autoaggiunto.

Viceversa sia A essenzialmente autoaggiunto, allora $\bar{A}$ è autoaggiunto e, per definizione $\sigma(A) = \sigma(\bar{A})$. Si tratta dunque di vedere che lo spettro di B autoaggiunto è reale. Poiché B è autoaggiunto, per ogni $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, vale

$$\begin{aligned} \ker(B - z) &= \{0\} \\ R(B - z) &= \mathcal{H} \end{aligned}$$

dunque, $B - z$ è biiettivo. $(B - z)^{-1}$ è allora ben definito e chiuso, poiché $B - z$ è chiuso. Siccome $D\left((B - z)^{-1}\right) = \mathcal{H}$, per il teorema del grafico chiuso, $(B - z)^{-1}$ è limitato, con ciò $z \in \rho(A)$. Ne viene che $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \subset \rho(B)$, sicché $\sigma(B) \subset \mathbb{R}$. **(c.v.d.)**

Teorema III.4 *Sia A un operatore densamente definito su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Sia A limitato dal basso, cioè esista $M > 0$ di modo che, per ogni $\varphi \in D(A)$, $(\varphi, A\varphi) \geq -M \|\varphi\|$. Allora*

(i) *A è autoaggiunto se e solo se esiste $\lambda > M$ di modo che $R(A + \lambda) = \mathcal{H}$;*

(ii) *A è essenzialmente autoaggiunto se e solo se esiste $\lambda > M$ di modo che $R(A + \lambda)^a = \mathcal{H}$.*

Dimostrazione Se A è limitato dal basso da M, allora

$$(\varphi, (A + M)\varphi) \geq 0$$

perciò, preso $\lambda > M$, abbiamo, posto $a \equiv \lambda - M$,

$$\begin{aligned} \|(A + \lambda)\varphi\|^2 &= \|(A + M + a)\varphi\|^2 = \|(A + M)\varphi\|^2 + a^2\|\varphi\|^2 + 2a(\varphi, (A + M)\varphi) \geq \\ &\geq a^2\|\varphi\|^2, \end{aligned}$$

cioè, se $\lambda > -M$,

$$\|(A + \lambda)\varphi\|^2 \geq (\lambda - M)^2\|\varphi\|^2.$$

ne viene che $A + \lambda$ è iniettivo e ammette inversa limitata.

Se A è chiuso, la disequazione di sopra dimostra che $R(A + \lambda)$ è un insieme chiuso. Perciò, se A è autoaggiunto

$$R(A + \lambda)^{\perp} = \ker(A^* + \lambda) = \ker(A + \lambda) = \{0\}$$

perciò $R(A + \lambda) = \mathcal{H}$.

Se invece A è essenzialmente autoaggiunto, $R(A + \lambda)^{\perp} = \ker(A^* + \lambda)$, ma, siccome A^{**} è autoaggiunto,

$$\{0\} = \ker(A^{**} + \lambda) = \ker(A^* + \lambda)$$

allora

$$R(A + \lambda)^a = \mathcal{H}.$$

Viceversa, sia $R(A + \lambda) = \mathcal{H}$. Allora, per ogni $\psi \in D(A^*)$ esiste $\varphi \in D(A)$ per cui

$$(A^* + \lambda)\psi = (A + \lambda)\varphi,$$

poiché A è simmetrico, $\psi - \varphi \in D(A)$, da cui

$$(A^* + \lambda)(\psi - \varphi) = 0,$$

ossia $\psi - \varphi \in \ker(A^* + \lambda) = R(A + \lambda)^{\perp} = \{0\}$, da cui $\psi \in D(A)$. Infine, $D(A^*) \subset D(A)$.

Infine, sia $R(A + \lambda)^a = \mathcal{H}$. Allora per ogni $\psi \in D(A^*)$ esiste $\{\varphi_n\} \in D(A)$ tale che

$$(A^* + \lambda)\psi = \lim_{n\to\infty}(A + \lambda)\varphi_n.$$

Sempre dalla diseguaglianza di sopra, se $\{(A + \lambda)\varphi_n\}$ converge, allora converge pure $\{\varphi_n\}$. Ne viene che $\varphi_n \to \varphi \in D(\bar{A})$. Poiché A è simmetrico, $\{\psi - \varphi_n\} \in D(A^*)$ e converge a $\psi - \varphi \in D(A^*)$, dunque

$$(A^* + \lambda)(\psi - \varphi) = 0,$$

ossia $\psi - \varphi \in \ker(A^* + \lambda) = R(A + \lambda)^{\perp} = \{0\}$, da cui $\psi \in D(\bar{A})$. Infine, $D(A^*) \subset D(\bar{A})$. **(c.v.d.)**

III.2 Dinamica quantistica

Teoremi di Wigner, Bargmann e Stone

Data una trasformazione dello spazio degli stati (raggi nello spazio di Hilbert) che conservi la probabilità di transizione (il modulo dei prodotti scalari), essa è implementata, sullo spazio di Hilbert, da un operatore unitario oppure antiunitario (**teorema di Wigner**); se consideriamo un gruppo a un parametro di trasformazioni siffatte, il caso antiunitario è escluso (ogni trasformazione è il quadrato di un'altra del gruppo, ma il quadrato di un'antilineare è lineare); la legge di gruppo sulle trasformazioni sui raggi, implica una legge di gruppo analoga sugli operatori unitari, ma stavolta a meno di fasi; poiché però si ha a che fare con un gruppo a un parametro, dal **teorema di Bargmann**, si ha che gli operatori unitari possono essere ridefiniti in modo da eliminare le fasi dette. In conclusione, ogni gruppo a un parametro di simmetrie delle probabilità di transizione, determina un gruppo a un parametro di operatori unitari.

Una volta postulato che l'evoluzione temporale di un sistema fisico sia un gruppo a un parametro (determinismo) di simmetrie, si ha che sullo spazio di Hilbert associato allo spazio degli stati è definito un gruppo a un parametro di operatori unitari. Come ci apprestiamo a dimostrare, **teorema di Stone**, ogni gruppo a un parametro è l'esponenziale nel parametro di un operatore autoaggiunto. In altri termini, data un'evoluzione temporale, esiste senz'altro un operatore autoaggiunto che la determina e viceversa. L'esistenza di una dinamica è dunque legata all'autoaggiunzione. L'operatore autoaggiunto associato all'evoluzione temporale è la **hamiltoniana** del sistema.

Lo studio della dinamica quantistica coincide quindi con lo studio dell'autoaggiunzione, di qui l'importanza del presente capitolo.

Come si vede bastano i teoremi di Wigner, Bargmann e Stone per definire un sistema quantistico. Nella formulazione rigorosa della meccanica quantistica non c'è dunque alcun bisogno del processo di quantizzazione di un sistema classico. Da un punto di vista di principio, la quantizzazione è del tutto inutile, almeno quanto può essere la classicizzazione di un sistema quantistico.

III.2.1 Il teorema di Stone

Come abbiamo detto, il ruolo del teorema di Stone nella formulazione rigorosa della meccanica quantistica è fondamentale. Perciò occupiamocene con cura. Anzitutto, chiariamo meglio l'oggetto della sottosezione ponendo

Definizione III.1 *Un* **gruppo unitario a un parametro fortemente continuo** *è una funzione*

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto U(t) \in L(\mathcal{H})$$

tale che, per ogni $t \in \mathbb{R}$, $U(t)$ è unitario; per ogni $s, t \in \mathbb{R}$, $U(t)U(s) = U(t+s)$; e per ogni $\psi \in \mathcal{H}$ e ogni $t_0 \in \mathbb{R}$, $U(t)\psi \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} U(t_0)\psi$.

Poiché $t \mapsto U(t)\psi$ è una applicazione continua in $\mathcal{H}$, restringendo t a un qualsiasi intervallo reale I si ha che $U(t)\psi$ è integrabile (nel senso specificato nei complementi al capitolo VI del volume primo) su I.

Come anticipato, il teorema di Stone dimostra che ogni gruppo unitario a un parametro è della forma $U(t) = e^{-itA}$ con A autoaggiunto, perciò cominciamo con il dimostrare il seguente

Teorema III.5 *Sia A un operatore autoaggiunto e sia $U(t) = e^{-itA}$. Allora*

(i) *$U(t)$ è un gruppo unitario fortemente continuo a un parametro;*

(ii) *il limite*

$$\lim_{t \to 0} \frac{U(t)\psi - \psi}{t}$$

esiste se e solo se $\psi \in D(A)$ ed in tal caso esso è pari a $-iA\psi$;

(iii) *$D(A)$ coincide con la sua immagine secondo ciascun $U(t)$. Inoltre, $AU(t) = U(t)A$.*

Dimostrazione Il punto (i) discende dal calcolo funzionale. Infatti,

$$\begin{aligned} U(t+s) &= \phi\left(e^{-i(t+s)\lambda}\right) = \phi\left(e^{-it\lambda}e^{-is\lambda}\right) = \phi\left(e^{-it\lambda}\right)\phi\left(e^{-is\lambda}\right) = U(t)U(s) \\ U^*(t)U(t) &= \phi\left(e^{it\lambda}\right)\phi\left(e^{-it\lambda}\right) = \phi(1) = \mathbb{I} \\ U(t)U^*(t) &= \phi\left(e^{-it\lambda}\right)\phi\left(e^{it\lambda}\right) = \phi(1) = \mathbb{I} \end{aligned}$$

Per quanto concerne la continuità forte, dal teorema del calcolo funzionale, basta vedere che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, equilimitatamente

$$\lim_{t\to t_0} e^{-it\lambda} = e^{-it_0\lambda}.$$

La cosa discende dalla continuità di $t \mapsto e^{-it\lambda}$ e dall'ovvia diseguaglianza

$$\left|e^{-it\lambda}\right| \leq 1.$$

Vediamo (ii). Se $\psi \in D(A)$, allora

$$\left\|\frac{U(t)-\mathbb{I}}{t}\psi + iA\psi\right\|^2 = \int \left|\frac{e^{-it\lambda}-1}{t} + i\lambda\right|^2 d\mu_\psi(\lambda)$$

poiché

$$\left|\frac{e^{-it\lambda}-1}{t}\right| \leq |\lambda| \in L^2\left(\mathbb{R}, \mu_\psi\right)$$

dal teorema della convergenza dominata, abbiamo, per ogni $\psi \in D(A)$

$$\lim_{t\to 0}\left\|\frac{U(t)-\mathbb{I}}{t}\psi + iA\psi\right\| = 0.$$

Sia $\tilde{A}$ il **generatore infinitesimo** di $U(t)$, cioè l'operatore sullo spazio di Hilbert definito, sull'insieme sul quale il limite seguente esiste (e che è una varietà lineare densa, contenendo $D(A)$)

$$\tilde{A}\psi \equiv \lim_{t\to 0} i\frac{U(t)-\mathbb{I}}{t}\psi$$

Abbiamo che $\tilde{A}$ è una estensione di A, se mostriamo che $\tilde{A}$ è simmetrico, concludiamo che coincide con A: siano $\zeta, \psi \in D(A)$, allora

$$\begin{aligned} \left(\zeta, \tilde{A}\psi\right) &= \lim_{t\to 0}\left(\zeta, i\frac{U(t)-\mathbb{I}}{t}\psi\right) = \lim_{t\to 0}\left(i\frac{U(-t)-\mathbb{I}}{-t}\zeta, \psi\right) = \\ &= \left(\tilde{A}\zeta, \psi\right). \end{aligned}$$

Sia $\psi \in D(A)$, allora esiste

$$\lim_{t\to 0}\frac{U(t)-\mathbb{I}}{t}\psi = A\psi$$

cioè esiste

$$U(s)A\psi = \lim_{t\to 0}\frac{U(t+s)-U(s)}{t}\psi = \lim_{t\to 0}\frac{U(t)-\mathbb{I}}{t}U(s)\psi = AU(s)\psi$$

(c.v.d.) perciò $U(s)\psi \in D(A)$ per ogni $s \in \mathbb{R}$.

Ma veniamo finalmente al

Teorema III.6 (di Stone) *Sia $U(t)$ un gruppo unitario a un parametro fortemente continuo. Allora esiste ed è unico A autoaggiunto tale che $U(t) = e^{-itA}$.*

Dimostrazione Consideriamo il generatore infinitesimo A di $U(t)$, cioè l'operatore definito sul dominio

$$D(A) \equiv \left\{\psi \in \mathcal{H} \,\middle|\, \exists \lim_{t\to 0}\frac{i}{t}\left(U(t)-\mathbb{I}\right)\psi\right\}$$

tale che, se $\psi \in D(A)$, allora

$$A\psi \equiv \lim_{t\to 0} \frac{i}{t}\left(U(t) - \mathbb{I}\right)\psi.$$

Banalmente $D(A)$ è una varietà lineare e A è un operatore lineare. Vediamo che A è densamente definito. Sia $\psi \in \mathcal{H}$ e consideriamo la funzione $t \mapsto U(t)\psi$, come avevamo notato in precedenza si tratta di una funzione integrabile. Consideriamo allora

$$\psi_\tau \equiv \int_0^\tau U(t)\psi\, dt$$

Come avevamo visto nel volume primo, l'applicazione $\tau \mapsto \psi_\tau$ è derivabile e ha per derivata $U(\tau)\psi$ (si consulti ancora il primo volume). Risulta quindi

$$\left.\frac{d}{d\tau}\psi_\tau\right|_{\tau=0} = \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\psi_\tau = U(0)\psi = \psi,$$

perciò l'insieme dei vettori della forma $(1/\tau)\psi_\tau$ è denso in $\mathcal{H}$.

Se mostriamo che per ogni τ, ψ_τ appartiene al dominio di A, abbiamo che $D(A)$ è denso. Per $t < \tau$, considizione che si verifica di certo visto che si considera $t \to 0$ a τ fisso, vale

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}\left(U(t)\psi_\tau - \psi_\tau\right) &= \frac{1}{t}U(t)\int_0^\tau U(s)\psi\, ds - \frac{1}{t}\int_0^\tau U(s)\psi\, ds = \\
&= \frac{1}{t}\int_0^\tau U(t+s)\psi\, ds - \frac{1}{t}\int_0^\tau U(s)\psi\, ds = \\
&= \frac{1}{t}\int_t^{\tau+t} U(s)\psi\, ds - \frac{1}{t}\int_0^\tau U(s)\psi\, ds = \\
&= \frac{1}{t}\int_\tau^{\tau+t} U(s)\psi\, ds - \frac{1}{t}\int_0^t U(s)\psi\, ds \\
&= \frac{1}{t}\int_\tau^{\tau+t} U(\tau)U(s-\tau)\psi\, ds - \frac{1}{t}\int_0^t U(s)\psi\, ds = \\
&= \frac{1}{t}U(\tau)\int_0^t U(s)\psi\, ds - \frac{1}{t}\int_0^t U(s)\psi\, ds,
\end{aligned}$$

sicché

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(U(t)\psi_\tau - \psi_\tau\right) = U(\tau)\psi - \psi$$

In questo modo, abbiamo che $\psi_\tau \in D(A)$, da cui, $(1/\tau)\psi_\tau \in D(A)$, infine, $D(A)$ è denso in $\mathcal{H}$.

L'operatore A su $D(A)$ risulta perciò aggiuntabile e simmetrico. Infatti, siano $\psi, \zeta \in D(A)$, allora

$$(\varphi, A\psi) = \lim_{t\to 0}\left(\varphi, \frac{i}{t}\left(U(t) - \mathbb{I}\right)\psi\right) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{i}{-t}\left(U(-t) - \mathbb{I}\right)\varphi, \psi\right) = (A\varphi, \psi).$$

Sia $\psi \in D(A)$, allora

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0}\frac{i}{s}\left(U(s) - \mathbb{I}\right)U(t)\psi &= \lim_{s\to 0}U(t)\frac{i}{s}\left(U(s) - \mathbb{I}\right)\psi = U(t)\lim_{s\to 0}\frac{i}{s}\left(U(s) - \mathbb{I}\right)\psi \\
&= U(t)A\psi
\end{aligned}$$

di modo che

$$U(t)D(A) \subset D(A)$$

e, inoltre,

$$AU(t) = U(t)A$$

Sia, ancora, $\psi \in D(A)$, allora $\psi = U(t)U(-t)\psi$, cioè, visto che $U(-t)\psi \in D(A)$, ogni vettore in $D(A)$ è immagine secondo $U(t)$ di un vettore in $D(A)$, cioè

$$U(t)D(A) = D(A).$$

Infine, se $\psi \in D(A)$, $U(t)\psi \in D(A)$ e con ciò

$$\frac{d}{dt}U(t)\psi = \lim_{s\to 0}\frac{U(s)-\mathbb{I}}{s}U(t)\psi = -iAU(t)\psi.$$

Costruito l'operatore A (generatore infinitesimo del gruppo), mostriamo che esso è essenzialmente autoaggiunto. Si tratta di vedere che per un qualunque $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ risulta

$$\ker(A^* - z^*) = \{0\}.$$

Ora, sia φ tale che $A^*\varphi = z^*\varphi$, allora per ogni $\psi \in D(A)$, vale

$$\frac{d}{dt}(\varphi, U(t)\psi) = (\varphi, -iAU(t)\psi) = -i(A^*\varphi, U(t)\psi) = -iz(\varphi, U(t)\psi)$$

perciò

$$(\varphi, U(t)\psi) = \exp(-izt)(\varphi,\psi)$$

Il primo membro dell'eguaglianza trovata è limitato, a differenza del secondo, perciò deve essere, per ogni $\psi \in D(A)$,

$$(\varphi,\psi) = 0,$$

cioè $\varphi = 0$.

Adesso $\bar{A}$ è autoaggiunto e possiamo introdurre il gruppo a un parametro

$$V(t) = e^{-it\bar{A}}.$$

Se mostriamo che $V(t) = U(t)$, abbiamo finito. Chiamiamo

$$\psi(t) \equiv (U(t) - V(t))\psi,$$

allora, per ogni $\psi \in D(A)$, $\psi(t) \in D(\bar{A})$ e

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = -iAU(t)\psi + i\bar{A}V(t)\psi = -i\bar{A}\psi(t).$$

Dunque,

$$\frac{d}{dt}\|\psi(t)\|^2 = \frac{d}{dt}(\psi(t),\psi(t)) = i\left(\bar{A}\psi(t),\psi(t)\right) - i\left(\psi(t),\bar{A}\psi(t)\right) = 0$$

sicché per ogni $\psi \in D(A)$

$$(U(t) - V(t))\psi = 0$$

(c.v.d.) Poiché $D(A)$ è denso e $U(t) - V(t)$ è continuo, si ha $U(t) = V(t)$.

Osservazione III.3 Nella dimostrazione si è usato il fatto banale che, se $A \in L(\mathcal{H})$, $t \mapsto \psi(t)$ è integrabile, allora

$$A\int_I \psi(t)\,dt = \int_I A\psi(t)\,dt$$

che è vero poiché $t \mapsto A\psi(t)$ è integrabile se lo è $\psi(t)$ e

$$\left(\varphi, A\int_I \psi(t)\,dt\right) = \left(A^*\varphi, \int_I \psi(t)\,dt\right),$$

essendo $(A^*\varphi,\cdot)$ un funzionale

$$\left(\varphi, A\int_I \psi(t)\,dt\right) = \int_I (A^*\varphi, \psi(t))\,dt = \int_I (\varphi, A\psi(t))\,dt$$

ma ancora perché $(\varphi,\cdot)$ è un funzionale continuo

$$\left(\varphi, A\int_I \psi(t)\,dt\right) = \left(\varphi, \int_I A\psi(t)\,dt\right).$$

Siccome la cosa vale per ogni φ, si conclude

$$A\int_I \psi(t)\,dt = \int_I A\psi(t)\,dt.$$

■

Osservazione III.4 Nella dimostrazione si è pure usato il fatto che

$$\left.\frac{d}{dt}\left(\psi\left(t\right),\psi\left(t\right)\right)\right|_{t=t_0}=\big(\psi'\left(t_0\right),\psi\left(t_0\right)\big)+\big(\psi\left(t_0\right),\psi'\left(t_0\right)\big)$$

se $t\mapsto\psi\left(t\right)$ è derivabile da I in $\mathcal{H}$. Infatti,

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{dt}\left(\psi\left(t\right),\psi\left(t\right)\right)\right|_{t=t_0} &= \lim_{t\to t_0}\frac{1}{t-t_0}\left[\left(\psi\left(t\right),\psi\left(t\right)\right)-\left(\psi\left(t_0\right),\psi\left(t_0\right)\right)\right]=\\ &= \lim_{t\to t_0}\frac{\left[\left(\psi\left(t\right),\psi\left(t\right)\right)-\left(\psi\left(t_0\right),\psi\left(t\right)\right)+\left(\psi\left(t_0\right),\psi\left(t\right)\right)-\left(\psi\left(t_0\right),\psi\left(t_0\right)\right)\right]}{t-t_0}=\\ &= \lim_{t\to t_0}\left(\frac{\psi\left(t\right)-\psi\left(t_0\right)}{t-t_0},\psi\left(t\right)\right)+\lim_{t\to t_0}\left(\psi\left(t_0\right),\frac{\psi\left(t\right)-\psi\left(t_0\right)}{t-t_0}\right)=\\ &= \lim_{t\to t_0}\left(\frac{\psi\left(t\right)-\psi\left(t_0\right)}{t-t_0},\psi\left(t\right)\right)+\big(\psi\left(t_0\right),\psi'\left(t_0\right)\big)\end{aligned}$$

per quanto concerne il primo limite, abbiamo che $\psi\left(t\right)\to\psi\left(t_0\right)$ e che, perciò esso è pari a $\big(\psi'\left(t_0\right),\psi\left(t_0\right)\big)$. Infatti, se $\psi_n\to\psi$ e $\zeta_n\to\zeta$, allora

$$\begin{aligned}\left|\left(\psi_n,\zeta_n\right)-\left(\psi,\zeta\right)\right| &= \left|\left(\psi_n,\zeta_n\right)-\left(\psi_n,\zeta\right)+\left(\psi_n,\zeta\right)-\left(\psi,\zeta\right)\right|=\\ &\le \left|\left(\psi_n,\zeta_n-\zeta\right)\right|+\left|\left(\psi_n-\psi,\zeta\right)\right|\le\\ &\le M\left\|\zeta_n-\zeta\right\|+\left\|\psi_n-\psi\right\|\left\|\zeta\right\|\to0.\end{aligned}$$

■

Ancora considerando la dimostrazione del teorema di Stone, concludiamo

Teorema III.7 *Sia $U\left(t\right)$ un gruppo unitario a un paramtero fortemente continuo, sia D una varietà lineare densa, invariante sotto $U\left(t\right)$, sulla quale $U\left(t\right)$ è fortemente differenziabile. Allora $-i$ volte la derivata di $U\left(t\right)$ su D è un operatore essenzialmente autoaggiunto su D e la sua chiusura esponenziata dà $U\left(t\right)$.*

Il teorema può essere riformulato come segue

Proposizione III.1 *Sia A autoaggiunto e sia D una varietà lineare densa contenuta nel dominio di A e invariante sotto e^{-itA}, allora D è un core per A.*

Gruppi unitari debolmente continui Consideriamo un gruppo unitario a un parametro che sia solo debolmente continuo, cioè tale che

$$\lim_{t\to t_0}\left(\psi,U\left(t\right)\zeta\right)=\lim_{t\to t_0}\left(\psi,U\left(t_0\right)\zeta\right)$$

per ogni $\psi,\zeta\in\mathcal{H}$. Poiché

$$\left\|U\left(t\right)\psi-\psi\right\|^2=\left(U\left(t\right)\psi-\psi,U\left(t\right)\psi-\psi\right)=2\left\|\psi\right\|^2-\left(U\left(t\right)\psi,\psi\right)-\left(\psi,U\left(t\right)\psi\right)$$

passando al limite per $t\to0$,

$$\lim_{t\to0}\left\|U\left(t\right)\psi-\psi\right\|^2=2\left\|\psi\right\|^2-2\left\|\psi\right\|^2=0$$

di modo che la debole continuità implica la forte continuità.

Osservazione III.5 Affinché $U\left(t\right)$ sia fortemente continuo o debolmente continuo per ogni t è sufficiente che si abbia continuità in $t=0$. Infatti, se si ha continuità in 0, allora

$$\begin{aligned}\lim_{t\to t_0}U\left(t\right)\psi &= \lim_{t\to t_0}U\left(t_0\right)U\left(t-t_0\right)\psi=U\left(t_0\right)\lim_{s\to0}U\left(s\right)\psi=U\left(t_0\right)\psi\\ \lim_{t\to t_0}\left(\zeta,U\left(t\right)\psi\right) &= \lim_{t\to t_0}\left(\zeta,U\left(t_0\right)U\left(t-t_0\right)\psi\right)=\lim_{s\to0}\left(U\left(-t_0\right)\zeta,U\left(s\right)\psi\right)=\\ &= \left(U\left(-t_0\right)\zeta,\psi\right)=\left(\zeta,U\left(t_0\right)\psi\right).\end{aligned}$$

■

Ma si può concludere di più: esiste infatti il seguente risultato dovuto a von Neumann

Teorema III.8 *Sia $U(t)$ un gruppo unitario a un parametro debolmente misurabile, cioè tale che, per ogni $\psi, \zeta \in \mathcal{H}$, la funzione $t \mapsto (U(t)\psi, \zeta)$ sia misurabile, allora $U(t)$ è fortemente continuo.*

Dimostrazione Sia $\psi \in \mathcal{H}$. Per ogni $\zeta \in \mathcal{H}$, $(U(t)\psi, \zeta)$ è una funzione misurabile limitata e

$$\zeta \mapsto \int_0^a (U(t)\psi, \zeta)\; dt$$

è un funzionale lineare limitato di norma inferiore ad $a\|\psi\|$. Perciò dal teorema di Riesz, esiste $\psi_a \in \mathcal{H}$ tale che, per ogni ζ

$$(\psi_a, \zeta) = \int_0^a (U(t)\psi, \zeta)\; dt$$

Ora,

$$\begin{aligned}(U(b)\psi_a, \zeta) &= (\psi_a, U(-b)\zeta) = \int_0^a (U(t)\psi, U(-b)\zeta)\; dt = \int_0^a (U(t+b)\psi, \zeta)\; dt = \\ &= \int_b^{a+b} (U(t)\psi, \zeta)\; dt\end{aligned}$$

sicché, per b sufficientemente piccolo,

$$\begin{aligned}|(U(b)\psi_a, \zeta) - (\psi_a, \zeta)| &= \left|\int_b^{a+b} (U(t)\psi, \zeta)\; dt - \int_0^a (U(t)\psi, \zeta)\; dt\right| = \\ &= \left|\int_a^{a+b} (U(t)\psi, \zeta)\; dt - \int_0^b (U(t)\psi, \zeta)\; dt\right| \leq \\ &\leq \left|\int_a^{a+b} (U(t)\psi, \zeta)\; dt\right| + \left|\int_0^b (U(t)\psi, \zeta)\; dt\right| \leq \\ &\leq 2b\|\psi\|\,\|\zeta\|\end{aligned}$$

Dunque $U(b)$ è debolmente continuo sullo spazio generato dai vettori ψ_a. Mostriamo che tale spazio è denso.Supponiamo che φ appartenga all'ortogonale dello spazio detto e sia $\{e_n\}$ una base ortonormale per $\mathcal{H}$, allora, per ogni n

$$0 = (e_{na}, \varphi) = \int_0^a (U(t)e_n, \varphi)\; dt$$

per ogni a. Ne viene che $(U(t)e_n, \varphi) = 0$ eccetto per un insieme di $t \in S_n$ di misura nulla. Preso $t_0 \notin \bigcup S_n$ abbiamo, per ogni n,

$$(U(t_0)e_n, \varphi) = 0$$

da cui $U(-t_0)\varphi = 0$, sicché data l'iniettività di $U(-t_0)$, $\varphi = 0$. Si conclude che si ha convergenza debole e quindi, per quanto visto in precedenza, forte. Infatti, dati $\psi, \zeta \in \mathcal{H}$ si trova $\psi_m \to \psi$ di modo che, per ogni m,

$$\lim_{t\to 0}((U(t) - \mathbb{I})\psi_m, \zeta) = 0$$

Ora,

$$\begin{aligned}|((U(t) - \mathbb{I})\psi, \zeta)| &= |((U(t) - \mathbb{I})(\psi - \psi_m), \zeta) + ((U(t) - \mathbb{I})\psi_m, \zeta)| \leq \\ &\leq 2\|\psi - \psi_m\|\,\|\zeta\| + |((U(t) - \mathbb{I})\psi_m, \zeta)|\end{aligned}$$

si sceglie m in modo che il primo addendo sia inferiore a $\varepsilon/2$ e poi t sufficientemente piccolo per cui il anche il secondo sia inferiore a $\varepsilon/2$, per il valore di m appena individuato. **(c.v.d.)**

III.2.2 Il teorema RAGE

Probabilità di transizione per $t \to +\infty$ Il teorema RAGE chiarisce l'importanza della classificazione dello spettro che abbiamo studiato in teoria spettrale (primo volume). Una questione fisicamente fondamentale consiste nello studio dell'evoluzione delle probabilità di transizione per tempi infiniti. Si tratta cioè di studiare, se $\|\varphi\| = \|\psi\| = 1$,

$$\lim_{t\to\infty} |(\varphi, U(t)\,\psi)|^2$$

Dal teorema spettrale, abbiamo

$$\hat{\mu}_{\varphi,\psi}(t) \equiv (\varphi, U(t)\,\psi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-it\lambda}\, d\mu_{\varphi,\psi}(\lambda)$$

con $\hat{\mu}_{\varphi,\psi}(t)$ che è una sorta di trasformata di Fourier (a parte un segno) della misura spettrale associata ai vettori φ, ψ.
In proposito alla nostra questione, vale il

Teorema III.9 (di Wiener) *Sia μ una misura boreliana complessa finita su $\mathbb{R}$ e sia*

$$\hat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-it\lambda}\, d\mu(\lambda)$$

la sua trasformata di Fourier. Allora la media temporale di Cesaro di $\hat{\mu}(t)$ ha il limite seguente

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T |\hat{\mu}(t)|^2\, dt = \sum_{\lambda\in\mathbb{R}} |\mu(\{\lambda\})|^2$$

dove la somma della serie a secondo membro è finita.

Dimostrazione Usando il teorema di Fubini, abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T |\hat{\mu}(t)|^2\, dt &= \frac{1}{T}\int_0^T dt \int_{\mathbb{R}} d\mu(x) \int_{\mathbb{R}} \overline{d\mu(y)}\, e^{-i(x-y)t} = \\ &= \int_{\mathbb{R}} d\mu(x) \int_{\mathbb{R}} \overline{d\mu(y)} \left[\frac{1}{T}\int_0^T dt\, e^{-i(x-y)t}\right]\end{aligned}$$

Consideriamo la funzione entro parentesi quadra. Essa è limitata da 1 e per $T \to +\infty$, puntualmente,

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T dt\, e^{-i\lambda t} = \lim_{T\to+\infty} \frac{i}{\lambda T}\left(e^{-i\lambda T} - 1\right) = \chi_{\{0\}}(\lambda)\,.$$

Per il teorema della convergenza dominata,

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T |\hat{\mu}(t)|^2\, dt = \int_{\mathbb{R}} d\mu(x) \int_{\mathbb{R}} \overline{d\mu(y)}\chi_{\{0\}}(x-y) = \int_{\mathbb{R}} \overline{d\mu(y)}\mu(\{y\})$$

Considerando la decomposizione di Lebesgue di μ nell'ultimo integrale, abbiamo che l'unico integrale non nullo è quello eseguito rispetto alla misura puntuale ed esso è pari alla serie di cui nella tesi, cioè

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T |\hat{\mu}(t)|^2\, dt = \sum_{\lambda\in\mathbb{R}} |\mu(\{\lambda\})|^2\,.$$

(c.v.d.)

Se $\psi \in \mathcal{H}_{\mathrm{c}}$, allora la media di Cesaro di $(\varphi, U(t)\,\psi)$ tende a zero, poiché $E(\{\lambda\})\,\psi = 0$[3] e quindi

$$\mu_{\varphi,\psi}(\{\lambda\}) = (\varphi, E(\{\lambda\})\,\psi) = 0.$$

In altre parole, la media temporale della probabilità di transizione in uno stato prescritto partendo da uno stato di $\mathcal{H}_{\mathrm{c}}$ è nulla.

Il teorema RAGE Il teorema di Wiener consente di dimostrare un risultato interessante concernente lo spettro puntuale e lo spettro continuo, dovuto a Ruelle, Amrein, Gorgescu e Enß e per questo detto teorema RAGE.
Prima di procedere dobbiamo introdurre una nozione più debole di quella già studiata (capitolo VII, volume primo) di operatore compatto

[3] si ha, infatti, $(\psi, E(\{\lambda\})\,\psi) = 0$, da cui $\|E(\{\lambda\})\,\psi\|^2 = (\psi, E(\{\lambda\})\,\psi) = 0$, cioè $E(\{\lambda\})\,\psi = 0$.

Definizione III.2 *L'operatore K è detto* **relativamente compatto** *rispetto ad A se esiste $z \in \rho(A)$ di modo che $KR_A(z)$ sia compatto.*

Ora, se $K(z-A)^{-1}$ è compatto, dunque limitato, occorre che $R(z-A)^{-1} = D(A) \subset D(K)$. Visto che $L_C(\mathcal{H})$ è un ideale bilatero di $L(\mathcal{H})$, dalla prima identità del risolvente, ricaviamo che se $KR_A(z)$ è compatto per un qualche z, allora è compatto per ogni $z \in \rho(A)$.
Detto questo, se con P_{c} e P_{ac} denotiamo i proiettori su $\mathcal{H}_{\mathrm{c}}$ e $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}$, siamo in grado di dimostrare il seguente

Teorema III.10 *Sia A un operatore autoaggiunto e sia K relativamente compatto rispetto ad A. Allora, per ogni $\psi \in D(A)$, risulta*

$$\begin{aligned}\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \left\|Ke^{-itA}P_{\mathrm{c}}\psi\right\|^2 dt &= 0\\ \lim_{t\to+\infty}\left\|Ke^{-itA}P_{\mathrm{ac}}\psi\right\| &= 0\end{aligned}$$

In particolare, se K è pure limitato, allora il risultato vale per ogni $\psi \in \mathcal{H}$.

Dimostrazione Togliamo i proiettori supponendo, rispettivamente, che $\psi \in \mathcal{H}_{\mathrm{c}}$ e $\psi \in \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}$. Sia K un operatore di rango finito, allora il teorema segue, rispettivamente, dal teorema di Wiener e dal lemma di Riemann-Lebesgue. Infatti, se K è di rango finito, esistono i vettori ortonormali ζ_i di modo che,

$$K\psi = \sum_{i=1}^n (\varphi_i, \psi)\,\zeta_i,$$

per cui, usando il teorema di Wiener,

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \left\|Ke^{-itA}\psi\right\|^2 dt = \sum_{i=1}^n \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \left|\left(\varphi_i, e^{-itA}\psi\right)\right|^2 dt = 0$$

mentre usando il lemma di Riemann-Lebesgue

$$\lim_{t\to+\infty}\left\|Ke^{-itA}\psi\right\|^2 = \sum_{i=1}^n \lim_{t\to+\infty}\left|\int d\mu_{\varphi_i,\psi}\, e^{-it\lambda}\right|^2 = 0$$

ove il lemma di Riemann-Lebesgue può essere usato visto che $d\mu_{\varphi,\psi}$ è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue. Questo perché se M ha misura di Lebesgue nulla, allora

$$\mu_\psi(M) = (\psi, \chi_M(A)\,\psi) = 0$$

da cui $\chi_M(A)\,\psi = 0$ e, infine,

$$\mu_{\varphi,\psi}(M) = (\varphi, \chi_M(A)\,\psi) = 0.$$

Sia K un operatore compatto. Allora esiste una successione $\{K_n\}$ di operatori di rango finito talché

$$\|K - K_n\| \le \frac{1}{n}$$

sicché

$$\left\|Ke^{-itA}\psi\right\| \le \left\|K_n e^{-itA}\psi\right\| + \frac{1}{n}\|\psi\|,$$

perciò il teorema vale per ogni operatore compatto.

Siccome gli spazi $\mathcal{H}_{\mathrm{c,ac}}$ sono A-invarianti, abbiamo che $\psi = (A-i)^{-1}\varphi$ con $\varphi \in \mathcal{H}_{\mathrm{c,ac}}$ se e solo se $\psi \in \mathcal{H}_{\mathrm{c,ac}}$ (per il teorema spettrale, essendo $(A-i)^{-1} = \phi(1/(x-i)) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, si ha che $\mathcal{H}_{\mathrm{c,ac}}$ sono $(A-i)^{-1}$-invarianti). Allora, poiché e^{-itA} commuta con $(A-i)^{-1}$ e poiché $K(A-i)^{-1}$ è compatto, abbiamo la tesi. Si noti che il tutto è corretto dal momento che $e^{-itA}(A-i)^{-1}\varphi \in D(A) \subset D(K)$, visto che $\psi \in D(A)$ e $e^{-itA}D(A) = D(A)$.

Se poi K è limitato. Allora ogni $\psi \in \mathcal{H}$ è approssimato da una successione $\{\psi_n\} \subset D(A)$

tale che

$$\|\psi - \psi_n\| \leq \frac{1}{n}$$

di modo che

$$\left\|Ke^{-itA}\psi\right\| \leq \left\|Ke^{-itA}\psi_n\right\| + \frac{1}{n}\|K\|$$

(c.v.d.)

Teorema III.11 (RAGE) *Sia A un operatore autoaggiunto. Supponiamo che $\{K_n\} \subset L(\mathcal{H})$ sia una successione di operatori relativamente compatti rispetto ad A, convergente fortemente all'identità, allora*

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mathrm{c}} &= \left\{\psi \in \mathcal{H} \left| \lim_{n\to+\infty} \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \left\|K_n e^{-itA}\psi\right\| dt = 0 \right.\right\} \\ \mathcal{H}_{\mathrm{pp}} &= \left\{\psi \in \mathcal{H} \left| \lim_{n\to+\infty} \sup_{t\geq 0} \left\|(\mathbb{I} - K_n)\, e^{-itA}\psi\right\| = 0 \right.\right\}\end{aligned}$$

Dimostrazione Poniamo $\psi(t) = e^{-itA}\psi$. Cominciamo con la prima eguaglianza. Sia $\psi \in \mathcal{H}_{\mathrm{c}}$, allora, usando la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz in $L^2([0,T], dt/T)$ e il teorema precedente

$$\frac{1}{T}\int_0^T \|K_n\psi(t)\|\, dt \leq \left(\frac{1}{T}\int_0^T \|K_n\psi(t)\|^2\, dt\right)^{1/2} \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Viceversa, sia $\psi \notin \mathcal{H}_{\mathrm{c}}$, allora possiamo scrivere, con ovvia notazione, $\psi = \psi_{\mathrm{c}} + \psi_{\mathrm{pp}}$. Se mostriamo che, definitivamente,

$$\left\|K_n\psi_{\mathrm{pp}}(t)\right\| \geq \varepsilon > 0$$

allora

$$\frac{1}{T}\int_0^T \left\|K_n\psi_{\mathrm{c}}(t) + K_n\psi_{\mathrm{pp}}(t)\right\| dt \geq \left|\frac{1}{T}\int_0^T \|K_n\psi_{\mathrm{c}}(t)\|\, dt - \frac{1}{T}\int_0^T \left\|K_n\psi_{\mathrm{pp}}(t)\right\| dt\right|$$

perciò, passando al limite per $T \to +\infty$ in ambo i membri, troviamo

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \left\|K_n\psi_{\mathrm{c}}(t) + K_n\psi_{\mathrm{pp}}(t)\right\| dt \geq \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \left\|K_n\psi_{\mathrm{pp}}(t)\right\| dt \geq \varepsilon$$

da cui avremmo la tesi.

D'altra parte, $\left\|K_n\psi_{\mathrm{pp}}(t)\right\| \geq \varepsilon$ definitivamente, perché

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\geq 0}\left\|K_n\psi_{\mathrm{pp}}(t) - \psi_{\mathrm{pp}}(t)\right\| = 0 \tag{III.1}$$

questo implica, in particolare, per ogni t

$$K_n\psi_{\mathrm{pp}}(t) \to \psi_{\mathrm{pp}}(t) \Longrightarrow \left\|K_n\psi_{\mathrm{pp}}(t)\right\| \to \left\|\psi_{\mathrm{pp}}(t)\right\| = \left\|\psi_{\mathrm{pp}}\right\| > \varepsilon$$

come volevamo.

Andiamo allora a dimostrare la (III.1). Espandiamo ψ_{pp} nella base ortonormale $\{\psi_j\}$ di $\mathcal{H}_{\mathrm{pp}}$ di autovettori di A. Abbiamo,

$$\psi_{\mathrm{pp}} = \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\psi_j$$

per cui, se λ_j è l'autovalore corrispondente a ψ_j,

$$\psi_{\mathrm{pp}}(t) = \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j e^{-it\lambda_j}\psi_j = \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j(t)\,\psi_j$$

Ora,

$$\left\|K_n\psi_{\mathrm{pp}}(t) - \psi_{\mathrm{pp}}(t)\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j(t)\,(K_n - \mathbb{I})\,\psi_j\right\| \leq$$

$$\leq \left\| \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(t)(K_n - \mathbb{I})\psi_j \right\| + \left\| \sum_{j=N+1}^{\infty} \alpha_j(t)(K_n - \mathbb{I})\psi_j \right\|$$

Poiché $\|K_n - \mathbb{I}\| \leq M$ per ogni M, dal momento che la successione converge fortemente, scegliamo $\bar{N}$ di modo che

$$\left\| \sum_{j=\bar{N}+1}^{+\infty} \alpha_j \psi_j \right\| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

e ν tale che per ogni $n > \nu$

$$\sum_{j=1}^{\bar{N}} |\alpha_j| \left\| (K_n - \mathbb{I})\psi_j \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

di modo che

$$\begin{aligned} \left\| K_n \psi_{\mathrm{pp}}(t) - \psi_{\mathrm{pp}}(t) \right\| &\leq \sum_{j=1}^{\bar{N}} |\alpha_j| \left\| (K_n - \mathbb{I})\psi_j \right\| + M \left\| \sum_{j=\bar{N}+1}^{\infty} \alpha_j e^{-i\lambda_j t} \psi_j \right\| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + M \left\| e^{-itA} \sum_{j=\bar{N}+1}^{\infty} \alpha_j \psi_j \right\| = \frac{\varepsilon}{2} + M \left\| \sum_{j=\bar{N}+1}^{\infty} \alpha_j \psi_j \right\| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon \end{aligned}$$

sicché, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\nu(\varepsilon)$ per cui

$$\sup_t \left\| K_n \psi_{\mathrm{pp}}(t) - \psi_{\mathrm{pp}}(t) \right\| < \varepsilon.$$

Abbiamo dunque la prima eguaglianza e, inoltre, la (III.1) attesta che se $\psi \in \mathcal{H}_{\mathrm{pp}}$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{t\geq 0} \left\| (\mathbb{I} - K_n) e^{-itA}\psi \right\| = 0.$$

Ci resta da mostrare il viceversa. Se $\psi \notin \mathcal{H}_{\mathrm{pp}}$, allora $\psi = \psi_{\mathrm{pp}} + \psi_{\mathrm{c}}$ con $\psi_{\mathrm{c}} \neq 0$. Ci basta vedere che definitivamente

$$\sup_{t\geq 0} \left\| (\mathbb{I} - K_n) e^{-itA}\psi \right\| > \varepsilon.$$

D'altra parte,

$$\sup_{t\geq 0} \left\| (\mathbb{I} - K_n) e^{-itA}\psi \right\| \geq \left| \sup_{t\geq 0} \left\| (\mathbb{I} - K_n) e^{-itA}\psi_{\mathrm{pp}} \right\| - \sup_{t\geq 0} \left\| (\mathbb{I} - K_n) e^{-itA}\psi_{\mathrm{c}} \right\| \right|$$

perciò, se, definitivamente

$$\sup_{t\geq 0} \left\| (\mathbb{I} - K_n) e^{-itA}\psi_{\mathrm{c}} \right\| > \varepsilon'$$

siccome il primo addendo è definitivamente più piccolo di $\varepsilon'/2$, abbiamo, sempre definitivamente,

$$\sup_{t\geq 0} \left\| (\mathbb{I} - K_n) e^{-itA}\psi \right\| \geq \frac{\varepsilon'}{2}.$$

Dunque, riassumendo, ci occorre vedere che, definitivamente,

$$\sup_{t\geq 0} \left\| (\mathbb{I} - K_n) e^{-itA}\psi_{\mathrm{c}} \right\| > \varepsilon$$

Ammettiamo che questo sia falso, cioè che per ogni $\varepsilon > 0$ esista n di modo che

$$\sup_{t\geq 0} \left\| (\mathbb{I} - K_n) e^{-itA}\psi_{\mathrm{c}} \right\| \leq \varepsilon$$

allora

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left\| (\mathbb{I} - K_n) e^{-itA}\psi_{\mathrm{c}} \right\|^2 dt \leq \varepsilon^2$$

Tuttavia,

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2 &\geq \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \left\|(\mathbb{I}-K_n)\,e^{-itA}\psi_{\mathrm{c}}\right\|^2 dt \geq \\
&\geq \|\psi_{\mathrm{c}}\|^2+\lim_{T\to+\infty}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \left\|K_n e^{-itA}\psi_{\mathrm{c}}\right\|^2 dt\right)-2\,\|\psi_{\mathrm{c}}\|\lim_{T\to+\infty}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \left\|K_n e^{-itA}\psi_{\mathrm{c}}\right\| dt\right)= \\
&= \|\psi_{\mathrm{c}}\|^2
\end{aligned}$$

(la prima diseguaglianza segue dal fatto che $\|x+z\|^2\geq\|x\|^2+\|z\|^2-2\,\|x\|\,\|z\|$) sicché, per ogni $\varepsilon>0$

$$\|\psi_{\mathrm{c}}\|\leq\varepsilon,$$

(c.v.d.) assurdo.

Schema di Heisenberg In meccanica quantistica è d'uso far evolvere nel tempo le osservabili piuttosto che gli stati, cioè considerare stati fissi nel tempo ed osservabili che trasformano come

$$K(t)=e^{itA}Ke^{-itA}$$

di modo che

$$(\varphi(t),K\psi(t))=(\varphi,K(t)\,\psi).$$

Se K è illimitato si assume $D(A)\subset D(K)$ e si è interessati allo studio del limite forte, se esiste, di $K(t)$ per $t\to+\infty$. Tale limite forte è detto **osservabile asintotica**. Dal teorema RAGE, ricaviamo

Teorema III.12 *Sia A autoaggiunto e sia K relativamente compatto rispetto ad A, allora, per ogni $\psi\in D(A)$*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T e^{itA}Ke^{-itA}\psi\,dt=\sum_{\lambda\in\sigma_{\mathrm{pp}}(A)}E_A(\{\lambda\})\,KE_A(\{\lambda\})\,\psi.$$

Se K è limitato, il risultato si estende a ogni $\psi\in\mathcal{H}$.

Dimostrazione Vediamo il caso in cui K è limitato. Il caso illimitato si ottiene considerando $D(A)\ni\psi=(A-i)^{-1}\varphi$. Scriviamo $\psi=\psi_{\mathrm{c}}+\psi_{\mathrm{pp}}$. Allora

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left\|\int_0^T e^{itA}Ke^{-itA}\psi_{\mathrm{c}}\,dt\right\|\leq\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left\|Ke^{-itA}\psi_{\mathrm{c}}\right\|\,dt=0$$

Come nella dimostrazione del teorema RAGE, poniamo

$$\psi_{\mathrm{pp}}=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\psi_j,$$

allora

$$\frac{1}{T}\int_0^T K(t)\,\psi_{\mathrm{pp}}\,dt=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\frac{1}{T}\int_0^T K(t)\,\psi_j\,dt=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\frac{1}{T}\int_0^T e^{it(A-\lambda_j)}K\psi_j\,dt$$

La commutazione della serie con l'integrale segue dalla definizione di integrale come chiusura di una mappa continua in norma sup e dal fatto che

$$\sum_{j=1}^{N}\alpha_jK(t)\,\psi_j\to K(t)\,\psi_{\mathrm{pp}}$$

uniformemente su $[0,T]$. Infatti,

$$\sup_{t\in[0,T]}\left\|K(t)\,\psi_{\mathrm{pp}}-\sum_{j=1}^{N}\alpha_jK(t)\,\psi_j\right\| = \sup_{t\in[0,T]}\left\|K(t)\left(\psi_{\mathrm{pp}}-\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\psi_j\right)\right\|=$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{t\in[0,T]} \left\| K e^{-itA}\left(\psi_{\mathrm{pp}} - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \psi_j\right)\right\| \leq \\
&\leq \|K\| \left\| \psi_{\mathrm{pp}} - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \psi_j \right\| \to 0
\end{aligned}
$$

D'altra parte, come abbiamo dimostrato nel volume primo (lo ridimostriamo nell'osservazione seguente alla dimostrazione),

$$
\frac{1}{T}\int_0^T e^{it(A-\lambda_0)}\zeta\, dt = \phi\left(\frac{1}{T}\int_0^T e^{it(\lambda-\lambda_0)} dt\right)\zeta
$$

L'operatore

$$
\phi\left(\frac{1}{T}\int_0^T e^{it(\lambda-\lambda_0)} dt\right)
$$

converge fortemente, per $T\to\infty$, a $E(\{\lambda_0\})$, infatti, puntualmente ed equilimitatamente

$$
\frac{1}{T}\int_0^T e^{it(\lambda-\lambda_0)}\, dt \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} \chi_{\{\lambda_0\}}(\lambda),
$$

dunque,

(c.v.d.)

$$
\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T K(t)\,\psi\, dt = \sum_{j=1}^{\infty} E(\lambda_j)\, K\alpha_j\psi_j = \sum_{j=1}^{\infty} E(\{\lambda_j\})\, KE(\{\lambda_j\})\,\psi.
$$

Osservazione III.6 Come promesso ridimostriamo il fatto che se $f(t,A)\,\psi$ è integrabile e $f(t,\lambda)$ è una boreliana, allora

$$
\int_I f(t,A)\,\psi\, dt = \phi\left(\int_I f(t,\lambda)\ dt\right)\psi.
$$

Per ogni φ, sfruttando il fatto che $(\varphi,\cdot)$ è un funzionale continuo, si ha

$$
\begin{aligned}
\left(\varphi, \int_I f(t,A)\,\psi\, dt\right) &= \int_I (\varphi, f(t,A)\,\psi)\ dt = \int_I dt \int d\mu_{\varphi,\psi}\, f(t,\lambda) = \\
&= \int d\mu_{\varphi,\psi}\int_I dt\, f(t,\lambda) = \left(\varphi, \phi\left(\int_I f(t,\lambda)\ dt\right)\psi\right).
\end{aligned}
$$

■

III.3 Estensione autoaggiunta

Estensione autoaggiunta ed esistenza di una dinamica Come abbiamo visto una dinamica quantistica è un gruppo a un parametro di operatori unitari fortemente continuo (equivalentemente, debolmente continuo o debolmente misurabile). Nella pratica, non si dispone del gruppo unitario, ma di un candidato − prodotto su basi fisiche − per il suo generatore infinitesimo. In altre parole, si considera un operatore, l'hamiltoniana del sistema, definito formalmente (cioè senza la specifica del dominio). Solitamente è semplice determinare un dominio denso per l'hamiltoniana e dimostrare che essa è ivi simmetrica. Ora, il punto è che essa genera una dinamica se e solo se è autoaggiunta. Visto che è gratuito (un simmetico è sempre chiudibile), si passa a considerare la chiusura della hamiltoniana formale, H, e ci si domanda se H, simmetrico chiuso, è autoaggiunto. Molto spesso l'operatore H non è autoaggiunto, ma visto che è definito solo su un dominio di comodo, ci si chiede se H ammette estensioni autoaggiunte. L'esistenza di tali estensioni garantisce l'**esistenza di una dinamica**. In questa sezione noi determineremo le condizioni che devono essere rispettate affinché H ammetta un'estensione autoaggiunta e parametrizzeremo le estensioni autoaggiunte nel caso ne esistano più di una (si noti che in tal caso la scelta dell'estensione che genera la dinamica corretta avviene su basi fisiche e non è un problema matematico).

III.3.1 Indici di difetto

Cominciamo la nostra trattazione riportando alcuni risultati che riecheggiano, in qualche modo, quelli richiamati nel corso della prima sezione. Avvertiamo che, come anticipato, ci occuperemo sempre di operatori simmetrici chiusi, la chiusura essendo gratis per gli operatori simmetrici.
Il primo teorema che vediamo generalizza alcuni aspetti da noi già più volte incontrati

Teorema III.13 *Sia A un operatore chiuso e simmetrico su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Allora le quantità $\dim\ker(\lambda - A^*)$ sono costanti, rispettivamente, sul semipiano complesso superiore e inferiore. Inoltre, lo spettro di A è* **uno** *dei seguenti*

(i) *il semipiano superiore chiuso;*

(ii) *il semipiano inferiore chiuso;*

(iii) *l'intero piano complesso;*

(iv) *un sottoinsieme dell'asse reale.*

A è autoaggiunto se e solo se vale l'alternativa (iv). A è autoaggiunto se e solo se $\dim\ker(\lambda - A^*) = 0$ sia sul semipiano superiore che su quello inferiore.

Dimostrazione Che A sia autoaggiunto se e solo se vale (iv) lo abbiamo già visto e vale dal momento che A è simmetrico chiuso (perciò se essenzialmente autoaggiunto, allora è autoaggiunto). Ancora, visto che A chiuso esso è autoaggiunto se e solo se $\dim\ker(\lambda - A^*) = 0$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.

Prima di procedere oltre notiamo che se $\lambda = \lambda' + i\lambda''$, allora, dal momento che A è simmetrico,

$$\|(\lambda - A)\varphi\|^2 \geq \left|\lambda''\right|^2 \|\varphi\|^2 \tag{III.2}$$

di modo che, essendo A chiuso, $R(\lambda - A)$ è un sottospazio chiuso di $\mathcal{H}$.

Vediamo che $\dim\ker(\lambda - A^*)$ è una costante sul semipiano superiore e inferiore. Dimostreremo che se η è sufficientemente piccolo allora $\ker(\lambda - A^*)$ e $\ker(\lambda + \eta - A^*)$ hanno la medesima dimensione. Sia $u \in D(A^*)$ unitario e appartenente al kernel di $\lambda + \eta - A^*$. Supponiamo che $(u, v) = 0$ per ogni $v \in \ker(\lambda - A^*)$, allora $u \in R\left(\bar{\lambda} - A\right)$, perciò esiste $\varphi \in D(A)$ per cui

$$u = \left(\bar{\lambda} - A\right)\varphi$$

perciò

$$0 = ((\lambda + \eta - A^*)u, \varphi) = (u, u) + \bar{\eta}(u, \varphi) = \|u\|^2 + \bar{\eta}(u, \varphi).$$

Poiché

$$\|\varphi\| \leq \frac{1}{|\lambda''|}\|u\|$$

d'altra parte,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|u\| + |\eta|\,\|\varphi\| \\ \|\varphi\| &\geq \frac{1}{|\eta|}\|u\| \end{aligned}$$

perciò, se $|\eta| < \left|\lambda''\right|$, cadiamo in contraddizione. Dunque, se $|\eta| < \left|\lambda''\right|$ allora

$$\ker(\lambda + \eta - A^*) \cap \ker(\lambda - A^*)^\perp = \{0\}.$$

Da questo fatto segue

$$\dim\ker(\lambda + \eta - A^*) \leq \dim\ker(\lambda - A^*).$$

Infatti, se V e H sono sottospazi tali che $V \cap H^\perp = \{0\}$, allora $P_V = P_V P_H + P_V P_{H^\perp} = P_V P_H$. Aggiuntando si ottiene $P_V = P_V P_H = P_H P_V$. Perciò se $x \in V$, allora $x = P_H P_V x = P_H x$, cioè $x \in H$. Infine, $x \in H$. Poiché $V \subset H$, si conclude $\dim V \leq \dim H$.

Scambiando i ruoli di λ e $\lambda+\eta$, si trova che

$$\dim\ker\left(\lambda-A^*\right)\leq\dim\ker\left(\lambda+\eta-A^*\right)$$

se $|\eta|<\left|\lambda''+\eta''\right|$ cosa che si verifica senz'altro se $|\eta|<\left|\lambda''\right|/2$, infatti

$$\left|\lambda''+\eta''\right|\geq\left|\left|\lambda''\right|-\left|\eta''\right|\right|=\left|\lambda''\right|-\left|\eta''\right|>\frac{\left|\lambda''\right|}{2}>|\eta|\,.$$

Ne viene che $\dim\ker\left(\lambda-A^*\right)$ è una costante locale sui due semipiani, dunque una costante sui due semipiani.

Sia $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Dalla (III.2), segue che $(\lambda-A)$ è iniettivo e ammette inversa (sinistra) limitata. Se tale inversa è definita ovunque, allora $(\lambda-A)$ è invertibile e $\lambda\in\rho\left(A\right)$. Ma allora $\lambda\in\rho\left(A\right)$ se e solo se $\dim\ker\left(\bar{\lambda}-A^*\right)=\{0\}$. Ne viene allora che se $\lambda\in\rho\left(A\right)$ o $\lambda\in\sigma\left(A\right)$, ogni κ nello stesso semipiano di λ appartiene a $\rho\left(A\right)$ o, rispettivamente, a $\sigma\left(A\right)$. Visto poi che $\sigma\left(A\right)$ è chiuso, o è un sottoinsieme della retta reale, oppure è un intero semipiano chiuso, oppure
(c.v.d.) l'intero piano.

Ne deriva immediatamente il seguente

Corollario III.1 *Se un operatore simmetrico chiuso ammette un punto reale nel suo risolvente, allora è autoaggiunto.*

Dimostrazione Infatti, il risolvente è aperto, perciò se contiene un reale contiene un complesso nel semipiano inferiore e nel semipiano superiore, dunque, lo spettro è vincolato ad essere sull'asse reale e
(c.v.d.) con ciò l'operatore è autoaggiunto.

Corollario III.2 *Sia A un operatore chiuso simmetrico semilimitato, tale cioè che*

$$\left(\varphi,A\varphi\right)\geq-M\left\|\varphi\right\|^2,\ \varphi\in D\left(A\right),$$

allora $\dim\ker\left(\lambda-A^*\right)$ *è costante su* $\mathbb{C}\backslash\left[-M,+\infty\right[$.

Dimostrazione Infatti, se $\lambda\in\left]-\infty,-M\right[$, possiamo scrivere $\lambda=-\left(M+a\right)$ con $a>0$, dunque

$$\left\|\left(\lambda-A\right)\varphi\right\|^2\geq\left\|\left(a+A+M\right)\varphi\right\|^2=a^2\left\|\varphi\right\|^2+\left\|\left(A+M\right)\varphi\right\|^2+2a\left(\varphi,\left(A+M\right)\varphi\right)$$

D'altra parte

$$\left(\varphi,\left(A+M\right)\varphi\right)=\left(\varphi,A\varphi\right)+M\left\|\varphi\right\|^2\geq0,$$

sicché, se $\lambda<-M$,

$$\left\|\left(\lambda-A\right)\varphi\right\|^2\geq\left(|\lambda|-M\right)^2\left\|\varphi\right\|^2 \qquad \text{(III.3)}$$

sicché $(\lambda-A)$ è iniettivo, ammette inverso limitato e immagine chiusa.

A questo punto ripetiamo il ragionamento di cui nella dimostrazione di sopra per i λ nel semipiano superiore e inferiore. Sia poi $\lambda<-M$. Sia $\eta\in\mathbb{C}$ e consideriamo

$$u\in\ker\left(\lambda+\eta-A^*\right)\cap\ker\left(\lambda-A^*\right)^{\perp}$$

allora $u\in R\left(\lambda-A\right)$ cioè esiste φ tale che $u=\left(\lambda-A\right)\varphi$. Dunque,

$$0=\left(\left(\lambda+\eta-A^*\right)u,\varphi\right)=\bar{\eta}\left(u,\varphi\right)+\left\|u\right\|^2$$

da cui

$$\begin{aligned}0&\leq|\eta|\left\|\varphi\right\|+\left\|u\right\|\\\frac{\left\|u\right\|}{|\eta|}&\leq\left\|\varphi\right\|\leq\frac{\left\|u\right\|}{|\lambda|-M}\end{aligned}$$

e l'assurdo si ha per

$$|\eta|\leq|\lambda|-M$$

In questo caso, allora,

$$\dim\ker\left(\lambda+\eta-A^{*}\right)\leq\dim\ker\left(\lambda-A^{*}\right)$$

Rovesciamo i ruoli di $\lambda+\eta$ e λ. Per ottenere l'assurdo dobbiamo modificare la (III.3). Nella derivazione di sopra poniamo $a=\lambda-M+\eta$ con $\eta\in\mathbb{C}$ tale che $\operatorname{Re}a>0$, allora

$$\left\|\left(\lambda+\eta-A\right)\varphi\right\|^{2}\leq\left|\lambda-M+\eta\right|^{2}\left\|\varphi\right\|^{2}$$

di modo che la contraddizione si ha per

$$|\eta|\leq|\lambda-M+\eta|$$

cioè, sicuramente se

$$|\eta|<\frac{|\lambda|-M}{2}$$

In queste condizioni, vale

$$\dim\ker\left(\lambda+\eta-A^{*}\right)=\dim\ker\left(\lambda-A^{*}\right)$$

Ne viene che $\dim\ker\left(\lambda-A^{*}\right)$ è una costante locale su $\mathbb{C}\backslash\left[-M,+\infty\right[$ che è connesso, perciò è una costante su $\mathbb{C}\backslash\left[-M,+\infty\right[$. **(c.v.d.)**

In base a quanto visto conviene porre la seguente

Definizione III.3 *Sia A un operatore simmetrico. Si definiscono* **indici di difetto** *di A i numeri*

$$n_{\pm}\left(A\right)\equiv\dim\ker\left(\pm i-A^{*}\right)$$

Si dicono **sottospazi di difetto** *di A*

$$\mathcal{H}_{\pm}\equiv\ker\left(\pm i-A^{*}\right)=R\left(\mp i-A\right)^{\perp}$$

di modo che

$$n_{\pm}\left(A\right)\equiv\dim\mathcal{H}_{\pm}$$

Corollario III.3 *Se A è un operatore simmetrico chiuso, i suoi indici di difetto sono pari a*

$$\begin{aligned} n_{+}\left(A\right) &= \dim\ker\left(\lambda-A^{*}\right),\ \forall\lambda\in\mathbb{C},\operatorname{Im}\lambda>0 \\ n_{-}\left(A\right) &= \dim\ker\left(\lambda-A^{*}\right),\ \forall\lambda\in\mathbb{C},\operatorname{Im}\lambda<0 \end{aligned}$$

Un operatore simmetrico chiuso semilimitato ha indici di difetto eguali.

III.3.2 Costruzione dell'estensione autoaggiunta

Sia A un operatore simmetrico chiuso. Sia B un'estensione simmetrica chiusa. Allora per $\varphi\in D\left(B^{*}\right)$ abbiamo, per ogni $\psi\in D\left(A\right)$,

$$\left(\psi,B^{*}\varphi\right)=\left(B\psi,\varphi\right)=\left(A\psi,\varphi\right)$$

da cui $\varphi\in D\left(A^{*}\right)$ e, quindi,

$$A\subset B\subset B^{*}\subset A^{*}.$$

Introduciamo due nuove forme sesquilineari su $D\left(A^{*}\right)$:

$$\begin{aligned} \left(\varphi,\psi\right)_{A} &\equiv \left(\varphi,\psi\right)+\left(A^{*}\varphi,A^{*}\psi\right) \\ \left[\varphi,\psi\right]_{A} &\equiv \left(A^{*}\varphi,\psi\right)-\left(\varphi,A^{*}\psi\right) \end{aligned}$$

Una varietà D di $D\left(A^{*}\right)$ sulla quale $\left[\varphi,\psi\right]_{A}=0$ per ogni $\varphi,\psi\in D$, si dirà **A-simmetrica**; se D risulta chiusa rispetto a $\left(\cdot,\cdot\right)_{A}$, si dirà **$A$-chiusa**; due varietà in $D\left(A^{*}\right)$ ortogonali rispetto a $\left(\cdot,\cdot\right)$ verranno dette A-ortogonali.

Lemma III.1 *Sia A un operatore simmetrico chiuso. Allora*

(i) *le estensioni simmetriche di A sono le restrizioni di A^{*} alle varietà A-chiuse e A-simmetriche di $D\left(A^{*}\right)$;*

(ii) *$D(A)$, $\mathcal{H}_+$ e $\mathcal{H}_-$ sono varietà A-chiuse e mutuamente A-ortogonali tali che*

$$D(A^*) = D(A) \oplus_A \mathcal{H}_+ \oplus_A \mathcal{H}_-;$$

(iii) *esiste una corrispondenza uno a uno tra le varietà A-chiuse e A-simmetriche S di $D(A^*)$ che contengono $D(A)$ e le varietà A-chiuse e A-simmetriche S_1 di $\mathcal{H}_+ \oplus_A \mathcal{H}_-$ data da*

$$S = D(A) \oplus_A S_1.$$

Dimostrazione Vediamo (i). Sia B un'estensione simmetrica chiusa di A. Allora $A \subset B \subset B^* \subset A^*$, perciò B è una restrizione di A^*. Dunque, per ogni $\psi, \varphi \in D(B)$ risulta

$$(\psi, \varphi)_A = (\psi, \varphi) + (B\psi, B\varphi)$$

$D(B)$ è A-chiuso se e solo se B è chiuso. Se $D(B)$ è A-chiuso, sia $\{x_n\} \subset D(B)$ convergente a $x \in D(B)$ tale che $\{Bx_n\}$ è convergente. Allora $\{x_n\}$ è A-convergente, perciò x_n A-converge a x, e, essendo $D(B)$ A-chiuso, Bx_n converge a Bx. Viceversa, se B è chiuso e $\{x_n\} \subset D(B)$ è A-convergente, allora x_ne Bx_n, essendo di Cauchy, convergono. Ne viene che esiste $x \in D(B)$ di modo che x_n converge a x e Bx_n a Bx, sicché $D(B)$ è A-chiuso.

$D(B)$ è A-simmetrico se e solo se B è simmetrico. Infatti, sia $D(B)$ A-simmetrico, allora per ogni $\psi, \varphi \in D(B)$

$$(B\varphi, \psi) - (\varphi, B\psi) = 0$$

cioè $B \subset B^*$. Viceversa, se B è simmetrico, allora $D(B)$ è banalmente A-simmetrico.

Vediamo (ii). Poiché A è simmetrico chiuso $D(A)$ è A-chiuso. Visto che $\mathcal{H}_\pm$ è chiuso sotto $(\cdot, \cdot)$ è anche A-chiuso: infatti sia $\{x_n\}$ A-convergente, allora è A-di Cauchy, con ciò convergono x_n e A^*x_n. Poiché $\{x_n\} \subset D(A^*)$, si ha che esiste $x \in \mathcal{H}_\pm$ (poiché questo è chiuso), di modo che $x_n \to x$ e $A^*x_n \to A^*x$, come si voleva.

Siano $\psi \in D(A)$ e $\varphi \in \mathcal{H}_\pm$, allora

$$\begin{aligned}(\psi, \varphi)_A &= (\psi, \varphi) + (A\psi, A^*\varphi) = (\psi, \varphi) \pm i(A\psi, \varphi) = (\psi, \varphi) \pm i(\psi, A^*\varphi) = \\ &= (\psi, \varphi) - (\psi, \varphi) = 0\end{aligned}$$

Siano $\psi \in \mathcal{H}_+$ e $\varphi \in \mathcal{H}_-$, allora

$$(\psi, \varphi)_A = (\psi, \varphi) + (i\psi, -i\varphi) = (\psi, \varphi) - (\psi, \varphi) = 0$$

Sia adesso $\psi \in D(A^*)$ con $\psi \perp_A D(A) \oplus_A \mathcal{H}_+ \oplus_A \mathcal{H}_-$, allora per ogni $\varphi \in D(A)$,

$$(\varphi, \psi) = -(A\varphi, A^*\psi)$$

perciò $A^*\psi \in D(A^*)$ e $A^*A^*\psi = -\psi$, ma dal momento che

$$(A^* + i)(A^* - i)\psi = A^*A^*\psi + \psi = 0$$

si conclude che $(A^* - i)\psi \in \mathcal{H}_-$. Ora, sia $\varphi \in \mathcal{H}_-$, allora

$$0 = (\varphi, \psi)_A = (\varphi, \psi) + i(\varphi, A^*\psi) = (\varphi, (iA^* + \mathbb{I})\psi) = i(\varphi, (A^* - i)\psi)$$

cioè

$$\mathcal{H}_- \ni (A^* - i)\psi \in \mathcal{H}_-^\perp$$

ossia $A^*\psi = i\psi$, $\psi \in \mathcal{H}_+$. Ma $\psi \in \mathcal{H}_+^{\perp_A}$, dunque $\psi = 0$.

Sia S_1 una varietà A-chiusa e A-simmetrica inclusa in $\mathcal{H}_+ \oplus_A \mathcal{H}_-$. Supponiamo che $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$ e $\psi = \psi_0 + \psi_1$ con $\varphi_0, \psi_0 \in D(A)$ e $\varphi_1, \psi_1 \in S_1$, allora, poiché A è simmetrico e S_1 A-simmetrico,

$$[\varphi_0, \psi_0]_A = [\varphi_1, \psi_1]_A = 0$$

Inoltre,

$$[\varphi_0, \psi_1]_A = (A\varphi_0, \psi_1) - (\varphi_0, A^*\psi_1) = (\varphi_0, A^*\psi_1) - (\varphi_0, A^*\psi_1) = 0$$

analogamente $[\varphi_1, \psi_0]_A = 0$. Dunque,

$$[\varphi, \psi]_A = 0$$

perciò $S \equiv D(A) \oplus_A S_1$ è A-simmetrico. S è pure A-chiuso dal momento che lo sono $D(A)$ e S_1.

Viceversa sia S una varietà A-simmetrica e A-chiusa in $D(A^*)$ contenente $D(A)$. Poniamo

$$S_1 \equiv S \cap (\mathcal{H}_+ \oplus_A \mathcal{H}_-)$$

S_1 risulta immediatamente A-chiuso (come intersezione di A-chiusi) e A-simmetrico (essendo contenuto in S). Supponiamo adesso che $\varphi \in S$, allora, univocamente, $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$ con $\varphi_0 \in D(A)$ e $\varphi_1 \in \mathcal{H}_+ \oplus_A \mathcal{H}_-$. D'altra parte, poiché $\varphi_0 \in S$, $\varphi_1 \in S$ e con ciò $\varphi_1 \in S_1$.
(c.v.d.) Quindi, $S = D(A) \oplus S_1$.

Siamo finalmente in grado di dimostrare il risultato fondamentale circa l'estensione autoaggiunta

Teorema III.14 *Sia A un operatore simmetrico chiuso. Le estensioni simmetriche chiuse di A sono in corrispondenza uno a uno con l'insieme delle isometrie parziali di $\mathcal{H}_+$ in $\mathcal{H}_-$. Se U è una tale isometria parziale con spazio iniziale $I(U) \subset \mathcal{H}_+$, allora la corrispondente estensione simmetrica chiusa di A, A_U, ha per dominio*

$$D(A_U) = \left\{ \varphi + \varphi_+ + U\varphi_+ \,\middle|\, \varphi \in D(A),\ \varphi_+ \in I(U) \right\}$$

e

$$A_U = A\varphi + i\varphi_+ - iU\varphi_+$$

Infine, se $\dim I(U) < +\infty$, allora

$$n_\pm(A_U) = n_\pm(A) - \dim I(U).$$

Dimostrazione Sia A_1 una estensione simmetrica chiusa di A. Dal lemma precedente, abbiamo che $D(A) \subset D(A_1) \subset D(A^*)$ e

$$D(A_1) = D(A) \oplus_A S_1$$

con S_1 A-simmetrico e A-chiuso contenuto in $\mathcal{H}_+ \oplus_A \mathcal{H}_-$. Se $\varphi \in S_1$ esso può essere scritto univocamente come $\varphi = \varphi_+ + \varphi_-$ e, dal momentro che S_1 è A-simmetrico,

$$\begin{aligned}
0 &= (A^*\varphi, \varphi) - (\varphi, A^*\varphi) = 2i \operatorname{Im}(A^*\varphi, \varphi) \\
0 &= \operatorname{Im} i \left(\varphi_+ - \varphi_-, \varphi_+ + \varphi_-\right) \\
0 &= \operatorname{Re}\left(\varphi_+ - \varphi_-, \varphi_+ + \varphi_-\right) = \left\|\varphi_+\right\|^2 - \left\|\varphi_-\right\|^2
\end{aligned}$$

perciò $\left\|\varphi_+\right\| = \left\|\varphi_-\right\|$. Ora, $\varphi \in S_1$ individua un unico $\varphi_+ \in \mathcal{H}_+$ di modo che $\varphi = \varphi_+ + \varphi_-$. Viceversa sia $\varphi_+ \in \mathcal{H}_+$ tale che esiste almeno un $\varphi \in S_1$ di modo che, ancora, $\varphi = \varphi_+ + \varphi_-$. Chiamiamo $I(U)$ l'insieme di tali φ_+. Diciamo che a ogni φ_+ in $I(U)$ è associato uno e un solo $\varphi \in S_1$. Infatti, a φ_+ siano associati φ e ζ. Dunque, $\varphi - \zeta \in S_1$ e $\varphi - \zeta = \varphi_- - \zeta_-$, allora

$$\|\varphi - \zeta\| = \left\|\varphi_- - \zeta_-\right\| = 0,$$

cioè $\varphi = \zeta$. Poiché $I(U)$ è chiaramente una varietà lineare in $\mathcal{H}_+$, l'applicazione lineare $I(U) \ni \varphi_+ \mapsto \varphi \in S_1$ è ben definita. Dunque, è pure ben definita l'isometria parziale $U\varphi_+ = \varphi_-$ (su $I(U)$ da $\varphi_+ \mapsto \varphi \mapsto \varphi_-$). Allora

$$D(A_1) = \left\{ \varphi + \varphi_+ + U\varphi_+ \,\middle|\, \varphi \in D(A),\ \varphi_+ \in I(U) \right\}$$

e

$$A_1 = A_1\left(\varphi + \varphi_+ + U\varphi_+\right) = A\varphi + i\varphi_+ - iU\varphi_+$$

Viceversa, sia U una isometria parziale da un sottospazio $I(U)$ di $\mathcal{H}_+$ in $\mathcal{H}_-$. Consideriamo l'operatore A_1 definito da

$$\begin{aligned}
D(A_1) &= \left\{ \varphi + \varphi_+ + U\varphi_+ \,\middle|\, \varphi \in D(A),\ \varphi_+ \in I(U) \right\} \\
A_1 &= A\varphi + i\varphi_+ - iU\varphi_+
\end{aligned}$$

Allora A_1 restringe A^* su $D(A_1)$ che è A-chiuso e A-simmetrico, da cui A_1 è una estensione simmetrica chiusa di A. Infatti,

$$D(A_1) = D(A) \oplus_A S_1$$

con S_1 dato da $I(U) \oplus_A R(U)$. Mostriamo che S_1 è A-simmetrico e A-chiuso. Per la simmetria, vale

$$\begin{aligned}
[\varphi, \psi]_A &= \left(A^* \left(\varphi_+ + U\varphi_+\right), \psi_+ + U\psi_+\right) - \left(\varphi_+ + U\varphi_+, A^* \left(\psi_+ + U\psi_+\right)\right) = \\
&= -i \left\{\left(\varphi_+ - U\varphi_+, \psi_+ + U\psi_+\right) + \left(\varphi_+ + U\varphi_+, \psi_+ - U\psi_+\right)\right\} = \\
&= -2i \left(\varphi_+, \psi_+\right) + 2i \left(U\varphi_+, U\psi_+\right) - i \left(\varphi_+, U\psi_+\right) + i \left(\varphi_+, U\psi_+\right) + \\
&\quad +i \left(U\varphi_+, \psi_+\right) - i \left(U\varphi_+, \psi_+\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Per la chiusura, poiché $I(U)$ è chiuso (essendo l'ortogonale al nucleo di U) ed $R(U)$ è chiuso nella topologia $(\cdot, \cdot)$, essi sono chiusi nella A-topologia e dunque S_1 è A-chiuso.

Infine, $A_1^* \chi = i\chi$ se e solo se per ogni $\psi \in D(A_1)$ vale

$$-i(\chi, \psi) = (\chi, A_1 \psi)$$

Ora, $\psi = \psi_0 + \psi_+ + \psi_-$ di modo che deve essere

$$\begin{aligned}
-i(\chi, \psi_0) - i\left(\chi, \psi_+\right) - i\left(\chi, \psi_-\right) &= (\chi, A\psi_0) + i\left(\chi, \psi_+\right) - i\left(\chi, \psi_-\right) \\
0 &= (\chi, (A+i)\psi_0) + 2i\left(\chi, \psi_+\right)
\end{aligned}$$

In particolare, per ogni $\psi_+ \in I(U)$ deve essere $\left(\chi, \psi_+\right) = 0$ e

$$\chi \in R(A+i)^\perp = \ker(A^* - i) = \mathcal{H}_+,$$

infine, $\chi \in \ker(A_1^* - i)$ se e solo se $\chi \in \mathcal{H}_+ \cap I(U)^\perp$ di modo che, essendo pure $I(U) \in \mathcal{H}_+$,

$$n_+(A) = \dim \mathcal{H}_+ = \dim I(U) + \dim \ker(A_1^* - i) = \dim I(U) + n_+(A_1).$$

Analogamente per $n_-(A_1)$. Infatti, $A_1^* \chi = -i\chi$ se e solo se per ogni $\psi \in D(A_1)$

$$i(\chi, \psi) = (\chi, A_1 \psi)$$

ossia

$$\begin{aligned}
i(\chi, \psi_0) + i\left(\chi, \psi_+\right) + i\left(\chi, \psi_-\right) &= (\chi, A\psi_0) + i\left(\chi, \psi_+\right) - i\left(\chi, \psi_-\right) \\
0 &= (\chi, (A-i)\psi_0) - 2i\left(\chi, \psi_-\right)
\end{aligned}$$

In particolare per ogni $\psi_- \in R(U)$ deve essere $\left(\chi, \psi_-\right) = 0$ e

$$\chi \in R(A-i)^\perp = \ker(A^* + i) = \mathcal{H}_-$$

sicché,

$$\ker(A_1^* + i) = \mathcal{H}_- \cap R(U)^\perp.$$

Ora, U è una isometria parziale, perciò un isomorfismo tra i suoi spazi iniziale e finale, allora vale $\dim R(U) = \dim I(U)$, quindi

$$n_-(A) = \dim \mathcal{H}_- = \dim R(U) + n_-(A_1) = \dim I(U) + n_-(A_1).$$

(c.v.d.) Se $\dim I(U)$ è finito possiamo riscrivere le relazioni ottenuti come nella tesi.

Corollario III.4 *Sia A un operatore simmetrico chiuso con indici di difetto n_+ ed n_-. Allora*

(i) *A è autoaggiunto se e solo se $n_+ = n_- = 0$;*

(ii) *A ammette estensioni autoaggiunte se e solo se $n_+ = n_-$. C'è poi una corrispondenza biunivoca tra le estensioni autoaggiunte di A e le mappe unitarie da $\mathcal{H}_+$ in $\mathcal{H}_-$;*

(iii) *se o $n_+ = 0 \neq n_-$ o $n_- = 0 \neq n_+$, allora A non ammette estensioni simmetriche non banali (A si dice allora* **massimale simmetrico***).*

Dimostrazione

Il punto (i) è già stato dimostrato. Punto (ii). A ammette estensione autoaggiunta se e solo se esiste una isometria parziale U di modo che $n_{\pm}(A_U) = 0$. D'altra parte,

$$\ker(A_U^* + i) = \mathcal{H}_- \cap R(U)^{\perp} = \{0\}$$

se e solo se $R(U)$ coincide con $\mathcal{H}_-$ e

$$\ker(A_U^* - i) = \mathcal{H}_+ \cap I(U)^{\perp} = \{0\}$$

se e solo se $I(U)$ coincide con $\mathcal{H}_+$. In definitiva, A ammette estensione autoaggiunta se e solo se esiste una mappa unitaria da $\mathcal{H}_+$ in $\mathcal{H}_-$, il che avviene se e solo se

$$n_+ = \dim \mathcal{H}_+ = \dim \mathcal{H}_- = n_-.$$

Se uno tra n_+ ed n_- è nullo, $\dim I(U) = 0$, perciò $U = 0$ e non esistono estensioni simmetriche di A diverse da A stesso. **(c.v.d.)**

III.3.3 Un criterio di von Neumann per l'estendibilità

Un semplice criterio dovuto a von Neumann, permette di verificare rapidamente se un operatore simmetrico ha o meno estensioni autoaggiunte. Prima di enunciare il risultato, diamo la seguente

Definizione III.4 *Una mappa antilineare $C : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ è detta una* **coniugazione** *se è una isometria e se $C^2 = \mathbb{I}$.*

Una mappa antilineare U invertibile tale che

$$(Ux, Uz) = (z, x)$$

si dice antiunitaria. Per le mappe antiunitarie vale la seguente, ben nota,

Proposizione III.2 *Sia U una applicazione antilineare definita sullo spazio di Hilbert complesso separabile $\mathcal{H}$.*

(i) *Sono fatti equivalenti*

(a) *U è una isometria suriettiva;*
(b) *U è antiunitario.*

(ii) *Se U è antiunitario, conserva la dimensione (hilbertiana).*

Dimostrazione Se U è antiunitario, allora è suriettivo (poiché invertibile) e chiaramente isometrico. Vediamo il viceversa. Se U è isometrico, allora è iniettivo. Sia $\alpha \in \mathbb{C}$, allora, per ipotesi

$$\|U(x + \alpha z)\|^2 = \|x + \alpha z\|^2$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned} \|U(x+\alpha z)\|^2 &= \|Ux\|^2 + |\alpha|^2 \|Uz\|^2 + \alpha(Uz, Ux) + \bar{\alpha}(Ux, Uz) \\ \|x+\alpha z\|^2 &= \|x\|^2 + |\alpha|^2 \|z\|^2 + \bar{\alpha}(z, x) + \alpha(x, z) \end{aligned}$$

Ponendo prima $\alpha = 1$ e poi $\alpha = i$ si ottiene

$$\begin{cases} (Uz, Ux) + (Ux, Uz) = & (z, x) + (x, z) \\ (Uz, Ux) - (Ux, Uz) = & -(z, x) + (x, z) \end{cases}$$

sommando membro a membro

$$(Uz, Ux) = (x, z)$$

sicché, visto che U è biunivoco, si conclude che è antiunitario.

Vediamo (ii). Sia H un sottospazio di $\mathcal{H}$. Consideriamo la varietà lineare UH. Poiché U è isometrico UH è un sottospazio esso stesso, cioè è chiuso. Infatti, sia $\{Ux_n\} \subset UH$ convergente, allora $\{x_n\} \subset H$ è di Cauchy, perciò converge e converge a un elemento $x \in H$. Ma U è continuo, sicché Ux_n converge a $Ux \in UH$. Ha senso allora chiedersi se $\dim H = \dim UH$. Ma questo è ovvio. Sia $\{e_n\}$ una base ortonormale in H. Allora $\{Ue_n\}$ è una base ortonormale in UH, da cui le due dimensioni coincidono. Vediamo che $\{Ue_n\}$ è un s.o.n.c. di UH. Chiaramente è un insieme ortonormale, dato che

$$(Ue_n, Ue_m) = (e_m, e_n) = \delta_{mn}.$$

Poi, sia $Ux \in UH$ tale che, per ogni n,

$$0 = (Ux, Ue_n) = (e_n, x),$$

(c.v.d.) perciò $x = 0$ e $Ux = 0$, da cui la tesi.

Poiché una coniugazione è isometrica e invertibile, essa è antiunitaria

Esempio III.1 L'esempio più immediato di coniugazione è la coniugazione complessa in uno spazio $L^2(M, \mu)$. Essa è definita come segue

$$Cf \equiv \bar{f},$$

▪ C è banalmente una applicazione antilineare involutiva, perciò una coniugazione.

Veniamo, infine, al **criterio di von Neumann** annunciato

Teorema III.15 *Sia A un operatore simmetrico e supponiamo che esista una coniugazione $C : D(A) \to D(A)$ tale che $AC = CA$. Allora A ha indici di difetto eguali e perciò ammette estensioni autoaggiunte.*

Dimostrazione Abbiamo $CD(A) \subset D(A)$ e $C^2 = \mathbb{I}$, cioè C è invertibile. Ne viene che $CD(A) = D(A)$ (sia $z \in D(A)$, allora $z = C^2 z = Cx$, con $x = Cz \in D(A)$). Supponiamo che $\varphi_+ \in \mathcal{H}_+$ e $\varphi_0 \in D(A)$, allora

$$0 = \overline{(\varphi_+, (A+i)\varphi_0)} = (C\varphi_+, C(A+i)\varphi_0) = (C\varphi_+, (A-i)C\varphi_0)$$

poiché $C\varphi_0$ è un generico vettore di $D(A)$ al variare di $\varphi_0 \in D(A)$, ne abbiamo che

$$C\varphi_+ \in R(A-i)^{\perp} = \ker(A^* + i) = \mathcal{H}_-.$$

Ne segue che $C\mathcal{H}_+ \subset \mathcal{H}_-$. Visto che C è antiunitario, $\dim \mathcal{H}_+ \le \dim \mathcal{H}_-$.

Analogamente, supponiamo $\varphi_- \in \mathcal{H}_-$ e $\varphi_0 \in D(A)$, allora

$$0 = \overline{(\varphi_-, (A-i)\varphi_0)} = (C\varphi_-, C(A-i)\varphi_0) = (C\varphi_-, (A+i)C\varphi_0)$$

(c.v.d.) sicché $C\mathcal{H}_- \subset \mathcal{H}_+$, da cui $\dim \mathcal{H}_- \le \dim \mathcal{H}_+$. La tesi.

Hamiltoniana atomica Se consideriamo una hamiltoniana (formale) atomica o molecolare, abbiamo che essa è reale (somma di un polinomio reale nei laplaciani e di potenziali a valori in $\mathbb{R}$), perciò essa commuta con la coniugazione complessa e dunque ammette estensioni autoaggiunte (una volta definita su domini quali $\mathcal{C}_c^\infty$).

Inversione temporale Più in generale, ogni teoria invariante per inversione temporale esprime una hamiltoniana che commutano con l'operatore di inversione temporale il quale è una coniugazione (si realizza il caso antilineare nel teorema di Wigner), sicché la hamiltoniana detta ammette estensioni autoaggiunte.

III.4 Teoria delle perturbazioni

La teoria delle perturbazioni degli operatori autoaggiunti fornisce una serie di criteri tramite i quali si rinviene che se A è autoaggiunto e B non è troppo grande rispetto ad A (e può essere considerato come una perturbazione), allora l'operatore $A+B$ risulta esso stesso autoaggiunto.

Il teorema più importante della serie che andiamo a presentare è quello di Kato-Rellich. Tra l'altro, è in base a questo teorema che si riesce a dimostrare che la hamiltoniana atomica (o molecolare) è autoaggiunta.

III.4.1 Operatori piccoli nel senso di Kato

Cominciamo con il formalizzare il concetto di perturbazione piccola. L'introduzione della seguente definizione è dovuta a Kato.

Definizione III.5 *Siano A e B operatori densamente definiti sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ di modo che*

(i) $D(A) \subset D(B)$;

(ii) *per qualche $a, b \in \mathbb{R}$ e per ogni $\varphi \in D(A)$ risulti*

$$\|B\varphi\| \leq a\|A\varphi\| + b\|\varphi\|; \tag{III.4}$$

*allora B è detto A-**limitato** (o limitato rispetto ad A, o A-piccolo nel senso di Kato). L'estremo inferiore delle costanti a per cui vale la (III.4) si dice A-**limite di** B (o limite relativo di B rispetto ad A). Se il limite relativo è nullo, B si dice* **infinitamente piccolo** *rispetto ad A e si scrive $B \ll A$.*

La condizione (ii) è del tutto equivalente all'esistenza di $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$ di modo che

$$\|B\varphi\|^2 \leq \tilde{a}^2\|A\varphi\|^2 + \tilde{b}^2\|\varphi\|^2 \tag{III.5}$$

Infatti, se vale la (III.5), allora

$$\|B\varphi\| \leq \sqrt{\tilde{a}^2\|A\varphi\|^2 + \tilde{b}^2\|\varphi\|^2} \leq \tilde{a}\|A\varphi\| + \tilde{b}\|\varphi\|$$

per cui vale la (III.4) con $a = \tilde{a}$ e $b = \tilde{b}$. Viceversa, se vale la (III.4), allora

$$\|B\varphi\|^2 \leq a^2\|A\varphi\|^2 + b^2\|\varphi\|^2 + 2ab\|A\varphi\|\|\varphi\|,$$

d'altra parte, poiché

$$(a\|A\varphi\| - b\|\varphi\|)^2 \geq 0$$

si conclude che per ogni $\varepsilon > 0$ sussiste

$$2ab\|A\varphi\|\|\varphi\| \leq a^2\|A\varphi\|^2 + b^2\|\varphi\|^2$$

sicché

$$\|B\varphi\|^2 \leq 2a^2\|A\varphi\|^2 + 2b^2\|\varphi\|^2.$$

Ma si ha di più, considerando la diseguaglianza, valida per ogni $\varepsilon > 0$,

$$\left(\sqrt{\varepsilon}a\|A\varphi\| - \frac{b}{\sqrt{\varepsilon}}\|\varphi\|\right)^2 \geq 0$$

si ottiene

$$\|B\varphi\|^2 \leq (1+\varepsilon)a^2\|A\varphi\|^2 + \frac{b^2}{(1+\varepsilon)}\|\varphi\|^2$$

da cui l'estremo inferiore degli a nella (III.4) coincide con l'estremo inferiore degli $\tilde{a}$ nella (III.5).

Proposizione III.3 *B è A-piccolo nel senso di Kato se e solo se esistono $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$ tali che*

$$\|B\varphi\|^2 \leq \tilde{a}^2\|A\varphi\|^2 + \tilde{b}^2\|\varphi\|^2$$

Inoltre, l'estremo inferiore degli $\tilde{a}$ per cui vale la diseguaglianza di sopra è l'A-limite di B.

Lemma III.2 *Siano B_i, $i \in J_2$, due operatori A-piccoli nel senso di Kato, con A-limiti, rispettivamente, a_i, $i \in J_2$. Allora $\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2$ è A-piccolo nel senso di Kato ed ha A-limite minore o eguale a $|\alpha_1| a_1 + |\alpha_2| a_2$. In particolare, l'insieme degli operatori A-piccoli è uno spazio lineare.*

Dimostrazione Poiché $D(A) \subset D(B_i)$, si conclude che $D(A) \subset D(B_1) \cap D(B_2)$. Poiché $D(A)$ è denso, tale è il dominio di $\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2$. Infine,

$$\|(\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2)\varphi\| \quad \leq \quad |\alpha_1|\|B_1\varphi\| + |\alpha_2|\|B_2\varphi\| \leq$$

$$\leq \quad (a_1 |\alpha_1| + a_2 |\alpha_2|) \|A\varphi\| + (b_1 |\alpha_1| + b_2 |\alpha_2|) \|\varphi\|$$

(c.v.d.) la qual cosa conclude la dimostrazione.

Lemma III.3 *Sia A autoaggiunto e sia $D(A) \subset D(B)$. Allora B è A-piccolo nel senso di Kato se e solo se $BR_A(z)$ è limitato per qualche $z \in \rho(A)$. In questo caso, l'A-limite di B è dato da*

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \|BR_A(\pm i\lambda)\|$$

se A è semilimitato inferiormente si può sostituire $\pm i\lambda$ con $-\lambda$.

Dimostrazione Dalla prima formula del risolvente, abbiamo che se $BR_A(z)$ è limitato per uno $z \in \rho(A)$, allora è limitato per ogni $z \in \rho(A)$. Di conseguenza è sufficiente considerare $z = \pm i\lambda$ con $\lambda > 0$.

Sia B A-limitato. Sia $\varphi = R_A(\pm i\lambda)\psi \in D(A)$ e sia a_∞ l'A-limite di B. Allora

$$\|B\varphi\| = \|BR_A(\pm i\lambda)\psi\| \leq a\|A\varphi\| + b\|\varphi\|$$

Ora, dal teorema spettrale,

$$\begin{aligned} \|A\varphi\|^2 &= \|AR_A(\pm i\lambda)\psi\|^2 = \int d\mu_\psi(x) \left|\frac{x}{\pm i\lambda - x}\right|^2 \leq \int d\mu_\psi(x) = \|\psi\|^2 \\ \|\varphi\|^2 &= \|R_A(\pm i\lambda)\psi\|^2 = \int d\mu_\psi(x) \left|\frac{1}{\pm i\lambda - x}\right|^2 \leq \frac{1}{|\lambda|^2} \int d\mu_\psi(x) = \frac{1}{|\lambda|^2}\|\psi\|^2 \end{aligned}$$

sicché, per ogni $\psi \in \mathcal{H}$,

$$\|BR_A(\pm i\lambda)\psi\| \leq \left(a + \frac{b}{\lambda}\right)\|\psi\|.$$

Viceversa, sia $a_\lambda \equiv \|BR_A(\pm i\lambda)\| < +\infty$. Allora, visto che ogni $\varphi \in D(A)$ può essere scritto come $R_A(\pm i\lambda)\psi$, concludiamo

$$\|B\varphi\| = \|BR_A(\pm i\lambda)\psi\| \leq a_\lambda \|(\pm i\lambda - A)\varphi\| \leq a_\lambda (\|A\varphi\| + \lambda\|\varphi\|)$$

Se a_0 è l'A-limite di B, allora

$$a_0 \leq a_\lambda$$

inoltre, dalla diseguaglianza di sopra,

$$a_\lambda \leq a + \frac{b}{\lambda}$$

Passando al limite per $\lambda \to \infty$, abbiamo che $a_\lambda \in [a_0, a]$, ma siccome a può essere scelto vicino quanto si vuole ad a_0 si ha la tesi (si scelga ad esempio $a = a'_\lambda$ con a'_λ costante che renda vera la diseguaglianza (III.4) con $a'_\lambda - a_0 < (1/\lambda)$).

Si procede allo stesso modo per A semilimitato. In questo caso se γ è il limite, preso $-\lambda < \gamma$

$$\begin{aligned} \|A\varphi\|^2 &= \|AR_A(-\lambda)\psi\|^2 = \int_\gamma^{+\infty} d\mu_\psi(x) \left|\frac{x}{\lambda + x}\right|^2 \leq \\ &\leq \sup_{x > \gamma} \left|\frac{x}{\lambda + x}\right| \int d\mu_\psi(x) = \max\left(\left|\frac{\gamma}{\lambda + \gamma}\right|, 1\right) \|\psi\|^2 \\ \|\varphi\|^2 &= \|R_A(-\lambda)\psi\|^2 = \int_\gamma^{+\infty} d\mu_\psi(x) \left|\frac{1}{\lambda + x}\right|^2 \leq \frac{1}{|\gamma + \lambda|^2} \int d\mu_\psi(x) \\ &= \frac{1}{|\gamma + \lambda|^2}\|\psi\|^2, \end{aligned}$$

infine,

$$\|BR_A(-\lambda)\psi\| \leq \left(a \max\left(\left|\frac{\gamma}{\lambda + \gamma}\right|, 1\right) + \frac{b}{|\gamma + \lambda|}\right)\|\psi\|$$

(c.v.d.)

III.4.2 Il teorema di Kato-Rellich

Siamo finalmente in grado di mostrare il teorema di Kato-Rellich.

Teorema III.16 (Kato-Rellich) *Sia A un operatore (essenzialmente) autoaggiunto e sia B simmetrico A-limitato, con A-limite minore di uno. Allora $A+B$ con dominio $D(A+B) = D(A)$ è (essenzialmente) autoaggiunto. Nel caso in cui A sia essenzialmente autoaggiunto, abbiamo $D(\bar{A}) \subset D(\bar{B})$ e $\bar{A}+\bar{B} = \overline{A+B}$.*
Inoltre, se A è pure limitato inferiormente da γ, allora $A+B$ è limitato inferiormente da $\gamma - \max\left(\dfrac{b}{1-a}, a|\gamma|+b\right)$.

Dimostrazione Sia A essenzialmente autoaggiunto, allora $D(\bar{A}) \subset D(\bar{B})$. Infatti, sia $\{x_n\} \subset D(A)$ una successione convergente a x tale che $\{Ax_n\}$ converge. Allora, dalla (III.4), $\{Bx_n\}$ converge, di modo che $x \in D(\bar{B})$. Allora $D(\bar{A}+\bar{B}) = D(\bar{A})$. Quanto detto mostra pure che $\bar{A}+\bar{B} \subset \overline{A+B}$.

Se mostriamo la tesi per A e B chiusi, abbiamo che $\bar{A}+\bar{B}$ è autoaggiunto su $D(\bar{A})$, perciò aggiuntando la $\bar{A}+\bar{B} \subset \overline{A+B}$, notato che $\overline{A+B}$ è simmetrico, otteniamo

$$\overline{A+B} \subset (A+B)^* \subset \bar{A}+\bar{B} \subset \overline{A+B}$$

cioè

$$\bar{A}+\bar{B} = \overline{A+B}$$

e abbiamo la tesi nella sua asserzione completa.

Siamo ridotti al solo caso in cui A è autoaggiunto. Come sappiamo, è sufficiente dimostrare che

$$R(A+B \pm i\lambda) = \mathcal{H}$$

per un qualche $\lambda > 0$.

Dal lemma III.3 sappiamo che è possibile determinare λ di modo che

$$\|BR_A(\pm i\lambda)\| < 1$$

Conseguentemente, lo spettro di $BR_A(\pm i\lambda)$ è tutto contenuto in un intorno dell'origine di raggio strettamente inferiore a $BR_A(\pm i\lambda)$. In particolare, $-1 \in \rho(BR_A(\pm i\lambda))$, allora l'operatore $BR_A(\pm i\lambda) + \mathbb{I}$ è suriettivo. Allora

$$(A+B \pm i\lambda) = (BR_A(\pm i\lambda) + \mathbb{I})(A \pm i\lambda)$$

è suriettivo, dal momento che è prodotto di due operatori suriettivi.

Veniamo all'ultima parte del teorema. Sappiamo che $A+B$ è (essenzialmente) autoaggiunto per quanto visto sopra. Vogliamo vedere che $A+B$ è pure limitato dal basso. Ci basta mostrare che ogni $\lambda \in \left]-\infty, M\right[$ appartiene al risolvente.

Se A è limitato dal basso possiamo sostituire $\pm i\lambda$ con $-\lambda$, di modo che per λ sufficientemente grande l'operatore $A+B-\lambda$ risulta iniettivo e suriettivo, quindi $\lambda \in \rho(A)$. I valori di λ per cui la stima di sopra è verificata sono tali che

$$\begin{array}{rcl} \gamma & > & -\lambda \\ 1 & > & a\max\left(\left|\dfrac{\gamma}{\lambda+\gamma}\right|, 1\right) + \dfrac{b}{|\gamma+\lambda|} \end{array}$$

la seconda diseguaglianza equivale a dire, tenendo conto della $-\lambda < \gamma$, che

$$1 > \frac{a|\gamma|+b}{\lambda+\gamma}$$

oppure

$$1 > a + \frac{b}{\gamma+\lambda}$$

da cui

$$-\lambda < \gamma - a|\gamma| - b$$

oppure

$$-\lambda < \gamma - \frac{b}{1-a}$$

cioè

$$-\lambda < \gamma - \max\left(\frac{b}{1-a}, a\,|\gamma| + b\right).$$

(c.v.d.)

III.4.3 Perturbazione dello spettro

Notiamo che l'aggiunta di λ volte l'identità a un operatore autoaggiunto A procura una traslazione di $\sigma(A)$ di λ, perciò per perturbazioni relativamente limitate, non possiamo aspettarci di riscontrare invarianze nello spettro.

Rimozione di un autovalore con una perturbazione Se λ_0 appartiene allo spettro discreto di A, esso è facilmente removibile con una perturbazione di rango finito e di norma piccola quanto si vuole. Consideriamo infatti l'operatore

$$B \equiv A + \varepsilon E_A(\{\lambda_0\}),$$

per un qualunque $\psi \in D(A)$, possiamo scrivere $\psi = \psi_{\lambda_0} + \psi_\perp$, dove $\psi_{\lambda_0} \in E(\lambda_0, A)$ e $\psi_\perp \in E(\lambda_0, A)^\perp \cap D(A)$[4], sicché se $\psi \in E(\lambda_0, B)$

$$\begin{aligned} B\psi &= (A + \varepsilon E_A(\{\lambda_0\}))\,\psi = \lambda_0\psi \\ \lambda_0\psi_{\lambda_0} + A\psi_\perp + \varepsilon\psi_{\lambda_0} &= \lambda_0\psi_{\lambda_0} + \lambda_0\psi_\perp \\ A\psi_\perp + \varepsilon\psi_{\lambda_0} &= \lambda_0\psi_\perp \end{aligned}$$

Ricordando che $E(\lambda_0, A)$ e il suo ortogonale sono A-invarianti, otteniamo $\psi_{\lambda_0} = 0$ e

$$A\psi_\perp = \lambda_0\psi_\perp$$

che ammette come unica soluzione $\psi_\perp = 0$.

Caratterizzazione perturbativa dello spettro essenziale Dunque, l'unica parte di spettro che possiamo sperare resti fissata è $\sigma_{\text{ess}}(A)$. Sia K un operatore compatto autoaggiunto e sia $\{\psi_n\}$ una successione di Weyl per A (soddisfacente le proprietà del criterio di Weyl, cioè debolmente convergente a 0 e tale che $\|(A-\lambda)\,\psi_n\| \to 0$ dato $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(A)$). Allora

$$\|(A + K - \lambda)\,\psi_n\| \le \|(A-\lambda)\,\psi_n\| + \|K\psi_n\| \to 0$$

poiché K è compatto. Ne viene che $\sigma_{\text{ess}}(A) \subset \sigma_{\text{ess}}(A+K)$. Adesso invertiamo i ruoli di A e $A+K$, troviamo $\sigma_{\text{ess}}(A+K) \subset \sigma_{\text{ess}}(A)$. In definitiva, lo spettro essenziale è stabile per perturbazioni compatte autoaggiunte

$$\sigma_{\text{ess}}(A) = \bigcap_{\substack{K \in L_{\mathrm{C}}(\mathcal{H}) \\ K = K^*}} \sigma_{\text{ess}}(A+K)$$

Ora, $\lambda \in \sigma(A)$ è stabile sotto perturbazioni autoaggiunte di rango finito se e solo se $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(A)$, di modo che

Teorema III.17 *Lo spettro essenziale è dato dai punti dello spettro che sono stabili per perturbazioni di rango finito, inoltre*

$$\sigma_{\text{ess}}(A) = \bigcap_{\substack{K \in L_{\mathrm{C}}(\mathcal{H}) \\ K = K^*}} \sigma_{\text{ess}}(A+K)$$

La stabilità dello spettro essenziale è anche più forte

Teorema III.18 *Se B è relativamente compatto rispetto ad A, allora*

$$\sigma_{\text{ess}}(A+B) = \sigma_{\text{ess}}(A).$$

---

[4] se $\psi \in D(A)$, allora, per ogni boreliano Ω, $E(\Omega)\,\psi \in D(A)$, infatti

$$\int_M d\mu(m)\,|F(m)\,\chi_\Omega(F(m))\,\psi(m)|^2 \le \int_M d\mu(m)\,|F(m)\,\psi(m)|^2 < +\infty$$

Dimostrazione $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(A)$ se e solo se esiste una successione di Weyl per λ ed A $\{\psi_n\} \subset D(A) = D(A+B)$, allora

$$\|(A+B-\lambda)\psi_n\| \leq \|(A-\lambda)\psi_n\| + \left\|B(z-A)^{-1}(z-A)\psi_n\right\| \to 0$$

poiché se ψ_n converge debole, anche $(z-A)\psi_n$ converge debole, infatti

$$(z-A)\psi_n = (\lambda - A)\psi_n + (z-\lambda)\psi_n.$$

(c.v.d.)

Perturbazioni limitate Per quanto concerne lo shift dello spettro in una perturbazione limitata

Teorema III.19 *Sia B è una perturbazione limitata di A autoaggiunto. Se $d(\lambda, \sigma(A)) > \|B\|$, allora $\lambda \notin \sigma(A+B)$.*

Dimostrazione La serie

$$\frac{1}{A+B-\lambda} = \frac{1}{A-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left[B(\lambda-A)^{-1}\right]^n$$

è convergente in norma, poiché

$$\|B\| < \frac{1}{\left\|(\lambda-A)^{-1}\right\|} = \sup_{x\in\sigma(A)}|x-\lambda| = d(\lambda,\sigma(A))$$

(c.v.d.) Ne viene che $\lambda \in \rho(A+B)$.

Analiticità Le perturbazioni fisicamente rilevanti non sono certo limitate, perciò dobbiamo proseguire oltre nel nostro studio. Un importante risultato è dato dal seguente

Teorema III.20 *Sia B relativamente limitato rispetto ad A e consideriamo*

$$A(\alpha) = A + \alpha B.$$

Allora $R(\alpha, z) \equiv (z - A(\alpha))^{-1}$ è analitica nelle variabili α, z in una regione contenente l'insieme $\{0\} \times \rho(A)$.

Dimostrazione Se $z \notin \sigma(A)$, allora $B(z-A)^{-1}$ è un operatore limitato e perciò la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\left(B(z-A)^{-1}\right)^n$$

(c.v.d.) converge in norma in un intorno di $\alpha = 0$. Di qui la tesi.

L'analiticità del risolvente è molto importante, perché consente di dimostrare che lo spettro discreto, gli autovettori e i proiettori spettrali sono analitici in α.

Lemma III.4 *Sia $z \mapsto P(z)$ una funzione continua da un insieme connesso D in $\mathbb{C}$ nell'insieme dei proiettori su uno spazio di Hilbert. Allora, per ogni $z_1, z_2 \in D$, risulta*

$$\dim R(P(z_1)) = \dim R(P(z_2))$$

Dimostrazione Siano P e Q due proiettori tali che

$$\dim R(P) \neq \dim R(Q)$$

allora $\|P-Q\| \geq 1$. Infatti, sia, per fissare le idee, $\dim R(P) < \dim R(Q)$, allora

$$\dim(\ker P)^{\perp} < \dim R(Q)$$

da cui $R(Q) \cap \ker P \neq \{0\}$ (altrimenti varrebbe la diseguaglianza opposta). Sia φ un vettore di norma unitaria in $R(Q) \cap \ker P$, allora $(Q-P)\varphi = \varphi$, da cui $\|P-Q\| \geq 1$.

Poiché localmente$\|P(z_1) - P(z_2)\|$ può essere resa arbitrariamente piccola, localmente la dimensione deve essere costante. Poiché D è connesso la dimensione deve essere costante su

(c.v.d.) D.

Teorema III.21 *Sia B relativamente limitato rispetto all'operatore autoaggiunto A. Se λ_0 è un autovalore non degenere isolato di A, allora per α sufficientemente piccolo, $\lambda_0(\alpha)$ tale che $\lambda_0(0) = \lambda_0$, è una funzione analitica di α che fornisce un autovalore isolato non degenere per $A(\alpha) = A+\alpha B$. Il proiettore sull'autospazio $\lambda_0(\alpha)$ come tutti gli autovettori corrispondenti sono analitici in α.*

Dimostrazione Esiste $d > 0$ tale che il circolo K di raggio d attorno a λ_0 non interseca lo spettro di A. Poiché $B(A-z)^{-1}$ è analitica in z, è ben definito

$$\frac{1}{\alpha_0} \equiv \sup_{z\in K} \left\| B(A-z)^{-1} \right\|$$

sicché, come si vede ripercorrendo la dimostrazione del teorema precedente, $K \times]-\alpha_0, \alpha_0[$, appartiene alla regione di analiticità di $R(\alpha, z)$. Consideriamo il proiettore

$$P(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_K dz\, R(\alpha, z)\,,$$

usando il teorema di Morera, troviamo che esso è analitico in α per $|\alpha| < \alpha_0$. Poiché $P(0)$ è unidimensionale, dal lemma, abbiamo che $P(\alpha)$ è unidimensionale, la qual cosa ci consente di concludere che nella parte di asse reale racchiusa da K cade un solo punto di $\sigma(A(\alpha))$ che chiameremo $\lambda_0(\alpha)$. $P(\alpha)$, che è il proiettore sull'autospazio relativo a $\lambda_0(\alpha)$, è analitico in α per α piccolo. Per un qualunque ε avremo $\lambda_0 + i\varepsilon \in \rho(A(\alpha))$ per ogni α, per cui

$$(\lambda_0(\alpha) - \lambda_0 - i\varepsilon)^{-1} = \frac{\left(\Omega_0, (A(\alpha) - \lambda_0 - i\varepsilon)^{-1} P(\alpha)\Omega_0\right)}{(\Omega_0, P(\alpha)\Omega_0)}$$

(c.v.d.) sicché $\lambda_0(\alpha)$ è una funzione analitica di α.

III.5 Forme quadratiche e operatori positivi

Lo studio delle forme quadratiche è di grande interesse nella meccanica quantistica. Noi ce ne occupiamo perché forniscono un punto di vista leggermente differente sull'autoaggiunzione nonché sull'estendibilità di operatori simmetrici (estensione di Friedrichs). Inoltre, le forme quadratiche forniscono un modo di introdurre le hamiltoniane molto più fisico, cioè attraverso i loro valori di aspettazione. Come vedremo, solo attraverso le forme quadratiche si possono introdurre i famigerati potenziali a delta di Dirac.

III.5.1 Forme quadratiche

Come sappiamo, ogni forma sesquilineare $q : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tale che $|q(x,z)| \leq M\|x\|\|z\|$, individua uno e un solo operatore limitato A di modo che $q(x,z) = (x, Az)$. La rimozione del vincolo di limitatezza sulla forma quadratica comporta l'insorgere di nuove difficoltà.

Definizione III.6 *Una* **forma quadratica** *è una mappa $q : Q(q) \times Q(q) \to \mathbb{C}$, dove $Q(q)$ è un denso in $\mathcal{H}$ ed è detto* **dominio della forma**, *q è antilineare nella prima variabile e lineare nella seconda variabile.*
Se $q(x,z) = \overline{q(z,x)}$, la forma si dice **simmetrica**. *Se per ogni $x \in Q(q)$ risulta $q(x,x) \geq 0$, la forma si dice* **positiva**, *se, invece, $q(x,x) \geq -M\|x\|^2$, la forma si dice* **semilimitata**.

Vediamo subito alcuni fatti semplicissimi

Proposizione III.4 *Se q è semilimitata e $\mathcal{H}$ è uno spazio complesso, allora q deve essere simmetrica.*

Dimostrazione

Infatti,

$$\mathbb{R} \ni q(x+\alpha z, x+\alpha z) = q(x,x) + |\alpha|^2 q(z,z) + \bar{\alpha} q(z,x) + \alpha q(x,z)$$

da cui, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$\bar{\alpha} q(z,x) + \alpha q(x,z) \in \mathbb{R}$$

cioè

$$\bar{\alpha} q(z,x) + \alpha q(x,z) - \alpha \overline{q(z,x)} - \bar{\alpha} \overline{q(x,z)} = 0$$

preso $\alpha = 1$ e poi $\alpha = i$,

$$\begin{aligned} q(z,x) + q(x,z) &= \overline{q(z,x)} + \overline{q(x,z)} \\ -q(z,x) + q(x,z) &= \overline{q(z,x)} - \overline{q(x,z)} \end{aligned}$$

sommando membro a membro

$$q(x,z) = \overline{q(z,x)}.$$

(c.v.d.)

Corollario III.5 *Una forma quadratica è simmetrica se e solo se, per ogni $x \in Q(q)$, risulta $q(x,x) \in \mathbb{R}$.*

Chiaramente tra forme semilimitate e forme positive c'è poca differenza: se q è limitata da M allora

$$q(x,x) \geq -M(x,x)$$

di modo che

$$q'(x,z) \equiv q(x,z) + M(x,z)$$

è una forma quadratica positiva. Nel seguito ci occuperemo di forme positive.

Operatori e forme quadratiche Il nostro obiettivo è quello di determinare la relazione che passa tra forme quadratiche positive e operatori simmetrici illimitati. Evidentemente è più facile inziare il nostro studio dalla relazione $A \mapsto q_A$, cercando delle condizioni necessarie per q_A e tentando poi di invertirle. Consideriamo un operatore positivo A densamente definito. Consideriamo la forma che è ad esso associata sul dominio $D(A) \times D(A)$

$$q_A(x,z) \equiv (x, Az)$$

q_A è una forma positiva.
Sullo spazio $D(A)$ definiamo il seguente prodotto scalare

$$(x,z)_A \equiv q_A(x,z) + (x,z) = (x, (A+1)z).$$

$(\cdot,\cdot)_A$ è evidentemente una forma sesquilineare simmetrica, poi, siccome A è positivo, $(x,x)_A = 0$ se e solo se $x = 0$, dunque abbiamo realmente a che fare con un prodotto scalare.
La norma associata a tale prodotto scalare è

$$\|x\|_A^2 = (x, (A+1)x) = q_A(x,x) + (x,x)$$

Naturalmente sussiste la relazione

$$\|x\| \leq \|x\|_A$$

di modo che se una successione converge sotto $\|\cdot\|_A$ allora converge allo stesso limite sotto $\|\cdot\|$. Consideriamo il completamento astratto $\mathcal{H}_A$ di $(D(A), \|\cdot\|_A)$, vogliamo vedere se esso è isomorfo a una varietà in $\mathcal{H}$. Se nell'insieme delle successioni $\|\cdot\|_A$-di Cauchy in $D(A)$ introduciamo la relazione di equivalenza avere differenza convergente a 0, abbiamo che l'insieme delle classi di equivalenza è isomorfo a $\mathcal{H}_A$.
Mostriamo che l'insieme delle classi di equivalenza è isomorfo a un sottoinsieme di $\mathcal{H}$. A questo scopo dato $\tilde{x} \in \mathcal{H}_A$ esso individua immediatamente una successione $\|\cdot\|$-di Cauchy su $D(A)$ e perciò un punto x in $\mathcal{H}$. Tale applicazione da $\mathcal{H}_A$ a $\mathcal{H}$ è ben definita, perché se si considerano due successioni in $D(A)$ che appartengono alla classe associata a $\tilde{x}$, esse hanno differenza $\|\cdot\|_A$-convergente a 0 e perciò $\|\cdot\|$-convergente a 0. Sicché entrambe le successioni individuano il medesimo punto x. Se tale applicazione fosse iniettiva, avremmo la tesi. Si tratta cioè di

vedere che se due successioni $\|\cdot\|_A$-di Cauchy in $D(A)$ convergono allo stesso limite in norma $\|\cdot\|$ su $\mathcal{H}$, allora hanno differenza $\|\cdot\|_A$-convergente a 0. In altri termini, si tratta di vedere che se $\{z_n\} \subset D(A)$ è $\|\cdot\|_A$-di Cauchy e $\|\cdot\|$-converge a 0, allora $\|\cdot\|_A$-converge a 0. A questo scopo, basta vedere che z_n converge $(\cdot,\cdot)_A$-debolmente a 0 nello spazio $\mathcal{H}_A$. Per fare questo, è sufficiente controllare la convergenza debole su un denso in $\mathcal{H}_A$, cioè su $D(A)$. Dunque, per ogni $z \in D(A)$,

$$(z, z_n)_A = (z, Az_n) + (z, z_n) = (Az, z_n) + (z, z_n) = (Az + z, z_n) \to 0$$

perché $\{z_n\}$ $\|\cdot\|$-converge forte a 0.

III.5.2 Forme chiudibili e forme chiuse

Vogliamo tradurre quanto visto nella sottosezione precedente, in un linguaggio leggermente diverso

Definizione III.7 *Sia q una forma quadratica positiva sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Definito il prodotto scalare sulla varietà $Q(q)$*

$$(x, z)_q \equiv q(x, z) + (x, z)$$

si dice che q è **chiudibile** *se ogni successione in $Q(q)$ che sia $(\cdot,\cdot)$-convergente a 0 e $(\cdot,\cdot)_q$-di Cauchy, converge in senso $(\cdot,\cdot)_q$ a 0.*

Proposizione III.5 *Una forma quadratica q è chiudibile se e solo se la chiusura di $Q(q)$ sotto $(\cdot,\cdot)_q$ è (isomorfa a) un sottoinsieme di $\mathcal{H}$.*

Dimostrazione Poiché $\|\cdot\| \le \|\cdot\|_q$, si ha che una successione di Cauchy sotto $\|\cdot\|_q$ è di Cauchy sotto $\|\cdot\|$. Dato un punto nel completamento di $Q(q)$ esso individua una classe di successioni $\|\cdot\|_q$-di Cauchy, esse $\|\cdot\|$-convergono tutte allo stesso punto di $\mathcal{H}$. Ne viene che è definita una applicazione dal completamento in $\mathcal{H}$. Il completamento è isomorfo a un sottoinsieme di $\mathcal{H}$, se e solo se l'applicazione è iniettiva. Se e solo se date due successioni in $Q(q)$ $\|\cdot\|_q$-di Cauchy con differenza $\|\cdot\|$-convergente a zero (di modo che $x(\tilde{x}_1) = x(\tilde{x}_2)$), esse hanno differenza $\|\cdot\|_q$-convergente a 0 (per cui $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$). Equivalentemente, se q è chiudibile. **(c.v.d.)**

Il completamento di uno spazio di prodotto scalare $(\cdot,\cdot)$ è uno spazio di Hilbert nel prodotto scalare

$$[x, z] \equiv \lim_{n\to\infty} (x_n, z_n)$$

dove x_n e z_n sono nella classe individuata da x e z rispettivamente. Che il limite esista è ovvio

$$|(x_n, z_n) - (x_m, z_m)| \le \|x_n - x_m\| \|z_n\| + \|z_n - z_m\| \|x_m\| \to 0$$

visto che le successioni x_m e z_n sono limitate. Il fatto che $[x, z]$ sia un prodotto scalare è pressoché ovvio. Vediamo solo $[x, x] = 0$ implica $x = 0$. Abbiamo

$$[x, x] = \lim_{n\to\infty} (x_n, x_n) = 0,$$

allora x_n converge a 0 e, in modo ovvio, la successione identicamente 0 appartiene alla classe di x, perciò $x = 0$.
Se q è chiudibile, allora è ben definito sullo spazio $\mathcal{H}_q$ che completa $Q(q)$ sotto $(\cdot,\cdot)_q$, il prodotto scalare

$$[x, z]_q = \lim_{n\to\infty} \{q(x_n, z_n) + (x_n, z_n)\}$$

Poiché x_n e z_n convergono sotto $(\cdot,\cdot)$, si ha che (x_n, z_n) converge a (x, z), dunque è ben definita su $\mathcal{H}_q$ la forma

$$\bar{q}(x, z) \equiv [x, z]_q - (x, z) = \lim_{n\to\infty} q(x_n, z_n)$$

Si noti come $(\cdot,\cdot)_{\bar{q}} = [\cdot,\cdot]_q$. Chiaramente $\bar{q}$ è una forma quadratica positiva. $\bar{q}$ è tale che il suo dominio $\mathcal{H}_q$ è completo sotto $(\cdot,\cdot)_{\bar{q}}$ per costruzione.

Definizione III.8 *Una forma quadratica positiva q si dice* **chiusa** *se $Q(q)$ è completo sotto $(\cdot,\cdot)_q$.*

Se q è una forma chiudibile, la sua estensione $\bar{q}$ è una forma chiusa che si dice **chiusura** di q.

Proposizione III.6 *Una forma positiva chiudibile ammette estensione in $\mathcal{H}$ a una forma chiusa.*

La caratterizzazione di una forma chiusa è data banalmente dalla seguente

Proposizione III.7 *Una forma quadratica positiva è chiusa se e solo se ogni successione $\{z_n\} \subset Q(q)$ che sia $\|\cdot\|$-convergente a $z \in \mathcal{H}$ e sia $\|\cdot\|_q$-di Cauchy, è anche $\|\cdot\|_q$-convergente a z e $z \in Q(q)$.*

Dimostrazione $Q(q)$ è $\|\cdot\|_q$-completo se e solo se ogni successione $\{z_n\} \subset Q(q)$ che sia $\|\cdot\|_q$-di Cauchy, $\|\cdot\|_q$-converge a un punto in $Q(q)$.
Si tratta allora di dimostrare che le due affermazioni seguenti sono equivalenti:

(i) se $\{z_n\} \subset Q(q)$ è $\|\cdot\|_q$-di Cauchy, allora $\|\cdot\|_q$-converge a un punto in $Q(q)$;

(ii) se $\{z_n\} \subset Q(q)$ è $\|\cdot\|_q$-di Cauchy e z_n $\|\cdot\|$-converge a z, allora z_n $\|\cdot\|_q$-converge a $z \in Q(q)$;

Che (ii) implichi (i) è ovvio. Vediamo che (i) implica (ii). Se z_n $\|\cdot\|$-converge a z e $\|\cdot\|_q$-converge a $\zeta \in Q(q)$, allora

$$\|z_n - \zeta\| \le \|z_n - \zeta\|_q \to 0$$

(c.v.d.) perciò $z = \zeta \in Q(q)$.

Un altro modo per discutere chiusura e chiudibilità Un altro modo (equivalente) per considerare l'intero discorso su forme chiudibili e forme chiuse è il seguente. Sia q una forma quadratica e consideriamo il prodotto scalare $(\cdot,\cdot)_q$ su $Q(q)$. Consideriamo il completamento $\mathcal{H}_q$ di tale spazio di Hilbert. Su $\mathcal{H}_q$ il prodotto scalare è ridefinito, come abbiamo visto, da

$$(x,z)_q \to \lim_{n\to\infty} (x_n, z_n)_q .$$

A questo punto, consideriamo l'identità i tra $Q(q) \subset \mathcal{H}_q$ e $\mathcal{H}$. Poiché $\|\cdot\| \le \|\cdot\|_q$ l'applicazione i è continua e per il teorema di estensione degli operatori continui essa può essere estesa a $\bar{\imath}$ su $\mathcal{H}_q$. Se mostriamo che $\bar{\imath}$ è iniettiva, ne abbiamo che $\mathcal{H}_q$ è isomorfo a un sottoinsieme di $\mathcal{H}$. Si tratta di vedere che se $\bar{\imath}(\tilde{x}_1) = \bar{\imath}(\tilde{x}_2)$, allora $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$, cioè, se esistono due successioni a valori in $Q(q)$ convergenti in $\mathcal{H}_q$ a $\tilde{x}_1$ e $\tilde{x}_2$ e tali che esse convergono sotto $\|\cdot\|$ allo stesso limite, allora convergono allo stesso limite anche in $\mathcal{H}_q$, cioè $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$. In altri termini, se esiste una successione a valori in $Q(q)$ convergente in $\mathcal{H}_q$ e convergente a 0 in $\mathcal{H}$, essa converge a 0 pure in $\mathcal{H}_q$. La qual cosa è verificata se e solo se q è chiudibile.
In questi termini la chiusura $\bar{q}$ di q si ottiene per continuità. Infatti, $Q(q)$ è denso in $\mathcal{H}_q$ e si ha

$$|q(x,z)| = |q(x,z) + (x,z) - (x,z)| \le \|x\|_q \|z\|_q + \|x\| \|z\| \le 2 \|x\|_q \|z\|_q$$

essendo $\|x\| \|z\| \le \|x\|_q \|z\|_q$. Perciò $\bar{q}(x,z)$ è data da

$$\bar{q}(x,z) = \lim_{n\to\infty} q(x_n, z_n)$$

dove $\{x_n\}, \{z_n\} \subset Q(q)$ sono $\|\cdot\|_q$ convergenti a x e z rispettivamente.

III.5.3 Estensione di Friedrichs

Quanto visto in precedenza su operatori e forme suona come

Proposizione III.8 *Sia A un operatore positivo densamente definito, allora la forma quadratica associata ad A è chiudibile.*

Detto questo, poniamo ancora una

Definizione III.9 *Sia A un operatore positivo densamente definito. Si dice* **forma quadratica associata** *ad A la chiusura della forma $q_A : D(A) \times D(A) \to \mathbb{C}$ data da*

$$q_A(x,y) \equiv (x, Ay)$$

Il dominio della forma quadratica associata si denota con $Q(A)$.

Nel seguito denoteremo ancora con q_A la chiusura della q_A di cui sopra. Se $\mathcal{H}_q \equiv Q(A)$, risulta, per ogni $x \in \mathcal{H}_q$ e $y \in D(A)$

$$q_A(x,y) = \lim_{n\to\infty} (x_n, Ay)$$

per $\{x_n\} \subset D(A)$ convergente in senso $\|\cdot\|_q$ a x. Ma allora x_n converge pure in senso $\|\cdot\|$ a x, e perciò converge a x debolmente sotto $(\cdot,\cdot)$, infine,

$$q_A(x,y) = \lim_{n\to\infty} (x_n, Ay) = (x, Ay)$$

In altre parole si ha la

Proposizione III.9 *Sia A un operatore positivo e sia q_A la sua forma quadratica associata, allora per ogni $\varphi \in Q(A)$ e per ogni $\psi \in D(A)$,*

$$q_A(\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi)$$

Esempio III.2 Sia $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ e sia $Q(q) \equiv \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, allora definiamo

$$q(f,g) \equiv \overline{f(0)} g(0)$$

La forma q è chiaramente positiva (dunque simmetrica). La forma detta non è limitata e non coincide con il valore di aspettazione di un operatore sullo spazio di Hilbert. Infatti, se così fosse, la forma sarebbe chiudibile. Si tratta di mostrare il contrario, cioè di vedere l'esistenza di una successione $(\cdot,\cdot)_q$-di Cauchy, convergente a 0 sotto $(\cdot,\cdot)$, ma convergente a un limite diverso da 0 sotto $(\cdot,\cdot)_q$. La cosa è molto semplice. Consideriamo una funzione $\mathcal{C}^\infty$ con supporto in $[-1,1]$, limitata da 1 e pari a 1 in 0. Restringiamo la scala in modo da costruire una successione g_n L^2 convergente a 0, ma tale che $g_n(0) = 1$. In questo modo troviamo

$$(g_n - g_m, g_n - g_m)_q = (g_n - g_m, g_n - g_m) + q(g_n - g_m, g_n - g_m) = (g_n - g_m, g_n - g_m),$$

perciò abbiamo la successione cercata.
Come si vede il completamento di $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ sotto $(\cdot,\cdot)_q$ è $L^2(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{C} \neq L^2(\mathbb{R})$.

Il risultato principale dell'intera sezione è il seguente

Teorema III.22 *Se q è una forma quadratica positiva chiusa, allora esiste un unico operatore A autoaggiunto la cui forma quadratica associata coincide con q.*

Dimostrazione Abbiamo che $\mathcal{H}_q \equiv Q(q)$ è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare

$$(\cdot,\cdot)_q = q(\cdot,\cdot) + (\cdot,\cdot).$$

Fissiamo $x \in \mathcal{H}$ e consideriamo $y \in \mathcal{H}_q$. L'applicazione

$$y \mapsto (x,y)$$

è un funzionale lineare limitato su $\mathcal{H}_q$, infatti

$$|(x,y)| \le \|x\| \|y\| \le \|x\| \|y\|_q.$$

Dal teorema di Riesz, esiste $z \in \mathcal{H}_q$ di modo che

$$(x,y) = (z,y)_q.$$

L'applicazione $B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_q$ che associa x a $z \equiv Bx$ è lineare e limitato

$$\|Bx\| = (z,z)^{1/2} \le (z,z)_q^{1/2} = \sup_{y\in\mathcal{H}_q} \frac{\left|(z,y)_q\right|}{(y,y)_q^{1/2}} = \sup_{y\in\mathcal{H}_q} \frac{|(x,y)|}{(y,y)_q^{1/2}} \le$$

$$\leq \sup_{y\in\mathcal{H}_q} \frac{|(x,y)|}{(y,y)^{1/2}} = (x,x)^{1/2} = \|x\|$$

per cui $\|B\| \leq 1$.

B è autoaggiunto. Infatti, per ogni $x, y \in \mathcal{H}$, poiché $By \in \mathcal{H}_q$,

$$(x, By) = (Bx, By)_q = \overline{(By, Bx)_q} = \overline{(y, Bx)} = (Bx, y) .$$

Inoltre, $\ker B = \{0\}$. Infatti, se $Bx = 0$, allora per ogni $y \in \mathcal{H}_q$

$$(x,y) = (Bx,y)_q = 0$$

di modo che, essendo $\mathcal{H}_q$ denso in $\mathcal{H}$, $x = 0$.

Poiché B è autoaggiunto e iniettivo, $R(B)^\perp = \{0\}$, sicché $R(B)$ è denso. Consideriamo ora B^{-1}. Esso è un operatore densamente definito e, nella rappresentazione spettrale di B, risulta autoaggiunto. In definitiva, B^{-1} è autoaggiunto.

Adesso, per ogni $x \in \mathcal{H}$ e $y \in \mathcal{H}_q$,

$$(x,y) = (Bx,y)_q = (Bx,y) + q(Bx,y)$$

sicché, per ogni $z, y \in R(B)$

$$q(z,y) = \left(B^{-1}z, y\right) - (z,y) = \left(z, \left(B^{-1} - \mathbb{I}\right) y\right)$$

Posto $A \equiv B^{-1} - \mathbb{I}$, abbiamo che A è autoaggiunto e per ogni $x, z \in D(A) = R(B)$ vale

$$q(x,z) = (x, Az) .$$

Per concludere la dimostrazione dell'esistenza dobbiamo far vedere che $D(A)$ è $(\cdot,\cdot)_q$-denso in $\mathcal{H}_q$. In tal caso, infatti, q_A sarebbe, per definizione, l'estensione per continuità di $(\cdot, A\cdot)$ su $\mathcal{H}_q$ e con ciò coinciderebbe con q.

Vediamo, dunque, che $D(A)$ è $(\cdot,\cdot)_q$-denso in $\mathcal{H}_q$. Se $z \in \mathcal{H}_q$ è ortogonale a $R(B) = D(A)$, allora per ogni $x \in \mathcal{H}$

$$0 = (Bx, z)_q = (x, z)$$

sicché $z = 0$.

Infine, occupiamoci della unicità. Sia $\tilde{A}$ un secondo operatore autoaggiunto tale che $q_{\tilde{A}} = q$. Prendiamo $x \in D\left(\tilde{A}\right)$ e $z \in D(A)$, allora

$$\left(z, \tilde{A}x\right) = q(z,x) = \overline{q(x,z)} = (Az, x)$$

Siccome l'equazione vale per ogni $z \in D(A)$, allora $x \in D(A^*) = D(A)$ e $A^*x = Ax = \tilde{A}x$ da cui $\tilde{A} \subset A$. Ma l'equazione vale anche per ogni $x \in D\left(\tilde{A}\right)$, perciò $z \in D\left(\tilde{A}^*\right) = D\left(\tilde{A}\right)$ e

(c.v.d.) $\tilde{A}^*z = \tilde{A}z = Az$, sicché $A \subset \tilde{A}$. Infine, $A = \tilde{A}$.

Un corollario di quanto ottenuto è dato dall'importante

Teorema III.23 (estensione di Friedrichs) *Sia A un operatore simmetrico limitato dal basso, tale cioè che, per ogni $\psi \in D(A)$,*

$$(\psi, A\psi) \geq \gamma \|\psi\|^2$$

allora esiste un'unica estensione autoaggiounta $\tilde{A}$ di A che è ancora limitata dal basso da γ e tale che $D\left(\tilde{A}\right) \subset Q(A)$.

Dimostrazione Come al solito restringiamoci al caso positivo. Si consideri la forma q_A associata all'operatore A. Essa è chiusa su $Q(A) \supset D(A)$ e positiva. Per il teorema precedente esiste un unico operatore $\tilde{A}$ autoaggiunto su $D\left(\tilde{A}\right) \subset Q(A)$ e positivo di modo che $q_{\tilde{A}} = q_A$.

Siano $\varphi \in D(A)$ e $\psi \in D\left(\tilde{A}\right) \subset Q(A)$ allora

$$(\psi, A\varphi) = q_A(\psi,\varphi) = \overline{q_A(\varphi,\psi)} = \overline{\left(\varphi, \tilde{A}\psi\right)} = \left(\tilde{A}\psi, \varphi\right)$$

perciò $\varphi \in D\left(\tilde{A}^*\right) = D\left(\tilde{A}\right)$ e $\tilde{A}^*\varphi = \tilde{A}\varphi = A\varphi$, di modo che $A \subset \tilde{A}$.

Con la stessa prova si dimostra che se A_e è una qualsiasi estensione simmetrica di A con dominio contenuto in $Q(A)$, allora $A_e \subset \tilde{A}$, di modo che se A_e è pure autoaggiunto (aggiuntando ambo i membri) si trova $A_e = \tilde{A}$, da cui l'unicità dell'estensione. **(c.v.d.)**

Limite inferiore di una forma quadratica Un ultima annotazione circa il teorema di estensione di Friedrichs. Data q limitata dal basso dalla costante γ, i.e., $q(\psi,\psi) \geq \gamma \|\psi\|^2$, se chiamiamo M la migliore di queste costanti, cioè l'estremo superiore delle γ di cui sopra, abbiamo

$$q(\psi,\psi) \geq M \|\psi\|^2 .$$

Infatti, per ogni $\psi \in Q(q)$,

$$\frac{q(\psi,\psi)}{\|\psi\|^2} \geq \gamma$$

da cui

$$\sup_{\psi \in Q(q)} \frac{q(\psi,\psi)}{\|\psi\|^2} \geq \gamma$$

infine,

$$\sup_{\psi \in Q(q)} \frac{q(\psi,\psi)}{\|\psi\|^2} \geq M$$

perciò la tesi. Chiamiamo M limite inferiore di q.

Spettro dell'estensione di Friedrichs Se q è una forma semilimitata con limite inferiore M e se A è l'operatore autoaggiunto univocamente individuato da q, allora

$$\inf \sigma(A) = M.$$

Infatti, per ogni $\psi \in D(A)$, $(\psi, A\psi) \geq M \|\psi\|^2$, cosicché se $\lambda < M$ allora $\lambda \in \rho(A)$, perciò

$$M \leq \inf \sigma(A) .$$

Viceversa, se $\psi \in D(A)$,

$$(\psi, A\psi) = \int_{\sigma(A)} d\mu_\psi(\lambda)\ \lambda \geq \inf \sigma(A) \|\psi\|^2$$

Se $\psi \in \mathcal{H}_q$, allora esiste $\{\psi_n\} \subset D(A)$ con ψ_n convergente in $\mathcal{H}_q$ a ψ per cui

$$q(\psi,\psi) = \lim_{n\to+\infty} (\psi_n, A\psi_n) \geq \inf \sigma(A) \|\psi\|^2 ,$$

da cui

$$\inf \sigma(A) \leq M,$$

cioè $M = \inf \sigma(A)$.
Infine, l'estremo inferiore dello spettro dell'estensione di Friedrichs $\tilde{A}$ di A semilimitato è il limite inferiore di q_A.

III.5.4 Perturbazioni di forme quadratiche

In questa sottosezione ci occupiamo di una versione del teorema di Kato valida per le forme quadratiche.

Teorema III.24 *Siano q e γ due forme quadratiche simmetriche definite sullo stesso dominio. Se q è positiva e chiusa ed esistono due costanti reali $a < 1$ e b per cui, per ogni $\psi \in Q(q)$, risulta*

$$|\gamma(\psi,\psi)| \leq a q(\psi,\psi) + b(\psi,\psi) ,$$

allora $q + \gamma$ è semilimitata e chiusa sul dominio $Q(q)$.

Dimostrazione Consideriamo la forma $q + \gamma$ su $Q(q)$. Abbiamo

$$\begin{aligned} (q+\gamma)(\psi,\psi) &\leq (1+a)\, q(\psi,\psi) + b(\psi,\psi) \\ (q+\gamma)(\psi,\psi) &\geq (1-a)\, q(\psi,\psi) - b(\psi,\psi) \end{aligned}$$

Ora, la seconda disequazione comporta che $q+\gamma$ è limitata dal basso:

$$(q+\gamma)(\psi,\psi) \geq (1-a)\,q(\psi,\psi) - b(\psi,\psi) \geq -b(\psi,\psi)$$

dal momento che $a<1$.

La forma $(q+\gamma)(\psi,\varphi)+b(\psi,\varphi)$ definita su $Q(q)$ è positiva e definisce il seguente prodotto scalare

$$[\psi,\varphi]_\gamma = (q+\gamma)(\psi,\varphi) + (b+1)(\psi,\varphi)\,.$$

Confrontiamo questo prodotto scalare con quello definito da q, $(\psi,\varphi)_q = q(\psi,\varphi)+(\psi,\varphi)$. Abbiamo

$$[\psi,\psi]_\gamma \leq (1+a)\,q(\psi,\psi) + (2b+1)(\psi,\psi)$$

se definiamo $C_1 \equiv \max\{(1+a),(2b+1)\} > 0$, troviamo

$$[\psi,\psi]_\gamma \leq C_1(\psi,\psi)_q\,;$$

inoltre,

$$[\psi,\psi]_\gamma \geq (1-a)\,q(\psi,\psi) + (\psi,\psi) \geq (1-a)(\psi,\psi)_q$$

cioè, posto $C_2 \equiv 1-a > 0$, concludiamo

$$C_2(\psi,\psi)_q \leq [\psi,\psi]_\gamma \leq C_1(\psi,\psi)_q$$

Sicché $\mathcal{H}_q$ e $\mathcal{H}_{q+\gamma+b}$ sono spazi isomorfi, essendo l'identità tra tali spazi limitata con inversa limitata. Infine, poiché $\mathcal{H}_q$ è completo sotto $(\cdot,\cdot)_q$, $\mathcal{H}_{q+\gamma+b}$ è completo sotto $(\cdot,\cdot)$. I due spazi, peraltro, sono ambedue isomorfi a $Q(q)$, perciò si ha la tesi.

(c.v.d.)

Un corollario di questo teorema è il seguente risultato

Teorema III.25 (KLMN) *Sia A un operatore positivo autoaggiunto e sia γ una forma simmetrica definita su $Q(A)$ e tale che*

$$|\gamma(\psi,\psi)| \leq a(\psi,A\psi) + b(\psi,\psi)$$

per ogni $\psi\in D(A)$, per delle costanti reali $a<1$ e b. Allora esiste un unico operatore autoaggiunto B con $Q(B)=Q(A)$ limitato inferiormente da b e tale che $q_B = q_A+\gamma$.

Dimostrazione $q\equiv q_A$ è una forma positiva tale che per ogni $\psi\in D(A)$

$$|\gamma(\psi,\psi)| \leq aq(\psi,\psi) + b(\psi,\psi)\,.$$

Preso $C\equiv\max\{a,b\}$ abbiamo

$$|\gamma(\psi,\psi)| \leq C\,\|\psi\|_q$$

sicché γ è una forma continua su $\mathcal{H}_q \equiv Q(A)$. Ogni $\psi\in\mathcal{H}_q$ è il limite di una successione $\{\psi_n\}\subset D(A)$ in senso $\mathcal{H}_q$, per cui

$$\begin{aligned} |\gamma(\psi,\psi)| &= \lim_{n\to\infty}|\gamma(\psi_n,\psi_n)| \leq \lim_{n\to\infty}\left[aq(\psi_n,\psi_n)+b(\psi_n,\psi_n)\right] = \\ &= aq(\psi,\psi)+b(\psi,\psi)\,. \end{aligned}$$

Ne viene che $q_A+\gamma$ è una forma semilimitata chiusa su $Q(A)$, grazie al teorema precedente.

Allora esiste un unico operatore autoaggiunto B con $Q(B)=Q(q_A+\gamma)=Q(A)$ di modo che

$$q_B = q_A+\gamma.$$

Ancora, dalla dimostrazione del teorema precedente,

$$q_B(\psi,\psi) \geq -b\,\|\psi\|^2$$

sicché

$$(\psi,B\psi) \geq -b\,\|\psi\|^2$$

per ogni $\psi\in D(B)$.

(c.v.d.)

III.6 Vettori analitici

In questa sezione torniamo sul teorema di Stone e le sue conseguenze. Il teorema III.7 afferma che se $U(t)$ è un gruppo continuo unitario a un parametro che lascia invariata una varietà lineare densa D, allora $-i$ volte la derivata in $t = 0$ del gruppo definisce un operatore A essenzialmente autoaggiunto su D e tale che $U(t) = e^{-itA}$.

Vogliamo determinare delle condizioni su A simmetrico in modo tale che, a partire da esso, sia possibile costruire un gruppo unitario $U(t)$.

Operatori autoaggiunti e serie di potenze Il modo più naturale per costruire $U(t)$ è quello di cercare di dare un senso alla serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(itA)^n}{n!}$$

su un denso.

Notiamo che se A è un operatore autoaggiunto e $E(\Omega)$ è la sua famiglia spettrale associata, la serie di potenze detta converge in norma su ciascun sottospazio $R(E(-M, M))$, per qualsiasi $M > 0$. Infatti,

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{\psi \in R(E(-M,M)) \\ \|\psi\|=1}} \left\| \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{(itA)^n}{n!} - e^{itA} \right) \psi \right\| &= \sup_{\substack{\psi \in \mathcal{H} \\ \|\psi\|=1}} \left\| \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{(itA)^n}{n!} - e^{itA} \right) E(-M, M)\, \psi \right\| \leq \\
&\leq \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \left| \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{(it\lambda)^n}{n!} - e^{it\lambda} \right) \chi_{(-M,M)}(\lambda) \right| = \\
&= \sup_{\lambda \in (-M,M)} \left| \sum_{n=0}^{N} \frac{(it\lambda)^n}{n!} - e^{it\lambda} \right| \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Quindi, per ogni

$$\varphi \in \bigcup_{M \geq 0} R(E(-M, M)) \equiv D$$

vale

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(itA)^n}{n!} \varphi \to e^{itA} \varphi.$$

D'altra parte, D è denso in $\mathcal{H}$, infatti, sia $\psi \in D^{\perp}$, allora, per ogni $\varphi \in \mathcal{H}$ e $M \geq 0$

$$(\psi, E(-M, M)\, \varphi) = 0$$

In particolare, per ogni M

$$(\psi, E(-M, M)\, \psi) = 0,$$

tuttavia

$$\lim_{M \to +\infty} (\psi, E(-M, M)\, \psi) = (\psi, \psi) = 0$$

sicché $\psi = 0$.

Ne deriva che l'azione del gruppo unitario $U(t)$ definito dall'operatore autoaggiunto A è del tutto controllata dalla serie di potenze esponenziale di A su un denso. Quello che vedremo nel corso di questa sezione è, praticamente, l'inverso.

Vettori analitici Per procedere, formalizziamo l'esistenza di un denso sul quale la serie di potenza esponenziale ha un senso

Definizione III.10 *Sia A un operatore su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. I vettori contenuti nell'insieme*

$$\mathcal{C}^{\infty}(A) \equiv \bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$$

si dicono vettori $\mathcal{C}^\infty$ per A. Un vettore $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(A)$ è detto **analitico** *per A, se*

$$\|A^n\varphi\| < c^n n!$$

per qualche $c \in \mathbb{R}$, c non negativo.

Se A è autoaggiunto, passando in rappresentazione spettrale ci rendiamo conto che l'insieme delle funzioni $\mathcal{C}^\infty$ a supporto compatto forniscono un sottoinsieme denso di vettori $\mathcal{C}^\infty$ per A, per cui un operatore autoaggiunto ha un insieme di vettori $\mathcal{C}^\infty$ denso su $\mathcal{H}$.
Sia dato un operatore simmetrico A e sia D l'insieme dei suoi vettori analitici. Vogliamo vedere che D è una varietà lineare in $\mathcal{H}$. Siano $\varphi, \psi \in D$, allora

$$\|A^n(\varphi + \lambda\psi)\| < \left(c_\varphi^n + |\lambda|\, c_\psi^n\right) n! = \left(\sqrt[n]{c_\varphi^n + |\lambda|\, c_\psi^n}\right)^n n!$$

Infine, importante nella dimostrazione del teorema successivo, è notare che $AD \subset D$. Abbiamo, se $\psi \in D$,

$$\|A^n A\psi\| < c_\psi^{n+1}(n+1)! = c_\psi (n+1)\, c_\psi^n n!$$

scegliamo adesso $a < 1$, di modo che

$$c_\psi(n+1)\, c_\psi^n n! = \frac{(n+1)\, c_\psi}{a^n}(ac_\psi)^n n! < (ac_\psi)^n n!$$

da un certo n in poi, visto che il primo fattore a secondo membro dell'eguaglianza tende a 0 per $n \to +\infty$. Per il numero finito di n che resta fuori dal ragionamento, non vi sono problemi (scegliendo massimi...), sicché esiste $c_{A\psi}$ per cui

$$\|A^n A\psi\| < c_{A\psi}^n n!$$

In definitiva

Proposizione III.10 *L'insieme dei vettori analitici di un operatore è invariante sotto l'operatore stesso.*

Veniamo al risultato che ci interessa

Teorema III.26 (Nelson) *Se i vettori analitici di un operatore simmetrico A formano un sottoinsieme denso $D \subset \mathcal{H}$, allora A è essenzialmente autoaggiunto su D.*

Dimostrazione Sia dato un vettore analitico ψ. Sia $\mathcal{H}_\psi$ la chiusura dello spazio D_ψ delle combinazioni lineari finite di vettori $A^n\psi$. Su D_ψ consideriamo la coniugazione

$$C : \sum_n \alpha_n A^n\psi \to \sum_n \bar{\alpha}_n A^n\psi$$

Il fatto che C sia una coniugazione è evidente: C è antilineare e $C^2 = \mathbb{I}$, inoltre, poiché A è simmetrico

$$\begin{aligned}(Cx, Cy) &= \left(\sum_n \bar{x}_n A^n\psi, \sum_m \bar{y}_m A^m\psi\right) = \sum_{m,n} x_n\bar{y}_m\left(\psi, A^{n+m}\psi\right) = \\ &= \sum_{m,n} x_n\bar{y}_m\left(A^m\psi, A^n\psi\right) = \left(\sum_m y_m A^m\psi, \sum_n x_n A^n\psi\right) = (y, x)\end{aligned}$$

Chiaramente C commuta con A, sicché, per il criterio di von Neumann, $A|_{D_\psi}$ ammette estensioni autoaggiunte. Sia B una estensione autoaggiunta su $\mathcal{H}_\psi$ di $A|_{D_\psi}$. Intendiamo mostrare che B è l'unica estensione autoaggiunta su $\mathcal{H}_\psi$ di $A|_{D_\psi}$, di modo che $A|_{D_\psi}$ è essenzialmente autoaggiunto in $\mathcal{H}_\psi$ (ha necessariamente indici di difetto nulli).

Tramite il teorema spettrale per B si costruisce il gruppo unitario a un parametro e^{iBt} definito da

$$f_\psi(t) \equiv \left(\psi, e^{iBt}\psi\right) = \int d\mu_\psi(\lambda)\, e^{i\lambda t}.$$

Dato che B estende A e tutti gli $A^n\psi$ appartengono al dominio di A, vale

$$\|B^n\psi\| = \int d\mu_\psi(\lambda)\,|\lambda|^{2n} = \|A^n\psi\| < c_\psi^{2n}(n!)^2$$

sicché

$$\int d\mu_\psi(n)\,|\lambda|^n \leq \|\psi\|\left(\int d\mu_\psi(\lambda)\,|\lambda|^{2n}\right)^{1/2} < c_\psi^n n!$$

Ora, poiché ogni $\lambda^n \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_\psi)$, abbiamo

$$\frac{d^n}{dt^n} f_\psi(t) = \int d\mu_\psi(\lambda)\,(i\lambda)^n e^{i\lambda t}$$

e con ciò

$$\left|\frac{d^n}{dt^n} f_\psi(t)\right| \leq \int d\mu_\psi(n)\,|\lambda|^n < c_\psi^n(n!)$$

Ne viene che $f(t)$ è analitica in ogni intorno di $t \in \mathbb{R}$ di raggio inferiore a $1/c_\psi$. In definitiva, per ogni $\varphi \in D_\psi$, la funzione $f_\varphi(t)$ è analitica su una striscia di larghezza $2/c_\varphi$ attorno all'asse reale. Questo significa che il valore di $f_\varphi(t)$ per ogni tempo e per ogni $\varphi \in D_\psi$ è univocamente determinato da $f_\varphi^{(n)}(0)$ per ogni n, cioè da $(\varphi, A^n\varphi)$ per ogni n.

Dunque, se esistesse una seconda estensione autoaggiunta $\tilde{B}$ di $A|_{D_\psi}$ su $\mathcal{H}_\psi$, avremmo, per la densità di D_ψ,

$$e^{i\tilde{B}t} = e^{iBt} = U(t)$$

Dall'unicità, attestata dal teorema di Stone, dell'operatore autoaggiunto che esponenziato fornisce $U(t)$, si conclude che $B = \tilde{B}$.

Per mostrare che A è essenzialmente autoaggiunto pure su D, dobbiamo vedere che $(A \pm i)D$ è denso in $\mathcal{H}$. Sia allora $\chi \neq 0$ tale che per ogni $\psi \in D$, risulta

$$(\chi, (A \pm i)\psi) = 0$$

Sia $\{\chi_n\} \subset D$ una successione di vettori analitici convergente a χ. Siccome $(A \pm i)D_{\chi_n}$ è denso in D_{χ_n}, possiamo determinare una successione $\{\varphi_n\} \subset D$ tale che $(A \pm i)\varphi_n \to \chi$. D'altra parte,

$$(\chi, (A \pm i)\varphi_n) = 0$$

infine,

$$0 = \lim_{n\to\infty}(\chi, (A \pm i)\varphi_n) = (\chi, \chi),$$

(c.v.d.) assurdo.

Capitolo IV

Operatori di Schrödinger

Un argomento fondamentale nello studio rigoroso della meccanica quantistica è l'analisi degli operatori di Schrödinger. In questo capitolo vedremo solo alcuni aspetti fondamentali: la hamiltoniana libera, la hamiltoniana atomica, le hamiltoniane definite come forme quadratiche, i metodi variazionali dell'analisi spettrale (principio del min-max, confronto di operatori). Chiude la trattazione un rapidissimo accenno alle questioni rilevanti della teoria dello scattering.

Introduzione Gli operatori di Schrödinger sono le hamiltoniane della meccanica quantistica non relativistica. Dal punto di vista formale la hamiltoniana non relativistica è della forma (a parte campi magnetici)

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

dove p e q sono operatori autoaggiunti su un certo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ nel quale realizzano le regole canoniche di commutazione. Se il sistema che stiamo descrivendo è composto da N particelle in d dimensioni, allora una realizzazione concreta per $\mathcal{H}$ è $L^2\left(\mathbb{R}^{Nd}\right)$ e la hamiltoniana ha scrittura formale

$$H = -\sum_{\alpha=1}^{Nd} \frac{\Delta_\alpha}{2m_\alpha} + V(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N)$$

dove

$$\Delta_\alpha = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_{\alpha,i}^2}$$

è il laplaciano rispetto alle d variabili $\mathbf{x}_\alpha$.
L'equazione di Schrödinger si scrive

$$H\varphi_t = i\dot{\varphi}_t$$

ed ammette una soluzione globale, data da e^{-itH}, se e solo se H è un operatore autoaggiunto. Lo studio della dinamica è dunque ridotto allo studio delle hamiltoniane e questo è l'oggetto della teoria degli operatori di Schrödinger.
In questo capitolo vedremo solo i fatti fondamentali su questo vastissimo argomento. Cominceremo dalla hamiltoniana libera (quella nella quale compare il solo laplaciano), poi vedremo la hamiltoniana atomica (teorema di Kato), infine, qualche accenno sulla teoria dello scattering.

IV.1 La hamiltoniana libera

IV.1.1 Autoaggiunzione della hamiltoniana libera

Definizione formale della hamiltoniana libera Consideriamo un sistema composto da N particelle identiche in d dimensioni, la hamiltoniana libera risulta allora

$$H_0 = -\Delta$$

dove, posto $\ell \equiv Nd$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

La definizione data della hamiltoniana libera è chiaramente solo formale. Quello che vogliamo è determinare un dominio di autoaggiunzione per H_0. A questo scopo è fondamentale utilizzare la trasformata di Fourier.

Trasformata di Fourier

Sia $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R}^\ell)$, se $\hat{F}$ indica l'operatore trasformata di Fourier e $\check{F}$ quello di antitrasformata, allora, posto

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} &\equiv \frac{\hat{F}}{(2\pi)^{\ell/2}} \\ \mathcal{F} &\equiv (2\pi)^{\ell/2} \check{F} \end{aligned}$$

$\mathcal{F}$ risulta unitario e $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^{-1}$.
Ricordiamo che per ogni $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$ risulta

$$\mathcal{F}(f)(p) = \frac{1}{(2\pi)^{\ell/2}} \int f(x) e^{-ip\cdot x} d^\ell x$$

La trasformata di Fourier è una isometria di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$ in sé. Inoltre, ricordiamo che vale il seguente

Lemma IV.1 *Per ogni multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^{\times \ell}$ e per ogni $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$,*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\partial_\alpha f)(p) &= (ip)^\alpha \mathcal{F}(f)(p) \\ \mathcal{F}(x^\alpha f(x))(p) &= i^{|\alpha|} \partial_\alpha \mathcal{F}(f)(p) \end{aligned}$$

Definizione della hamiltoniana libera

Dunque, ristretto H_0 a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$, abbiamo

$$\mathcal{F}(H_0 \psi) = p^2 \mathcal{F}(\psi)(p)$$

perciò

$$\mathcal{F} H_0 \mathcal{F}^{-1} \varphi(p) = p^2 \varphi(p)$$

Ossia, H_0 è unitariamente equivalente al moltiplicatore per p^2 sulle funzioni $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$. Quest'ultimo è un operatore essenzialmente autoaggiunto estendibile per chiusura a un operatore autoaggiunto con dominio

$$D(p^2) = \left\{ \varphi \in L^2(\mathbb{R}^\ell) \left| p^2 \varphi(p) \in L^2(\mathbb{R}^\ell) \right. \right\}.$$

Definiamo allora H_0 come l'operatore unitariamente equivalente via $\mathcal{F}$ al moltiplicatore per p^2 sul suo dominio di autoaggiunzione. In questo modo H_0 viene a essere **autoaggiunto** sul dominio

$$H^2(\mathbb{R}^\ell) \equiv \left\{ \psi \in L^2(\mathbb{R}^\ell) \left| p^2 \mathcal{F}(\psi)(p) \in L^2(\mathbb{R}^\ell) \right. \right\}.$$

In questo modo, H_0 coincide con $-\Delta$ sullo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$ e la restrizione di H_0 a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$ è essenzialmente autoaggiunta ed ha per chiusura H_0. In altri termini, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$ è un core per H_0.

Digressione sugli operatori di moltiplicazione

Poiché la hamiltoniana libera è unitariamente equivalente a un operatore di moltiplicazione torniamo un attimo su questi ultimi.
Sia (M, μ) uno spazio di misura. Sia $f : M \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile reale quasi ovunque finita. Consideriamo $\mathcal{H} = L^2(M, \mu)$. Se con f intendiamo pure il moltiplicatore per f, abbiamo che f è autoaggiunto. Consideriamo il calcolo funzionale associato a f. Un'ipotesi ragionevole è che per ogni $g \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, valga

$$\phi(g) = g(f(x))$$

cioè $\phi(g)$ sia il moltiplicatore per $g(f(x))$. Chiaramente il ϕ definito sopra è uno $*$-

omomorfismo tra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ e gli operatori limitati su $L^2(M,\mu)$: infatti, se $\|\psi(x)\| = 1$

$$\|g(f(x))\,\psi(x)\| = \left(\int d\mu(x)\ |g(f(x))\,\psi(x)|^2\right)^{1/2} \le \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} |g(\lambda)|$$

Inoltre, se g_n tende puntualmente ed equilimitatamente a g, allora

$$\int d\mu(x)\ |g_n(f(x)) - g(f(x))|^2\,|\psi(x)|^2 \to 0$$

per il teorema della convergenza dominata di Lebesgue.
Infine, se $\{h_n\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ è una successione convergente puntualmente a $\lambda \mapsto \lambda$ e tale che $|h_n(\lambda)| \le |\lambda|$, allora, per ogni $\psi \in D(f)$ vale

$$\int d\mu(x)\ |h_n(f(x)) - f(x)|^2\,|\psi(x)|^2 \to 0$$

visto che $|2f(x)\,\psi(x)|^2 \in L^1(M,\mu)$ e che $h_n(f(x)) \to f(x)$ per $n \to +\infty$.
Se ne conclude che il ϕ definito è proprio quello che riproduce il calcolo funzionale. Infine, se $\{E(\Omega)\}$ è la famiglia spettrale associata a f, vale

$$E(\Omega) = \chi_\Omega(f(x)).$$

Ne viene che

$$\mu_\psi(\Omega) = (\psi, E(\Omega)\,\psi) = \int d\mu(x)\ |\psi(x)|^2\,\chi_\Omega(f(x)).$$

In particolare, se M coincide con $\mathbb{R}$ e prendiamo $f(x) = x$, abbiamo

$$\mu_\psi(\Omega) = \int d\mu(x)\ |\psi(x)|^2\,\chi_\Omega(x)$$

e con ciò

$$d\mu_\psi(x) = |\psi(x)|^2\,d\mu(x).$$

Equivalenza unitaria e spettro Ancora, poiché p^2 e H_0 sono unitariamente equivalenti, è interessante studiare le relazioni tra gli spettri di operatori unitariamente equivalenti.
Ricordiamo che se U è unitario e $B = UAU^{-1}$, allora A e B hanno eguali risolvente e spettro. Inoltre, se f è una funzione boreliana limitata,

$$f(B) = Uf(A)\,U^{-1},$$

infatti, l'applicazione

$$\phi(f) = Uf(A)\,U^{-1}$$

è un calcolo funzionale per B, ma questo è unico, di qui la tesi.
Dunque,

$$\begin{aligned}\mu_\psi^A(\Omega) &= (\psi, E_A(\Omega)\,\psi) = \left(U\psi, UE_A(\Omega)\,U^{-1}U\psi\right) = \\ &= (U\psi, E_B(\Omega)\,U\psi) = \mu_{U\psi}^B(\Omega)\end{aligned}$$

perciò, $\psi \in \mathcal{H}_i^A$ se e solo se $U\psi \in \mathcal{H}_i^B$, cioè

$$UP_i^A U^{-1} = P_i^B$$

ossia

$$\sigma_i(A) = \sigma\left(P_i^A A P_i^A\right) = \sigma\left(P_i^B B P_i^B\right) = \sigma_i(B)$$

Teorema IV.1 *Dati due operatori autoaggiunti unitariamente equivalenti A e B, di modo che $B = UAU^{-1}$, allora A e B hanno spettro, spettro continuo, assolutamente continuo, singolare continuo e puntuale eguali. Infine, se $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,*

$$f(B) = Uf(A)\,U^{-1}$$

Proprietà spettrali di H_0 Veniamo al primo risultato interessante sulla hamiltoniana libera

Teorema IV.2 *La hamiltoniana libera H_0 è autoaggiunta ed il suo spettro è caratterizzato da*

$$\begin{aligned}\sigma(H_0) &= \sigma_{\mathrm{ac}}(H_0) = [0,+\infty[\\ \sigma_{\mathrm{s}}(H_0) &= \sigma_{\mathrm{pp}}(H_0) = \emptyset\end{aligned}$$

Dimostrazione La proprietà di autoaggiunzione è già stata dimostrata. Poiché H_0 è unitariamente equivalente al moltiplicatore per p^2 il suo spettro coincide con quello di p^2 stesso, dunque, essendo p^2 positivo

$$\sigma(H_0) \subset [0,+\infty[\,.$$

Ora, per ogni $\lambda \geq 0$, l'operatore di moltiplicazione per $p^2-\lambda$ è invertibile ed ha per inverso il moltiplicatore per $1/\left(p^2-\lambda\right)$. Quest'ultimo è chiaramente illimitato, di modo che $\lambda \in \sigma(H_0)$. In definitiva

$$\sigma(H_0) = [0,+\infty[\,.$$

Adesso si tratta di vedere che ogni vettore in $\mathcal{H}$ ha misura spettrale assolutamente continua. Per ogni boreliano Ω, per quanto visto sopra,

$$\begin{aligned}\mu_\psi(\Omega) &= \left(\psi, \chi_\Omega\left(p^2\right)\psi\right) = \int d^\ell p\, |\psi(p)|^2 \chi_\Omega\left(p^2\right) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} dr\, \chi_{\mathbb{R}^+}(r)\, r^{n-1}\chi_\Omega\left(r^2\right)\int_{\mathbb{S}^{n-1}} d^{n-1}\omega\, |\psi(\omega r)|^2\end{aligned}$$

(c.v.d.) di modo che se Ω ha misura di Lebsegue nulla, allora $\mu_\psi(\Omega) = 0$.

IV.1.2 Evoluzione temporale

Formula integrale per l'evoluzione temporale Poiché H_0 è autoaggiunta definisce correttamente una evoluzione temporale che è un gruppo unitario a un parametro dato da e^{-itH_0}. Per quanto visto nella precedente sottosezione, abbiamo

$$e^{-itH_0} = \mathcal{F}^{-1}e^{-itp^2}\mathcal{F}$$

e quindi possiamo studiare l'operatore e^{-itp^2}.
Consideriamo l'operatore

$$f_\varepsilon\left(p^2\right) \equiv e^{-(it+\varepsilon)p^2}$$

al variare di $\varepsilon > 0$. Abbiamo, per ogni $x \in \sigma\left(p^2\right) = \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}f_\varepsilon(x) &= e^{-(it+\varepsilon)x}\\ |f_\varepsilon(x)| &\leq 1\\ f_\varepsilon(x) &\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} e^{-itx}\end{aligned}$$

di modo che $f_\varepsilon\left(p^2\right)$ converge fortemente a e^{-itp^2}. In definitiva, $f_\varepsilon(H_0)$ converge fortemente all'operatore di evoluzione temporale e^{-itH_0}.
Ora, se $\psi \in L^1\left(\mathbb{R}^\ell\right) \cap L^2\left(\mathbb{R}^\ell\right)$, usando la formula di convoluzione

$$\begin{aligned}e^{-itH_0}\psi(x) &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathcal{F}^{-1}f_\varepsilon\left(p^2\right)\mathcal{F}\psi(x) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathcal{F}^{-1}f_\varepsilon\left(p^2\right)\hat{\psi}(p) = \\ &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\left(4\pi(it+\varepsilon)\right)^{\ell/2}}\int \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4(it+\varepsilon)}\right)\psi(y)\, d^\ell y\end{aligned}$$

da cui, per $t \neq 0$, usando il teorema della convergenza dominata

$$\psi_t(x) \equiv e^{-itH_0}\psi(x) = \frac{1}{(4\pi i t)^{\ell/2}}\int \exp\left(i\frac{|x-y|^2}{4t}\right)\psi(y)\, d^\ell y \tag{IV.1}$$

(la formula integrale si intende come limite per $\psi \neq L^1$).
L'equazione (IV.1) già consente di dire qualcosa sulle proprietà dell'evoluto temporale. Consideriamo $\psi(x) \in L^2\left(\mathbb{R}^\ell\right) \cap L^1\left(\mathbb{R}^\ell\right)$, allora, per $t \neq 0$ si ha continuità in t, come si

vede usando la continuità dell'esponenziale e il teorema della convergenza dominata. Inoltre,

$$\sup |\psi_t(x)| \leq \frac{1}{|4\pi t|^{\ell/2}} \|\psi_0\|_{L^1}.$$

Forma asintotica dell'evoluto temporale

Grazie all'equazione (IV.1), possiamo pure determinare la forma asintotica, a $t \to \infty$, per $\psi_t(x)$. Infatti, per ogni $\psi \in L^2(\mathbb{R}^\ell) \cap L^1(\mathbb{R}^\ell)$, vale

$$\psi_t(x) = \frac{e^{ix^2/(4t)}}{(4\pi i t)^{\ell/2}} \int e^{iy^2/(4t)} e^{-ix\cdot y/(2t)} \psi(y)\, d^\ell y = \frac{e^{ix^2/(4t)}}{(2it)^{\ell/2}} \mathcal{F}\left(e^{iy^2/(4t)}\psi(y)\right)\left(\frac{x}{2t}\right)$$

Poiché l'evoluzione temporale e $\mathcal{F}$ sono operatori continui, si conclude che la formula di sopra resta valida per ogni $\psi \in L^2(\mathbb{R}^\ell)$. Inoltre, dal momento che

$$L^2 - \lim_{|t|\to\infty} e^{iy^2/(4t)}\psi(y) = \psi(y)$$

come si verifica subito con il teorema della convergenza dominata, otteniamo il seguente

Lemma IV.2 *Per ogni $\psi \in L^2(\mathbb{R}^\ell)$ abbiamo*

$$e^{-itH_0}\psi(x) \underset{|t|\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{e^{ix^2/(4t)}}{(2it)^{\ell/2}} \mathcal{F}(\psi)\left(\frac{x}{2t}\right)$$

in senso L^2.

Un'applicazione del teorema RAGE

Per poter usare il teorema RAGE, ci occorre anche il seguente

Lemma IV.3 *Sia $g(x)$ il moltiplicatore per g e sia $f(p)$ l'operatore ottenuto via trasformata di Fourier come segue*

$$f(p)\psi(x) = \mathcal{F}^{-1} f(p)\mathcal{F}(\psi)(p).$$

Se denotiamo con $L^\infty_\infty(\mathbb{R}^n)$ l'insieme delle funzioni misurabili essenzialmente limitate infinitesime all'infinito, abbiamo che gli operatori $g(x)f(p)$ e $f(p)g(x)$ sono compatti se $f, g \in L^\infty_\infty(\mathbb{R}^n)$. Se f e g appartengono a $L^2(\mathbb{R}^n)$, $g(x)f(p)$ e $f(p)g(x)$ si estendono ad operatori di Hilbert-Schmidt.

Dimostrazione Per simmetria è sufficiente considerare solo $g(x)f(p)$. Siano $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, allora, per ogni $\psi \in L^2(\mathbb{R}^\ell) \cap L^1(\mathbb{R}^\ell)$, abbiamo

$$\begin{aligned} g(x)f(p)\psi(x) &= \frac{g(x)}{(2\pi)^{\ell/2}} \int \mathcal{F}^{-1}(f)(x-y)\psi(y)\, d^\ell y = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\ell/2}} \int g(x)\mathcal{F}^{-1}(f)(x-y)\psi(y)\, d^\ell y \end{aligned}$$

Ora, usando il teorema di Tonelli, abbiamo che $g(x)\mathcal{F}^{-1}(f)(x-y) \in L^2(\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^\ell)$ (come si vede integrando prima in y, cambiando variabile in $z \equiv x-y$, e poi in x), perciò l'operatore a secondo membro è di Hilbert-Schmidt. Ne viene che su $L^2(\mathbb{R}^\ell) \cap L^1(\mathbb{R}^\ell)$, denso in $L^2(\mathbb{R}^\ell)$, gf è un operatore limitato coincidente con un Hilbert-Schmidt. Per unicità dell'estensione continua, si conclude che gf è un operatore di Hilbert-Schmidt.

Vediamo l'altro punto. Siano g ed $f \in L^\infty_\infty(\mathbb{R}^n)$, allora, per ogni $R > 0$, appartengono ad L^2 le funzioni

$$\begin{aligned} g_R(x) &= \chi_{B(0,R)}(x)\, g(x) \\ f_R(p) &= \chi_{B(0,R)}(p)\, f(p) \end{aligned}$$

Dunque, $g_R(x) f_R(p)$ è un operatore compatto che converge in norma a $g(x)f(p)$. Infatti, g_R converge in norma a g e f_R a f. Questo perché per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{R}$ di modo che se $R > \bar{R}$

$$\|g - g_R\| = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^\ell} |g(x) - g_R(x)| = \operatorname*{ess\,sup}_{|x|>R} |g(x)| < \varepsilon$$

(c.v.d.) visto che $g \in L^\infty_\infty\left(\mathbb{R}^\ell\right)$.

Fuga dagli insieme limitati

Applichiamo il lemma considerando $g = \chi_\Omega$ con Ω sottoinsieme di $\mathbb{R}^\ell$ e $f(p) = 1/\left(p^2+i\right)$, allora $\chi_\Omega\left(H_0+i\right)^{-1}$ è compatto, χ_Ω è dunque relativamente compatto rispetto a H_0 e, applicando il teorema RAGE, concludiamo

$$\lim_{t\to\infty}\left\|\chi_\Omega e^{-itH_0}\psi\right\|^2 = 0$$

da cui

$$\lim_{t\to\infty}\int\chi_\Omega(x)\left|\psi_t(x)\right|^2\,d^\ell x = 0,$$

cioè la probabilità di trovare una particella (con qualunque stato iniziale) in qualsiasi insieme limitato dopo un tempo infinito è nulla.

IV.1.3 Il risolvente e la funzione di Green per l'evoluzione libera

Calcolo del risolvente

Per $\operatorname{Re} z < 0$, risulta

$$\frac{1}{z-p^2} = \int_0^{+\infty} e^{zt}e^{-p^2 t}\,dt$$

Ora, dal punto di vista operatoriale, a sinistra abbiamo il risolvente di p^2 calcolato in z, mentre a destra abbiamo una funzione di p^2 che, per i teoremi sul calcolo integrale negli spazi di Banach (volume primo), può essere considerata come l'integrale operatoriale del moltiplicatore per e^{-p^2t}.
Usando i risultati sugli operatori unitariamente equivalenti, abbiamo

$$R_{H_0}(z) = \int_0^{+\infty} e^{zt}e^{-tH_0}\,dt$$

e, per i teoremi sull'integrazione negli spazi di Banach,

$$R_{H_0}(z)\,\psi(x) = \int_0^{+\infty} e^{zt}e^{-tH_0}\psi(x)\,dt$$

Procedendo come nella sottosezione precedente, abbiamo

$$e^{-tH_0}\psi(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\ell/2}}\int_{\mathbb{R}^\ell} e^{-|x-y|^2/(4t)}\psi(y)\,d^n y$$

sicché

$$R_{H_0}(z)\,\psi(x) = \int_0^{+\infty} dt\,e^{zt}\frac{1}{(4\pi t)^{\ell/2}}\int_{\mathbb{R}^\ell} d^n y\,e^{-|x-y|^2/(4t)}\psi(y)$$

usando il teorema di Fubini

$$R_{H_0}(z)\,\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^\ell} d^n y\,G_0\left(z,|x-y|\right)\psi(y)$$

dove, per $r>0$ e $\operatorname{Re} z<0$, abbiamo

$$G_0(z,r) \equiv \int_0^{+\infty} dt\,e^{zt}\frac{1}{(4\pi t)^{\ell/2}}e^{-r^2/(4t)+zt}.$$

Calcolo della funzione di Green

Senza addentrarci minimamente nei dettagli, riportiamo che $G_0(z,r)$, cioè la **funzione di Green** di H_0, può essere calcolata in termini delle funzioni di Bessel e si ha

$$G_0(z,r) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{-z}{4\pi^2r^2}\right)^{(\ell-2)/4} K_{\ell/2-1}\left(\sqrt{-z}r\right)$$

dove le funzioni K_ν soddisfano l'equazione differenziale

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}-1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)K_\nu(x) = 0$$

In particolare si rinviene che $G_0(z,r)$ ammette una estensione analitica a $\mathbb{C}\setminus\left[0,+\infty\right[= \rho(H_0)$.

Dunque, per ogni $z \in \rho(H_0)$ e per ogni $\psi, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$, dal teorema di Morera e da quello di Fubini, la funzione

$$z \mapsto \int_{\mathbb{R}^\ell} d^n x \int_{\mathbb{R}^\ell} d^n y \, \bar{\varphi}(x) \, G_0(z, |x-y|) \, \psi(y)$$

è analitica. Ma essa coincide per $\operatorname{Re} z < 0$ con

$$(\varphi, R_{H_0}(z) \psi)$$

che è analitica in $\rho(H_0)$. Dunque, per ogni $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$, per ogni $z \in \rho(H_0)$

$$R_{H_0}(z) \psi = \int_{\mathbb{R}^\ell} d^n y \, G_0(z, |x-y|) \, \psi(y)$$

e la stessa equazione, intesa come limite, vale per ogni vettore.

$\ell = 1$ e $\ell = 3$ Se ℓ è dispari, le funzioni di Bessel che si trovano sono quelle sferiche e si ha

$$\begin{aligned} \ell &= 1 \Longrightarrow G_0(z, r) = \frac{1}{2\sqrt{-z}} e^{-\sqrt{-z} r} \\ \ell &= 3 \Longrightarrow G_0(z, r) = \frac{1}{4\pi r} e^{-\sqrt{-z} r} \end{aligned}$$

IV.2 Hamiltoniana atomica

Prima di procedere nel nostro studio, vediamo due utili risultati

Lemma IV.4 *Sia A autoaggiunto e sia K relativamente compatto rispetto ad A. Allora K è relativamente limitato rispetto ad A con A-limite nullo.*

Dimostrazione Abbiamo

$$K R_A(i\lambda) = (K R_A(i)) \left((i - A) R_A(i\lambda)\right)$$

A secondo membro abbiamo il prodotto di un operatore compatto con uno normale. Quest'ultimo converge fortemente a 0 per $\lambda \to +\infty$ come discende dal teorema spettrale. Ora, se A_n è una successione di operatori normali limitati convergente fortemente ad A e C è compatto, CA_n converge in norma a CA. Questo segue dal fatto che A_n è una successione limitata, perciò usando un argomento $\varepsilon/3$, possiamo ridurci al caso C di rango finito, e per quest'ultimo

$$\|CA_n\|^2 = \sup_{\|\psi\|=1} \sum_{k=1}^n \lambda_k \left|(\varphi_k, A_n \psi)\right|^2 \leq \sup_{\|\psi\|=1} \sum_{k=1}^n \lambda_k \|A_n \varphi_k\|^2 \to 0$$

essendo $\|A_n \varphi_k\| = \|A_n^* \varphi_k\|$.

(c.v.d.) In definitiva, K è A-infinitamente limitato.

Lemma IV.5 *Sia A autoaggiunto e sia B simmetrico con A-limite minore di 1. Se K è relativamente compatto rispetto ad A, allora è relativamente compatto rispetto ad $A + B$.*

Dimostrazione Troviamo $z \in \mathbb{C}$ di modo che $\|BR_A(z)\| < 1$ per cui, l'equazione

$$BR_{A+B}(z) = BR_A(z) \left(\mathbb{I} - BR_A(z)\right)^{-1}$$

mostra che $BR_{A+B}(z)$ è limitato e con ciò B è $A+B$-limimitato. Infine,

$$KR_{A+B}(z) = KR_A(z) \left(\mathbb{I} + BR_{A+B}(z)\right)$$

è compatto, poiché BR_{A+B} è limitato e $KR_A(z)$ è compatto.

Vediamo le due relazioni algebriche usate

$$R_{A+B}(z) = \left((z - A) - B(z - A)^{-1}(z - A)\right)^{-1} = R_A(z) \left(\mathbb{I} - BR_A(z)\right)^{-1}$$

$$\begin{aligned}(\mathbb{I} - BR_A(z))^{-1} &= \mathbb{I} + \sum_{n=1}^{\infty} (BR_A(z))^n = \mathbb{I} + BR_A(z)(\mathbb{I} - BR_A(z))^{-1} = \\ &= \mathbb{I} + B(z - A - B)^{-1} = \mathbb{I} + BR_{A+B}(z).\end{aligned}$$

(c.v.d.)

IV.2.1 Operatori di Schrödinger per una particella

Siamo interessati allo studio delle hamiltoniane del tipo $H = H_0 + V$ in d dimensioni, con $d \in J_3$ (almeno principalmente).
Vogliamo determinare delle condizioni su V di modo che esso risulti relativamente limitato o compatto rispetto alla hamiltoniana libera.

Lemma IV.6 *Supponiamo $n \leq 3$ e $\psi \in H^2(\mathbb{R}^n)$, allora $\psi \in \mathcal{C}_\infty(\mathbb{R}^n)$ e per ogni $a > 0$ esiste $b > 0$ (indipendente da a) di modo che*

$$\|\psi\|_\infty \leq a\|H_0\psi\| + b\|\psi\|.$$

Dimostrazione Quello che occorre notare è che

$$\frac{1}{p^2 + \gamma^2} \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

per $n \leq 3$. Dunque, se $\psi \in H^2(\mathbb{R}^n)$, allora $\left(p^2 + \gamma^2\right)(\mathcal{F}\psi)(p) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, sicché $(\mathcal{F}\psi)(p) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e, dal lemma di Riemann-Lebesgue, $\psi \in \mathcal{C}_\infty(\mathbb{R}^n)$.
Per quanto concerne la seconda parte del lemma

$$\begin{aligned}\|\psi\|_\infty &\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\left\|\frac{1}{p^2+\gamma^2}\left(p^2+\gamma^2\right)(\mathcal{F}\psi)(p)\right\|_1 \leq \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\left\|\frac{1}{p^2+\gamma^2}\right\|_2 \left\|\left(p^2+\gamma^2\right)(\mathcal{F}\psi)(p)\right\|_2 \leq \\ &\leq \left(\frac{\gamma}{2\pi}\right)^{n/2}\left\|\left(p^2+1\right)^{-1}\right\|_2\left(\gamma^{-2}\|H_0\psi\|_2 + \|\psi\|_2\right).\end{aligned}$$

(c.v.d.)

Il lemma è molto interessante, perché consente di concludere subito che una qualunque funzione d'onda nel dominio di una hamiltoniana data da un potenziale relativamente limitato rispetto all'energia cinetica, è continua ed infinitesima all'infinito!
Ma veniamo al nostro primo risultato importante

Teorema IV.3 *Sia V una funzione reale con $V \in L^\infty_\infty(\mathbb{R}^n)$ o, se $n \leq 3$, $V \in L^\infty_\infty(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$. Allora V è relativamente compatto rispetto ad H_0. In particolare,*

$$H = H_0 + V, \quad D(H) = H^2(\mathbb{R}^n),$$

è un operatore autoaggiunto, limitato inferiormente e avente

$$\sigma_{\text{ess}}(H) = [0, +\infty[,$$

sicché eventuali stati legati (spettro discreto) avranno energia strettamente negativa.

Dimostrazione Dal lemma precedente, abbiamo che $D(H_0) \subset D(V)$. Infatti, sia $n \leq 3$. Sia $V = V_2 + V_\infty$ con $V_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $V_\infty \in L^\infty_\infty(\mathbb{R}^n)$. Se $\psi \in D(H_0)$, allora ψ è una funzione in $\mathcal{C}_\infty(\mathbb{R}^n)$, perciò ψ è limitata e $V_2\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$; poiché $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, anche $V_\infty\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, infine, $V\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, cioè $\psi \in D(V)$. Se, invece, $V \in L^\infty_\infty(\mathbb{R}^n)$, allora $D(V) = L^2(\mathbb{R}^n)$.
Per mostrare che V è relativamente compatto rispetto ad H_0, dobbiamo mostrare che esiste $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ tale che $R_{H_0}(z)V$ è compatto.
Poiché $R_{H_0}(z) = 1/\left(p^2 + z^2\right)$, che è una funzione limitata e in $L^2(\mathbb{R}^n)$ se $n \leq 3$, possiamo usare il lemma IV.3 per concludere la tesi.
Infatti, direttamente dal lemma detto, $R_{H_0}(z)V_\infty$ è compatto, mentre $R_{H_0}(z)V_2$ è di Hilbert-Schmidt, perciò è compatto.

Infine, poiché perturbazioni relativamente compatte non modificano lo spettro essenziale, concludiamo

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H) = \sigma_{\mathrm{ess}}(H_0) = [0, +\infty[\,.$$

(c.v.d.)

Una variante nell'enunciato e nella dimostrazione è fornita dal seguente

Teorema IV.4 *Sia $V \in L^2(\mathbb{R}^n) + L^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $n \le 3$ una funzione a valori reali. Allora $H = H_0 + V$ è essenzialmente autoaggiunto su $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e autoaggiunto su $D(H_0)$.*

Dimostrazione V è autoaggiunto su

$$D(V) = \left\{\psi \in L^2(\mathbb{R}^n) \,\middle|\, V\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)\right\}$$

Sia $V = V_2 + V_\infty$ con $V_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $V_\infty \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, allora, se $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\|V\psi\| \le \|V_2\| \|\psi\|_\infty + \|\psi\| \|V_\infty\|_\infty$$

perciò $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset D(V)$.

Inoltre, dal lemma IV.6, dato un qualsiasi $a > 0$ esiste $b > 0$ per cui, se $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\|\psi\|_\infty \le a \|H_0\psi\| + b \|\psi\|\,.$$

Allora

$$\|V\psi\| \le a \|V_2\| \|H_0\psi\| + (b + \|V_\infty\|_\infty) \|\psi\|$$

Perciò V è relativamente limitato rispetto a H_0 e con un H_0-limite piccolo quanto si vuole. Poiché H_0 è essenzialmente autoaggiunto su $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ si conclude che tale è pure è H. Ancora dal teorema di Kato-Rellich, H è autoaggiunta sul dominio di autoaggiunzione di H_0. **(c.v.d.)**

IV.2.2 Autoaggiunzione della hamiltoniana atomica

Una hamiltoniana non relativistica per un sistema di N particelle in d dimensioni, $\ell \equiv Nd$, è della forma

$$H = H_0 + \sum_{\substack{i<k \\ i,k \in J_N}} V_{i,k}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k)$$

sicché la hamiltoniana atomica (o quella molecolare) hanno questa forma.

L'autoaggiunzione sul dominio di H_0 di tale hamiltoniana è sancita dal seguente teorema dovuto a Kato

Teorema IV.5 (Kato) *Sia $\{V_k\}_{k\in J_m}$ una collezione di potenziali reali e misurabili ciascuno in $L^2(\mathbb{R}^d) + L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $d \le 3$. Sia $V_k(\mathbf{y}_k)$ un operatore di moltiplicazione in $L^2(\mathbb{R}^{Nd})$ ottenuto scegliendo per il vettore $\mathbf{y}_k$ d coordinate in $\mathbb{R}^{Nd}$. Allora la hamiltoniana*

$$H = H_0 + \sum_{k=1}^m V_k(\mathbf{y}_k)$$

è essenzialmente autoaggiunta su $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{Nd})$ e autoaggiunta su $H^2(\mathbb{R}^{Nd})$.

Dimostrazione Sia $\ell \equiv Nd$. Cominciamo con il considerare una sola delle funzioni V_k. Tramite una rotazione in $\mathbb{R}^\ell$ (la quale lascia fisse le norme L^2 e L^∞ oltre che l'operatore H_0), possiamo supporre che le variabili di V_k siano $x_1, \ldots, x_d$. Denotiamo con Δ_1 il laplaciano rispetto alle variabili dette.

Dal teorema precedente, abbiamo che per ogni a esiste b di modo che, per ogni $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$,

$$\|V_k\varphi\|^2 \le a^2 \|-\Delta\varphi\|^2 + b^2 \|\varphi\|^2\,.$$

Ora, se invece $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^\ell)$, abbiamo, usando il teorema di Fubini,

$$\|V_k\psi\|^2 \quad = \quad \int d^d\mathbf{x}_2 \ldots d^d\mathbf{x}_N \int d^d\mathbf{x}_1 \left|V_k(\mathbf{x}_1)\,\psi(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N)\right|^2 \le$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int d^d\mathbf{x}_2 \dots d^d\mathbf{x}_N \left(\int d^d\mathbf{x}_1 a^2 \left|-\Delta_1\psi(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_N)\right|^2\right) + \\
&\quad + \int d^d\mathbf{x}_2 \dots d^d\mathbf{x}_N \left(\int d^d\mathbf{x}_1 b^2 \left|\psi(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_N)\right|^2\right) \\
&= a^2 \left\|-\Delta_1\psi\right\|^2 + b^2 \left\|\psi\right\|^2
\end{aligned}
$$

D'altra parte,

$$
\begin{aligned}
\left\|-\Delta_1\psi\right\|^2 &= \left\|\mathbf{p}_1^2\mathcal{F}\psi\right\|^2 = \int d^\ell\mathbf{p} \left|\sum_{i=1}^{d}\left(p_1^d\right)^2\psi(\mathbf{p})\right|^2 \leq \\
&\leq \int d^\ell\mathbf{p} \left|\mathbf{p}^2\psi(\mathbf{p})\right|^2 = \left\|-\Delta\psi\right\|^2 = \left\|H_0\psi\right\|^2 .
\end{aligned}
$$

In definitiva, per ogni a esiste un b tale che, per ogni $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty\left(\mathbb{R}^\ell\right)$,

$$
\left\|V_k\psi\right\|^2 \leq a^2 \left\|H_0\psi\right\|^2 + b^2 \left\|\psi\right\|^2
$$

A questo punto, usiamo la diseguaglianza di Schwarz per ottenere, per ogni $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty\left(\mathbb{R}^\ell\right)$,

$$
\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=1}^{m} V_k(\mathbf{y}_k)\psi\right\|^2 &\leq \sum_{k,i\in J_m} \left\|V_k(\mathbf{y}_k)\psi\right\| \left\|V_i(\mathbf{y}_i)\psi\right\| \leq \\
&\leq m^2a^2 \left\|H_0\psi\right\|^2 + m^2b^2 \left\|\psi\right\|^2 .
\end{aligned}
$$

(c.v.d.) Il potenziale $\sum_{k=1}^m V_k(\mathbf{y}_k)$ risulta allora infinitamente piccolo rispetto a H_0 e abbiamo la tesi.

Corollario IV.1 (hamiltoniana atomica) *Siano $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_N \in \mathbb{R}^3$ coordinate ortogonali per $\mathbb{R}^{3N}$. Allora la hamiltoniana atomica*

$$
H = -\sum_{i=1}^{N}\Delta_i - \sum_{i=1}^{N}\frac{Ne^2}{|\mathbf{x}_i|} + \sum_{i<k}\frac{e^2}{|\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_k|}
$$

è essenzialmente autoaggiunta su $\mathcal{C}_c^\infty\left(\mathbb{R}^{3N}\right)$ e autoaggiunta su $H^2\left(\mathbb{R}^{3N}\right) = D(H_0)$.

IV.3 Forme quadratiche e operatori di Schrödinger

Le tecniche apprese nello studio delle forme quadratiche sono molto utili nella teoria degli operatori di Schrödinger. Tra le altre cose, consentono di dare un senso ai potenziali a delta di Dirac.

IV.3.1 Potenziali limitati inferiormente

Sotto deboli ipotesi i potenziali limitati inferiormente danno luogo ad hamiltoniane non relativistiche autoaggiunte. Noi vedremo solo il caso unidimensionale. Prima di procedere un piccolo richiamo su concetti già abbondantemente trattati nel capitolo V del primo volume.

Lemma IV.7 *Sia T una distribuzione in $\mathcal{D}'$ avente derivata distribuzionale $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Allora esiste una funzione g continua e derivabile in senso ordinario data da*

$$
g(x) = g(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(y)\, dy
$$

tale che

$$
T = T_g.
$$

Dimostrazione Mostriamo che per ogni valore di $g(x_0)$, T_g è tale che $DT_g = T_f$. Abbiamo, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$,

$$
DT_g(\varphi) = -\int g(x)\,\varphi'(x)\, dx
$$

Ora, $g(x)$ è derivabile in senso ordinario e ha per derivata f. Sia $f\varphi$ che $(g\varphi)'$ sono funzioni sommabili, perciò, integrando per parti,

$$DT_g(\varphi) = \int f(x)\varphi(x)\, dx = T_f(\varphi).$$

Visto che $T - T_g$ ha derivata distribuzionale nulla,

$$D(T - T_g)(\varphi) = 0$$

Ora, se $DS = 0$, allora per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$, $S(\varphi') = 0$. Sia χ una funzione in $\mathcal{D}$ avente integrale pari a 1. Per ogni $\psi \in \mathcal{D}$, consideriamo

$$\tilde{\psi} = \psi(x) - \chi(x) \int \psi(y)\, dy$$

Mostriamo che esiste $\varphi \in \mathcal{D}$ di modo che $\varphi' = \tilde{\psi}$. Tale φ è data da

$$\varphi = \int_{-\infty}^{x} \psi(y)\, dy - \left(\int_{-\infty}^{x} \chi(y)\, dy\right)\left(\int \psi(y)\, dy\right)$$

Tale φ ha derivata pari a $\tilde{\psi}$, perciò appartiene a $\mathcal{C}^\infty$. Consideriamo il complementare di $[a,b] \supset \operatorname{supp}\chi \cup \operatorname{supp}\varphi$: per ogni x in tale insieme $\varphi(x) = 0$. In definitiva, $\varphi \in \mathcal{D}$ e $\varphi' = \tilde{\psi}$. Allora

$$0 = S(\varphi') = S\left(\tilde{\psi}\right) = S(\psi) - S(\chi) \int \psi(y)\, dy$$

cioè

$$S(\psi) = S(\chi) \int \psi(y)\, dy$$

Infine, S è pari a T_k per qualche $k \in \mathbb{C}$ (quest'ultimo fatto si verifica molto più facilmente nel caso $S \in \mathcal{S}'$, passando in trasformata di Fourier). Allora $T = T_g$ per un qualche $g(x_0)$ opportuno.

(c.v.d.)

Teorema IV.6 *Hamiltoniane della forma*

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

con V limitato dal basso e localmente L^2, sono essenzialmente autoaggiunte su $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$.

Dimostrazione Se $V \in L^2_{\text{loc}}$, allora $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \subset D(V)$. Sia $-M \equiv \inf V$. Sia $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, allora

$$(\varphi, H\varphi) = (\varphi, H_0\varphi) + \int dx\, V(x) |\varphi(x)|^2 \geq -M \|\varphi\|^2.$$

Considerando $H + M$ ci riduciamo al caso in cui H è un operatore positivo. Per mostrane l'essenziale autoaggiunzione basta vedere che per un qualche $\lambda < 0$, $H - \lambda$ ha immagine densa. Cioè che se esiste $\psi \in L^2$ di modo che

$$\int dx\, \bar{\psi}(x) (H - \lambda) \chi(x) = 0$$

per ogni $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, allora $\psi = 0$.

L'equazione scritta può essere interpretata in senso $\mathcal{D}'$ come segue

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + V(x) - \lambda\right)\psi = 0.$$

Si tratta di vedere che se l'equazione di sopra ammette soluzioni in L^2, allora queste sono nulle. Se una soluzione appartiene a L^2, allora, visto che $V(x) - \lambda \in L^2_{\text{loc}}$, si conclude che $(V(x) - \lambda)\psi(x) \in L^1_{\text{loc}}$. In definitiva, $D\psi(x)$ è una distribuzione con derivata prima distribuzionale localmente sommabile. Per il lemma, abbiamo che $D\psi(x)$ è una funzione derivabile in senso ordinario, $\varphi(x)$, data da

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} (V(y) - \lambda)\,\psi(y)\,dy$$

Siccome $\varphi(x)$ è localmente sommabile, possiamo riapplicare il lemma all'equazione $D\psi(x) = \varphi(x)$. Troviamo che $\psi(x)$ è continua, derivabile due volte in senso ordinario e con derivata seconda sommabile. Inoltre,

$$\psi'(x) = \psi'(x_0) + \int_{x_0}^{x} (V(y) - \lambda)\,\psi(y)\,dy$$

Possiamo assumere che $\psi(x)$ sia reale, perché altrimenti $\psi + \bar{\psi}$ sarebbe ancora una soluzione. Se $\psi(x_0) > 0$ allora $\psi(x) > 0$ in tutto un intorno di x_0. Ivi, ψ' si mantiene crescente. Se $\psi'(x_0) \geq 0$, la funzione $\psi(x)$ è allora strettamente crescente e rimane tale per ogni $x > x_0$; se $\psi'(x_0) \leq 0$, la funzione $\psi(x)$ è allora strettamente decrescente e rimane tale per ogni $x < x_0$. Visto che il ragionamento si ripete per $-\psi$, in ogni caso, $\psi \notin L^2(\mathbb{R})$. In definitiva, deve essere $\psi(x) = 0$.

(c.v.d.)

Osservazione IV.1 La dimostrazione del teorema mostra alcune interessanti proprietà di regolarità per gli eventuali autovettori ψ di H (cioè per le soluzioni dell'equazione di Schrödinger stazionaria). Se $V \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, allora $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ ed ha derivata seconda sommabile. Se $V \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, allora $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, perciò, dall'equazione agli autovalori (dove adesso la derivata non si interpreta distribuzionalmente, ma in senso ordinario), si conclude che $\psi'' \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, cioè $\psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. In definitiva, se $V \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R})$, allora $\psi \in \mathcal{C}^{m+2}(\mathbb{R})$. ▪

Per ogni polinomio limitato inferiormente $H_0 + P(x)$ è essenzialmente autoaggiunto su $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. In particolare la hamiltoniana dell'oscillatore armonico risulta autoaggiunta.

IV.3.2 Potenziali a delta di Dirac

Potenziale delta unidimensionale repulsivo

Vogliamo tentare di dare un senso a una hamiltoniana ottenuta usando come potenziale $V = \alpha\delta(x)$. Seppure molto usato in fisica, questo potenziale non ha senso come operatore. Si può tentare di definire la hamiltoniana attraverso una forma quadratica. Consideriamo la forma positiva definita su $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$

$$q_\delta(f,g) = \int \bar{f}'(x)\,g'(x)\,dx + \alpha\bar{f}(0)\,g(0)$$

se mostriamo che essa è chiudibile, possiamo definire $H = H_0 + \alpha\delta(x)$ come l'operatore autoaggiunto associato alla chiusura di q_δ per $\alpha > 0$.
Si tratta di vedere che se una successione $\{f_n\}$ converge L^2 a 0 ed è di Cauchy rispetto alla metrica

$$[f,g] = q(f,g) + (f,g),$$

allora converge a 0 nella metrica $[\cdot,\cdot]$.
Ricordiamo che l'operatore derivata è chiudibile su $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Per ipotesi, f_n' è di Cauchy in senso ordinario, perciò converge. Ma $f_n \to 0$, per la chiudibilità detta, $f_n' \to 0$. Ci rimane da vedere che $|f_n(0)|^2$ converge a 0. Abbiamo

$$f_n(0) = \int \hat{f}(k)\,\frac{dk}{2\pi} = \int \hat{f}(k)\,(1+ik)\,\frac{1}{1+ik}\,\frac{dk}{2\pi}$$

Notiamo che $(1+ik)\,\hat{f}(k) \in L^2$ (appartenendo a $\mathcal{S}$), quindi, applicando la diseguaglianza di Schwarz,

$$|f_n(0)| \leq C\,(\|f_n\| + \|f_n'\|) \to 0.$$

Dunque, q_δ è chiudibile e il *mistero dei potenziali delta* è chiarito una volta per tutte.

Potenziale unidimensionale delta come perturbazione e caso attrattivo

La definizione nel caso repulsivo appare più problematica. Si ricorre allora al teorema KLMN sulla perturbazione delle forme quadratiche. Anzitutto dobbiamo vedere che la forma definita dalla delta ha dominio in $Q(H_0)$. Dal lemma IV.6 abbiamo che per ogni $a > 0$ esiste $b > 0$, tale che per ogni $\psi \in D(H_0)$

$$\|\psi\|_\infty \leq a \|H_0\psi\| + b\|\psi\| \tag{IV.2}$$

e $\psi \in \mathcal{C}_\infty(\mathbb{R}^n)$, $n \leq 3$. Ne viene che se $\{\psi_n\} \subset D(H_0)$ converge in senso q_{H_0} a $\psi \in Q(H_0)$, allora ψ_n converge in norma sup a ψ, perciò $\psi \in \mathcal{C}_\infty(\mathbb{R}^n)$. In definitiva, $Q(H_0) \subset \mathcal{C}_\infty(\mathbb{R}^n)$ perciò la forma quadratica simmetrica

$$\gamma_\delta(f,g) = \alpha\bar{f}(0)\,g(0)$$

è ben definita su $Q(H_0)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Vediamo di applicare il teorema KLMN, si tratta di dimostrare che per ogni $f \in D(H_0)$

$$|\alpha|\,|f(0)|^2 \leq a\left(f, -\frac{d^2}{dx^2}f\right) + b(f,f)$$

per $a < 1$. Ora,

$$|f(0)| \leq \left|\int \frac{dk}{2\pi}\,\hat{f}(k)(1+i\lambda k)\,\frac{1}{1+i\lambda k}\right| \leq \left\|\frac{1}{1+i\lambda k}\right\|_{L^2}\left(\int \frac{dk}{2\pi}\left|\hat{f}(k)\right|^2\left(1+\lambda^2k^2\right)\right)^{1/2}$$

sicché

$$|f(0)|^2 \leq \left\|\frac{1}{1+i\lambda k}\right\|_{L^2}^2\left[\lambda^2\left(f, -\frac{d^2}{dx^2}f\right) + (f,f)\right] = \lambda\pi\left(f, -\frac{d^2}{dx^2}f\right) + \frac{\pi}{\lambda}(f,f)$$

da cui la tesi.

Potenziale delta in dimensione 2 e 3

Il potenziale a delta non ha invece senso in dimensione maggiore di uno, perché non vale l'ultima stima di sopra. Mostriamolo con un ragionamento di scala.

Sia $\varphi(|x|)$ una funzione a supporto nella palla di centro l'origine e pari a 1 in 0. Consideriamo la successione $\varphi_n(x) = \varphi(nx)$. Essa converge in senso L^2 a 0. Mostriamo che è di Cauchy nella metrica

$$[f,f] = (f, -\Delta f) + \alpha\,|f(0)|^2 + b(f,f)$$

per un qualsiasi b. Poiché $\varphi_n(0) = 1$ per ogni n, si tratta di vedere che

$$(\varphi_n, -\Delta\varphi_n)$$

converge. Abbiamo, per $d \geq 3$

$$(\varphi_n, -\Delta\varphi_n) = n^2\int \overline{\varphi(n\,|x|)}\varphi''(n\,|x|)\;d^dx = O\left(\frac{1}{n^{d-2}}\right) \to 0$$

D'altra parte, $[\varphi_n, \varphi_n] \nrightarrow 0$, infatti

$$\begin{aligned}
(\varphi_n, -\Delta\varphi_n) &= O\left(\frac{1}{n^{2+d}}\right) \\
|\varphi_n(0)|^2 &= 1 \\
(\varphi_n, \varphi_n) &= O\left(\frac{1}{n^d}\right)
\end{aligned}$$

sicché, sempre per $d \geq 3$

$$[\varphi_n, \varphi_n] = O\left(\frac{1}{n^{d-2}}\right) + \alpha + O\left(\frac{1}{n^d}\right) = \alpha$$

Dunque, in tre dimensioni un potenziale a delta non ha senso.

Vediamo che succede in due dimensioni. Passando in trasformata, dobbiamo costruire una successione tale che

$$\begin{aligned}
\int |\varphi_n(k)|^2\;dk &\to 0 \\
\int |\varphi_n(k)|^2\,k^2\,dk &\to 0 \\
\int \varphi_n(k)\;dk &= 1
\end{aligned}$$

Prendiamo a questo scopo la successione

$$\begin{aligned}\varphi_n(k) &= \frac{1}{\int_0^n r/(1+r^2)\, dr} \frac{1}{1+k^2} \chi_{(0,n)}(|k|) = \\ &= \frac{2}{\log(1+n^2)} \frac{1}{1+k^2} \chi_{(0,n)}(|k|)\end{aligned}$$

da cui abbiamo che la delta definisce un potenziale sensato solo in dimensione uno.

IV.4 Analisi spettrale

In questa sezione ci occupiamo brevemente di metodi variazionali per l'analisi spettrale degli stati legati nel caso di potenziali limitati dal basso.

Quello che faremo è determinare, dai valori di aspettazione di una hamiltoniana, informazioni circa il suo spettro. Quello che ci interessa maggiormente è lo spettro discreto. Lo spettro essenziale, per una vasta gamma di potenziali, è infatti quello dell'energia cinetica.

IV.4.1 Principio del minimo

Inferiore dello spettro e valori di aspettazione

Cominciamo con il riprendere un argomento in parte già studiato. Consideriamo un operatore H limitato inferiormente e autoaggiunto. Se per ogni $\psi \in D(H)$ risulta

$$(\psi, H\psi) \geq M' \|\psi\|^2$$

allora, posto M il superiore degli M' di cui nella formula, vale

$$(\psi, H\psi) \geq M \|\psi\|^2$$

Infatti, per ognuno degli M' si ha

$$\inf_{\psi \neq 0} \frac{(\psi, H\psi)}{\|\psi\|^2} \geq M'$$

da cui

$$\mu_1(H) \equiv \inf_{\psi \neq 0, \psi \in D(H)} \frac{(\psi, H\psi)}{\|\psi\|^2} \geq \sup M' = M$$

cioè, per ogni $\psi \in D(H)$,

$$(\psi, H\psi) \geq M \|\psi\|^2 .$$

Ora, poiché $\mu_1(H)$ è una delle costanti M', si ha $M \geq \mu_1(H)$ e in definitiva $M = \mu_1(H)$. Perciò la migliore costante che delimita H dal basso è anche l'inferiore dei valori di aspettazione.

Vogliamo dimostrare che M coincide con l'estremo inferiore di $\sigma(H)$. A questo scopo, abbiamo

$$(\psi, H\psi) = \int_{\inf \sigma(H)}^{+\infty} d\mu_\psi(\lambda)\, \lambda \geq \inf \sigma(H) \|\psi\|^2 ,$$

perciò, $\inf \sigma(H) \leq M$. Come sappiamo, poi, ogni $\lambda < M$ appartiene al risolvente di H, perciò

$$M \leq \inf \sigma(H) .$$

In definitiva,

$$\mu_1(H) = \inf_{\substack{\psi \in D(H) \\ \|\psi\| = 1}} (\psi, H\psi) = \inf \sigma(H) .$$

Poiché lo spettro è un insieme chiuso, abbiamo che il suo estremo inferiore gli appartiene, perciò

$$\mu_1(H) \in \sigma(H) .$$

Riassumendo

Proposizione IV.1 *Sia H un operatore autoaggiunto limitato dal basso. La migliore delle costanti che delimitano H dal basso, delimita H dal basso e coincide con l'estremo inferiore dei valori di aspettazione* *di H*

$$\mu_1(H) = \inf_{\substack{\psi\in D(H)\\ \|\psi\|=1}} (\psi, H\psi).$$

Inoltre, $\mu_1(H)$ è pari all'estremo inferiore dello spettro di H e, poiché questo è chiuso, appartiene allo spettro stesso, cioè

$$\mu_1(H) = \inf\sigma(H) \in \sigma(H).$$

Esistenza di uno stato legato

Sia, ancora, H limitato dal basso. Supponiamo di aver determinato $\mu_1(H)$. Vogliamo dimostrare che sussistono due casi (che si escludono a vicenda): $\mu_1(H) = \inf\sigma_{\text{ess}}(H) \in \sigma_{\text{ess}}(H)$; oppure $\mu_1(H) = \inf\sigma_{\text{disc}}(H) \in \sigma_{\text{disc}}(H)$. Infatti, visto che $\mu_1(H) \in \sigma(H)$, o $\mu_1(H) \in \sigma_{\text{ess}}(H)$ oppure $\mu_1(H) \in \sigma_{\text{disc}}(H)$. In entrambi i casi, naturalmente, $\mu_1(H)$ è anche l'inferiore della componente dello spettro alla quale appartiene.
Quanto notato si fa interessante nel caso si debba discutere l'esistenza di uno stato legato (cioè di un autovettore a un autovalore nello spettro discreto) per una hamiltoniana per la quale sia nota una stima per l'inferiore dello spettro essenziale. Infatti, se si sa che H ammette spettro essenziale contenuto in $[a, +\infty[$, e si trova $\mu_1(H) < a$, allora si conclude immediatamente che H ammette almeno uno stato legato all'autovalore $\mu_1(H)$. Poiché $\mu_1(H)$ è anche l'estremo inferiore dello spettro discreto, avremmo pure che $\mu_1(H)$ **è l'energia dello stato fondamentale di H.**
In molti casi si sa che lo spettro essenziale coincide con $[0, +\infty[$, perciò condizione necessaria e sufficiente affinché H ammetta almeno uno stato legato è che esista $\psi \in D(H)$ di modo che $(\psi, H\psi) < 0$. Lo stato fondamentale ha energia $\mu_1(H)$ che si stima nel seguente modo: se ψ è normalizzato e poniamo $E_\psi \equiv (\psi, H\psi)$, abbiamo, $E_\psi \geq \mu_1(H)$, perciò l'energia del fondamentale è minore di E_ψ.
Tutti questi semplici ragionamenti stanno alla base dei metodi variazionali per l'analisi spettrale.

Teorema IV.7 (principio di minimo)

Sia H un operatore autoaggiunto limitato dal basso e tale che $a \leq \inf\sigma_{\text{ess}}(H)$. Se esiste $\psi \in D(H)$, $\|\psi\| = 1$, di modo che $(\psi, H\psi) < a$, allora $\mu_1(H)$ appartiene allo spettro discreto, corrisponde all'energia dello stato fondamentale, ed è stimato da

$$\mu_1(H) \leq (\psi, H\psi).$$

In particolare,

Teorema IV.8

Sia $H = H_0 + V$ con V limitato dal basso e $V \in L^\infty_\infty(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$ se $n \leq 3$, o $V \in L^\infty_\infty(\mathbb{R}^n)$ se $n \geq 3$. Allora

$$\sigma_{\text{ess}}(H) = [0, +\infty[$$

e H ammette uno stato legato se e solo se esiste $\psi \in D(H) = D(H_0)$ tale che $(\psi, H\psi) < 0$.

IV.4.2 Principio del minimo-massimo e confronto di operatori

I metodi della sottosezione precedente possono essere di molto raffinati, quanto meno generalizzati come mostra il seguente fondamentale

Teorema IV.9 (principio del minimo-massimo)

Sia H un operatore autoaggiunto limitato dal basso. Definiamo

$$U_H(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) = \inf\left\{(\psi, H\psi) \,\middle|\, \psi \in D(H),\ \|\psi\| = 1,\ \psi \in \mathcal{V}^\perp\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}\right\}$$

e

$$\mu_n(H) = \sup_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}} U_H(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$$

Allora per ogni fissato n, valgono o la prima o la seconda delle seguenti affermazioni

(i) *ci sono n autovalori (contando la molteplicità) sotto l'inferiore dello spettro essenziale e $\mu_n(H)$ è l'n-esimo autovalore contanto la molteplicità;*

(ii) $\mu_n = \inf\{\lambda \,|\, \lambda \in \sigma_{\text{ess}}(H)\}$. *In questo caso,* $\mu_n = \mu_{n+1} = \mu_{n+2} = \ldots$ *e ci sono al più* $n-1$ *autovalori (contando la molteplicità) sotto* μ_n.

Dimostrazione Sia $E(\Omega)$ la famiglia spettrale associata a H. In primo luogo mostriamo che

$$\begin{aligned} a &< \mu_n \Longrightarrow \dim R(E(-\infty, a)) < n \\ a &> \mu_n \Longrightarrow \dim R(E(-\infty, a)) \geq n \end{aligned}$$

Ragioniamo per assurdo. Supponiamo che la prima sia falsa. Allora troviamo uno spazio n-dimensionale $V \subset D(H)$, tale che per ogni $\psi \in V$, $(\psi, H\psi) \leq a \|\psi\|^2$, come si vede usando il teorema spettrale. Il fatto che $V \subset D(H)$, discende dall'osservazione che se $a \in \mathbb{R}$, allora $R(E(-\infty, a)) \subset D(H)$, infatti, se $\psi \in R(E(-\infty, a))$, allora

$$\int d\mu_\psi \, |\lambda|^2 = \int_M^a d\mu_\psi \, |\lambda|^2 \leq \max\left(a^2, M^2\right) \|\psi\|^2 < +\infty$$

sicché $\psi \in D(H)$. Si noti il fatto che la limitatezza inferiore di H entra in modo fondamentale nella prova.

Visto che $\dim V = n$, per ogni $(n-1)$-upla $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1} \in \mathcal{H}$ abbiamo

$$V \cap \mathcal{V}^\perp \left\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}\right\} \neq \{0\}$$

(altrimenti, $\dim V \leq n-1$, assurdo). Ne viene che

$$U_H\left(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}\right) \leq a$$

allora,

$$\mu_n(H) \leq a$$

contro l'ipotesi.

Adesso occupiamoci della seconda implicazione. Per assurdo, sia $a > \mu_n$ e $\dim R(E(-\infty, a)) \leq n-1$. Allora possiamo trovare $\varphi_1^0, \ldots, \varphi_{n-1}^0$ di modo che

$$\mathcal{V}\left\{\varphi_1^0, \ldots, \varphi_{n-1}^0\right\} = R(E(-\infty, a))$$

allora ogni

$$\psi \in \mathcal{V}^\perp \left\{\varphi_1^0, \ldots, \varphi_{n-1}^0\right\} \cap D(H)$$

appartiene a $R(E[a, +\infty))$, perciò, ancora dal teorema spettrale,

$$(\psi, H\psi) \geq a \|\psi\|^2.$$

Ne deriva che

$$U_H\left(\varphi_1^0, \ldots, \varphi_{n-1}^0\right) \geq a$$

da cui

$$\mu_n \geq a$$

contro l'ipotesi.

Poiché H è semilimitato, U_H è sempre un numero finito; ne viene che se μ_n non è finito, allora è infinito, ma se così fosse per ogni a, $\dim R(E(-\infty, a)) < n$, la qual cosa è assurda (lo spettro essenziale sarebbe vuoto e lo spettro discreto sarebbe costituito da n punti, assurdo).

A questo punto, distinguiamo due casi.

(**A**) Per ogni $\varepsilon > 0$ risulta $\dim R(E(-\infty, \mu_n + \varepsilon)) = +\infty$. Vogliamo dimostrare che allora cadiamo nell'alternativa (ii) di cui nella tesi.

Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$, $\dim R(E(-\infty, \mu_n - \varepsilon)) \leq n-1$. Poiché

$$R(E(-\infty, \mu_n + \varepsilon)) = R(E(-\infty, \mu_n - \varepsilon)) \oplus R(E(\mu_n - \varepsilon, \mu_n + \varepsilon))$$

(gli intervalli spettrali sono disgiunti, perciò i proiettori corrispondenti sono ortogonali), concludiamo che

$$\dim R(E(\mu_n - \varepsilon, \mu_n + \varepsilon)) = +\infty$$

per ogni $\varepsilon > 0$. Per definizione $\mu_n \in \sigma_{\text{ess}}(H)$. Preso $a < \mu_n$ e preso $\varepsilon < \mu_n - a$, troviamo

$$\dim R(a-\varepsilon, a+\varepsilon) < n < \infty$$

perciò $\mu_n = \inf \sigma_{\text{ess}}(H)$.

Del tutto in generale, scegliendo $\varphi_n = \varphi_{n-1}$, si trova che $\mu_{n+1} \geq \mu_n$. Vogliamo vedere che, nel nostro caso, è escluso che $\mu_{n+1} > \mu_n$. Infatti, se così fosse,

$$\dim R\left(E\left(-\infty, \frac{\mu_n + \mu_{n+1}}{2}\right)\right) \leq n$$

contro l'ipotesi (**A**). Per concludere questo caso, dobbiamo vedere che esistono al più $n-1$ autovalori (contando eventuali degenerazioni) sotto μ_n. Vi siano, infatti, n autovalori. L'n-esimo sia a. Visto che $a < \mu_n$, abbiamo

$$\dim R\left(E\left(-\infty, \frac{\mu_n + a}{2}\right)\right) \geq n$$

ma siccome $(\mu_n + a)/2 < \mu_n$, allora

$$\dim R\left(E\left(-\infty, \frac{\mu_n + a}{2}\right)\right) < n$$

la qual cosa è assurda.

(**B**) Esiste $\varepsilon_0 > 0$ talché $\dim R(E(-\infty, \mu_n + \varepsilon_0)) < +\infty$. Allora non esistono punti dello spettro essenziale al di sotto di $\mu_n + \varepsilon_0$, cioè $\mu_n < \inf \sigma_{\text{ess}}(H)$. Adesso, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$R(E(-\infty, \mu_n + \varepsilon)) = R(E(-\infty, \mu_n - \varepsilon)) \oplus R(E(\mu_n - \varepsilon, \mu_n + \varepsilon))$$

con

$$\begin{aligned} \dim R(E(-\infty, \mu_n + \varepsilon)) &\geq n \\ \dim R(E(-\infty, \mu_n + \varepsilon)) &\leq n-1 \end{aligned}$$

per cui

$$\dim R(E(\mu_n - \varepsilon, \mu_n + \varepsilon)) \geq 1$$

Allora $\mu_n \in \sigma(H)$. Visto che $\dim R(E(\mu_n - \varepsilon_0, \mu_n + \varepsilon_0)) < \infty$, si conclude che $\mu_n \in \sigma_{\text{disc}}(H)$. Visto che μ_n è isolato, esiste $\delta > 0$ tale che $(\mu_n - \delta, \mu_n + \delta) \cap \sigma(H) = \{\mu_n\}$. Ne viene che

$$E(-\infty, \mu_n] = E(-\infty, \mu_n + \delta)$$

sicché

$$\dim R(E(-\infty, \mu_n]) = \dim R(E(-\infty, \mu_n + \delta)) \geq n$$

ne viene che vi sono almeno n autovalori di H minori o eguali di μ_n. Prendiamo i primi n. Ordinandoli, abbiamo

$$E_1 \leq \ldots \leq E_n \leq \mu_n$$

Vogliamo vedere che si ha esattamente $E_n = \mu_n$, perciò μ_n è l'n-esimo autovalore. Infatti, se fosse $E_n < \mu_n$, allora da un lato

$$\dim R\left(-\infty, \frac{E_n + \mu_n}{2}\right) < n$$

e dall'altro, contando gli autovalori,

$$\dim R\left(-\infty, \frac{E_n + \mu_n}{2}\right) \geq n,$$

(c.v.d.) la qual cosa è assurda.

Lavorare con operatori limitati dal basso è spesso più semplice passando alle forme associate e alle loro estensioni, risulta perciò utile conoscere il seguente

Teorema IV.10 *Sia H un operatore autoaggiunto limitato dal basso. Considerata allora la sua forma* *associata* q_H *avente dominio* $Q(H) \supset D(H)$, *si ottiene*

$$\mu_n(H) = \sup_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}} \inf \left\{ q_H(\psi,\psi) \left| \psi \in Q(H),\, \|\psi\| = 1,\, \psi \in \mathcal{V}^\perp \left\{\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}\right\} \right. \right\}.$$

Dimostrazione Infatti, se chiamiamo $\tilde{\mu}_n$ il membro di destra dell'equazione di sopra, ricaviamo che i $\tilde{\mu}_n$ soddisfano le proprietà (i) e (ii) del principio del minimo-massimo. Siccome queste proprietà sono caratterizzanti, si conclude che $\tilde{\mu}_n = \mu_n(H)$.

Per mostrare quanto detto si deve solo far vedere che

$$\begin{aligned} a &< \tilde{\mu}_n \Longrightarrow \dim R(E(-\infty,a)) < n \\ a &> \tilde{\mu}_n \Longrightarrow \dim R(E(-\infty,a)) \geq n \end{aligned}$$

visto che la dimostrazione del principio del min-max si basa tutta su questa osservazione. La prima affermazione è ovvia, infatti, $\tilde{\mu}_n \leq \mu_n$. Dobbiamo solo vedere la seconda. Per assurdo, valga $\dim R(E(-\infty,a)) \leq n-1$. Allora possiamo trovare $\varphi_1^0,\ldots,\varphi_{n-1}^0$ di modo che

$$\mathcal{V}\left\{\varphi_1^0,\ldots,\varphi_{n-1}^0\right\} = R(E(-\infty,a)).$$

Ogni

$$\psi \in \mathcal{V}^\perp\left\{\varphi_1^0,\ldots,\varphi_{n-1}^0\right\} \cap D(H)$$

appartiene a $R(E[a,+\infty))$, perciò, ancora dal teorema spettrale,

$$q_H(\psi,\psi) = (\psi,H\psi) \geq a\|\psi\|^2.$$

Ne deriva che

$$U_H\left(\varphi_1^0,\ldots,\varphi_{n-1}^0\right) \geq a$$

da cui

$$\tilde{\mu}_n \geq a$$

(c.v.d.) contro l'ipotesi.

Osservazioni sul principio del min-max Il principio del minimo-massimo è uno strumento impressionante per la facilità con la quale lega l'analisi dei valori di aspettazione all'analisi spettrale. Esso, come vedremo anche meglio tra poco, fornisce criteri qualitativi e quantitativi per lo studio della posizione degli autovalori e dell'inferiore dello spettro essenziale (il quale, lo ribadiamo, appartiene allo spettro essenziale, perché questo è chiuso).

Come si vede, il principio del minimo massimo con $n = 1$, riproduce il più facile principio del minimo. Se quest'ultimo era in grado di determinare l'esistenza di uno stato legato noto che fosse lo spettro essenziale, il principio del min-max consente di concludere l'esistenza di almeno n autovalori nello spettro discreto una volta noto che $\mu_n < a \leq \inf \sigma_{\text{ess}}$.

Principio del confronto Il confronto di operatori semilimtati può avvenire tramite il principio di min-max. Siano A e B tali che $D(B) \subset D(A)$ e, per ogni $\psi \in D(B)$,

$$(\psi, A\psi) \leq (\psi, B\psi).$$

In questo caso, allora

$$\begin{aligned} U_A(\varphi_1,\ldots,\varphi_m) &= \inf\left\{(\psi,A\psi) \left| \psi \in D(A),\, \|\psi\| = 1,\, \psi \in \mathcal{V}^\perp\{\varphi_1,\ldots,\varphi_m\}\right.\right\} \leq \\ &\leq \inf\left\{(\psi,A\psi) \left| \psi \in D(B),\, \|\psi\| = 1,\, \psi \in \mathcal{V}^\perp\{\varphi_1,\ldots,\varphi_m\}\right.\right\} \leq \\ &\leq \inf\left\{(\psi,A\psi) \left| \psi \in D(B),\, \|\psi\| = 1,\, \psi \in \mathcal{V}^\perp\{\varphi_1,\ldots,\varphi_m\}\right.\right\} = \\ &= U_B(\varphi_1,\ldots,\varphi_m) \end{aligned}$$

Perciò, passando al superiore,

$$\mu_n(A) \leq \mu_n(B),$$

sicché

$$\inf \sigma_{\text{ess}}(A) \leq \inf \sigma_{\text{ess}}(B).$$

Se B ammette n autovalori al di sotto di $\inf \sigma_{\text{ess}}(A)$, allora anche A ammette n autovalori al di sotto del suo spettro essenziale, inoltre, l'i-esimo autovalore di A è minore o eguale dell'i-esimo autovalore di B. Riassumendo

Proposizione IV.2 *Siano A e B autoaggiunti tali che $D(B) \subset D(A)$ e, per ogni $\psi \in D(B)$,*

$$(\psi, A\psi) \leq (\psi, B\psi),$$

allora, per ogni n,

$$\mu_n(A) \leq \mu_n(B).$$

I concetti introdotti possono essere espressi in modo più elegante e più profondo, facendo uso della nozione di forma quadratica. Cominciamo con l'introdurre una ovvia

Definizione IV.1 *Siano A e B due operatori semilimitati dal basso. Si dice che $A \leq B$ se $Q(B) \subset Q(A)$ e*

$$q_A(\psi,\psi) \leq q_B(\psi,\psi)$$

per ogni $\psi \in Q(B)$.

Teorema IV.11 (principio del confronto) *Siano dati due operatori A e B limitati dal basso tali che $D(B) \subset D(A)$ e, per ogni $\psi \in D(B)$,*

$$(\psi, A\psi) \leq (\psi, B\psi)$$

allora $A \leq B$. Siano $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ le estensioni di Friedrichs di A e B, allora, per ogni n,

$$\mu_n\left(\tilde{A}\right) \leq \mu_n\left(\tilde{B}\right).$$

Dimostrazione Una volta visto che $A \leq B$, si tratta di applicare il principio del min-max per le forme, ricordando che $q_{\tilde{A}} = q_A$ e $q_{\tilde{B}} = q_B$.

Sia $\varphi \in Q(B)$, allora esiste una successione $\{\varphi_n\} \subset D(B)$ di Cauchy rispetto a $(\cdot, B\cdot) + (\cdot,\cdot)$ e convergente in $\mathcal{H}$ a φ. Ma allora $\{\varphi_n\}$ è di Cauchy anche secondo $(\cdot, A\cdot) + (\cdot,\cdot)$, perciò $\varphi \in Q(A)$. In definitiva, $Q(B) \subset Q(A)$. Inoltre,

$$\begin{aligned} q_B(\varphi,\varphi) &= \lim_{n\to\infty} (\varphi_n, B\varphi_n) \\ q_A(\varphi,\varphi) &= \lim_{n\to\infty} (\varphi_n, A\varphi_n) \end{aligned}$$

perciò $q_A(\varphi) \leq q_B(\varphi)$.

Adesso

$$\begin{aligned} \mu_n\left(\tilde{A}\right) &= \sup_{\varphi_1\cdots\varphi_{n-1}} \inf_{\substack{\psi\in Q(A),\|\psi\|=1 \\ \psi\in\mathcal{V}^\perp\{\varphi_1\cdots\varphi_{n-1}\}}} q_A(\psi,\psi) \leq \sup_{\varphi_1\cdots\varphi_{n-1}} \inf_{\substack{\psi\in Q(B),\|\psi\|=1 \\ \psi\in\mathcal{V}^\perp\{\varphi_1\cdots\varphi_{n-1}\}}} q_A(\psi,\psi) \leq \\ &\leq \sup_{\varphi_1\cdots\varphi_{n-1}} \inf_{\substack{\psi\in Q(B),\|\psi\|=1 \\ \psi\in\mathcal{V}^\perp\{\varphi_1\cdots\varphi_{n-1}\}}} q_B(\psi,\psi) = \mu_n\left(\tilde{B}\right), \end{aligned}$$

(c.v.d.) la tesi.

Il principio di confronto, nelle sue due formulazioni è uno strumento molto potente. Il suo utilizzo nel caso sia noto l'inferiore dello spettro essenziale, consente di concludere l'esistenza di stati legati e di dare una stima delle corrispondenti energie.

Analisi spettrale di $A + \lambda B$ Una prima semplice applicazione del principio di confornto è la seguente. Sia A un operatore autoaggiunto positivo e sia B un operatore limitato dal basso relativamente compatto rispetto ad A, di modo che, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $A_\lambda \equiv A + \lambda B$ è un operatore autoaggiunto su $D(A)$ con spettro essenziale sempre pari a $\sigma_{\text{ess}}(A)$. Supponiamo pure $\sigma_{\text{ess}}(A) = \mathbb{R}^+$.

Sia $\lambda_1 \geq \lambda_2$, allora, poiché A è positivo, intendendo stavolta le diseguaglianze nel senso dei valori medi,

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}(A + \lambda_2 B) \geq A + \lambda_1 B$$

perciò

$$\begin{aligned}\mu_n\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\left(A+\lambda_2 B\right)\right) &\geq \mu_n\left(A+\lambda_1 B\right)\\ \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\mu_n\left(A+\lambda_2 B\right) &\geq \mu_n\left(A+\lambda_1 B\right)\end{aligned}$$

Ora, poiché $\mu_n \leq \inf \sigma_{\text{ess}}(A) = 0$, abbiamo

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\mu_n\left(A+\lambda_2 B\right) \leq \mu_n\left(A+\lambda_2 B\right),$$

da cui

$$\mu_n\left(A+\lambda_2 B\right) \geq \mu_n\left(A+\lambda_1 B\right)$$

sicché $\mu_n(A_\lambda)$ è una funzione non crescente di $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Ma si ha di più. Supponiamo che A_{λ_2} ammetta n autovalori discreti, allora $\mu_n(A_{\lambda_2}) < 0$, perciò $\mu_n(A_{\lambda_1}) < 0$. Allora, anche A_{λ_1} ammette n autovalori discreti. In definitiva, se $N(\lambda)$ indica il numero di stati legati di A_λ, si ha che $N(\lambda)$ è una funzione non decrescente di $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Teorema IV.12 *Sia A un operatore positivo con spettro essenziale pari a $\mathbb{R}^+$ e sia B un operatore semilimitato dal basso relativamente compatto rispetto ad A. Considerato per ogni λ l'operatore autoaggiunto $A_\lambda \equiv A + \lambda B$, abbiamo che $\mu_n(A_\lambda)$ è una funzione non crescente di A e che il numero di stati legati ammesso da A_λ è una funzione non decrescente di λ.*

Potenziali esplodenti all'infinito Un'ultima applicazione del principio di confronto, riguarda lo studio dei potenziali localmente limitati positivi esplodenti all'infinito. Le hamiltoniane associate possono essere costruite banalmente tramite estensione di Friedrichs. Ebbene esse ammettono spettro puramente discreto come ci si aspetta pensando all'oscillatore armonico:

Teorema IV.13 *Sia V una funzione localmente limitata e positiva con $V(x) \to \infty$ per $|x| \to \infty$. Definiamo $H = H_0 + V$ come estensione di Friedrichs dell'operatore banalmente definito su $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Allora H ha spettro puramente discreto.*

Dimostrazione Dal principio del min-max è sufficiente dimostrare che $\mu_n(H) \to +\infty$. In tal caso, per ogni $M > 0$, esiste n di modo che

$$M < \mu_n(H) \leq \inf \sigma_{\text{ess}}(H),$$

da cui $\sigma_{\text{ess}}(H) = \emptyset$.

Dato un qualunque $c > 0$, troviamo una palla S tale che $V(x) \geq c$ su S^c. Sia W il potenziale definito da $-c$ per $x \in S$ e 0 per $x \in S^c$. Allora W è un potenziale limitato a supporto compatto. Allora $V \geq c + W$ e, su $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, si ha $H_0 + V \geq H_0 + W + c$ nel senso dei valori medi. Passando alle estensioni di Friedrichs, chiamiamo H_W quella di $H_0 + W$, otteniamo dal principio di confronto,

$$\mu_n(H) \geq \mu_n(H_W) + c$$

Ora, H_W è una estensione autoaggiunta di $H_0 + W$ su $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ma su tale dominio $H_0 + W$ è essenzialmente autoaggiunto, in definitiva, H_W è la chiusura di $H_0 + W$ e risulta pertanto autoggiunto su $D(H_0)$. Ancora, poiché W è limitato e ha supporto compatto, H_W ha spettro essenziale pari a $\mathbb{R}^+$, perciò esiste N tale che

$$\mu_n(H_W) \geq -1$$

per ogni $n \geq N$. In definitiva, per ogni c', esiste N tale che se se $n \geq N$, allora

$$\mu_n(H) \geq c',$$

(c.v.d.) la tesi.

IV.4.3 Il metodo di Rayleigh-Ritz

Il principio del minimo-massimo può essere utilizzato per ottenere anche informazioni quantitative sugli autovalori di una hamiltoniana, come abbiamo in parte accennato. In questa sottosezione ci occuperemo del metodo di Rayleigh-Ritz per la stima dei $\mu_n(H)$.

Teorema IV.14 *Sia H un operatore semilimitato autoaggiunto. Sia V uno spazio vettoriale n-dimensionale contenuto in $D(H)$. Sia P il proiettore ortogonale su V. Posto $H_V = PHP$, siano $\hat{\mu}_1 \leq \ldots \leq \hat{\mu}_n$ gli autovalori di H_V ristretto a V. Allora, per ogni $m \in J_n$ risulta*

$$\mu_m(H) \leq \hat{\mu}_m.$$

In particolare, se H ammette k autovalori, $E_1 \leq \ldots \leq E_k$, allora per ogni $m \in J_{\min(n,k)}$,

$$E_m \leq \hat{\mu}_m.$$

Dimostrazione Dal principio del minimo-massimo, $H_V|_V$ ha autovalori dati da

$$\hat{\mu}_m = \sup_{\varphi_1\ldots\varphi_{m-1}\in V} \inf_{\substack{\psi\in V,\, \|\psi\|=1 \\ \psi\in\mathcal{V}^{\perp}\{\varphi_1\ldots\varphi_{m-1}\}}} (\psi, H\psi) = \sup_{\varphi_1\ldots\varphi_{m-1}\in\mathcal{H}} \inf_{\substack{\psi\in V,\, \|\psi\|=1 \\ \psi\in\mathcal{V}^{\perp}\{P\varphi_1\ldots P\varphi_{m-1}\}}} (\psi, H\psi)$$

adesso, se $\psi \in V$, allora

$$(\psi, P\varphi) = (P\psi, \varphi) = (\psi, \varphi)$$

sicché,

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_m &= \sup_{\varphi_1\ldots\varphi_{m-1}\in\mathcal{H}} \inf_{\substack{\psi\in V,\, \|\psi\|=1 \\ \psi\in\mathcal{V}^{\perp}\{\varphi_1\ldots\varphi_{m-1}\}}} (\psi, H\psi) \geq \sup_{\varphi_1\ldots\varphi_{m-1}\in\mathcal{H}} \inf_{\substack{\psi\in D(H),\, \|\psi\|=1 \\ \psi\in\mathcal{V}^{\perp}\{\varphi_1\ldots\varphi_{m-1}\}}} (\psi, H\psi) = \\ &= \mu_m.\end{aligned}$$

(c.v.d.)

Dunque, preso un s.o.n. $\{\eta_i\}_{\in J_n} \subset D(H)$ gli autovalori della matrice n-dimensionale $(\eta_i, H\eta_j)$ forniscono una stima per eccesso dei primi n autovalori di H.

IV.5 I problemi principali della teoria dello scattering

IV.5.1 Introduzione

Oggetto della teoria dello scattering Uno degli aspetti più importanti dello studio della dinamica, di qualunque natura essa sia, è l'andamento a tempi grandi.
La teoria dello scattering si occupa di paragonare due dinamiche, perciò due diverse evoluzioni temporali, su scale di tempo molto lunghe. La dinamica di interesse è confrontata con la dinamica libera, cioè con quella che si verificherebbe in assenza di interazione.

Natura perturbativa Poiché la teoria dello scattering coinvolge due dinamiche, in un certo senso essa è una branca della teoria delle perturbazioni. Nel caso della meccanica quantistica, in effetti, la teoria dello scattering studia le perturbazioni dello spettro assolutamente continuo.

Stati liberi e stati interagenti Dato un sistema interagente, la teoria dello scattering ne studia gli stati *asintoticamente liberi* nel passato e nel futuro. Sia Σ l'insieme degli stati del sistema. Indichiamo con T_t la trasformazione di Σ in sé che associa a uno stato il suo evoluto al tempo t, mentre indichiamo con T_t^0 la trasformazione di evoluzione temporale secondo la dinamica libera. Nello studio dello scattering, ci si interessa alle coppie $(\rho, \rho_-) \in \Sigma$ tali che

$$\lim_{t\to-\infty} \left(T_t\rho - T_t^0\rho_-\right) = 0$$

(analogamente per $t \to +\infty$), cioè a quelle coppie di stati che sotto evoluzioni temporali diverse divengono asintoticamente vicini.

Aspetti generali della teoria dello scattering Sempre parlando da un punto di vista del tutto generale, le questioni rilevanti sono

(i) *Esistenza degli stati di scattering.* I costituenti del sistema scatterante sono posti inizialmente a distanze molto grandi di modo che l'interazione tra le componenti sia nulla;

a questo punto si consente al sistema di evolvere in modo che l'interazione venga ad agire; dopo un lungo tempo si torna ad osservare il sistema. Fisicamente ci si aspetta di poter preparare qualsiasi stato libero (dal momento che inizialmente l'interazione è "spenta"). In altre parole, vogliamo che per ogni $\rho_- \in \Sigma$, esista $\rho \in \Sigma$, talché

$$\lim_{t\to-\infty}\left(T_t\rho - T_t^0\rho_-\right) = 0$$

Provare quanto affermato equivale a provare l'esistenza degli stati di scattering.

(ii) *Unicità degli stati di scattering.* Per descrivere il sistema preparato per mezzo degli stati liberi, si deve ovviamente sapere che ogni stato libero è associato al più a uno stato di scattering, cioè che, dato ρ_-, esiste al più uno stato ρ di modo che

$$\lim_{t\to-\infty}\left(T_t^0\rho_- - T_t\rho\right) = 0$$

In questo modo, abbiamo che a ogni stato libero corrisponde uno e un solo stato di scattering.

(iii) *Completezza asintotica debole.* Supponiamo di avere uno stato interagente ρ che assomigliava, nel lontano passato, a uno stato libero, nel senso che

$$\lim_{t\to-\infty}\left(T_t\rho - T_t^0\rho_-\right) = 0$$

per qualche $\rho_- \in \Sigma$. Sarebbe bello allora che per tempi grandi positivi lo stato ρ andasse ancora a somigliare a uno stato libero, nel senso che, per qualche $\rho_+ \in \Sigma$,

$$\lim_{t\to+\infty}\left(T_t\rho - T_t^0\rho_+\right) = 0.$$

Definiti gli insiemi

$$\begin{aligned}\Sigma_{\text{in}} &= \left\{\rho\in\Sigma \,\middle|\, \exists\rho_-\in\Sigma : \lim_{t\to-\infty}\left(T_t\rho - T_t^0\rho_-\right) = 0\right\}\\ \Sigma_{\text{out}} &= \left\{\rho\in\Sigma \,\middle|\, \exists\rho_+\in\Sigma : \lim_{t\to+\infty}\left(T_t\rho - T_t^0\rho_+\right) = 0\right\}\end{aligned}$$

si tratta di mostrare che $\Sigma_{\text{in}} = \Sigma_{\text{out}}$. Se tale eguaglianza è verificata il sistema si dice asintoticamente debolmente completo.

(iv) *Definizione della S-trasformazione.* Supponiamo di aver dimostrato i punti (i), (ii) e (iii). Mostriamo che è possibile definire una biiezione naturale di Σ in sé. Dato $\rho \in \Sigma$, esiste ed è unico $\Omega_+\rho \in \Sigma_{\text{in}}$ di modo che

$$\lim_{t\to-\infty}\left(T_t\Omega_+\rho - T_t^0\rho\right) = 0$$

similmente, esiste ed è unico $\Omega_-\rho \in \Sigma_{\text{out}}$ tale che

$$\lim_{t\to+\infty}\left(T_t\Omega_-\rho - T_t^0\rho\right) = 0$$

$\Omega_\pm$ è una applicazione iniettiva sotto deboli ipotesi su T_t^0. Se $\Omega_\pm\rho_1 = \Omega_\pm\rho_2$, allora

$$\lim_{t\to\pm\infty}\left(T_t\Omega_\mp\rho_1 - T_t^0\rho_1\right) = \lim_{t\to\pm\infty}\left(T_t\Omega_\mp\rho_1 - T_t^0\rho_2\right) = 0$$

perciò

$$\lim_{t\to\pm\infty}\left(T_t^0\rho_1 - T_t^0\rho_2\right) = 0$$

che possiamo assumere implichi $\rho_1 = \rho_2$ (si pensi al caso hilbertiano in cui ρ_1 e ρ_2 hanno differenza di norma non nulla, il limite è inteso in senso forte e T_t^0 è unitario).

In definitiva, Ω_+ (risp. Ω_-) è una biiezione di Σ su Σ_{in} (risp. su Σ_{out}). In presenza di completezza asintotica debole, l'applicazione

$$S \equiv \Omega_-^{-1}\Omega_+ : \Sigma \to \Sigma$$

è una biiezione di S in sé. Come si vede,

$$\lim_{t\to+\infty}\left(T_t^0\left(S\rho\right) - T_t\left(\Omega_+\rho\right)\right) \quad = \quad 0$$

$$\lim_{t\to-\infty}\left(T_t^0\rho - T_t\left(\Omega_+\rho\right)\right) = 0$$

perciò $T_t^0\left(S\rho\right)$ e $T_t^0\rho$ sono correlati dall'esistenza di uno stato, $\Omega_+\rho$, che interpola tra essi. Ossia $T_t\Omega_+\rho$ somiglia a $T_t^0\left(S\rho\right)$ nel futuro e a $T_t^0\rho$ nel passato. S connette passato e futuro.

(v) *Completezza asintotica*. Un sistema fisico solitamente è retto da interazioni che scendono rapidamente se le componenti sono sufficientemente lontane. Fisicamente ci si aspetta che il sistema evolva o in modo da legare le componenti, o in modo da decadere in più componenti che si muovono liberamente dopo un certo tempo. In molti casi si riesce a isolare un sottoinsieme Σ_{bound} di Σ composto da stati legati. Usualmente sarà possibile provare $\Sigma_{\text{bound}}\cap\Sigma_{\text{in}}=\emptyset$. Per quanto detto ci si aspetta di poter provare

$$\Sigma_{\text{bound}} \text{ “}+\text{” } \Sigma_{\text{in}} = \Sigma = \Sigma_{\text{bound}} \text{ “}+\text{” } \Sigma_{\text{out}}$$

dove, se Σ è uno spazio di Hilbert, la somma sarà da intendersi come una somma diretta.

La proprietà descritta si dice completezza asintotica (essa implica la completezza debole).

IV.5.2 Principi base della teoria dello scattering su uno spazio di Hilbert

Siano H_0 e H le hamiltoniane generatrice dell'evoluzione libera e dell'evoluzione completa, rispettivamente. In modo naturale, un vettore φ appare asintoticamente libero al tempo $-\infty$ se esiste φ_+ di modo che

$$\lim_{t\to-\infty}\left\|e^{-itH_0}\varphi_+ - e^{-itH}\varphi\right\| = 0 \tag{IV.3}$$

La (IV.3) è del tutto equivalente alla

$$\lim_{t\to-\infty}\left\|e^{itH}e^{-itH_0}\varphi_+ - \varphi\right\| = 0$$

e questo significa che il problema dell'esistenza (vedi il punto (i) nella sottosezione precedente) è ricondotto all'esistenza di limiti forti.

Definizione IV.2 *Siano H e H_0 operatori autoaggiunti su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Definiamo gli* **operatori d'onda di Møller**, *$\Omega_\pm\left(H,H_0\right)$, come*

$$\begin{aligned} D\left(\Omega_\pm\left(H,H_0\right)\right) &= \left\{\psi\in\mathcal{H}\,\middle|\,\exists\lim_{t\to\mp\infty}e^{itH}e^{-itH_0}\psi\right\} \\ \Omega_\pm\left(H,H_0\right)\psi &= \lim_{t\to\mp\infty}e^{itH}e^{-itH_0}\psi \end{aligned}$$

Il dominio di Ω_+ si dice insieme degli **stati incidenti** *(incoming), il dominio di Ω_+ si dice insieme degli* **stati uscenti** *(outgoing). Infine, poniamo*

$$\mathcal{H}_+\equiv\mathcal{H}_{\text{in}}\equiv R\left(\Omega_+\right),\ \mathcal{H}_-\equiv\mathcal{H}_{\text{out}}\equiv R\left(\Omega_-\right)$$

Un vettore nell'intersezione di $\mathcal{H}_{\text{in}}$ e $\mathcal{H}_{\text{out}}$ si dice **stato di scattering** *(perché asintotizza a uno stato libero nel futuro e nel passato).*

Cominciamo con il seguente

Lemma IV.8 *I domini e le immagini degli operatori d'onda sono sottospazi chiusi. Gli operatori d'onda sono isometrici.*

Dimostrazione Vediamo che il dominio è chiuso. Posto

$$W\left(t\right)\equiv e^{itH}e^{-itH_0}$$

abbiamo che $W\left(t\right)\psi$ ammette limite a $t\to\pm\infty$ se e solo se è di Cauchy. Sia $\{\psi_n\}\subset D\left(\Omega_\pm\right)$ una successione convergente a $\psi\in\mathcal{H}$, allora $\psi\in D\left(\Omega_\pm\right)$, infatti,

$$\begin{aligned} \left\|W\left(t\right)\psi - W\left(s\right)\psi\right\| &\le \left\|W\left(t\right)\left(\psi-\psi_n\right)\right\| + \left\|W\left(t\right)\psi_n - W\left(s\right)\psi_n\right\| + \left\|W\left(s\right)\left(\psi_n-\psi\right)\right\| \le \\ &\le 2\left\|\psi-\psi_n\right\| + \left\|W\left(t\right)\psi_n - W\left(s\right)\psi_n\right\| \end{aligned}$$

scelto n di modo che il primo addendo stia sotto $\varepsilon/2$, troviamo M di modo che se $t, s > M$, il secondo addendo sta sotto $\varepsilon/2$, da cui la tesi.

Se mostriamo che $\Omega_\pm$ sono isometrie, poiché hanno dominio chiuso, si trova che hanno pure immagine chiusa.

Allora, se $\psi \in D(\Omega_\pm)$

$$\|\Omega_\pm \psi\| = \lim_{t\to\mp\infty} \|W(t)\psi\| = \lim_{t\to\mp\infty} \|\psi\| = \|\psi\|.$$

(c.v.d.)

Teorema IV.15 *Valgono i seguenti fatti*

Proposizione IV.3

(i) $D(\Omega_\pm)$ sono H_0-invarianti;

(ii) $\mathcal{H}_\pm$ sono H-invarianti;

(iii) abbiamo

$$\begin{aligned} \Omega_\pm (D(H_0) \cap D(\Omega_\pm)) &\subset D(H) \\ H\Omega_\pm (H, H_0)\psi &= \Omega_\pm (H, H_0) H_0 \psi \end{aligned}$$

per ogni $\psi \in D(H_0) \cap D(\Omega_\pm)$.

Dimostrazione Per ogni $\psi \in D(\Omega_\pm)$ e per ogni fissato s,

$$\lim_{t\to\mp\infty} e^{itH} e^{-itH_0}\psi = \lim_{t\to\mp\infty} e^{i(t+s)H} e^{-i(t+s)H_0}\psi$$

da cui

$$\Omega_\pm (H, H_0)\psi = e^{isH}\Omega_\pm (H, H_0) e^{-isH_0}\psi$$

equivalentemente

$$e^{-isH}\Omega_\pm (H, H_0)\psi = \Omega_\pm (H, H_0) e^{-isH_0}\psi \tag{IV.4}$$

Dall'equazione ricavata troviamo subito che $e^{-isH_0} D(\Omega_\pm) \subset D(\Omega_\pm)$ e che $e^{-isH} R(\Omega_\pm) \subset R(\Omega_\pm)$.

Ora, dato e^{-itA} con A autoaggiunto, il teorema di Stone afferma che $\psi \in D(A)$ se e solo se il limite

$$i \lim_{t\to 0} \frac{e^{-itA}\psi - \psi}{t}$$

esiste (e in tal caso esso è pari a $A\psi$).

Dunque se D chiuso è invariante sotto e^{-itA} e se $\psi \in D(A) \cap D$, vale

$$\frac{e^{-itA}\psi - \psi}{t} \in D$$

perciò $A\psi \in D$. Per cui D è anche A-invariante.

Ne viene che $D(\Omega_\pm)$ e $R(\Omega_\pm)$ sono invarianti, rispettivamente, sotto H_0 e sotto H.

Come detto, $\psi \in D(H_0)$ se e solo se esiste

$$i \lim_{t\to 0} \frac{e^{-itH_0}\psi - \psi}{t},$$

se $\psi \in D(H_0) \cap D(\Omega_\pm)$, allora

$$\begin{aligned} \Omega_\pm (H, H_0)\, i \lim_{t\to 0} \frac{e^{-itH_0}\psi - \psi}{t} &= i \lim_{t\to 0} \frac{\Omega_\pm (H, H_0) e^{-itH_0}\psi - \Omega_\pm (H, H_0)\psi}{t} = \\ &= i \lim_{t\to 0} \frac{e^{-itH}\Omega_\pm (H, H_0)\psi - \Omega_\pm (H, H_0)\psi}{t} \end{aligned}$$

perciò $\Omega_\pm (H, H_0)\psi \in D(H)$ e

$$\Omega_\pm (H, H_0) H_0\psi = H\Omega_\pm (H, H_0)\psi.$$

(c.v.d.)

Come si vede H_0 ristretto a $D(\Omega_\pm)$ è unitariamente equivalente ad H ristretto a $R(\Omega_\pm)$.

Esistenza e completezza

Stando alla discussione di cui nella sottosezione precedente, la richiesta di della debole completezza asintotica si traduce nell'eguaglianza $R(\Omega_+) = R(\Omega_-)$. Invece, la completezza asintotica, identificato $\Sigma_{\text{bound}} \equiv \mathcal{H}_{\text{pp}}(H)$, diviene $R(\Omega_+) = R(\Omega_-) = \mathcal{H}_{\text{pp}}^{\perp}(H) = \mathcal{H}_{\text{c}}(H)$.
I problemi dell'esistenza e dell'unicità si formulano richiedendo che

$$\mathcal{H}_{\text{ac}}(H_0) \subset D(\Omega_\pm).$$

In questo caso, per l'unitaria equivalenza del teorema, si ottiene

$$R(\Omega_\pm) \subset \mathcal{H}_{\text{ac}}(H) \subset \mathcal{H}_{\text{c}}(H)$$

di modo che il requisito della completezza asintotica diviene

$$\mathcal{H}_{\text{c}}(H) \subset R(\Omega_\pm).$$

Nozione intermedia è quella di completezza:

$$\mathcal{H}_{\text{ac}}(H) \subset R(\Omega_\pm)$$

che, in presenza di esistenza, diviene $\mathcal{H}_{\text{ac}}(H) = R(\Omega_\pm)$. Riassumendo,

Definizione IV.3 *Si dice che gli* **operatori d'onda esistono** *se $\mathcal{H}_{\text{ac}}(H_0) \subset D(\Omega_\pm)$. Si dice che sono* **completi** *se $\mathcal{H}_{\text{ac}}(H) \subset R(\Omega_\pm)$. Si dice che sono* **asintoticamente completi** *se $\mathcal{H}_{\text{c}}(H) \subset R(\Omega_\pm)$.*

Proposizione IV.4 *Se gli operatori d'onda esistono e sono completi, allora $\mathcal{H}_{\text{ac}}(H) = R(\Omega_\pm)$, se esistono e sono asintoticamenti completi, allora $\mathcal{H}_{\text{c}}(H) = R(\Omega_\pm)$.*

Se si ha completezza e si riscontra $\sigma_{\text{s}}(H) = \emptyset$, allora si conclude che si ha completezza asintotica.

Matrice di scattering

Definiamo l'**operatore di scattering** come

$$\begin{aligned} S &\equiv \Omega_-^{-1}(H, H_0)\,\Omega_+(H, H_0) \\ D(S) &= \{\psi \in D(\Omega_+)\,|\Omega_+\psi \in R(\Omega_-)\} \end{aligned}$$

S connette il dominio di Ω_+ al dominio di Ω_-, cioè gli stati incidenti a quelli uscenti. Nel caso di debole completezza asintotica, $D(S) = D(\Omega_+)$ e $R(S) = D(\Omega_-)$. In queste condizioni, S è un isomorfismo isometrico da $D(\Omega_+)$ in $D(\Omega_-)$.
Nel caso in cui si abbia esistenza e, come accade spesso, lo spettro di H_0 sia puramente assolutamente continuo, S è un operatore unitario di $\mathcal{H}$ in sé.
Supponiamo di avere esistenza degli operatori d'onda su $\mathcal{H}$. In questa situazione, $\Omega_\pm$ sono isometrie parziali con spazio iniziale su $\mathcal{H}$ e spazio finale ristretto a $\mathcal{H}_\pm$. Allora, $\Omega_\pm^*$ sono isometrie parziali con spazio iniziale $\mathcal{H}_\pm$ e spazio finale $\mathcal{H}$. In altri termini,

$$\Omega_\pm^*\Omega_\pm = \mathbb{I}.$$

Non vale invece l'inverso. Inoltre, su $D(H_0)$,

$$\Omega_\pm H_0 = H\Omega_\pm$$

da cui

$$H_0 = \Omega_\pm^* H \Omega_\pm.$$

Poniamo che lo spettro di H_0 sia puramente assolutamente continuo. Allora, se $\Omega_\pm$ esistono, hanno dominio su $\mathcal{H}$, e $\mathcal{H}_\pm \subset \mathcal{H}_{\text{ac}}(H)$. Si vede allora bene che se H ammette stati legati, di certo, $\Omega_\pm$ non potranno essere operatori unitari. C'è di più, in presenza di completezza asintotica, $\Omega_\pm$ hanno come spazio finale l'insieme degli stati legati di H, cioè $\mathcal{H}_{\text{pp}}(H)$ (spazio generato dagli autovettori di H).
Se abbiamo esistenza su $\mathcal{H}$ e debole completezza asintotica, allora S è un operatore unitario.

Un criterio per la completezza

Prima di concludere due risultati interessanti

Proposizione IV.5 *Se $\Omega_\pm(A, B)$ e $\Omega_\pm(B, C)$ esistono, allora esistono $\Omega_\pm(A, C)$ e vale*

$$\Omega_\pm(A, C) = \Omega_\pm(A, B)\,\Omega_\pm(B, C)$$

Dimostrazione

Abbiamo $R(\Omega_{\pm}(B,C)) \subset \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(B)$, sicché, per ogni $\varphi \in D(\Omega_{\pm})$

$$\lim_{t\to\mp\infty}\left\|(1-P_{\mathrm{ac}}(B))\,e^{itB}e^{-itC}\varphi\right\| = 0$$

Allora, per ogni $\varphi \in \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(C)$,

$$\begin{aligned} e^{itA}e^{-itC}\varphi &= e^{itA}e^{-itB}P_{\mathrm{ac}}(B)\,e^{itB}e^{-itC}\varphi + \\ &\quad + e^{itA}e^{-itB}(\mathbb{I}-P_{\mathrm{ac}}(B))\,e^{itB}e^{-itC}\varphi \end{aligned}$$

converge per $t \to \mp\infty$ a $\Omega_{\pm}(A,B)\,\Omega_{\pm}(B,C)$, visto che il prodotto di famiglie di operatori convergenti fortemente e uniformemente limitati è convergente al prodotto dei limiti forti.

(c.v.d.)

Teorema IV.16 *Supponiamo che esistano $\Omega_{\pm}(H,H_0)$. Allora il sistema è completo se e solo se esistono $\Omega_{\pm}(H,H_0)$.*

Dimostrazione Supponiamo che esistano $\Omega_{\pm}(H,H_0)$ e $\Omega_{\pm}(H_0,H)$, allora, dalla regola della catena,

$$P_{\mathrm{ac}}(H) \subset \Omega_{\pm}(H,H) = \Omega_{\pm}(H,H_0)\,\Omega_{\pm}(H_0,H)$$

perciò

$$R(P_{\mathrm{ac}}(H)) \subset R(\Omega_{\pm}(H,H_0))$$

e, visto che abbiamo già dimostrato che vale l'inclusione inversa, abbiamo la tesi.

Viceversa, supponiamo che esistano $\Omega_{\pm}(H,H_0)$ e siano completi. Sia $\varphi \in R(P_{\mathrm{ac}}(H))$, allora esiste ψ tale che $\varphi = \Omega_{\pm}(H,H_0)\,\psi = \Omega_{\pm}(H,H_0)\,P_{\mathrm{ac}}(H_0)\,\psi$. Questo implica che

$$\lim_{t\to-\infty}\left\|e^{-itH}\varphi - e^{-itH_0}P_{\mathrm{ac}}(H_0)\,\psi\right\| = 0$$

per cui

$$\lim_{t\to-\infty}\left\|e^{itH_0}e^{-itH}\varphi - P_{\mathrm{ac}}(H_0)\,\psi\right\| = 0$$

cioè, per ogni $\varphi \in R(P_{\mathrm{ac}}(H))$ esiste il limite forte di $e^{itH_0}e^{-itH}\varphi$, cioè, esistono $\Omega_{\pm}(H_0,H)$.

(c.v.d.)

Capitolo V

Formulazione algebrica della meccanica quantistica

La formulazione algebrica accomuna tutte le teorie fisiche e anzi l'unica differenza (a parte il problema controverso della misura) tra fisica classica e quantistica sta nel fatto che alla prima corrisponde un'algebra commutativa, laddove la seconda è non commutativa. In ogni caso, il punto di vista algebrico consente, con poche eccezioni, di colmare le lacune della trattazione alla Dirac della meccanica quantistica dei sistemi finiti e di impostare in modo corretto il problema (ancora aperto per molti versi) dei sistemi infiniti (denominazione che include soggetti molto diversi quali la teoria quantistica dei campi e la meccanica statistica).

V.1 Descrizione matematica di un sistema fisico

In questa sezione seguiremo in modo quasi letterale il lavoro di Strocchi, *An Introduction to the Mathematical Structure of QM*, citato nella bibliografia.

Introduzione

Come noto la meccanica quantistica nasce dall'incongruenza delle leggi classiche con i fatti sperimentali riguardanti la fisica atomica. A partire dalla trattazione del corpo nero di Planck, dell'effetto fotoelettrico di Einstein, degli spettri atomici di Bohr fino agli studi di Schrödinger, Heisenberg, Dirac, Weyl e von Neumann si realizza, nella fisica, una rottura – anche filosofica – che reca dalle vecchie teorie classiche alle nuove teorie quantistiche. Queste, pur sovvertendo le prime, sembrano non poterne fare a meno, finché Wigner (grazie al contributo di Bargmann) non riesce a far stare in piedi la meccanica quantistica *on its own legs*.

Ma qual è il vero cambiamento che occorre nel passaggio dalla fisica classica alla meccanica quantistica e qual è il modo in cui questa assorbe i postulati della relatività speciale?

A queste domande non si può rispondere in modo piano senza ricorrere alla formulazione algebrica della fisica che come vedremo in questa sezione, oltre a essere molto naturale, evita alcune contraddizioni insite sia nelle formulazioni classiche che in quelle quantistiche.

Quello che faremo dapprima è cercare di individuare all'osso le strutture matematiche che governano una teoria classica. Dopo formuleremo la più generale teoria quantistica. In seguito, dopo aver studiato la meccanica quantistica dei sistemi finiti, verremo al caso veramente interessante dei sistemi infiniti, per i quali il punto di vista algebrico è incredibilmente proficuo.

V.1.1 Sistemi classici

Occupiamoci dei sistemi classici in modo da porre gradualmente in evidenza quelle che sono le strutture portanti dell'edificio di una teoria classica.

Prima descrizione di un sistema classico

La **configurazione** o **stato** di un sistema fisico è specificato da un insieme di **variabili canoniche** $\{q, p\}$, $q = (q_1, \ldots, q_n)$, $p = (p_1, \ldots, p_n)$, brevemente, da un punto $P = \{q, p\} \in \Gamma$, dove Γ è quello che chiameremo **spazio delle fasi**. Per semplicità e senza perdere troppa generalità (sistema confinato in una regione limitata dello spazio fisico ed energia limitata) supporremo che Γ sia un insieme compatto.

L'evoluzione temporale del sistema è data dalle equazioni di Hamilton,

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

dove $H = H(p, q)$ è la hamiltoniana del sistema.

Sotto condizioni generali (teorema di Cauchy-Lipschitz), per ogni dato iniziale in Γ, il sistema di equazioni differenziali dato ammette un'unica soluzione locale nel tempo che può essere prolungata a una soluzione globale, ancora sotto condizioni molto generali (compattezza delle superfici ad energia costante).

Le quantità di interesse fisico, chiamate **osservabili**, sono ragionevolmente descritte (o almeno approssimate) da funzioni reali continue $f(p, q) \in \mathcal{C}(\Gamma)$. Ogni stato P del sistema determina il valore dell'osservabile su quello stato e viceversa. Usando il teorema di Stone-Weierstraß e il lemma di Urysohn, si conclude che ogni $P \in \Gamma$ è univocamente determinato dal valore che le osservabili assumono su di esso.

La relazione tra le misure di una osservabile f a un tempo t_0 e a un tempo t è data dall'evoluzione temporale delle variabili canoniche:

$$\begin{aligned} q \quad &\mapsto \quad q_t \equiv q(t; p, q), \quad p \mapsto p_t \equiv p(t; p, q) \\ f(p, q) \quad &\mapsto \quad f_t(p, q) \equiv f(p_t, q_t) \end{aligned}$$

Le strutture matematiche di cui si ha bisogno per sutdiare sistemi siffatti sono date dalla teoria delle funzioni (sugli spazi topologici o sulle varietà) e dalla teoria delle equazioni differenziali.

Seconda descrizione: interpretazione probabilistica

Dal punto di vista operativo, la descrizione data sopra è del tutto improponibile, essendo, quantomeno, troppo schematica. Essa si basa infatti sulla possibilità di misurare (perciò conoscere) in modo infinitamente preciso l'insieme delle variabili canoniche, la qual cosa è – nella pratica (e non per un fatto di principio) – impossibile. Da un punto di vista fisico, ha molto più senso, ammettere che sia possibile conoscere le variabili canoniche a meno di un errore che può essere piccolo a piacere, ma che resta comunque finito.

Queste considerazioni conducono a descrivere uno stato fisico ω come una distribuzione di probabilità, cioè una misura μ_ω, sullo spazio delle fasi, piuttosto che (soltanto) come un ben preciso punto. Le quantità fisiche, in particolare le variabili canoniche, sono, quindi, da riguardare come variabili aleatorie su Γ. A un dato tempo la misura di f su un dato stato non reca a un ben preciso valore, ma, semmai, a una distribuzione determinata dallo stato sul quale si effettua la misura.

Perciò, uno stato ω definisce un **valore di aspettazione** su ogni osservabile f nel modo che segue

$$\omega(f) \equiv \int_\Gamma f \, d\mu_\omega.$$

Le considerazioni fatte, supportano la definizione di osservabili come funzioni continue sullo spazio delle fasi, ma consentono ragionevolmente di estendere tale insieme passando ai limiti puntuali (quasi ovunque in μ_ω) delle funzioni continue.

Come si vede subito, la seconda descrizione che abbiamo dato include la prima come caso particolare, dato che i punti P_0 dello spazio delle fasi sono ancora stati cui corrispondono le misure puntuali μ_{P_0} di modo che

$$\omega_{P_0}(f) = \int_\Gamma f \, d\mu_{P_0} = f(P_0).$$

Stati siffatti si dicono **stati puri** e, come vedremo, non possono essere scritti come combinazioni convesse (non banali) di stati della stessa forma.

L'interpretazione operativa dei valori di aspettazione di una osservabile f è la seguente: $\omega(f)$ ha il significato di media dei risultati della misura di f nello stato ω; l'errore fatto nella misura di f così definita è dato da

$$(\Delta_\omega f)^2 \equiv \omega\left[(f - \omega(f))^2\right]$$

che è la dispersione di f sullo stato ω. Sugli stati puri la dispersione è nulla.

Tale estensione – resa necessaria da argomenti operativi – è anche suggerita dallo studio dei sistemi complessi della meccanica statistica. In questi casi, richiedere la conoscenza di 10^{23} parametri per predire il risultato di una misura è ridicolo e, come dimostra la termodinamica, inutile. Il passaggio al secondo tipo di descrizione chiaro già con Boltzmann è perciò inevitabile.

Descrizione generale di un sistema classico

Siamo adesso in grado di isolare i punti strutturali della descrizione di un sistema classico. Le osservabili associate a un sistema classico formano un'algebra commutativa $\mathcal{A}$ che possiamo assumere essere complessa (si tratta di un'estensione rispetto a quanto detto inizialmente), data dalle funzioni (complesse) continue sullo spazio Γ. Tale algebra è dotata dell'identità, $\mathbb{I}$, la funzione identicamente pari a 1, e di una involuzione naturale, *, rappresentata dalla coniugazione complessa, $f^* \equiv \bar{f}$. Ne viene che $\mathcal{A}$ è una *-algebra con identità.
Su $\mathcal{A}$ è possibile definire una norma in modo naturale,

$$\|f\| \equiv \sup_{x\in\Gamma} |f(x)|$$

rispetto alla quale $\mathcal{A}$ risulta uno spazio di Banach, nel quale il prodotto è continuo,

$$\|fg\| \leq \|f\| \, \|g\| .$$

e si dice che $\mathcal{A}$ è una *-Banach-algebra.
Su $\mathcal{A}$ vale anche la proprietà C^*,

$$\|f^* f\| = \|f\|^2 ,$$

sicché $\mathcal{A}$ è una C^*-algebra.

Dichiarazione di variabili come definizione di un sistema

Da un punto di vista fisico (operativo, ma anche di principio), è più significativo definire un sistema attraverso una dichiarazione preventiva delle variabili che si vogliono studiare, piuttosto che elencando gli stati possibili in cui esso può venire a trovarsi (che non possono essere noti a priori), perciò, d'ora in avanti identificheremo i sistemi fisici attraverso l'insieme delle loro osservabili.

Sistemi classici come C^*-algebre commutative

Detto questo, concludiamo che un sistema classico **è** una C^*-algebra commutativa. Sebbene la definizione data possa sembrare una estensione rispetto a quella secondo cui un sistema classico coincide con $\mathcal{C}(\Gamma)$, come vedremo, il teorema di Gel'fand, afferma che le due definizioni sono equivalenti, perciò entrambe legittime.

Stati

Individuato un sistema classico in termini dell'algebra delle osservavbili, dobbiamo definire il concetto di stato. Uno stato ω di un sistema fisico è identificato dall'insieme dei valori di aspettazione delle osservabili (denoteremo il valore di aspettazione di f con $\omega(f)$); banali argomenti fisici impongono che i valori di aspettazione siano lineari e positivi (una volta identificato $\omega(f)$ come la media delle misure di f sul sistema nello stato ω), i.e.,

$$\begin{aligned} \omega(f_1 + f_2) &= \omega(f_1) + \omega(f_2), \ \forall f_{1,2} \in \mathcal{A}; \\ \omega(f^* f) &\geq 0, \ \forall f \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

La condizione di positività è molto importante perché implica la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz. Dati $A, B \in \mathcal{A}$, l'applicazione

$$(A, B) \mapsto \omega(A^* B)$$

è un prodotto scalare semidefinito positivo su $\mathcal{A}$, di modo che vale la diseguaglianza

$$|\omega(A^* B)| \leq \omega(A^* A)^{1/2} \omega(B^* B)^{1/2}$$

di modo che

$$|\omega(A)| \leq \omega(A^* A)^{1/2} \omega(\mathbb{I})$$

perciò $\omega(\mathbb{I}) \neq 0$, a meno che ω non sia il funzionale identicamente nullo. Infine, $\omega(\mathbb{I}) > 0$ e possiamo ridefinire gli stati come

$$\omega \mapsto \frac{1}{\omega(\mathbb{I})}\omega$$

di modo che $\omega(\mathbb{I}) = 1$.
In conclusione, in generale, un sistema classico è definito dalla C^* -algebra abeliana delle sue osservabili e uno stato di un sistema classico è un funzionale normalizzato, positivo e lineare su $\mathcal{A}$.

Come detto, la descrizione in termini di stati come misure e osservabili come funzioni continue è equivalente alla definizione generale nella quale si antepone la dichiarazione delle osservabili come C^*-algebra abeliana, in forza del teorema di Gel'fand.
Infatti, $\mathcal{A}$ è isometricamente isomorfa a $\mathcal{C}(X)$ dove X è uno spazio compatto di Haussdorf (che corrisponde allo spettro di $\mathcal{A}$) e, dal teorema di Riesz-Markov, i funzionali lineari positivi su un compatto coincidono con misure boreliane.
Dunque, proprio il teorema di Gel'fand ci consente di rovesciare definitivamente il punto di vista ingenuo e impraticabile nel quale si specifica un sistema definendone gli stati e solo in seguito le osservabili.
Come si sarà compreso l'esistenza dell'identità è legata alla compattezza, dal momento che in generale la funzione 1 è non sommabile. D'altra parte, esiste una versione del teorema di Gel'fand secondo cui una C^*-algebra è isometricamente isomorfa a $\mathcal{C}(X)$ con X solo localmente compatto se la C^*-algebra non ammette l'identità.
Per inciso, esiste anche un sistema per dotare una C^*-algebra di una identità, ed esso coincide con la compattificazione di X (noi non ci addentreremo in questi dettagli).

Dinamica algebrica

Sotto condizioni molto generali di regolarità, nel caso concreto della realizzazione canonica (quella discussa inizialmente) di un sistema classico, l'evoluzione termporale è continua nel tempo $t \in \mathbb{R}$ e dipende in modo continuo dai dati iniziali (variabili al tempo t_0), in modo che – come ben noto – l'evoluzione temporale si traduce in una famiglia continua a un parametro di applicazioni $\alpha_{t_0,t}$ da $\mathcal{C}(\Gamma)$ in sé che sono invertibili, preservano le relazioni algebriche (inclusa la *). In termini astratti, allora, l'evoluzione temporale definisce una famiglia di *-automorfismi dell'algebra in sé (vedremo in seguito che un automorfismo conserva necessariamente la C^*-norma).
Se assumiamo che il sistema sia invariante per traslazioni temporali (come accade per un sistema isolato: l'evoluzione partendo da un certo punto oggi è la stessa partendo dallo stesso punto domani), abbiamo che α viene a dipendere unicamente da $t - t_0$ e con ciò diviene un gruppo a un parametro. Riassumendo, dal punto di vista algebrico, possiamo assumere che l'evoluzione temporale sia definita da un gruppo a un parametro continuo, α_t, $t \in \mathbb{R}$, di *-automorfismi della C^*-algebra di osservabili $\mathcal{A}$ considerata.
In altri termini, la dinamica assegna a ciascuna variabile $A \in \mathcal{A}$ la sua evoluta al tempo t, $A_t \equiv \alpha_t(A)$ e, per dualità, possiamo (rovesciando ancora la prospettiva comune) vedere come agisce l'evoluzione temporale sugli stati. Posto $\omega_t(A) \equiv \omega(A_t) = \omega(\alpha_t(A))$, abbiamo

$$\omega_t(A) = \omega(\alpha_t(A)) = (\alpha_t^* \omega)(A)$$

perciò, l'evoluzione temporale agisce sugli stati attraverso il gruppo a un parametro α_t^*.
La versione astratta della continuità in t è resa usando la topologia debole: α_t è continuo se per ogni ω e per ogni A, l'applicazione $t \mapsto \omega(\alpha_t(A))$ è continua.

V.1.2 Descrizione algebrica di un sistema fisico generale

In questa sottosezione vogliamo vedere (rendere plausibile) che l'astrazione che abbiamo visto a livello classico è del tutto generale, perciò ogni sistema fisico può essere descritto matematicamente attraverso la dichiarazione di una C^*-algebra di osservabili. Quando ci occuperemo dei sistemi infiniti, vedremo quale importanza rivestono, in ogni caso, gli stati nella costruzione della teoria (si pensi al GNS).

Osservabili

Da un punto di vista operativo, un sistema fisico è descritto in termini delle **misure** di quantità fisiche dette **osservabili** e perciò – abbastanza in generale – possiamo dire che un sistema fisico è <u>definito</u> dall'insieme $\mathcal{O}$ delle sue osservabili. Si deve intendere che ogni osservabile è associata a uno strumento fisico.
Per ogni $A \in \mathcal{O}$ possiamo definire $\lambda A \in \mathcal{O}$ come quell'osservabile i cui risultati sono quelli di A moltiplicati per λ. Lo strumento che è associato a λA è lo stesso di quello associato ad A, ma con la scala moltiplicata per λ. Analogamente possiamo definire le potenze intere di A e le loro somme. In altre parole, data $A \in \mathcal{O}$, ogni polinomio di A appartiene ancora ad $\mathcal{O}$. In particolare, $A^0 \in \mathcal{O}$ è quell'osservabile il cui strumento associato dà sempre il risultato 1.

Stati

Gli **stati** di un sistema sono le situazioni fisiche in cui può trovarsi un sistema , perciò, coincidono con le diverse procedure di preparazione del sistema. Poiché quest'ultimo è individuato dalle osservabili, gli stati sono tutti perfettamente identificati dalle misure delle osservabili su di essi.

In altri termini, fissato uno stato, a ogni osservabile si associa un numero (reale) che coincide con la misura dell'osservabile sullo stato dato. Ne viene che uno stato è un **funzionale** ω su $\mathcal{O}$. Dalla definizione data due stati ω_1 e ω_2 coincidono se $\omega_1(A) = \omega_2(A)$, per ogni $A \in \mathcal{O}$. Dunque, le osservabili separano gli stati.

Sull'insieme $\mathcal{O}$ consideriamo la relazione di equivalenza

$$A \equiv B \Leftrightarrow \omega(A) = \omega(B), \ \forall \omega$$

secondo cui A e B sono equivalenti se danno gli stessi risultati su ciascun stato fisico del sistema. Visto che la fisica non distingue osservabili equivalenti, anziché considerare $\mathcal{O}$ passiamo a considerare $\mathcal{O}/\equiv$ e denotiamo questo insieme ancora con $\mathcal{O}$.

Adesso, $\mathcal{O}$, l'insieme delle osservabili (a meno di equivalenza) separa gli stati, ed è separato dagli stati stessi.

L'interpretazione operativa di $\omega(A)$ è quella di risultato della misura di A su un certo stato del sistema, perciò possiamo pensare che ω sia un valore di aspettazione e, come tale, soddisfi i seguenti requisiti

$$\begin{aligned} \omega(\lambda A) &= \lambda\omega(A) \\ \omega(A^n + A^m) &= \omega(A^n) + \omega(A^m), \end{aligned}$$

di modo che ω viene assere un funzionale **omogeneo**.

Sempre sulla base dell'interpretazione fisica, è logico richiedere pure

$$\omega\left(A^0\right) = 1$$

per ogni $A \in \mathcal{O}$. La classe di equivalenza cui appartengono tutte le potenze zero delle osservabili si chiama $\mathbb{I}$ ed abbiamo

$$\omega(\mathbb{I}) = 1.$$

Gli stati fisici sono funzionali omogenei **normalizzati**.

Linearizzazione di $\mathcal{O}$ D'ora in poi procederemo ad estendere $\mathcal{O}$ aggiungendo elementi che non hanno un'interpretazione fisica diretta come quelli discussi finora, ma che hanno interesse perché la loro introduzione semplifica di molto l'apparato matematico che ci occorre.

Date due osservabili A e B definiamo un nuovo elemento $A + B$ tale che

$$\omega(A + B) = \omega(A) + \omega(B)$$

per ogni stato fisico ω. Chiamiamo lo spazio lineare reale ottenuto ancora $\mathcal{O}$. Gli stati fisici vengono ad essere funzionali lineari normalizzati su $\mathcal{O}$. Gli stati fisici continuano a separare gli elementi di $\mathcal{O}$. Su $\mathcal{O}$ poniamo una norma nel modo seguente

$$\|A\| \equiv \sup_{\omega} |\omega(A)|,$$

la norma risulta finita, perché, nell'interpretazione operativa, ogni strumento ha una scala finita.

Banalmente, abbiamo

$$\begin{aligned} \|\lambda A\| &= |\lambda| \|A\|; \\ \|A + B\| &\leq \|A\| + \|B\|. \end{aligned}$$

Se $\|A\| = 0$, allora $\omega(A) = 0$ per ogni stato fisico, infine, $A = 0$ (visto che gli stati fisici separano le osservabili). Dunque, $\|\cdot\|$ è una norma su $\mathcal{O}$.

Poiché

$$|\omega(A)| \leq \|A\|$$

notiamo che gli stati fisici sono funzionali continui. Questo ci consente di completare $\mathcal{O}$ rispetto a $\|\cdot\|$ estendendo gli stati fisici per continuità sul completamento di $\mathcal{O}$, che continueremo a chiamare $\mathcal{O}$.

Una osservabile si dice positiva, se è il quadrato di un'altra osservabile. Un funzionale su $\mathcal{O}$ si dice positivo se

$$\omega\left(A^2\right) \geq 0$$

per ogni A. Vista l'interpretazione operativa di A e di ω, richiediamo che tutti gli stati fisici siano funzionali **positivi** su $\mathcal{O}$.

Proposizione V.1 *Data $A \in \mathcal{O}$, abbiamo*

$$\left\|A^2\right\| = \|A\|^2 .$$

Dimostrazione Cominciamo con il dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$, $\|A\| + \varepsilon \pm A$ è un elemento positivo di $\mathcal{O}$. Notiamo che

$$\|A\| + \varepsilon \pm A = (\|A\| + \varepsilon)\left(1 \pm \frac{A}{\|A\| + \varepsilon}\right)$$

e visto che $\sqrt{1+z}$ può essere scritta in serie di potenze per $|z| < 1$, abbiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un operatore B_ε di modo che

$$\|A\| + \varepsilon \pm A = B_\varepsilon^2.$$

Detto questo, consideriamo l'elemento positivo di $\mathcal{O}$

$$(\|A\| + \varepsilon + A)(\|A\| + \varepsilon - A) = (\|A\| + \varepsilon)^2 - A^2$$

abbiamo, per ogni stato fisico ω,

$$(\|A\| + \varepsilon)^2 \geq \omega\left(A^2\right)$$

da cui

$$\|A\|^2 \geq \left\|A^2\right\| .$$

Ora consideriamo l'elemento positivo

$$(\|A\| + \varepsilon + A)(\|A\| + \varepsilon + A) = (\|A\| + \varepsilon)^2 + 2(\|A\| + \varepsilon)A + A^2,$$

da cui, per ogni stato fisico ω

$$\begin{aligned}
(\|A\| + \varepsilon)^2 \omega^2(A) - (\|A\| + \varepsilon)^2 \omega\left(A^2\right) &\leq 0 \\
\omega^2(A) &\leq \omega\left(A^2\right) \\
\|A\|^2 &\leq \left\|A^2\right\|,
\end{aligned}$$

(c.v.d.) infine, la tesi.

Struttura algebrica Fissata la struttura lineare di $\mathcal{O}$, vogliamo vedere che $\mathcal{O}$ ammette un'estensione a C^*-algebra $\mathcal{A}$. In primo luogo introduciamo il prodotto simmetrizzato

$$A \circ B = \frac{1}{2}\left[(A+B)^2 - A^2 - B^2\right] = B \circ A$$

Se A e B sono polinomi di una terza osservabile C, abbiamo

$$A \circ B = P(C) \circ Q(C) = \frac{1}{2}\left[(P(C) + Q(C))^2 - P^2(C) - Q^2(C)\right] = P(C)Q(C)$$

di modo che

$$A \circ (\lambda B) = \lambda(A \circ B) = (\lambda A) \circ B,$$

perciò imponiamo che questa relazione sia soddisfatta per tutti gli elementi di $\mathcal{O}$.

Proposizione V.2 *Il prodotto simmetrizzato è distributivo.*

Dimostrazione Abbiamo

$$\begin{aligned}
(A+B)^2 &= A^2 + B^2 + 2A \circ B \\
(A-B)^2 &= A^2 + B^2 + 2A \circ (-B) = A^2 + B^2 - 2A \circ B
\end{aligned}$$

di modo che

$$A^2 + B^2 = \frac{1}{2}\left[(A+B)^2 + (A-B)^2\right].$$

Dalla prima delle tre equazioni, troviamo (come si verifica subito)

$$2(A+B)\circ C - 2A\circ C - 2B\circ C =$$
$$\left[(A+B+C)^2 + A^2\right] + \left(B^2 + C^2\right) - \left[(A+B)^2 + (A+C)^2\right] - (B+C)^2$$

Ora, lavorando sul membro di destra con la terza equazione troviamo

$$(2A+B+C)^2 + (B+C)^2 + (B+C)^2 +$$
$$(B-C)^2 - (2A+B+C)^2 - (B-C)^2 - 2(B+C)^2 = 0$$

di modo che

(c.v.d.)

$$(A+B)\circ C = A\circ C + B\circ C$$

Sugli stati fisici, usando la proprietà distributiva,

$$0 \le \omega\left((A+\lambda B)^2\right) = \omega\left((A+\lambda B)\circ(A+\lambda B)\right) = \omega\left(A^2\right) + \lambda^2\omega\left(B^2\right) + 2\lambda\omega\left(A\circ B\right)$$

da cui

$$\left|\omega\left(A\circ B\right)\right| \le \left|\omega\left(A^2\right)\right|^{1/2}\left|\omega\left(B^2\right)\right|^{1/2},$$

infine,

$$\|A\circ B\| \le \|A\|\,\|B\|.$$

Sistemi di Segal Data una successione $A_n \to A$, abbiamo

$$A_n^2 - A^2 = (A_n + A)\circ(A_n - A)$$

sicché

$$\left\|A_n^2 - A^2\right\| \le \|A_n + A\|\,\|A_n - A\| \le \|A_n - A\|\left(\|A_n - A\| + \|2A\|\right) \to 0,$$

infine,

Proposizione V.3 *Se A_n converge ad A in $\mathcal{O}$, allora A_n^2 converge ad A^2.*

Un'altra proprietà che possiamo rinvenire in $\mathcal{O}$ è la seguente

$$\left\|A^2 - B^2\right\| \le \max\left\{\|A\|^2, \|B\|^2\right\}.$$

Infatti,

$$\left|a^2 - b^2\right| \le \max\left\{a^2, b^2\right\}$$

e, data la positività degli stati, possiamo porre $\omega\left(A^2\right) = a^2$ e $\omega\left(B^2\right) = b^2$. La tesi si ottiene grazie al fatto che $\left\|A^2\right\| = \|A\|^2$.

Proposizione V.4 *Vale*

$$\left\|A^2 - B^2\right\| \le \max\left\{\|A\|^2, \|B\|^2\right\}.$$

Uno spazio di Banach sul quale valgano le due proposizioni appena dimostrate si dice **sistema di Segal**. Come ha mostrato Segal i sistemi di Segal sono sufficienti per spiegare i fatti elementari della meccanica quantistica. Risulta tuttavia conveniente estendere ulteriormente $\mathcal{O}$.

Inclusione di $\mathcal{O}$ nella C^*-algebra $\mathcal{A}$ Sotto ipotesi molto generali, ma che, non avendo interpretazione fisica diretta, non vale la pena discutere e che perciò assumeremo sempre soddisfatte, un sistema di Segal può essere esteso a una algebra di Banach $\mathcal{A}$, nella quale

(i) *il prodotto simmetrizzato proviene da un prodotto associativo su $\mathcal{A}$,*

$$A \circ B = \frac{1}{2}\left(AB + BA\right);$$

(ii) *è definita un'operazione *, tale che per ogni $A, B \in \mathcal{O}$, $\lambda \in \mathbb{C}$,*

$$\begin{array}{rcl} (A + \lambda B)^* & = & A + \bar{\lambda} B \\ (AB)^* & = & BA; \end{array}$$

(iii) *ogni elemento B, per cui esista $A \in \mathcal{A}$ talché $B = A^* A$, si dice positivo e gli stati fisici su $\mathcal{O}$ si estendono per linearità su $\mathcal{A}$ in modo che*

$$\begin{array}{rcl} \omega\left(A^* A\right) & \geq & 0 \\ \left\|A^* A\right\| & = & \left\|A^*\right\| \left\|A\right\| \end{array}$$

Come si vede $\mathcal{A}$ è una C^*-algebra con identità, $\mathbb{I}$, ed $\mathcal{O}$ coincide con l'insieme dei suoi elementi autoaggiunti. Notiamo

$$\omega\left((\lambda A + \mathbb{I})^* (\lambda A + \mathbb{I})\right) \geq 0$$

per cui

$$|\lambda|^2 \omega\left(A^* A\right) + \bar{\lambda}\omega\left(A^*\right) + \lambda\omega\left(A\right) + 1 \in \mathbb{R}$$

sicché

$$\bar{\lambda}\omega\left(A^*\right) + \lambda\omega\left(A\right) = \lambda\overline{\omega\left(A^*\right)} + \bar{\lambda}\overline{\omega\left(A\right)}$$

per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, cioè

$$\begin{array}{rcl} \omega\left(A\right) + \omega\left(A^*\right) & = & \overline{\omega\left(A\right)} + \overline{\omega\left(A^*\right)} \\ \omega\left(A\right) - \omega\left(A^*\right) & = & -\overline{\omega\left(A\right)} + \overline{\omega\left(A^*\right)} \end{array}$$

infine,

$$\omega\left(A\right) = \overline{\omega\left(A^*\right)}$$

Quest'ultima equazione implica

$$\left\|A\right\| = \left\|A^*\right\|.$$

Conclusioni Tutti i ragionamenti svolti, confortati dalla discussione del caso classico, indicano (ma non dimostrano niente!) che un sistema fisico può essere descritto come una C^*-algebra dotata di identità, nella quale le osservabili sono gli elementi autoaggiunti. Gli stati fisici sono funzionali lineari, positivi e normalizzati sulla C^*-algebra (non è detto che tutti i funzionali con queste proprietà siano stati fisici), tali da separare gli elementi della C^*-algebra stessa.

V.2 C^*-algebre

Vista la discussione della precedente sezione, ci dedichiamo adesso a un rapido studio delle C^*-algebre. Come anticipato, non saremo completi nella trattazione, ma vedremo solo i fatti più importanti e la cui dimostrazione non ci costringa ad introdurre strumenti matematici più avanzati di quelli che abbiamo a disposizione.

V.2.1 Richiami sulla definizione di C^*-algebra

Abbiamo già introdotto le C^*-algebre nel corso del terzo capitolo del primo volume; per comodità del lettore, riportiamo le definizione date allora

Definizione V.1 *Un'***algebra** *$\mathcal{A}$ è uno spazio vettoriale sul quale è definita la mappa prodotto $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ che gode delle seguenti proprietà*

$$A\left(B + C\right) = AB + AC;\; A\left(BC\right) = \left(AB\right)C;\; A\left(\alpha B\right) = \alpha AB$$

se $A, B, C \in \mathcal{A}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. L'algebra è dotata di una identità se esiste $\mathbb{I} \in \mathcal{A}$ tale che

$$A\mathbb{I} = \mathbb{I}A, \ \forall A \in \mathcal{A};$$

se vale la proprietà commutativa rispetto al prodotto $\mathcal{A}$ si dice commutativa o abeliana.

Lavorando sui complessi vi è un'altra operazione da assiomatizzare

Definizione V.2 *Una* ***-algebra** *è un'algebra sulla quale sia definita la mappa $^* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ tale che*

$$(AB)^* = B^*A^*; \ (A+B)^* = A^* + B^*; \ (\alpha A)^* = \bar{\alpha}A^*; \ A^{**} = A$$

per ogni $A, B \in \mathcal{A}$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

Definizione V.3 *Una* C^***-algebra** *è una *-algebra che sia uno spazio di Banach la cui norma sia tale che*

(i) $\|AB\| \le \|A\| \|B\|$;

(ii) $\|A^*A\| = \|A\|^2$ *(condizione C^*).*

Notiamo subito che la condizione C^* implica

$$\|A\| = \|A^*\| \, ,$$

infatti,

$$\|A\|^2 = \|A^*A\| \le \|A^*\| \|A\|$$

da cui $\|A\| \le \|A^*\|$ e $\|A^*\| \le \|A^{**}\| = \|A\|$. Infine, la tesi.
Se la C^*-algebra ammette identità, essa è autoaggiunta:

$$\mathbb{I}\mathbb{I}^* = \mathbb{I}^*\mathbb{I} = \mathbb{I}^*$$

aggiuntando

$$\mathbb{I}\mathbb{I}^* = \mathbb{I}^*\mathbb{I} = \mathbb{I}$$

sicché $\mathbb{I}^* = \mathbb{I}$. Inoltre,

$$\|A\| = \|A\mathbb{I}\| \le \|A\| \|\mathbb{I}\|$$

di modo che $\|\mathbb{I}\| \ge 1$. Ridefinendo la norma è sempre possibile richiedere che $\|\mathbb{I}\| = 1$ ed è quello che conveniamo di fare d'ora in avanti.

Elementi normali Un elemento della C^*-algebra si dice **normale** se commuta con il suo aggiunto, in questo caso

$$\begin{aligned} \left\|A^2\right\|^2 &= \left\|A^{2*}A^2\right\| = \|A^*A^*AA\| = \|A^*AA^*A\| = \left\|(A^*A)^* A^*A\right\| \\ &= \|A^*A\|^2 = \|A\|^4 \end{aligned}$$

di modo che

$$\left\|A^2\right\| = \|A\|^2 .$$

Questo implica che per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$\left\|A^{2k}\right\| = \|A\|^{2k}$$

Dunque, fissato m, troviamo n tale che $m + n = 2^k$ e allora

$$\|A\|^m \|A\|^n = \left\|A^{m+n}\right\| \le \|A^m\| \|A^n\| \le \|A^m\| \|A\|^n \le \|A\|^m \|A\|^n$$

perciò

$$\|A\|^m \|A\|^n = \|A^m\| \|A\|^n$$

cioè, per ogni $m \in \mathbb{N}$,

$$\|A\|^m = \|A^m\| .$$

Spettro di una C^*-algebra Dato $A \in \mathcal{A}$, C^*-algebra con identità, A si dice **invertibile** se esiste $B \in \mathcal{A}$ tale che $AB = BA = \mathbb{I}$, in questo caso B si dice **inverso** di A e si denota con B^{-1}.

Dalla $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{I}$, otteniamo $\left(A^{-1}\right)^* A^* = A^* \left(A^{-1}\right)^* = \mathbb{I}$, cioè

$$\left(A^{-1}\right)^* = \left(A^*\right)^{-1}.$$

Detto questo, poniamo la seguente

Definizione V.4 *Sia $\mathcal{A}$ un'algebra di Banach con identità. Sia $A \in \mathcal{A}$. Si definisce* **spettro** *di A l'insieme $\sigma(A)$ dei numeri complessi λ per cui $\lambda\mathbb{I} - A$ non è invertibile. Il complementare $\rho(A)$ di $\sigma(A)$ si dice* **risolvente** *di A.*

Come nel caso degli operatori limitati su uno spazio di Hilbert, il risolvente è un insieme aperto. Infatti, sia $\lambda \in \rho(A)$ e consideriamo $\zeta \in \mathbb{C}$. La serie

$$(\lambda - A)^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \zeta^n (\lambda - A)^{-n}$$

converge per

$$|\zeta| \, \|\lambda - A\|^{-1} < 1$$

e converge a $(\lambda - \zeta - A)^{-1}$ come si verifica subito. Ne viene che $\rho(A)$ è un insieme aperto, sicché $\sigma(A)$ è chiuso.
Consideriamo adesso la funzione $\lambda \mapsto R_A(\lambda) = (\lambda - A)^{-1}$. Come si è visto essa è analitica su $\rho(A)$. Perciò un punto appartiene allo spettro se e solo se è una singolarità per $R_A(\lambda)$. D'altra parte,

$$R_A(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^n}$$

fino alla prima singolarità a partire dall'infinito complesso. D'altra parte, per ogni $|\lambda| > r$ il secondo membro è analatico, dove, dal criterio di Hadamard,

$$r = \limsup_{n \to +\infty} \|A^n\|^{1/n}.$$

Dunque,

$$\sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| \leq r.$$

Viceversa, esiste un qualche $\lambda = r$, per il quale il secondo membro non converge, perciò λ è una singolarità e

$$\sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| \geq r,$$

infine

$$\sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| = r$$

cioè,

Proposizione V.5 *Sia $\mathcal{A}$ un'algebra di Banach e sia $A \in \mathcal{A}$. Allora $\sigma(A)$ è un insieme compatto non vuoto in $\mathbb{C}$ tale che*

$$\sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| = \limsup_{n \to +\infty} \|A^n\|^{1/n} \leq \|A\|.$$

Se $\mathcal{A}$ è una C^*-algebra e A è normale, allora vale l'eguaglianza.

V.2.2 C^*-algebre abeliane

Funzionali moltiplicativi

In questa sottosezione vogliamo dimostrare il teorema di Gel'fand-Naimark sulla caratterizzazione delle C^*-algebre commutative. Abbiamo già usato e commentato il teorema nel parlare della descrizione matematica dei sistemi classici.

Definizione V.5 *Un funzionale* **moltiplicativo** *m su una algebra di Banach abeliana è un funzionale lineare* *tale che*

$$m(AB) = m(A)\, m(B).$$

Chiaramente $m(\mathbb{I}) = 1$ se $m \neq 0$.

Ideali di un'algebra In quanto segue è importante la nozione di ideale che richiamiamo brevemente

Definizione V.6 *Una varietà lineare J di un'algebra $\mathcal{A}$ si dice* **ideale sinistro** *(risp.* **destro***), se è stabile sotto moltiplicazione a sinistra (risp. a destra) di qualsiasi elemento di $\mathcal{A}$. J si dice* **proprio** *se non coincide con $\mathcal{A}$. J si dice* **massimale** *se non è propriamente contenuto in nessun ideale proprio.*

Per le algebre abeliane, gli ideali destri e sinistri coincidono e si dicono semplicemente ideali. Se $\mathcal{A}$ ammette identità, un ideale è proprio se e solo se non contiene $\mathbb{I}$.
Se l'algebra è di Banach, possiamo considerare la chiusura di J, J^a. Se J è un ideale proprio, allora anche J^a è un ideale proprio. Infatti, se $\mathbb{I} \in J^a$, allora esisterebbe $A \in J$ di modo che $\|\mathbb{I} - A\| < 1$, perciò

$$A = \mathbb{I} - (\mathbb{I} - A)$$

sarebbe invertibile (passando alla serie di potenze), $A^{-1}A = \mathbb{I}$, di modo che $\mathbb{I} \in J$.

Proposizione V.6 *Un ideale è proprio se e solo se non contiene l'identità.*

Proposizione V.7 *In un'algebra di Banach, la chiusura di un ideale proprio è ancora un ideale proprio.*

Corollario V.1 *Un ideale massimale proprio di un'algebra di Banach è chiuso.*

Proposizione V.8 *Ogni ideale proprio è contenuto in un ideale massimale proprio.*

Dimostrazione Consideriamo l'insieme di tutti gli ideali propri che contengono J. Quest'insieme è parzialmente ordinato rispetto a $\subset$. Presa una catena $\{J_\alpha\}$ in questo insieme, essa ammette come confine superiore

$$\tilde{J} = \bigcup_\alpha J_\alpha,$$

La cosa discende dal fatto che $\tilde{J}$ non contiene l'identità, altrimenti essa apparterebbe a qualche J_α; $\tilde{J}$ è stabile sotto moltiplicazione, e presi A e B in $\tilde{J}$ essi appartengono entrambi a qualche J_α, perciò $A + \lambda B \in J_\alpha \subset \tilde{J}$. Per il lemma di Zorn, esiste allora un ideale proprio contenente J che non è contenuto in nessun altro ideale, tale ideale è l'ideale massimale proprio che stavamo cercando.

(c.v.d.)

Teorema V.1 *In un'algebra di Banach abeliana $\mathcal{A}$, esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme $\Sigma(\mathcal{A})$ dei funzionali moltiplicativi e l'insieme degli ideali massimali propri.*
Inoltre, dato $A \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \sigma(A)$ se e solo se esiste $m \in \Sigma(\mathcal{A})$ talché $m(A) = \lambda$.

Dimostrazione Ogni $m \in \Sigma(\mathcal{A})$ definisce un ideale proprio

$$K = \ker m.$$

Il fatto che K è un ideale è ovvio: $A \in K$, allora $m(BA) = m(B)\, m(A) = 0$, perciò $BA \in K$, inoltre K è una varietà lineare, come kernel di una applicazione lineare.

Consideriamo ora $\mathcal{A}/K$ (i.e. l'insieme delle classi di equivalenza della relazione $A \equiv B$ se e solo se $A - B \in K$, se e solo se $m(A) = m(B)$). Su tale spazio lineare è possibile introdurre il prodotto

$$[A]\,[B] = [AB]$$

infatti, se $C \equiv A$ e $D \equiv B$, allora $CD \equiv AB$ poiché

$$m(CD - AB) = m(C)\, m(D) - m(A)\, m(B) = 0.$$

Consideriamo l'omomorfismo di algebre $m : \mathcal{A}/K \to \mathbb{C}$ dato da $[A] \mapsto m([A]) = m(A)$ (banalmente ben definito). Tale omomorfismo è, in realtà, un isomorfismo, infatti

$$m([A]) = m([B])$$

implica $A \equiv B$, cioè $[A] = [B]$. Ma $\mathbb{C}$ è un corpo e come tale non contiene ideali massimali propri. La stessa cosa vale allora per $\mathcal{A}/K$. Ne viene che non esiste alcun ideale massimale proprio I contenente K, altrimenti I/K sarebbe un ideale massimale di $\mathcal{A}/K$.

Viceversa, sia K un ideale massimale proprio di $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}/K$ è uno spazio di Banach, dal momento che K è chiuso. Perciò $\mathcal{A}/K$ è un'algebra di Banach. Poiché K è massimale, $\mathcal{A}/K$ non contiene ideali massimali propri, altrimenti la loro immagine inversa in $\mathcal{A}$ sarebbe un ideale massimale proprio contenente K.

Questo mostra che $\mathcal{A}/K$ è un campo. Infatti, un elemento di un'algebra di Banach abeliana è invertibile se e solo se non appartiene ad alcun ideale proprio (poiché se $A \in J$, ideale proprio, ed esiste A^{-1} allora $A^{-1}A = \mathbb{I} \in J$ e J non può essere proprio; viceversa, se A non è invertibile, allora appartiene all'ideale $\mathcal{A}A$ che non contiene l'identità e perciò è proprio).

Vediamo che $\mathcal{A}/K$ è isomorfo a $\mathbb{C}$. Dato $[A]$, prendiamo $\lambda \in \sigma(A)$, allora $\lambda\mathbb{I} - A$ non è invertibile e dunque $\lambda[\mathbb{I}] - [A]$, non essendo invertibile, è nullo. In definitiva, abbiamo $[A] \mapsto \lambda$ di modo che $[A] = \lambda[\mathbb{I}]$, che è chiaramente un isomorfismo.

Così facendo abbiamo costruito un omomorfismo

$$m : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/K \to \mathbb{C}$$

che è un funzionale moltiplicativo avente come kernel K. Se m' è un secondo funzionale avente come kernel K, per quanto visto prima, m' induce un nuovo isomorfismo tra $\mathcal{A}/K$ e $\mathbb{C}$, allora

$$m([A]) = \alpha m'([A])$$

da cui, calcolando il tutto su $[\mathbb{I}]$, otteniamo $\alpha = 1$. Infine, $m = m'$. La prima parte è dimostrata.

Infine, veniamo alla seconda parte. Se $\lambda \in \sigma(A)$, allora $\lambda\mathbb{I} - A$ è non invertibile, perciò appartiene all'ideale proprio $I \equiv \mathcal{A}(\lambda\mathbb{I} - A)$. Sia J l'ideale massimale proprio contenente I e m_J il corrispondente funzionale moltiplicativo. Allora $\ker m_J = J \supset I$, di modo che

$$m_J(\lambda\mathbb{I} - A) = 0 \Longrightarrow m_J(A) = \lambda.$$

Viceversa, se $\lambda\mathbb{I} - A$ è invertibile, per ogni $m \in \Sigma(\mathcal{A})$, $m(\lambda\mathbb{I} - A) \neq 0$, di modo che per ogni
(c.v.d.) m, $\lambda \neq m(A)$.

In base alla relazione stabilita dal teorema tra spettro di $A \in \mathcal{A}$ e $\Sigma(\mathcal{A})$, $\Sigma(\mathcal{A})$ si definisce **spettro (di Gel'fand)** dell'algebra $\mathcal{A}$.
Dal teorema, abbiamo che esiste una corrispondenza tra gli elementi di $\Sigma(\mathcal{A})$ e i punti di $\sigma(A)$ data da

$$m \mapsto m(A)$$

Tale corrispondenza è suriettiva, dal momento che se $\lambda \in \sigma(A)$, allora esiste $m_\lambda \in \Sigma(\mathcal{A})$ di modo che $m_\lambda(A) = \lambda$. Tra un attimo torneremo ad approfondire la questione.
Poiché $m(A) \in \sigma(A)$, abbiamo

$$|m(A)| \leq \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| \leq \|A\|$$

di modo che i funzionali moltiplicativi sono continui e hanno norma 1 (infatti, $1 = |m(\mathbb{I})| \leq \|m\|$). Dunque,

Proposizione V.9 *In una C^*-algebra abeliana i funzionali moltiplicativi sono limitati.*

Proposizione V.10 *Se $\mathcal{A}$ è una C^*-algebra (con identità), allora ogni funzionale limitato normalizzato ω su $\mathcal{A}$ avente norma unitaria soddisfa*

$$\omega(A^*) = \overline{\omega(A)}.$$

Dimostrazione

Cominciamo col vedere che se A è autoaggiunto, allora $\omega(A) \in \mathbb{R}$. Sia $\omega(A) \equiv a + ib$, allora per ogni $c \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 + 2bc &= |b+c|^2 \leq |a + i(b+c)|^2 = |\omega(A + ic\mathbb{I})|^2 \leq \|A + ic\mathbb{I}\|^2 = \\ &= \|(A + ic\mathbb{I})(A - ic\mathbb{I})\| = \left\|A^2 + c^2\mathbb{I}\right\| \leq \left\|A^2\right\| + c^2 \end{aligned}$$

da cui la diseguaglianza è soddisfatta per ogni c se e solo se $b = 0$.

Dato un generico $A \in \mathcal{A}$ esso si scrive come combinazione di autoaggiunti,

$$A = \frac{A + A^*}{2} - i\left(\frac{iA - iA^*}{2}\right)$$

(c.v.d.) da cui, per linearità, la tesi.

La tesi della proposizione vale in particolare per i funzionali moltiplicativi, dal momento che essi sono normalizzati e hanno norma 1. Dalla proposizione discende pure che essi sono positivi. Consideriamo ora $\mathcal{A}_A$ la sottoalgebra di $\mathcal{A}$ ottenuta chiudendo in norma lo spazio generato dai polinomi in A, A^*. Consideriamo adesso i funzionali moltiplicativi ristretti ad $\mathcal{A}_A$. La corrispondenza tra questi e lo spettro di A viene a essere iniettiva. Infatti, se $m_1(A) = m_2(A)$, allora $m_1(A^*) = m_2(A^*)$, i due funzionali coincidono sui polinomi in A, A^*, dunque, visto che sono continui, coincidono sull'intera $\mathcal{A}_A$, perciò, ristretti ad $\mathcal{A}_A$, coincidono.
Quindi, se $\mathcal{A}$ è proprio generata da A, A^*, la corrispondenza tra $\Sigma(\mathcal{A})$ e $\sigma(A)$ è biunivoca e i due spazi possono essere identificati.
Più in generale, se $\mathcal{A}$ è generata dagli elementi algebricamente indipendenti

$$A_1,\, A_1^*, \ldots,\, A_n,\, A_n^*$$

allora esiste una corrispondenza biunivoca tra $\Sigma(\mathcal{A})$ e il prodotto cartesiano degli spettri $\sigma(A_i)$.
In conclusione dimostriamo (la dimostrazione non è completa, perché manca la discussione del teorema di Alaoglu) – come promesso – il teorema di Gel'fand-Naimark sulle C^*-algebre abeliane

Teorema V.2 (isomorfismo di Gel'fand) *Una C^*-algebra abeliana con identità $\mathcal{A}$ è isometricamente isomorfa alla C^*-algebra delle funzioni continue su uno spazio topologico compatto di Hausdorff, che coincide con lo spettro di Gel'fand di $\mathcal{A}$ dotato della sua *-topologia debole.*

Traccia della dimostrazione Per dualità, ogni elemento $A \in \mathcal{A}$ definisce una funzione $\tilde{A}$ su $\Sigma(\mathcal{A})$, data da

$$\tilde{A}(m) = m(A)$$

e chiaramente

$$\begin{aligned} \left(\tilde{A} + \tilde{B}\right)(m) &= \tilde{A}(m) + \tilde{B}(m) \\ \mu\tilde{A}(m) &= \widetilde{\mu A}(m) \\ \left(\tilde{A}\tilde{B}\right)(m) &= \widetilde{AB}(m) = \tilde{A}(m)\,\tilde{B}(m) \\ \overline{\tilde{A}(m)} &= \widetilde{A^*}(m) = \left(\tilde{A}\right)^*(m) \end{aligned}$$

di modo che le funzioni $\tilde{A}$ formano una *-algebra abeliana $\widetilde{\mathcal{A}}$. D'altra parte, ogni $m \in \Sigma(\mathcal{A})$, $m(A) \in \sigma(A)$ e per ogni punto di $\sigma(A)$ esiste un funzionale che lo riproduce calcolato su A, perciò

$$\left\|\tilde{A}\right\|_\infty \equiv \sup_{m \in \Sigma(\mathcal{A})} \left|\tilde{A}(m)\right| = \sup_{m \in \Sigma(\mathcal{A})} |m(A)| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| = \|A\|$$

(si rammenti che l'algebra è abeliana, perciò tutti i suoi elementi sono normali). Quindi $\mathcal{A}$ è isometricamente isomorfo a $\widetilde{\mathcal{A}}$.
Si tratta ora di vedere che $\Sigma(\mathcal{A})$ è compatto e che $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{C}(\Sigma(\mathcal{A}))$. A questo proposito, notiamo che $\Sigma(\mathcal{A})$ è un sottoinsieme chiuso della palla unitaria chiusa $\mathcal{B}$ del duale topologico $\mathcal{A}^*$ di $\mathcal{A}$. Infatti,

(i) ogni funzionale moltiplicativo è continuo e ha norma unitaria, perciò appartiene a $\mathcal{B}$;

(ii) rispetto alla *-topologia debole[5] $\mathcal{A}^*$ è uno spazio topologico di Hausdorff e $\mathcal{B}$ è un insieme compatto come discende dal teorema di Alaoglu-Banach. La topologia indotta su $\Sigma(\mathcal{A})$, detta topologia di Gel'fand, rende – ovviamente – lo spazio $\Sigma(\mathcal{A})$ di Hausdorff e le funzioni $\tilde{A}(m)$ continue.

(iii) rimane da vedere che $\Sigma(\mathcal{A})$ è *-chiuso debolmente in $\mathcal{B}$. Data $m_\alpha \in \Sigma(\mathcal{A})$ convergente, essa converge a un elemento l di $\mathcal{B}$, ma, essendo

$$m_\alpha(AB) = m_\alpha(A)\, m_\alpha(B),$$

si conclude

$$l(AB) = l(A)\, l(B),$$

perciò $l \in \Sigma(\mathcal{A})$.

Infine, poiché per definizione $\widetilde{\mathcal{A}}$ separa i punti di $\Sigma(\mathcal{A})$ ed è chiuso ($\left\|\tilde{A}\right\|_\infty = \|A\|$), dal teorema di Stone-Weierstraß si conclude che $\widetilde{\mathcal{A}}$ coincide con $\mathcal{C}(\Sigma(\mathcal{A}))$. **(c.v.d.)**

V.2.3 Spettro e stati

In questa sottosezione ci occupiamo della relazione che corre tra gli stati di una C^*-algebra e lo spettro dei suoi elementi normali. Ricordiamo che gli stati di una C^*-algebra sono i suoi funzionali positivi normalizzati.

Cominciamo col notare che $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$. La cosa discende dal fatto che $\lambda \in \rho(A)$ se e solo se $\bar{\lambda} \in \rho(A^*)$, come si vede aggiuntando $(\lambda\mathbb{I} - A)^{-1}(\lambda\mathbb{I} - A) = \mathbb{I}$.

Calcolo funzionale Consideriamo adesso un polinomio P in A. Poiché

$$\lambda\mathbb{I} - P(A) = \alpha \prod_i (\lambda_i \mathbb{I} - A)$$

abbiamo che $\lambda \in \sigma(P(A))$ se e solo se $(\lambda\mathbb{I} - P(A))^{-1}$ non esiste[6], se e solo se qualche $\lambda_i \in \sigma(A)$, ma allora per qualche λ_i deve essere $\lambda = P(\lambda_i) \in \sigma(A)$, se e solo se $\lambda \in P(\sigma(A))$. In definitiva, per ogni polinomio vale

$$\sigma(P(A)) = P(\sigma(A)).$$

Questo risultato era stato ottenuto pure nel caso in cui si consideravano operatori limitati su spazi di Hilbert. In questo caso $\mathcal{A} = L(\mathcal{H})$. Sia A autoaggiunto. Come per gli operatori in $L(\mathcal{H})$, la condizione C^* consente di scrivere

$$\|P(A)\|^2 = \|P^*(A)\, P(A)\| = \left\|\bar{P}P(A)\right\| = \sup_{\lambda \in \sigma\left(\bar{P}P(A)\right)} |\lambda|$$

ma $\lambda \in \sigma\left(\bar{P}P(A)\right)$ se e solo se esiste $\mu \in \sigma(A)$ talché $\lambda = \bar{P}P(\mu)$, dunque

$$\|P(A)\|^2 = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} \left|\bar{P}P(\lambda)\right| = \left(\sup_{\lambda \in \sigma(A)} |P(\lambda)|\right)^2$$

Quindi,

$$\|P(A)\| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |P(\lambda)|.$$

Quanto visto consente di stabilire – esattamente come nel caso operatoriale – il calcolo funzionale. Infatti, chiudendo in norma lo spazio generato dai $P(A)$ si ottiene il solito isomorfismo tra $\mathcal{C}(\sigma(A))$ e la C^*-algebra generata da A. Tra qualche paragrafo ricostruiremo il calcolo funzionale – direttamente per gli elementi normali – attraverso l'isomorfismo di

---

[5] la nozione di convergenza per le successioni è la seguente: $m_\alpha \to l$ se e solo se per ogni $A \in \mathcal{A}$, $m_\alpha(A) \to l(A)$ in $\mathbb{C}$.

[6] Dati A_1 e A_2 commutanti, se sono invertibili, tale è A_1A_2. Viceversa, se esiste B tale che $A_1A_2B = BA_1A_2 = \mathbb{I}$, allora $A_{1,2}$ sono invertibili. Infatti, $A_1(A_2B) = \mathbb{I}$, poi $A_2BA_1A_2 = A_2$ da cui $(A_2B)A_1A_2A_1B = A_2A_1B$, infine, $(A_2B)A_1 = \mathbb{I}$.

Gel'fand. Questo è possibile, proprio perché la C^*-algebra generata da un elemento normale è abeliana.

Spettro di elementi autoaggiunti Vediamo adesso che lo spettro di un elemento autoaggiunto di $\mathcal{A}$ è reale. $\alpha + i\beta \in \sigma(A)$ se e solo se $\alpha + i(\beta + \lambda) \in \sigma(A + i\lambda)$. Dunque, per ogni λ

$$\begin{aligned} \alpha^2 + (\beta + \lambda)^2 &\leq \|A + i\lambda\|^2 = \left\|A^*A + \lambda^2\right\| \leq \|A\|^2 + \lambda^2, \\ \alpha^2 + \beta^2 - \|A\|^2 + 2\beta\lambda &\leq 0 \end{aligned}$$

da cui deve essere $\beta = 0$.

Proposizione V.11 *Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due C^*-algebre e sia $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, allora per ogni $A \in \mathcal{A}$, l'insieme $\sigma_{\mathcal{A}}(A)$ dei punti $\lambda \in \mathbb{C}$ tali che $\lambda\mathbb{I} - A$ non ammette inversa in $\mathcal{A}$, coincide con lo spettro di A in $\mathcal{B}$.*

Dimostrazione Chiaramente $\sigma(A) \subset \sigma_{\mathcal{A}}(A)$. Vediamo l'inverso. Sia A autoaggiunto. Sia $\lambda \in \rho(A)$. Poiché lo spettro di A è sull'asse reale, riusciamo a raggiungere λ con un cammino continuo contenuto in $\rho(A)$ a partire da $2i\|A\|$ o da $-2i\|A\|$. Ma negli intorni di questi punti $\mu \mapsto R_A(\mu)$ è una serie a valori in $\mathcal{A}$, perciò $R_A(\mu) \in \mathcal{A}$. Partendo da uno degli intorni e prolungando per analiticità, otteniamo $R_A(\lambda) \in \mathcal{A}$. Dunque, $\lambda \in \sigma^c_{\mathcal{A}}(A)$.

Il ragionamento si estende a A qualsiasi. Infatti, sia $\lambda \in \rho(A)$, allora $B = \lambda\mathbb{I} - A$ è invertibile in $\mathcal{B}$. Ora, anche B^* risulta invertibile e così pure l'elemento autoaggiunto B^*B. Per quanto visto sopra, $(B^*B)^{-1} \in \mathcal{A}$, ma $B^{-1} = (B^*B)^{-1} B^*$, visto che $B \in \mathcal{A}$, $B^* \in \mathcal{A}$, e, per quanto detto, $B^{-1} \in \mathcal{A}$. Infine, $\lambda \in \sigma^c_{\mathcal{A}}(A)$.

(c.v.d.)

Calcolo funzionale ed isomorfismo di Gel'fand Data una C^*-algebra $\mathcal{A}$, consideriamo la C^*-algebra $\mathcal{A}_A$ generata dall'elemento normale $A \in \mathcal{A}$ (come detto più volte, la sottoalgebra ottenuta chiudendo in norma lo spazio dei polinomi in A e A^*). Poiché A è normale, $\mathcal{A}_A$ è una C^*-algebra abeliana il cui spettro di Gel'fand corrisponde biunivocamente allo spettro di A (la biiezione $m \mapsto m(A)$ è continua, visto che sullo spettro di Gel'fand si usa la *-topologia debole). Dunque, fissata una funzione f su $\sigma(A)$, tramite l'inversa dell'isomorfismo di Gel'fand ($A \mapsto \tilde{A}$, trasformata di Gel'fand) otteniamo un elemento $F \in \mathcal{A}_A$ (talché $\tilde{F} = f$). In altri termini, l'isomorfismo di Gel'fand, consente di costruire il calcolo funzionale su A, ponendo $f(A) \equiv F$. Si noti che

$$\sigma_{\mathcal{A}_A}(F) = \{m(F) \,|m \in \Sigma(\mathcal{A}_A)\} = \left\{\tilde{F}(m) \,|m \in \Sigma(\mathcal{A}_A)\right\} = \{f(\lambda) \,|\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}_A}(A)\}$$

dalla proposizione precedente

$$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A)).$$

Teorema V.3 (calcolo funzionale) *Sia A un elemento normale di una C^*-algebra $\mathcal{A}$. Allora la C^*-algebra abeliana generata da A è isometricamente isomorfa all'insieme delle funzioni continue su $\sigma(A)$. Data $f \in \mathcal{C}(\sigma(A))$, si definisce*

$$F \equiv f(A)$$

quell'operatore la cui trasformata di Gel'fand è pari a f. Inoltre, vale il teorema della mappa spettrale, cioè

$$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A)),$$

o, equivalentemente, se $F \in \mathcal{A}_A$

$$\sigma(F) = \tilde{F}(\sigma(A))$$

Calcolo funzionale per elementi autoaggiunti Se A è autoaggiunto, il calcolo funzionale costruito in precedenza in modo *artigianale*, cioè senza far uso del teorema di Gel'fand, è esattamente lo stesso di quello descritto nel teorema (e del resto avevamo visto come valesse un risultato di unicità). Il punto è far vedere che se P è un polinomio su $\sigma(A)$, allora $P(A)$ ha come trasformata di Gel'fand proprio P (allora i due calcoli funzionali coinciderebbero sui polinomi e dunque ovunque, essendo essi densi nella C^*-algebra generata da A). Si tratta dunque di vedere che

$$\widetilde{P(A)}(m) = P(m(A))$$

il ché è ovvio,

$$\widetilde{P(A)}(m) = m(P(A)) = m\left(\sum_{n=0}^{N} a_n A^n\right) = \sum_{n=0}^{N} a_n m^n(A) = P(m(A)).$$

Elementi positivi L'analisi spettrale finora presentata consente di studiare meglio gli elementi positivi di una C^*-algebra, i.e. quelli eguali a B^*B per qualche $B \in \mathcal{A}$.
Notiamo che se $\sigma(A) \subset \mathbb{R}^+$, la qual cosa si verifica se e solo se $\tilde{A} \geq 0$, allora è ben definita e continua sullo spettro la funzione $\tilde{A}^{1/2}$. Se denotiamo con $A^{1/2}$ la sua antitrasformata di Gel'fand, otteniamo

$$A = A^{1/2}A^{1/2}$$

visto che la stessa relazione vale per le trasformate.
Sempre dal teorema del calcolo funzionale continuo, ogni operatore autoaggiunto A ammette la decomposizione $A = A_+ - A_-$ con $A_\pm$ aventi spettro sull'asse reale positivo e tali che $A_+A_- = 0$ come discende dal fatto che

$$\tilde{A} = \tilde{A}_+ - \tilde{A}_-, \ \tilde{A}_\pm \geq 0, \ \tilde{A}_+\tilde{A}_- = 0.$$

Veniamo a una caratterizzazione degli elementi positivi di $\mathcal{A}$. L'insieme degli operatori positivi sarà denotato con $\mathcal{A}_+$.

Lemma V.1 *Se $\mathcal{A}$ è una C^*-algebra con identità, $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, allora*

$$\sigma(A_1A_2) \setminus \{0\} = \sigma(A_2A_1) \setminus \{0\}.$$

Se A_1 e A_2 sono autoaggiunti e hanno spettro sul semiasse reale positivo, anche $A_1 + A_2$ ha spettro sul semiasse reale positivo.

Dimostrazione Sia $\lambda \neq 0$ nel risolvente di A_1A_2, cioè esista

$$R \equiv (\lambda\mathbb{I} - A_1A_2)^{-1} \in \mathcal{A}$$

Allora

$$\begin{aligned}
(\mathbb{I} + A_2RA_1)(\lambda\mathbb{I} - A_2A_1) &= \lambda\mathbb{I} - A_2A_1 + \lambda A_2RA_1 - A_2RA_1A_2A_1 = \\
&= \lambda\mathbb{I} - A_2A_1 + A_2R(\lambda\mathbb{I} - A_1A_2)A_1 = \\
&= \lambda\mathbb{I} - A_2A_1 + A_2A_1 = \lambda\mathbb{I}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(\lambda\mathbb{I} - A_2A_1)(\mathbb{I} + A_2RA_1) &= \lambda\mathbb{I} + \lambda A_2RA_1 - A_2A_1 - A_2A_1A_2RA_1 = \\
&= \lambda\mathbb{I} + A_2(\lambda\mathbb{I} - A_1A_2)RA_1 - A_2A_1 = \\
&= \lambda\mathbb{I} + A_2A_1 - A_2A_1 = \lambda\mathbb{I},
\end{aligned}$$

infine, $\lambda \in \rho(A_2A_1)$. Per simmetria, si ha la tesi.

Veniamo alla seconda parte. Se B è autoaggiunto, esso ha spettro positivo, se e solo se per ogni $\lambda > 0$, $\sigma(\lambda B)$ ha spettro positivo. Scegliamo $\lambda > 0$ di modo che $\|\lambda A_i\| \leq 1$, $i \in J_2$, se mostreremo che $\lambda(A_1 + A_2)$ ha spettro positivo, poiché λ è positivo, avremo che pure $A_1 + A_2$ ha spettro positivo. Perciò fissiamo direttamente $\|A_i\| \leq 1$.

Allora $\sigma(A_i) \subset [0,1]$ e $\sigma(\mathbb{I} - A_i) \subset [0,1]$. Posto $T_i = \mathbb{I} - A_i$, abbiamo

$$\left\|\mathbb{I} - \frac{A_1 + A_2}{2}\right\| = \left\|\frac{T_1 + T_2}{2}\right\| \leq \frac{1}{2}(\|\mathbb{I} - A_1\| + \|\mathbb{I} - A_2\|) \leq 1$$

sicché

$$\sigma\left(\mathbb{I} - \frac{A_1 + A_2}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2}\sigma(A_1 + A_2) \subset [-1, 1]$$

cioè

(c.v.d.)

$$\sigma(A_1 + A_2) \subset [0, 4].$$

Teorema V.4 *$\mathcal{A}_+$, insieme degli elementi positivi di una C^*-algebra con identità $\mathcal{A}$, coincide con l'insieme degli elementi autoaggiunti di A che hanno spettro non negativo.*

Dimostrazione Se A è autoaggiunto e ha spettro non negativo, allora possiamo definirne la radice tramite il calcolo funzionale. In altre parole, otteniamo $A = B^2$ con $B = B^*$, perciò $A \in \mathcal{A}_+$. Ci interessa vedere l'inclusione inversa.

Sia $A = C^*C$. Preso $a_\pm^2 = A_\pm$, abbiamo $a_+a_- = 0$

$$A = a_+^2 - a_-^2.$$

Supponiamo per assurdo che sia $a_- \neq 0$. Consideriamo $B \equiv Ca_- \neq 0$. Abbiamo

$$B^*B = a_-Aa_- = -a_-^4,$$

perciò

$$\sigma\left(B^*B\right) \subset \mathbb{R}^- \cup \{0\}.$$

Dal lemma precedente

$$\sigma\left(BB^*\right) \subset \mathbb{R}^- \cup \{0\},$$

da cui, sempre usando il lemma precedente

$$\sigma\left(B^*B + BB^*\right) \subset \mathbb{R}^- \cup \{0\}.$$

D'altra parte, posto $B = a_1 + ia_2$ con $a_i = a_i^*$, si vede subito che

$$BB^* + B^*B = 2a_1^2 + 2a_2^2$$

perciò, dal lemma precedente, $\sigma\left(BB^* + B^*B\right) \subset \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Ne segue che $\sigma\left(BB^* + B^*B\right) = \{0\}$, da cui $a_1^2 + a_2^2 = 0$, cioè $a_1^2 = -a_2^2$. Questo significa che lo spettro di a_i^2 è ridotto al solo 0, cioè $a_i^2 = 0$. Ma a_i è autoaggiunto, perciò ha – esso stesso – spettro ridotto al solo 0, da cui $B = 0$, che è l'assurdo che cercavamo. **(c.v.d.)**

Dal lemma e dal teorema segue che la somma di due elementi positivi, eventualmente moltiplicati per un numero positivo, è ancora un elemento positivo. Questo si esprime con il

Teorema V.5 *L'insieme degli elementi positivi $\mathcal{A}^+$ è un cono convesso.*

Riassumendo tutto quanto visto

Proposizione V.12 *$A \in \mathcal{A}$ è positivo se e solo se vale una delle seguenti affermazioni*

(i) *A è autoaggiunto e $\sigma(A) \subset [0, \|A\|]$;*

(ii) *$A = B^2$, $B = B^*$;*

(iii) *A è autoaggiunto e $\|\mathbb{I} - A/\|A\|\| \leq 1$;*

Dimostrazione Abbiamo già visto che A è positivo se e solo se vale (i), il quale equivale a (ii).

Vediamo che (i) implica (iii). Abbiamo

$$\sigma\left(\mathbb{I} - \frac{A}{\|A\|}\right) = 1 - \frac{\sigma(A)}{\|A\|} \subset [0, 1]$$

da cui

$$\left\|\mathbb{I} - \frac{A}{\|A\|}\right\| = \sup\left|\sigma\left(\mathbb{I} - \frac{A}{\|A\|}\right)\right| \leq 1.$$

Viceversa, (iii) implica (i). La diseguaglianza implica che

$$\sigma\left(\mathbb{I} - \frac{A}{\|A\|}\right) \subset [-1, 1]$$

da cui

$$\sigma(A) \subset [0, 2\|A\|],$$

che comporta la tesi. **(c.v.d.)**

Proposizione V.13 *Un funzionale lineare ω su una C^*-algebra con identità $\mathcal{A}$ è positivo se e solo se è limitato e $\|\omega\| = \omega(\mathbb{I})$.*

Dimostrazione Se ω è positivo, allora vale la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz,

$$|\omega(A^*A')|^2 \leq \omega(A^*A')\,\omega(A'^*A')$$

da cui, se $A' = \mathbb{I}$,

$$|\omega(A)|^2 \leq \omega(\mathbb{I})\,\omega(A^*A).$$

Ora, se B è un operatore autoaggiunto, $\|B\| - B$ ha spettro positivo, perciò per la proposizione precedente, esiste C di modo che

$$\|B\| - B = C^2$$

da cui

$$0 \leq \omega\left(C^2\right) \leq \omega(\mathbb{I})\,\|B\| - \omega(B)$$

sicché

$$\omega(B) \leq \omega(\mathbb{I})\,\|B\|$$

In particolare, posto $B = A^*A$,

$$|\omega(A)|^2 \leq \omega^2(\mathbb{I})\,\|A^*A\| = \omega^2(\mathbb{I})\,\|A\|^2.$$

Si nota pure che $\|\omega\| \leq \omega(\mathbb{I})$, d'altra parte, vale in modo ovvio la diseguaglianza inversa, infine,

$$\|\omega\| = \omega(\mathbb{I}).$$

Adesso, sia $\|\omega\| = \omega(\mathbb{I})$. Senza perdere generalità fissiamo $\omega(\mathbb{I}) = 1$, abbiamo poi

$$\left|1 - \frac{\omega(A^*A)}{\|A\|^2}\right| = \left|\omega\left(\mathbb{I} - \frac{A^*A}{\|A\|^2}\right)\right| \leq \left\|\mathbb{I} - \frac{A^*A}{\|A\|^2}\right\| \leq 1$$

da cui, essendo $\omega(A^*A)$ reale, come precedentemente dimostrato, $\omega(A^*A) \geq 0$. **(c.v.d.)**

Proposizione V.14 *Sia A un elemento normale di una C^*-algebra $\mathcal{A}$. Allora $\lambda \in \sigma(A)$ se e solo se esiste un funzionale positivo lineare ω su $\mathcal{A}$ tale che, per ogni polinomio $P(A, A^*)$, $\omega(P(A, A^*)) = P\left(\lambda, \bar{\lambda}\right)$.*

Dimostrazione Consideriamo $\mathcal{A}_A$. $\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}_A}(A)$, perciò esiste un funzionale moltiplicativo ω_A su $\mathcal{A}_A$ di modo che $\omega_A(A) = \lambda$, $\omega_A(A^*) = \bar{\lambda}$, infine, $\omega_A(P(A, A^*)) = P\left(\lambda, \bar{\lambda}\right)$. Inoltre, ω_A è positivo su $\mathcal{A}_A$ e continuo su $\mathcal{A}_A$ con $\|\omega_A\| = \omega_A(\mathbb{I}) = 1$. Poiché $\mathcal{A}_A$ è una sottoalgebra chiusa di $\mathcal{A}$, dal teorema di Hahn-Banach, ω_A ammette una estensione continua ω ad $\mathcal{A}$ con $\|\omega\| = \|\omega_A\| = \omega_A(\mathbb{I}) = 1$. Dalla proposizione precedente, ω è un funzionale positivo su $\mathcal{A}$ che coincide con ω_A su $\mathcal{A}_A$. Da cui la tesi, visto che $P(A, A^*) \in \mathcal{A}_A$.

Viceversa, se $\omega(P(A, A^*)) = P\left(\lambda, \bar{\lambda}\right)$, allora ω è moltiplicativo su $\mathcal{A}_A$, dunque $\omega(A) = \lambda \in \sigma(A)$. **(c.v.d.)**

Un conseguenza immediata di quanto visto è il seguente importante

Teorema V.6 *I funzionali lineari positivi su una C^*-algebra $\mathcal{A}$ separano gli elementi di $\mathcal{A}$.*

Dimostrazione Sia $A, B \in \mathcal{A}$ e $A \neq B$. Allora $\|A - B\| \neq 0$ e posto $A - B = A_1 + iA_2$ con $A_i = A_i^*$, abbiamo

$$\|A_1\| + \|A_2\| > 0,$$

senza perdere generalità prendiamo $A_1 \neq 0$. Allora $\lambda = \|A_1\| \in \sigma(A_1)$, perciò esiste ω funzionale positivo talché

(c.v.d.)
$$0 \neq \lambda = \omega(A_1) = \operatorname{Re}\omega(A - B).$$

Infine,

Corollario V.2 *Un elemento A di una C^*-algebra $\mathcal{A}$ è positivo se e solo se $\omega(A) \geq 0$ per ogni ω funzionale positivo.*

Dimostrazione Infatti, se $\omega(A) \geq 0$ per ogni ω abbiamo $\omega(A - A^*) = 0$, perciò dal risultato precedente, $A = A^*$. Ora, se $\lambda \in A$ allora esiste ω positivo di modo che $\omega(A) = \lambda \geq 0$. Dunque, A ha spettro positivo, perciò è positivo.

(c.v.d.) Viceversa, se A è positivo e ω è positivo, $\omega(A) \geq 0$ per definizione.

V.2.4 Rappresentazione di C^*-algebre

Rappresentazioni su spazi di Hilbert Nel caso in cui si abbia a che fare con una C^*-algebra abeliana, l'isomorfismo di Gel'fand consente di ridurre lo studio astratto degli elementi dell'algebra a quello concreto di funzioni su uno spazio compatto. Il caso non abeliano appare a priori più difficile. Infatti, è escluso che $\mathcal{A}$ possa essere interamente rappresentata da uno spazio di funzioni. D'altra parte, poiché sappiamo che $L(\mathcal{H})$ è una C^*-algebra non abeliana, possiamo chiederci se è possibile rappresentare concretamente $\mathcal{A}$ come sottoalgebra di $L(\mathcal{H})$.
Prima di procedere oltre, formalizziamo il concetto (che al lettore dovrebbe pur essere ben noto) di rappresentazione.

Definizione V.7 *Uno *-omomorfismo tra due C^*-algebre con identità $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ è una mappa $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ che preserva tutte le relazioni C^*-algebriche, ossia, per $A, B \in \mathcal{A}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$*

$$\begin{aligned}
\pi(A + \lambda B) &= \pi(A) + \lambda\pi(B), \\
\pi(AB) &= \pi(A)\pi(B), \\
\pi(\mathbb{I}_{\mathcal{A}}) &= \mathbb{I}_{\mathcal{B}}, \\
\pi(A^*) &= \pi^*(A).
\end{aligned}$$

Definizione V.8 *Una* **rappresentazione** *π di una C^*-algebra $\mathcal{A}$ su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ è uno *-omomorfismo di $\mathcal{A}$ in $L(\mathcal{H})$.*
Una rappresentazione si dice **fedele** *se è iniettiva, i.e.* $\ker\pi = \{0\}$.
Una rappresentazione si dice **irriducibile** *se* $\{0\}$ *e $\mathcal{H}$ sono gli unici sottospazi invarianti sotto π (una varietà lineare V si dice invariante se $\pi(V) \subset V$, per ogni $V \subset \mathcal{H}$).*

Vettori ciclici Se V è una varietà invariante, tale è $V^\perp$: infatti, siano $\psi \in V$ e $\varphi \in V^\perp$, allora per ogni $A \in \mathcal{A}$,

$$(\pi(A)\varphi, \psi) = (\varphi, \pi^*(A)\psi)(\varphi, \pi(A^*)\psi) = 0,$$

poiché $\pi(A^*)\psi \in V$, dunque $\pi(A)\varphi \in V^\perp$. Infine, $V^\perp$ è invariante.
Un vettore $\psi \in \mathcal{H}$ si dice **ciclico** se $H_\psi \equiv \pi(\mathcal{A})\psi$ è una varietà lineare densa in $\mathcal{H}$. Dato un vettore qualsiasi, H_ψ è una varietà invariante sotto la rappresentazione, perciò la sua chiusura, ossia il suo doppio ortogonale, $\mathcal{H}_\psi = H_\psi^a = H_\psi^{\perp\perp}$, è un sottospazio invariante.
Se una rappresentazione è irriducibile, per ogni $\psi \in \mathcal{H}$, $\mathcal{H}_\psi$ è un sottospazio invariante e come tale coincide con $\mathcal{H}$ (a meno che $\psi = 0$), e allora ogni vettore di $\mathcal{H}$ è ciclico.
Una rappresentazione π su uno spazio di Hilbert avente ψ come vettore ciclico sarà denotata con la tripletta $(\mathcal{H}, \pi, \psi)$.

Continuità delle rappresentazioni Nelle definizioni date non vi è alcuna richiesta di continuità per π. Vediamo perché

Teorema V.7 *Se π è uno *-omomorfismo tra due C^*-algebre con identità $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, allora, per ogni $A \in \mathcal{A}$,*

$$\|\pi(A)\|_{\mathcal{B}} \leq \|A\|_{\mathcal{A}}.$$

Se π è iniettivo, allora vale l'eguaglianza.

Dimostrazione L'operatore $\|A^*A\|_{\mathcal{A}} - A^*A = \|A\|_{\mathcal{A}}^2 - A^*A$ è positivo, dunque, $\|A\|_{\mathcal{A}}^2 \mathbb{I}_{\mathcal{B}} - \pi(A^*A)$ è positivo. Allora

$$\|A\|_{\mathcal{A}}^2 - \sup|\sigma_{\mathcal{B}}(\pi(A^*A))| \geq 0$$

cioè

$$\|A\|_{\mathcal{A}}^2 \geq \|\pi^*(A)\pi(A)\|_{\mathcal{B}} = \|\pi(A)\|_{\mathcal{B}}^2$$

da cui

$$\|\pi(A)\|_{\mathcal{B}} \leq \|A\|_{\mathcal{A}}.$$

Sia ora π iniettivo. Allora $\sigma_{\mathcal{A}}(A) = \sigma_{\mathcal{B}}(\pi(A))$ da cui si ricava la tesi. Mostriamo allora l'eguaglianza degli spettri. Procediamo per assurdo. Se i due spettri non coincidono, esiste $\tilde{F} \in \mathcal{C}(\sigma_{\mathcal{A}}(A))$, non nulla, di modo che $\tilde{F}$ sia identicamente nulla su $\sigma_{\mathcal{B}}(\pi(A))$. Allora $F(\pi(A)) = 0$. D'altra parte, per ogni polinomio P vale $\pi(P(A)) = P(\pi(A))$, perciò, essendo π continuo, la stessa cosa dovrebbe valere per ogni $F(A)$ costruita a partire da $\tilde{F} \in \mathcal{C}(\sigma_{\mathcal{A}}(A))$. Allora

$$\pi(F(A)) = F(\pi(A)) = 0,$$

(c.v.d.) contro il fatto che $\ker \pi = \{0\}$.

Costruzione GNS Uno strumento fondamentale nella teoria delle rappresentazioni (e dunque dell'intero edificio della fisica quantistica) è la costruzione di Gel'fand-Naimark-Segal, brevemente GNS, che ci apprestiamo a illustrare. La costruzione GNS consente di ottenere una rappresentazione di una C^*-algebra, una volta assegnato un suo stato. Tale rappresentazione si dice anche **rappresentazione GNS**.

Teorema V.8 (GNS) *Data una C^*-algebra con identità $\mathcal{A}$ e un suo stato ω, esistono uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}_\omega$, una rappresentazione π_ω su $\mathcal{H}_\omega$ e un vettore $\psi_\omega \in \mathcal{H}_\omega$ tali che*

(i) *ψ_ω è un vettore ciclico per la rappresentazione;*

(ii) $\omega(A) = (\psi_\omega, \pi_\omega(A)\psi_\omega)$;

(iii) *ogni altra rappresentazione di $\mathcal{A}$ data dalla tripletta $(\mathcal{H}, \pi, \psi)$, per cui valga ancora $\omega(A) = (\psi, \pi(A)\psi)$, è unitariamente equivalente alla rappresentazione GNS, cioè esiste una isometrico $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\omega$ di modo che*

$$U\pi(A)U^{-1} = \pi_\omega(A).$$

Dimostrazione Poiché ω è un funzionale positivo, sullo spazio vettoriale $\mathcal{A}$ la mappa

$$(A, B) = \omega(A^*B)$$

è un prodotto scalare semidefinito positivo. L'insieme

$$J = \{A \in \mathcal{A}\,|\omega(B^*A) = 0\; \forall B \in \mathcal{A}\}$$

è un ideale sinistro di $\mathcal{A}$. Consideriamo allora lo spazio quoziente $\mathcal{A}/J$ ottenuto identificando elementi di $\mathcal{A}$ che differiscono di un elemento in J. Posto

$$([A], [B]) = \omega(A^*B),$$

abbiamo un prodotto scalare definito positivo su $\mathcal{A}/J$. Il prodotto scalare è ben definito, se $A \equiv A'$ e $B \equiv B'$, allora esistono $a, b \in J$ di modo che $A' = A + a$ e $B' = B + b$, per cui

$$\omega(A'^*B') = \omega(A^*B) + \overline{\omega(B^*a)} + \omega(A^*b) + \omega(a^*b) = \omega(A^*B).$$

Ora, $A \in J$ se e solo se $\omega(A^*A) \in J$. Infatti, visto che un'implicazione è immediata, abbiamo

$$|\omega(B^*A)| \leq \omega^{1/2}(A^*A)\,\omega^{1/2}(B^*B) = 0.$$

Allora $([A], [A]) = 0$, se e solo se $A \in J$, se e solo se $[A] = [0]$.

Completando $\mathcal{A}/J$ con la topologia indotta da $([\cdot],[\cdot])$, otteniamo lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}_\omega$. Ad ogni $A \in \mathcal{A}$ associamo l'operatore $\pi_\omega(A)$ su $\mathcal{H}_\omega$ definito da

$$\pi_\omega(A)[B] = [AB].$$

L'applicazione è ben definita, infatti, se $B' \equiv B$, allora $B' = B + b$, e $AB' = AB + Ab$ con $Ab \in J$, da cui $AB' \equiv AB$. Vediamo che essa si estende per continuità all'intero $\mathcal{H}_\omega$:

$$\begin{aligned} \|\pi_\omega(A)[B]\|^2 &= (\pi_\omega(A)[B], \pi_\omega(A)[B]) = ([AB],[AB]) = \\ &= \omega(B^*A^*AB) \end{aligned}$$

Ora, il funzionale

$$\begin{aligned} \omega_B(A) &\equiv \omega(B^*AB) \\ \omega_B(\mathbb{I}) &= \omega(B^*B) = \|[B]\|^2 \end{aligned}$$

è chiaramente positivo, sicché

$$\|\pi_\omega(A)[B]\|^2 = \omega_B(A^*A) \le \omega_B(\mathbb{I})\|A\|^2 = \|A\|^2\|[B]\|^2$$

da cui

$$\|\pi_\omega(A)\| \le \|A\|$$

perciò $\pi_\omega(A)$ si estende per continuità sull'intero $\mathcal{H}_\omega$.

π_ω è uno *-omomorfismo, poiché

$$\begin{aligned} \pi_\omega(AA')[B] &= [AA'B] = \pi_\omega(A)[A'B] = \pi_\omega(A)\pi_\omega(A')[B]; \\ \pi_\omega(A+\lambda A')[B] &= [AB] + \lambda[A'B] = \pi_\omega(A)[B] + \lambda\pi_\omega(A')[B]; \\ \pi_\omega(\mathbb{I})[B] &= [B] \Longrightarrow \pi_\omega(\mathbb{I}) = \mathbb{I}; \\ ([B], \pi_\omega(A)[B']) &= ([B],[AB']) = \omega(B^*AB') = \omega\left((A^*B)^*B'\right) = \\ &= ([A^*B],[B']) = (\pi_\omega(A^*)[B],[B']). \end{aligned}$$

Posto $\psi_\omega \equiv [\mathbb{I}]$, abbiamo chiaramente che l'insieme dei vettori $\pi_\omega(A)\psi_\omega = [A]$ è denso in $\mathcal{H}_\omega$ di modo che ψ_ω è un vettore ciclico per π_ω. Poi

$$(\psi_\omega, \pi_\omega(A)\psi_\omega) = ([\mathbb{I}],[A\mathbb{I}]) = \omega(A).$$

Per quanto concerne l'ultima parte del teorema, l'isometria U è definita, sul denso generato dal vettore ciclico, da

$$U^{-1}\pi_\omega(A)\psi_\omega \equiv \pi(A)\psi;$$

che U preservi la norma discende dal fatto che

$$\left(U^{-1}\pi_\omega(A)\psi_\omega, U^{-1}\pi_\omega(A)\psi_\omega\right) = (\pi(A)\psi, \pi(A)\psi) = (\psi, \pi(A^*A)\psi) = \omega(A^*A)$$

e

$$(\pi_\omega(A)\psi_\omega, \pi_\omega(A)\psi_\omega) = (\psi_\omega, \pi_\omega(A^*A)\psi_\omega) = \omega(A^*A)$$

Detto questo sul denso generato da ψ e perciò ovunque

(c.v.d.)

$$U\pi(A)U^{-1}\pi_\omega(B)\psi_\omega = U\pi(AB)\psi = \pi_\omega(A)\pi_\omega(B)\psi_\omega.$$

Rappresentazione di *-algebre

Ammettiamo, ora, che $\mathcal{A}$ sia soltanto una *-algebra e che si voglia darne una rappresentazione sull'insieme degli operatori (illimitati) su uno spazio di Hilbert. Procedendo come nella GNS, abbiamo la cosiddetta costruzione di **Wightman**, nella quale si perdono la continuità e tutti gli altri asserti che riguardano la norma; inoltre si avrà soltanto $\pi(A^*) \subset \pi^*(A)$.

Esistenza di una rappresentazione

Notiamo che il teorema GNS ci dice che dato un funzionale positivo su una C^*-algebra, allora di certo esiste una sua rappresentazione hilbertiana. Ne viene che il problema dell'esistenza di una C^*-algebra è risolto se esiste un funzionale positivo, ma questo esiste grazie alla proposizione V.14.

GNS e fisica

La costruzione GNS assegna una realizzazione concreta (hilbertiana) a ogni sistema fisico, una volta che sia specificato uno stato del sistema (uno stato fisico è, infatti, un funzionale positivo normalizzato). Inoltre, la GNS mostra che il punto di vista ingenuo nella formulazione della meccanica quantistica può essere riottenuto a posteriori semplicemente postulando che ogni sistema fisico sia individuato da una C^*-algebra di osservabili.

Stati e vettori Dato uno stato ω, ogni vettore normalizzato $\phi \in \mathcal{H}_\omega$ definisce uno stato φ su $\mathcal{A}$:

$$\hat{\phi}(A) = (\phi, \pi_\omega(A)\phi),$$

come si vede cambiando ϕ per una fase lo stato $\hat{\phi}$ non cambia. La GNS fornisce, perciò, una mappa tra stati e vettori di $\mathcal{H}_\omega$, detti perciò **stati-vettore**.
Se $\phi \in \mathcal{H}_\omega$ è un vettore ciclico in $\mathcal{H}_\omega$, la rappresentazione $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \phi)$ è unitariamente equivalente alla rappresentazione GNS ottenuta a partire dallo stato $\hat{\phi}$.
In generale, dati due stati ω_1 e ω_2, le GNS corrispondenti non sono unitariamente equivalenti (cioè non sono interpolate da una isometria).

Stati puri e stati misti Dati due stati ω_1 e ω_2, ogni loro combinazione convessa

$$\omega_\lambda \equiv \lambda\omega_1 + (1-\lambda)\omega_2, \quad 0 < \lambda < 1$$

è uno stato detto **stato misto**. Come si vede ω_λ maggiora ambedue gli stati di partenza.
Uno stato ω si dice **stato puro** se non può essere scritto come combinazione convessa di altri due stati non banali, equivalentemente se il solo funzionale positivo maggiorato da ω è $\lambda\omega$ per ogni $0 \leq \lambda \leq 1$.
Prima di procedere a studiare la relazione tra GNS su stati puri e stati misti, vediamo un teorema che non è niente più del lemma di Schur

Teorema V.9 *Una rappresentazione π di una C^*-algebra $\mathcal{A}$ è irriducibile se e solo se il suo commutante*

$$\pi'(\mathcal{A}) \equiv \{B \in L(\mathcal{H}) \,|B\pi(A) = \pi(A)B, \ \forall A \in \mathcal{A}\}$$

consiste solo di multipli dell'identità.

Dimostrazione Sia B diverso da $\lambda\mathbb{I}$ in $\pi'(\mathcal{A})$. Allora anche $B^* \in \pi'(\mathcal{A})$, e passando a una combinazione lineare, possiamo supporre che B autoaggiunto e diverso da $\lambda\mathbb{I}$ appartenga al commutante. Allora i proiettori spettrali di B definiscono sottospazi non banali di $\mathcal{H}$ che sono invarianti sotto π. Infatti, $E_\Omega(B)\pi(A) = \pi(A)E_\Omega(B)$ per ogni boreliano Ω, di modo che, per ogni $\psi \in \mathcal{H}$,

$$\pi(A)(E_\Omega(B)\psi) = E_\Omega(B)\pi(A)\psi \in R(E_\Omega(B)).$$

Questo contro l'irriducibilità della rappresentazione, perciò il commutante è ridotto ai soli multipli dell'identità.
Viceversa, se π è non irriducibile, allora esiste almeno un proiettore su uno spazio invariante $P \neq \mathbb{I}, 0$, di modo che

$$P\pi(A) = \pi(A)P$$

(infatti, ogni $v \in \mathcal{H}$ si scrive come $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \in R(P)$ e v_2 nell'ortogonale , allora

$$\begin{aligned} P\pi(A)v &= \pi(A)v_1 \\ \pi(A)Pv &= \pi(A)v_1 \end{aligned}$$

visto che $R(P)$ e $R^\perp(P)$ sono invarianti). Questo significa che il commutante non è ridotto a soli multipli dell'identità.
(c.v.d.)

Proposizione V.15 *La rappresentazione GNS definita da uno stato ω è irriducibile se e solo se ω è uno stato puro.*

Dimostrazione Mostriamo che se ω è puro, allora la rappresentazione è irriducibile, equivalentemente, che se la rappresentazione è riducibile, ω è non puro. Sia P un proiettore non banale su uno spazio invariante sotto π_ω. Dunque,

$$\begin{aligned} \omega(A) &= (\psi_\omega, \pi_\omega(A)\psi_\omega) = (P\psi_\omega, \pi_\omega(A)P\psi_\omega) + ((\mathbb{I}-P)\psi_\omega, \pi_\omega(A)(\mathbb{I}-P)\psi_\omega) = \\ &\equiv \|P\psi_\omega\|^2\omega_1(A) + \|(\mathbb{I}-P)\psi_\omega\|^2\omega_2(A) \end{aligned}$$

se mostriamo che $\|P\psi_\omega\|^2, \|(\mathbb{I}-P)\psi_\omega\|^2 \neq 0$, visto che i due numeri hanno somma 1, abbiamo la tesi.

D'altra parte, se fosse $P\psi_\omega = 0$, allora per ogni $A \in \mathcal{A}$, avremmo $P\pi(A)\psi_\omega = \pi(A)P\psi_\omega = 0$ e, siccome ψ_ω è ciclico, avremmo $P = 0$, assurdo. Stesso ragionamento per $\mathbb{I}-P$.

Viceversa, sia π_ω irriducibile e supponiamo che ω maggiori ω_1, con ω_1 funzionale positivo diverso da un multiplo di ω. Allora $\omega_1(A^*B)$ definisce una forma sesquilineare limitata su $\mathcal{H}_\omega$ data da

$$\begin{aligned}\Omega(\pi_\omega(A)\psi_\omega, \pi_\omega(B)\psi_\omega) &= \omega_1(A^*B)\\ \Omega(\pi_\omega(A)\psi_\omega, \pi_\omega(A)\psi_\omega) &= \omega_1(A^*A) \leq \omega(A^*A) = \|\pi_\omega(A)\psi_\omega\|^2\end{aligned}$$

Dal teorema di Riesz, esiste un operatore limitato T su $\mathcal{H}$ di modo che

$$\omega_1(A^*B) = (\pi_\omega(A)\psi_\omega, T\pi_\omega(B)\psi_\omega).$$

Allora

$$\begin{aligned}(\pi_\omega(A)\psi_\omega, T\pi_\omega(C)\pi_\omega(B)\psi_\omega) &= (\pi_\omega(A)\psi_\omega, T\pi_\omega(C)\pi_\omega(B)\psi_\omega) = \omega_1(A^*CB) =\\ &= \omega_1\left((C^*A)^*B\right) = (\pi_\omega(C^*)\pi_\omega(A)\psi_\omega, T\pi_\omega(B)\psi_\omega) =\\ &= (\pi_\omega(A)\psi_\omega, \pi_\omega(C)T\pi_\omega(B)\psi_\omega)\end{aligned}$$

di modo che

$$T\pi_\omega(C) = \pi_\omega(C)T,$$

perciò $T \in \pi'(\mathcal{A})$. Siccome π è irriducibile, abbiamo $T = \lambda\mathbb{I}$, sicché

$$\omega_1(B) = \lambda(\psi_\omega, \pi_\omega(B)\psi_\omega) = \lambda\omega(B)$$

(c.v.d.) la qual cosa è assurda, perché contro l'ipotesi.

Sia data una rappresentazione irriducibile π di una C^*-algebra $\mathcal{A}$ su $\mathcal{H}$. Sia $\phi \in \mathcal{H}$ un vettore normalizzato. Poiché la rappresentazione è ciclica, esso è ciclico. Dunque, $(\mathcal{H}, \pi, \phi)$ è unitariamente equivalente alla GNS su $\hat{\phi}$. Ne viene che quest'ultima è irriducibile e perciò $\hat{\phi}$ è uno stato puro.

Corollario V.3 *Se π è una rappresentazione irriducibile di una C^*-algebra su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, allora ogni vettore normalizzato ϕ su $\mathcal{H}$ definisce uno stato*

$$\hat{\phi}(A) = (\phi, \pi(A)\phi)$$

talché $\hat{\phi}$ è uno stato puro.

V.2.5 Il teorema di Gel'fand-Naimark

La costruzione GNS ci dice che ogni C^*-algebra ammette una realizzazione concreta su uno spazio di Hilbert una volta fissato un suo stato (la cui esistenza è comunque garantita). Se lo stato è tale che $\omega(A^*A) > 0$, allora esso si dice **fedele** e la rappresentazione GNS associata è iniettiva, cioè fedele.

Non è chiaro però quale sia la generalità di una rappresentazione GNS, né quale ruolo fisico abbia. Il teorema di Gel'fand-Naimark dimostra che ogni C^*-algebra è isometricamente isomorfa a una sottoalgebra di $L(\mathcal{H})$, la qual cosa ci assicura che ogni C^*-algebra ammette una rappresentazione fedele.

Il teorema di Gel'fand-Naimark ci dice che la matematica della meccanica quantistica è l'analisi funzionale sugli spazi di Hilbert, laddove l'isomorfismo di Gel'fand stabiliva che la matematica utile per la fisica classica era ridotta all'analisi delle funzioni continue sugli spazi compatti (si può dire che adesso abbiamo una giustificazione rigorosa al volume primo!!).

Teorema V.10 (di Gel'fand-Naimark) *Ogni C^*-algebra è isometricamente isomorfa a una *-sottoalgebra dell'algebra degli operatori limitati su uno spazio di Hilbert.*

Dimostrazione

Sia $\mathcal{S}$ una famiglia di stati sulla C^*-algebra $\mathcal{A}$ con la proprietà di separare gli elementi di $\mathcal{A}$ (sappiamo che $\mathcal{S}$ esiste, visto che l'insieme di tutti gli stati separa $\mathcal{A}$). Consideriamo $\mathcal{H}$ come la somma diretta di tutti gli spazi GNS $\mathcal{H}_\omega$ ottenuti al variare di $\omega \in \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\equiv \bigoplus_{\omega \in \mathcal{S}} \mathcal{H}_\omega \\ \pi &\equiv \bigoplus_{\omega \in \mathcal{S}} \pi_\omega \end{aligned}$$

Poiché per ogni $\omega \in \mathcal{S}$, $\|\pi_\omega(A)\| \leq \|A\|$, ogni $\psi \in \mathcal{H}$ è individuato da $\left\{\psi^{(\omega)}\right\}_{\omega \in \mathcal{S}}$ con

$$\|\psi\|^2 = \sum_{\omega \in \mathcal{S}} \left\|\psi^{(\omega)}\right\|^2 < \infty,$$

abbiamo

$$\|\pi(A)\psi\|^2 = \sum_{\omega \in \mathcal{S}} \left\|\pi_\omega(A)\psi^{(\omega)}\right\|^2 \leq \|A\|^2 \sum_{\omega \in \mathcal{S}} \left\|\psi^{(\omega)}\right\|^2 = \|A\|^2 \|\psi\|^2,$$

per cui $\pi(A) \in L(\mathcal{H})$ e $\|\pi(A)\| \leq \|A\|$.

Visto che $\mathcal{S}$ è separante, se $A \neq 0$, allora esiste $\omega \in \mathcal{S}$ di modo che $\omega(A) \neq 0$, perciò $\pi_\omega(A) \neq 0$, infine, $\pi(A) \neq 0$. Dunque, $\ker \pi = \{0\}$. Questo significa che π è uno *-isomorfismo su una sottoalgebra di $L(\mathcal{H})$, da cui, come dimostrato, $\|\pi(A)\| = \|A\|$. **(c.v.d.)**

V.2.6 Cenni sulle algebre di von Neumann

Come abbiamo visto, data una C^*-algebra $\mathcal{A}$ e una sua rappresentazione π, un ruolo molto importante è rivestito dal suo commutante $\pi'(\mathcal{A})$. Come vedremo anche il **bicommutante**, $\pi''(\mathcal{A})$, ha una grande rilevanza. La questione interessante è la relazione che corre tra $\pi(\mathcal{A})$ e $\pi''(\mathcal{A})$. Per esempio, se π è irriducibile, allora $\pi'(\mathcal{A}) = \{\lambda\mathbb{I}\}_{\lambda \in \mathbb{C}}$ e $\pi''(\mathcal{A}) = L(\mathcal{H})$.

Definizione V.9 *Una *-sottoalgebra di $L(\mathcal{H})$ si dice* **algebra di von Neumann** *se essa coincide con il suo bicommutante.*

Il teorema che andiamo a dimostrare risolve la questione sollevata prima

Teorema V.11 (di densità di von Neumann) *Data una *-sottoalgebra con identità $\mathcal{A} \subset L(\mathcal{H})$ sono fatti equivalenti*

(i) $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$, *i.e. $\mathcal{A}$ è un'algebra di von Neumann;*

(ii) $\mathcal{A}$ *è debolmente chiusa;*

(iii) $\mathcal{A}$ *è fortemente chiusa.*

Traccia della dimostrazione (i) implica (ii). Vediamo che il bicommutante è debolmente chiuso. Sia $\{A_n\} \subset \mathcal{A}''$ una successione debolmente convergente ad A. Allora, per ogni $A' \in \mathcal{A}'$ e per ogni n, $A_nA' = A'A_n$. Sicché, per ogni $x, y \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} (x, (AA' - A'A)y) &= (x, [(A - A_n)A' + A'(A_n - A)]y) = (x, (A - A_n)A'y) + \\ &\quad + (A'^* x, (A_n - A)y) \end{aligned}$$

e l'ultimo membro può essere reso arbitrariamente piccolo, da cui $AA' = A'A$, cioè $A \in \mathcal{A}''$.
(ii) implica (iii). Ovvio.
(iii) implica (i). Dobbiamo far vedere che $\mathcal{A}$ è fortemente densa nel suo bicommutante. Mostriamo preliminarmente che per ogni $x \in \mathcal{H}$, $\mathcal{A}''x \subset \{\mathcal{A}x\}^a \equiv \mathcal{H}_{\mathcal{A}x}$. Infatti, sia P il proiettore su $\mathcal{H}_{\mathcal{A}x}$, allora $P \in \mathcal{A}'$, dal momento che $\mathcal{H}_{\mathcal{A}x}$ è $\mathcal{A}$-invariante. Allora per ogni $A'' \in \mathcal{A}''$, $A''x = A''Px = PA''x \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}x}$ (e qui si è usato il fatto che $\mathbb{I} \in \mathcal{A}$).
A questo punto possiamo provare che, dato $A'' \in \mathcal{A}''$, ogni intorno forte di A''

$$B(\varepsilon; x_1, \ldots, x_j)(A'') \equiv \{A \in L(\mathcal{H}) \,|\, \|(A - A'')x_k\| < \varepsilon,\ k \in J_j\}$$

contiene un elemento di $\mathcal{A}$. Infatti, dati $x_1, \ldots, x_j$ ripetiamo l'argomento di sopra per la somma diretta $\widehat{\mathcal{H}}$ di j copie di $\mathcal{H}$ e per $\hat{x} = x_1 \oplus \ldots \oplus x_j$. Allora se $A'' \in \mathcal{A}''$, si ha

$\hat{A}'' = A'' \oplus \ldots \oplus A'' \in \widehat{\mathcal{A}}''$ e $\widehat{\mathcal{A}}''\hat{x} \in \left\{\widehat{\mathcal{A}}\hat{x}\right\}^a$, perciò esiste un $A \in \mathcal{A}$ di modo che

$$\sum_{k=1}^{j} \left\| \left(A - A''\right) x_k \right\|^2 < \varepsilon^2,$$

(c.v.d.) da cui la tesi.

Caratterizzazione delle algebre di von Neumann

Sempre riguardo le algebre di von Neumann, abbiamo che esse sono automaticamente C^*-algebre, visto che sono *-algebre chiuse in senso forte, perciò in norma. Riguardando (i) implica (ii), si ha che il commutante è sempre debolmente chiuso, perciò data una qualunque *-sottoalgebra $\mathcal{A}$ di $L(\mathcal{H})$, il suo commutante è un'algebra di von Neumann (infatti, è una *-algebra). Dunque, $\mathcal{A}'$ e $\mathcal{A}''$ sono algebre di von Neumann e $\mathcal{A}''$, sempre dal teorema di densità, è la più piccola algebra di von Neumann contenente $\mathcal{A}$ (essendo ovvio che $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}''$).

Stati normali e preduale

I fatti che seguono non verrano dimostrati. Sia $\mathcal{A}$ un'algebra di von Neumann su $\mathcal{H}$. Allora i funzionali della forma

$$\omega(A) = \sum_n (\xi_n, A\eta_n)$$

dove $\sum \|\xi_n\|^2, \sum \|\eta_n\|^2 < \infty$, formano un sottospazio chiuso, che chiameremo $\mathcal{A}_*$, del duale topologico $\mathcal{A}^*$ di $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}_*$ si dice **preduale** di $\mathcal{A}$, nel senso che $\mathcal{A}_*$ ha come duale $\mathcal{A}$ via

$$(A, \omega) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}_* \to \omega(A).$$

In particolare, il preduale di $L(\mathcal{H})$ può essere canonicamente identificato con l'insieme degli operatori classe traccia via

$$(A, \rho) \in L(\mathcal{H}) \times \mathcal{T}_1 \to \mathrm{Tr}(\rho A).$$

Gli stati di $\mathcal{A}$ che appartengono al preduale $\mathcal{A}_*$ si dicono **stati normali** e vale

Proposizione V.16 *Uno stato ω su $\mathcal{A}$ è normale se e solo se esiste una* **matrice densità***, cioè un operatore classe traccia, positivo e a traccia unitaria, talché*

$$\omega(A) = \mathrm{Tr}(\rho A).$$

Poiché un'algebra di von Neumann è il duale di uno spazio di Banach, si dimostra che ogni algebra di von Neumann è una C^*-algebra duale di uno spazio topologico, la qual cosa consente di dare una definizione intrinseca (e non legata ad alcuna rappresentazione) di una C^*-algebra. Una rappresentazione π di una C^*-algebra si dice fattoriale se $\pi(\mathcal{A}) \cap \pi'(\mathcal{A}) = \{\lambda \mathbb{I}\}_{\lambda \in \mathbb{C}}$.

V.3 Meccanica quantistica dei sistemi finiti

In questa sezione ci occuperemo della descrizione quantistica di una particella (priva di spin) non relativistica. Attraverso il formalismo delle C^*-algebre riprodurremo l'apparato alla Dirac in modo rigoroso.
Nella prima sottosezione affrontiamo il problema in modo rozzo a partire dalle relazioni di commutazione di Heisenberg. Una volta introdotta l'algebra di Weyl, ripercorreremo la trattazione in modo matematicamente pulito, giungendo alla dimostrazione del teorema di unicità di von Neumann, il quale rende possibile la trattazione alla Dirac della meccanica quantistica dei sistemi finiti.

V.3.1 Le regole canoniche di commutazione

Sistema costituito da una particella massiva: regole di Heisenberg

Una particella non relativistica quantistica di massa fissata (non nulla) è individuata – a livello classico – da posizione q e impulso p. Se q è la posizione cartesiana (per semplicità in una sola dimensione) e p il momento coniugato, si postula che esistano delle osservabili quantistiche q e p tali da soddisfare le regole di commutazione di Heisenberg

$$\begin{aligned} [q,p] &= i\mathbb{I}; \\ [q,q] &= 0; \\ [p,p] &= 0. \end{aligned}$$

Consideriamo i polinomi in q, p identificati a mezzo delle regole di commutazione, per esempio, qp e $i + pq$ sono lo stesso elemento, e introduciamo nell'algebra così ottenuta la nozione di * ponendo

$$\begin{aligned} q^* &= q \\ p^* &= p \end{aligned}$$

In questo modo otteniamo una *-algebra $\mathcal{A}_H$.

La rappresentazione di Schrödinger

La *-algebra di Heisenberg ammette almeno una rappresentazione, la ben nota rappresentazione di Heisenberg. Essa è costruita prendendo $\mathcal{H} \equiv L^2(\mathbb{R}, dx)$ e ponendo

$$\begin{aligned} (\pi(q)\psi)(x) &\equiv x\psi(x) \\ (\pi(p)\psi)(x) &\equiv -i\frac{d}{dx}\psi(x) \end{aligned}$$

dove la derivata è da intendersi come l'antitrasformata del moltiplicatore per k. $\pi(q)$ e $\pi(p)$ sono autoaggiunti sui rispettivi (ben noti) domini.

Quella costruita è una rappresentazione delle regole di Heisenberg, nel senso che esiste un denso D contenuto in $D_{\pi(p)\pi(q)} \cap D_{\pi(q)\pi(p)}$ sul quale vale che

$$\pi(q)\pi(p) - \pi(p)\pi(q) = i\mathbb{I},$$

tale denso è, naturalmente, l'insieme delle funzioni a descresnza rapida, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

π è anche una *-rappresentazione dell'algebra di Heisenberg, visto che

$$\begin{aligned} \pi(q^*) &= \pi(q) = \pi^*(q) \\ \pi(p^*) &= \pi(p) = \pi^*(p) \end{aligned}$$

dal momento che $p = p^*$, $q = q^*$ e $\pi(q)$ e $\pi(p)$ sono operatori autoaggiunti.

Regole canoniche di commutazione

Spesso è conveniente considerare gli elementi di $\mathcal{A}_H$ (detti operatori di creazione e annichilazione)

$$a^* \equiv \frac{q - ip}{\sqrt{2}}, \quad a \equiv \frac{q + ip}{\sqrt{2}},$$

in luogo di posizione ed impulso. In effetti, $\mathcal{A}_H$ coincide con l'algebra generata dai polinomi in a, a^* con le regole di commutazione seguenti

$$[a, a^*] = \mathbb{I}, \quad [a, a] = 0, \quad [a^*, a^*] = 0.$$

Le regole di commutazione scritte prendono il nome di **regole canoniche di commutazione** (canonical commutations rules, CCR).

Il problema dell'unicità

Nella formulazione alla Dirac della meccanica quantistica si postula l'esistenza di uno spazio di Hilbert sul quale si realizzano le regole di commutazione, i cui raggi rappresentano gli stati del sistema e i cui operatori autoaggiunti rappresentano le osservabili. Il problema dell'esistenza di uno spazio sul quale sia possibile ambientare le CCR è risolto dalla rappresentazione di Schrödinger. Resta la questione dell'unicità di un tale spazio, i.e. di una tale rappresentazione. Solo in presenza di unicità il formalismo introdotto è consistente, perciò iniziare (alla Dirac) dallo spazio di Hilbert, o dall'algebra delle osservabili (come abbimo visto essere più corretto) è la medesima cosa.

In termini matematici, si tratta di dimostrare che tutte le rappresentazioni (irriducibili) di $\mathcal{A}_H$ sono equivalenti (perciò equivalenti a quella di Schrödinger).

Rappresentazione delle CCR

L'algebra di Heisenberg non può essere dotata di una struttura C^*-algebrica, infatti, dalle regole di commutazione abbiamo

$$[p, q^n] = -inq^{n-1},$$

perciò, se una norma C^* fosse definita su $\mathcal{A}_H$, avremmo

$$n\left\|q^{n-1}\right\| \le \|pq^n\| + \|qp^n\| \le 2\|p\|\|q\|\left\|q^{n-1}\right\|$$

Ora, $\left\|q^{n-1}\right\| = \|q\|^{n-1}$ non può essere nulla, altrimenti $q = 0$ e perciò le regole di commutazione non sarebbero quelle di Heisenberg, infine

$$\|p\| \, \|q\| \geq \frac{n}{2}$$

per ogni n, di modo che $\|p\|, \|q\|$ non potrebbero essere ambedue finite.
Visto che lavoriamo con operatori illimitati, richiediamo, per una *-rappresentazione π di $\mathcal{A}_H$, che esista un dominio denso $D \subset D_{\pi(p)\pi(q)} \cap D_{\pi(q)\pi(p)}$ sul quale valga

$$\pi(q)\,\pi(p) - \pi(p)\,\pi(q) = i\mathbb{I}.$$

Analogamente, se ci concentriamo sugli operatori di salita e discesa, richiediamo che esista un denso $D \subset D_{\pi(a)\pi(a^*)} \cap D_{\pi(a^*)\pi(a)}$ sul quale valga

$$\pi(a)\,\pi(a^*) - \pi(a^*)\,\pi(a) = \mathbb{I}.$$

Vedremo che, per soddisfare a un teorema di unicità, la rappresentazione π deve soddisfare varie ipotesi aggiuntive che ne attestino la regolarità. In seguito, ci renderemo di quanto la formulazione C^*-algebrica di Weyl sia più vantaggiosa della presente.

V.3.2 Il teorema di Rellich-Dixmier

Lemma V.2 *Sia A un operatore lineare, chiuso e densamente definito su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Supponiamo sia $D(A^*A) = D(AA^*)$ e su tale spazio valga*

$$AA^* = A^*A + \mathbb{I}.$$

Allora l'operatore A^*A è autoaggiunto ed ha spettro puramente puntuale pari a $\mathbb{N}$. Ogni autovalore di A^*A ha la stessa molteplicità.

Dimostrazione Visto che A è chiuso, si ha che $T \equiv A^*A$ è autoaggiunto e positivo su $D(T) \subset D(A)$. Lo spettro di T è dunque contenuto in $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Sia $\mu \in \sigma(T)$ e $\mu > 0$. Definiamo $\Delta_n \equiv \,]\mu - 1/n, \mu + 1/n[$ e consideriamo i vettori unitari ψ_n tali che $E_T(\Delta_n)\,\psi_n = \psi_n$. Poniamo

$$\varphi_n \equiv (T - \mu\mathbb{I})\, E_T(\Delta_n)\, \psi_n$$

allora, per il teorema di Lebesgue,

$$\|\varphi_n\|^2 = \int d\mu_{\psi_n}(\lambda)\, \left|\chi_{\Delta_n}(\lambda)\,(\lambda - \mu)\right|^2 \to 0$$

Naturalmente, $E_T(\Delta_n)\,\varphi_n = \varphi_n$, sicché $\varphi_n \in D(T)$. Abbiamo poi,

$$\|A\psi_n\|^2 = (\psi_n, T\psi_n) \to \mu,$$

infatti

$$|(\psi_n, T\psi_n) - \mu\,(\psi_n, E_T(\Delta_n)\,\psi_n)| = \int d\mu_{\psi_n}(\lambda)\, \left|\chi_{\Delta_n}(\lambda)\,(\lambda - \mu)\right| \to 0.$$

Infine,

$$\|A\varphi_n\|^2 = (\varphi_n, T\varphi_n) = (\varphi_n, TE_T(\Delta_n)\,\varphi_n) \to 0$$

Poiché, $D(T) \subset D(A)$, $\psi_n, \varphi_n \in D(A)$, e $A\varphi_n \to 0$ si ha

$$A\varphi_n = A\,(A^*A\psi_n - \mu\psi_n) = AA^*A\psi_n - \mu A\psi_n \to 0.$$

D'altra parte, applicando la regola di commutazione otteniamo

$$(A^*A - (\mu - 1))\, A\psi_n \to 0,$$

da cui, usando il criterio di Weyl, concludiamo che $\mu - 1 \in \sigma(T)$. Dal momento che per ogni $\sigma(T) \ni \mu > 0$ si ha $\mu - 1 \in \sigma(T)$ e che T è positivo, si conclude che μ è un intero positivo. Perciò, se esiste un μ positivo nello spettro, esso è intero e ogni intero da 0 a μ è nello spettro. Tuttavia, se nessun $\mu > 0$ appartenesse a $\sigma(T)$, concluderemmo $T = 0$, contro la regola di commutazione. Dunque, $0 \in \sigma(T)$ e visto che $\sigma(T)$ è fatto di interi esso è puramente puntuale.

Da quanto detto segue che esiste $D(T) \ni \psi \neq 0$ per cui

$$A^* A\psi = 0,$$

applicando la regola di commutazione,

$$\begin{aligned} AA^*\psi &= \psi, \\ A^*AA^*\psi &= A^*\psi, \\ T(A^*\psi) &= A^*\psi, \end{aligned}$$

di modo che $A^*\psi$ è autovettore all'autovalore 1 di T, visto che $A^*\psi \neq 0$, essendo

$$0 \neq \|\psi\|^2 = (\psi, AA^*\psi) = (\psi, AA^*\psi) = \|A^*\psi\|^2 .$$

Perciò $1 \in \sigma(T)$. Analogamente, partendo da ψ autovettore all'autovalore μ, si mostra che $\mu + 1$ è autovalore (e un suo autovettore è $A^*\psi$).

Sia $E(j, T)$ l'autospazio di T relativo all'autovalore $j \geq 0$. Chiaramente

$$\begin{aligned} A &: E(j+1, T) \to E(j, T) \\ A^* &: E(j, T) \to E(j+1, T) \end{aligned}$$

sono applicazioni iniettive e suriettive di modo che tutti gli autospazi hanno la medesima dimensione. **(c.v.d.)**

Lemma V.3 *Sia $\{\phi_{\alpha 0}\}_\alpha$ una base ortonormale per $E(0, T)$. Allora i vettori*

$$\phi_{\alpha k} \equiv \frac{1}{\sqrt{k!}} A^{*k} \phi_{\alpha 0},$$

$k \geq 1$ sono una base ortonormale per $E(k, T)$. Infine, la collezione $\{\phi_{\alpha k}\}_{\alpha, k}$ forma una base ortonormale per $\mathcal{H}$.

Lemma V.4 *Dato A lineare, chiuso e densamente definito su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ tale che $D(A^*A) = D(AA^*)$ e*

$$AA^* = A^*A + \mathbb{I},$$

abbiamo, posto $\phi_{\alpha,-1} = 0$,

$$\begin{aligned} A\phi_{\alpha k} &= \frac{1}{\sqrt{k}} \phi_{\alpha k-1} \\ A^*\phi_{\alpha k} &= \frac{1}{\sqrt{k+1}} \phi_{\alpha k+1} \end{aligned}$$

e

$$D = D(A) = D(A^*) = \left\{ \psi \,\middle|\, \{(k+1)(\phi_{\alpha k}, \psi)\} \in \ell^2 \right\}.$$

Unicità I tre lemmi ci consentono di dimostrare il teorema di unicità evocato nella sottosezione precedente. Consideriamo una *-rappresentazione dell'algebra di Heisenberg $\mathcal{A}_H$. Posto $A = \pi(a)$, abbiamo che A è chiuso, $A^{**} = \pi(a^{**}) = \pi(a) = A$, e $A^* = \pi(a^*)$. Supponiamo che $D(A^*A) = D(AA^*) \equiv D$. Su D valgono le regole canoniche per A, A^*. Allora esiste $\psi_0 \in D$ di modo che $A\psi_0 = 0$. Il vettore ψ_0 si dice **vettore di Fock**.
Consideriamo adesso due rappresentazioni π_1 e π_2 per le quali $D(\pi(a^*a)) = D(\pi(aa^*))$. Siano ψ_{01} e ψ_{02} i vettori di Fock delle due rappresentazioni. Se le rappresentazioni sono irriducibili, i vettori di Fock sono ciclici. Questo ci consente di definire densamente l'operatore U seguente

$$U\pi_1(A)\psi_{01} \equiv \pi_2(A)\psi_{02}.$$

Se mostriamo che U è una isometria, ne abbiamo che si estende a una isometria con immagine densa e perciò a un operatore unitario. Inoltre,

$$\begin{aligned} U\pi_1(A)U^{-1}(\pi_2(B)\psi_{02}) &= U\pi_1(A)\pi_1(B)\psi_{01} = U\pi_1(AB)\psi_{01} = \\ &= \pi_2(A)(\pi_2(B)\psi_{02}) \end{aligned}$$

di modo che π_1 e π_2 vengono a essere equivalenti.
Ci rimane solo da dimostrare che U è isometrico. Abbiamo

$$(U\pi_1(A)\psi_{01}, U\pi_1(B)\psi_{01}) = (\pi_2(A)\psi_{02}, \pi_2(B)\psi_{02}) = (\pi_1(A)\psi_{01}, \pi_1(B)\psi_{01}),$$

perché il calcolo di

$$(\pi_i(A)\psi_{0i}, \pi_i(B)\psi_{0i})$$

dipende solo dalle regole di commutazione e dalla condizione di Fock $a\psi_{0i} = 0$.

Teorema V.12 (Rellich-Dixmier) *Due qualsiasi *-rappresentazioni irriducibili dell'algebra di Heisenberg, tali che $\pi(aa^*)$ e $\pi(a^*a)$ abbiano eguale dominio (sul quale valgano le regole di commutazione), sono unitariamente equivalenti.*

Visto che la rappresentazione di Schrödinger soddisfa le ipotesi poste, si conclude che tutte le rappresentazioni irriducibili per cui a^*a e aa^* hanno eguale dominio sono equivalenti alla rappresentazione di Schrödinger (che, come vedremo, è irriducibile).

Generalizzazione Se su uno spazio di Hilbert si trovano un operatore A chiuso e un denso D tale che D è invariante sotto A e A^*, su D valgono le regole canoniche e D è un core per A^*A, allora si determina una estensione a di A tale da soddsfare le ipotesi del teorema di Rellich-Dixmier. Infatti, poniamo

$$A_0 \equiv A|_D, \; A_0' \equiv A^*|_D,$$

allora per ogni $\psi, \varphi \in D$ risulta

$$(A_0\psi, \varphi) = (A\psi, \varphi) = (\psi, A^*\varphi) = (\psi, A_0'\varphi)$$

sicché $A_0' \subset A_0^*$. Poiché D è denso, possiamo definire $A_0^{**} = \overline{A_0} \equiv a$. Abbiamo $A_0 \subset a$ e

$$a^* = (A_0^{**})^* = A_0^* \supset A_0'$$

di modo che $A_0' \subset a^*$. Per ogni $\psi \in D$,

$$\begin{aligned} A_0'A_0\psi &= A_0'A\psi = A^*A\psi \\ A_0A_0'\psi &= AA^*\psi = (A^*A + \mathbb{I})\psi \end{aligned}$$

perciò $A_0'A_0$ e A_0A_0' sono essenzialmente autoaggiunti su D. Poiché a è chiuso, a^*a è autoaggiunto, inoltre, $A_0'A_0 \subset a^*a$ e i due operatori coincidono su D. Visto che $A_0'A_0$ è essenzialmente autoaggiunto, se ne conclude che a^*a è la chiusura di $A_0'A_0$. Dunque, preso $\psi \in D(a^*a)$ esiste $\psi_n \in D$ talché ψ_n converge a ψ e $a^*a\psi_n \to a^*a\psi$. Allora

$$aa^*\psi_n = A_0A_0'\psi_n = A_0'A_0\psi_n + \psi_n \to a^*a\psi + \psi$$

da cui $\psi \in D(aa^*)$ e $aa^*\psi = a^*a\psi + \psi$. Allora $D(a^*a) \subset D(aa^*)$. Dalla relazione di commutazione trovata e dal fatto aa^* e a^*a sono autoaggiunti, si conclude $D(a^*a) = D(aa^*) \equiv D$ e ivi valgono le regole di commutazione.

V.3.3 L'algebra di Weyl

La ragione delle difficoltà incontrate a partire dalle relazioni canoniche di commutazione è che le q e le p non sono osservabili fisiche proprie, essendo illimitate. Ogni strumento di misura ha una scala finita, perciòconsente di misurare solo valori limitati di posizione e impulso. Per questo motivo, l'inclusione di q e p in $\mathcal{A}$ crea tutti i problemi di consistenza (fisica e matematica) che abbiamo incontrato di sopra. Viceversa, dal punto di vista operativo, ciò che si misurano sono funzioni limitate di q e p ed è in questo modo che dovremo riformulare le regole di commutazione.
In particolare, seguendo Weyl (*The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, 1931), introduciamo le funzioni (formali) limitate di p e q date da

$$U(\alpha) \equiv e^{i\alpha q}; \; V(\beta) \equiv e^{i\beta p};$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^\ell$ (ℓ essendo il numero di gradi di libertà del sistema). $U(\alpha)$ e $V(\beta)$ si dicono **operatori di Weyl**.
Partendo dal fatto che – in rappresentazione di Schrödinger – le autofunzioni dell'oscillatore armonico forniscono un denso di vettori analitici (anzi interi) per q, p e le loro combinazioni

lineari sul quale valgono le relazioni $[q, p] = i$, possiamo applicare la formula di Baker-Hausdorff e ottenere

$$U(\alpha) V(\beta) = V(\beta) U(\alpha) e^{-i\alpha\beta}.$$

Derivazione della formula di Baker-Hausdorff

Infatti, se A, B e le loro combinazioni ammettono un denso di vettori analitici, se $C = [A, B]$ commuta con A e B, allora possiamo definire sul dominio detto

$$G(\alpha) = e^{-\alpha A} B e^{\alpha A}$$

e, derivando,

$$\frac{d}{d\alpha} G(\alpha) = e^{-\alpha A}(-AB + BA) e^{\alpha A} = -e^{-\alpha A}[A, B] e^{\alpha A} = -C$$

da cui

$$\begin{aligned} G(\alpha) &= -\alpha C + G(0) \\ e^{-\alpha A}(A + B) &= -\alpha C e^{-\alpha A} + (A + B) e^{-\alpha A} \end{aligned}$$

Allora, posto

$$F(\alpha) = e^{-\alpha B} e^{-\alpha A} e^{\alpha(A+B)} e^{\alpha^2 C/2},$$

si ha

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d\alpha} &= -BF(\alpha) - e^{-\alpha B} A e^{-\alpha A} e^{\alpha(A+B)} e^{\alpha^2 C/2} + \\ &\quad + e^{-\alpha B}\left(-\alpha C e^{-\alpha A} + (A + B) e^{-\alpha A}\right) e^{\alpha(A+B)} e^{\alpha^2 C/2} + \\ &\quad + e^{-\alpha B} e^{-\alpha A} e^{\alpha(A+B)} \alpha C e^{\alpha^2 C/2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

da cui

$$F(\alpha) = F(0) = \mathbb{I}$$

sicché

$$e^A e^B = e^{A+B+C/2}.$$

Relazioni di Weyl

Il computo completo delle relazioni di Weyl è dunque

$$\begin{aligned} U(\alpha) V(\beta) &= V(\beta) U(\alpha) e^{-i\alpha\beta}; \\ U(\alpha) U(\beta) &= U(\alpha + \beta); \\ V(\alpha) V(\beta) &= V(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

L'algebra $\mathcal{A}_W$ generata dagli operatori di Weyl (con le regole di commutazione scritte) si dice **algebra di Weyl**. Essa è dotata in modo naturale dell'operazione * posto

$$\begin{aligned} U^*(\alpha) &= U(-\alpha) \\ V^*(\beta) &= V(-\beta) \end{aligned}$$

da cui l'unitarietà,

$$U(\alpha) U^*(\alpha) = U^*(\alpha) U(\alpha) = V(\beta) V^*(\beta) = V^*(\beta) V(\beta) = \mathbb{I}.$$

Infine, per ottenere una C^*–algebra dobbiamo dotare $\mathcal{A}_W$ di una norma e poi prendere il completamento. La condizione C^* richiede che U e V abbiano norma 1. È un fatto molto complicato[7], ma è possibile dimostrare che anche la C^*-norma di ogni elemento dell'algebra di Weyl è fissata, per cui esiste un'unica norma, talché il completamento di $\mathcal{A}_W$ rispetto a questa norma è una C^*-algebra.
In questa sezione ci occuperemo di determinare le rappresentazioni della C^*-algebra di Weyl così costruita. Visto quanto ottenuto nella sottosezione precedente, ci aspettiamo che sotto qualche condizione (che ci auguriamo sia più comprensibile di quella ottenuta prima), l'unica rappresentazione dell'algebra di Weyl sia quella di Schrödinger.
Sembra quantomeno ragionevole richiedere che gli operatori unitari $U(\alpha)$ e $V(\beta)$ siano

[7] J. Slawny, *Communications in Mathematical Physics*, **24**, 151 (1971)

generati, via Stone, da operatori autoaggiunti (che sarebbero poi q e p), perciò, proprio per assicurarci l'esistenza di posizione e impulso, poniamo la seguente

Definizione V.10 *Una rappresentazione π dell'algebra di Weyl su uno spazio di Hilbert separabile $\mathcal{H}$ si dice* **regolare** *se $\pi(U(\alpha))$ e $\pi(V(\beta))$ sono fortemente continui nei parametri α e β rispettivamente.*

Dunque, in una rappresentazione regolare, $U(\alpha)$ e $V(\beta)$ sono gruppi fortemente continui nei parametri α e β. La condizione di forte continuità, vista l'unitarietà, equivale alla debole continuità o, addirittura, alla debole (Lebesgue) misurabilità. Ecco che la condizione di regolarità è assolutamente ragionevole (più tardi vedremo comunque casi in cui questa non si verifica).
Come dimostrano Bratteli e Robinson nel loro testo, la regolarità non solo consente di definire posizione e impulso come operatori autoaggiunti su $\mathcal{H}$, ma rende possibile dimostrare che essi hanno un denso comune invariante contenuto nei rispettivi domini (derivando su tale denso le relazioni di Weyl si ricostruiscono le regole canoniche di commutazione).
Ma veniamo al celebrato

Teorema V.13 (di unicità di von Neumann) *Tutte le rappresentazioni regolari irriducibili dell'algebra di Weyl sono unitariamente equivalenti.*

Dimostrazione Conviene intanto introdurre i seguenti operatori di Weyl

$$W(\alpha,\beta) \equiv e^{-i\alpha\beta/2} V(\beta) U(\alpha) = e^{i\alpha\beta/2} U(\alpha) V(\beta)$$

che godono delle seguenti proprietà

$$\begin{aligned} W^*(\alpha,\beta) &= W(-\alpha,-\beta) \\ W(\alpha,\beta) W(\gamma,\delta) &= W(\alpha+\gamma,\beta+\delta) e^{-i(\alpha\delta-\beta\gamma)/2} = \\ &= e^{i(\beta\gamma-\alpha\delta)} W(\gamma,\delta) W(\alpha,\beta) \\ W^*(\alpha,\beta) W(\alpha,\beta) &= \mathbb{I} \end{aligned}$$

Come nella rozza dimostrazione del caso non C^*-algebrico, l'idea della dimostrazione è far vedere che ogni rappresentazione regolare irriducibile su $\mathcal{H}$ può essere ottenuta come rappresentazione GNS definita sullo **stato di Fock**

$$\omega_{\mathrm{F}}(W(\alpha,\beta)) = e^{-\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)/4}$$

e perciò tutte le rappresentazioni dette sono unitariamente equivalenti in forza del teorema GNS.

Si tratta allora di far vedere che $\mathcal{H}$ contiene un vettore ψ_0 (di certo ciclico dal momento che la rappresentazione è irriducibile), detto **vettore di Fock**, di modo che

$$(\psi_0, \pi(W(\alpha,\beta))\psi_0) = \omega_{\mathrm{F}}(W(\alpha,\beta)).$$

Per costruire ψ_0, si procede a individuare il proiettore su ψ_0 stesso. A questo scopo, notato che $e^{-\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)/4}$ è una funzione continua e sommabile, che $\pi(W(\alpha,\beta))$ è fortemente continuo, si ha che

$$P \equiv \frac{1}{(2\pi)^\ell} \int d\alpha\, d\beta\, e^{-\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)/4} \pi(W(\alpha,\beta))$$

esiste come limite forte di somme di Riemann, perciò

$$\begin{aligned} P^* &= \frac{1}{(2\pi)^\ell} \int d\alpha\, d\beta\, e^{-\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)/4} \pi(W(-\alpha,-\beta)) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^\ell} \int d\alpha\, d\beta\, e^{-\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)/4} \pi(W(\alpha,\beta)) = P \end{aligned}$$

Notiamo che P è non nullo, altrimenti, per ogni γ, δ,

$$0 = \pi(W(-\gamma,-\delta)) P \pi(W(\gamma,\delta)) = \frac{1}{(2\pi)^\ell} \int d\alpha\, d\beta \left[e^{-\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)/4} \pi(W(\alpha,\beta)) \right] e^{i(\gamma\beta-\alpha\delta)}$$

Il fatto che l'ultimo mebro sia nullo implica che gli elementi di matrice dell'operatore

$$e^{-\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)/4}\pi\left(W\left(\alpha,\beta\right)\right)$$

hanno tutti trasformata di Fourier nulla, perciò sono, essi stessi, nulli, da cui

$$\pi\left(W\left(\alpha,\beta\right)\right)=0$$

il ché è assurdo. Si conclude che $P\neq 0$.

Mostriamo che P è un proiettore, cioè che $P^2=P$. A questo scopo verifichiamo che vale la relazione

$$P\pi\left(W\left(\alpha,\beta\right)\right)P=e^{-\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)/4}P$$

che dà $P^2=P$ per $\alpha=\beta=0$.

Il membro di sinistra si scrive

$$\frac{1}{\left(2\pi\right)^{2\ell}}\int d\gamma d\delta\, d\gamma' d\delta'\, e^{-\left(|\gamma|^2+|\delta|^2+\left|\gamma'\right|^2+\left|\delta'\right|^2\right)/4}\pi\left(W\left(\gamma,\delta\right)\right)\pi\left(W\left(\alpha,\beta\right)\right)\pi\left(W\left(\gamma',\delta'\right)\right),$$

ma

$$\begin{aligned}\pi\left(W\left(\gamma,\delta\right)\right)\pi\left(W\left(\alpha,\beta\right)\right)\pi\left(W\left(\gamma',\delta'\right)\right) &= e^{-i(\gamma\beta-\alpha\delta)/2}\pi\left(W\left(\alpha+\gamma,\beta+\delta\right)\right)\pi\left(W\left(\gamma',\delta'\right)\right)= \\ &= e^{-i(\gamma\beta-\alpha\delta)/2}e^{-i\left((\alpha+\gamma)\delta'-(\beta+\delta)\gamma'\right)/2}\,\cdot \\ &\quad \cdot\pi\left(W\left(\alpha+\gamma+\gamma',\beta+\delta+\delta'\right)\right)\end{aligned}$$

a questo punto passiamo a cambiare variabili come segue

$$\begin{aligned}\gamma+\gamma' &= k-\alpha \\ \delta+\delta' &= \nu-\beta \\ \gamma-\gamma' &= \mu \\ \delta-\delta' &= \lambda\end{aligned}$$

per ottenere

$$\begin{aligned}\text{l.h.s.} &= \frac{1}{2^{2\ell}\left(2\pi\right)^{2\ell}}\int dk d\nu\, d\mu d\lambda\, e^{-\left(|\alpha-k|^2+|\beta-\nu|^2+|\mu|^2+|\lambda|^2\right)/8}\pi\left(W\left(k,\nu\right)\right)e^{-i(\mu(\nu+\beta)-\lambda(k+\alpha))/4}= \\ &= \frac{1}{\left(2\pi\right)^{\ell}}\int dk d\nu\; e^{-\left(|\alpha-k|^2+|\beta-\nu|^2\right)/8}e^{-\left(|\alpha+k|^2+|\beta+\nu|^2\right)/8}\pi\left(W\left(k,\nu\right)\right)= \\ &= \frac{1}{\left(2\pi\right)^{\ell}}\int dk d\nu\; e^{-\left(|\alpha|^2+|k|^2+|\beta|^2+|\nu|^2\right)/4}\pi\left(W\left(k,\nu\right)\right)= \\ &= e^{-\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)/4}\frac{1}{\left(2\pi\right)^{\ell}}\int dk d\nu\; e^{-\left(|k|^2+|\nu|^2\right)/4}\pi\left(W\left(k,\nu\right)\right)=e^{-\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)/4}P.\end{aligned}$$

Riassumiamo i conti impliciti nei passaggi di sopra

$$\gamma=\frac{k-\alpha+\mu}{2};\ \gamma'=\frac{k-\alpha-\mu}{2};\ \delta=\frac{\nu-\beta+\lambda}{2};\ \delta'=\frac{\nu-\beta-\lambda}{2}$$

da cui lo jacobiano del cambiamento di coordinate vale $\left(1/2\right)^{\ell}\left(1/2\right)^{\ell}=1/2^{2\ell}$; l'integrazione al secondo passaggio è in μ e λ:

$$\int d\mu\, e^{-|\mu|^2/8}e^{i\mu(-\nu-\beta)/4}=2^{\ell}\int d\mu'\, e^{-\left|\mu'\right|^2/2}e^{i\mu'(-\nu-\beta)/2}=2^{\ell}\left(2\pi\right)^{\ell/2}e^{-|\nu+\beta|^2/8}$$

Visto che P è un proiettore non nullo, esiste $\psi_0\in\mathcal{H}$ di modo che $P\psi_0=\psi_0$ e $\|\psi_0\|=1$. Inoltre

$$\begin{aligned}\left(\psi_0,\pi\left(W\left(\alpha,\beta\right)\right)\psi_0\right) &= \left(P\psi_0,\pi\left(W\left(\alpha,\beta\right)\right)P\psi_0\right)=\left(\psi_0,P\pi\left(W\left(\alpha,\beta\right)\right)P\psi_0\right)= \\ &= e^{-\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)/4}\left(\psi_0,P\psi_0\right)=e^{-\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)/4}=\omega_{\mathrm{F}}\left(W\left(\alpha,\beta\right)\right)\end{aligned}$$

come si voleva.

Si noti come ψ_0 sia unico (a meno di una fase). Infatti, se ψ è un vettore normalizzato talché

$$\left(\psi,\pi\left(W\left(\alpha,\beta\right)\right)\psi\right)=\omega_{\mathrm{F}}\left(W\left(\alpha,\beta\right)\right)$$

allora

$$(\psi, P\psi) = \frac{1}{(2\pi)^{\ell}} \int d\alpha\, d\beta\, e^{-\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)/2} = 1$$

da cui $P\psi = 1$, cioè $\psi \in R(P)$ se e solo se $(\psi, \pi(W(\alpha,\beta))\psi) = \omega_{\mathrm{F}}(W(\alpha,\beta))$. Ora, se $\phi \in R(P)$ è ortogonale a ψ_0, allora

$$(\phi, \pi(W(\alpha,\beta))\psi_0) = (\phi, P\pi(W(\alpha,\beta))P\psi_0) = e^{-\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)/2}(\phi,\psi_0) = 0$$

cioè per ogni A nella C^*-algebra $(\phi, \pi(A)\psi_0) = 0$, ma essendo ψ_0 ciclico, $\phi = 0$. Perciò P è
(c.v.d.) un proiettore unidimensionale.

V.3.4 La rappresentazione di Schrödinger

Abbiamo detto che ogni rappresentazione regolare (che consenta l'esistenza di posizione e impulso!!) irriducibile dell'algebra di Weyl è unitariamente equivalente alla GNS sullo stato fondamentale dell'oscillatore armonico ω_{F}. Per completare il nostro studio dobbiamo esibire una rappresentazione. Quella che andiamo a costruire è, naturalmente, la **rappresentazione di Schrödinger**.

Definizione della rappresentazione di Schrödinger Per semplicità denotermo ancora con A il rappresentato di ciascun $A \in \mathcal{A}_W$. Fissiamo $\mathcal{H} \equiv L^2\left(\mathbb{R}^{\ell}, d^{\ell}\mathbf{x}\right)$ e poniamo per ogni $\psi \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}(U(\alpha)\psi)(\mathbf{x}) &\equiv e^{i\alpha\mathbf{x}}\psi(\mathbf{x});\\ (V(\beta)\psi)(\mathbf{x}) &\equiv \psi(\mathbf{x}+\beta) \equiv \psi_\beta(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

I due operatori definiti in $\mathcal{H}$ sono chiaramente unitari, inoltre

$$\begin{aligned}(U(\alpha)V(\beta)\psi)(\mathbf{x}) &= \left(U(\alpha)\psi_\beta\right)(\mathbf{x}) = e^{i\alpha\mathbf{x}}\psi(\mathbf{x}+\beta);\\ (V(\beta)U(\alpha)\psi)(\mathbf{x}) &= e^{i\alpha\mathbf{x}}e^{i\alpha\beta}\psi(\mathbf{x}+\beta) = e^{i\alpha\beta}(U(\alpha)V(\beta)\psi)(\mathbf{x});\\ (U(\alpha)U(\beta)\psi)(\mathbf{x}) &= e^{i(\alpha+\beta)}\psi(\mathbf{x}) = (U(\beta)U(\alpha)\psi)(\mathbf{x}) = (U(\alpha+\beta)\psi)(\mathbf{x});\\ (V(\alpha)V(\beta)\psi)(\mathbf{x}) &= \psi(\mathbf{x}+\alpha+\beta) = (V(\beta)V(\alpha)\psi)(\mathbf{x}) = (V(\alpha+\beta)\psi)(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Regolarità Vediamo che si ha continuità forte in α e β. Come noto è sufficiente fare la verifica in 0. Abbiamo

$$\lim_{\alpha\to 0}\|U(\alpha)\psi-\psi\|^2 = \lim_{\alpha\to 0}\int d^{\ell}\mathbf{x}\left|\left(e^{i\alpha\mathbf{x}}-1\right)\right|^2|\psi(\mathbf{x})|^2 = 0$$

perché la funzione $\left|\left(e^{i\alpha\mathbf{x}}-1\right)\right|^2$ è limitata e tende puntualmente a 0 per $\alpha \to 0$, sicché il limite si scambia con il segno di integrale in forza del teorema di Lebesgue.

Irriducibilità Non resta che mostrare che la rappresentazione di Schrödinger è irriducibile. Se così non fosse, esisterebbero un sottospazio invariante $\mathcal{H}_1$ e un vettore non nullo $\phi \in \mathcal{H}_1^{\perp}$. Allora, dato $\psi \in \mathcal{H}_1$,

$$0 = (\phi, U(\alpha)V(\beta)\psi) = \int d^{\ell}\mathbf{x}\, e^{i\alpha\mathbf{x}}\psi_\beta(\mathbf{x})\bar{\phi}(\mathbf{x})$$

la qual cosa implica che la trasformata di Fourier di $\psi_\beta\bar{\phi} \in L^1$ è nulla identicamente e così pure $\psi_\beta\bar{\phi}$. Ne segue che l'intersezione del supporto di ψ_β con quello di ϕ ha misura nulla. Poiché variando β si trasla il supporto di ψ_β, si ricava che ϕ ha supporto di misura nulla, da cui $\phi = 0$.

A prescindere dal teorema di von Neumann, la rappresentazione di Schrödinger esiste e questo consente di vedere subito la positività di ω_{F}. Preso e normalizzato infatti il vettore $\psi_0(\mathbf{x}) = e^{-|\mathbf{x}|^2/2}$ si ottiene

$$\omega_{\mathrm{F}} = \hat{\psi}_0$$

per cui ω_{F} è positivo.

Osservabili generalizzate Data una rappresentazione, possiamo considerare la chiusura (forte o debole) dell'algebra di Weyl. Gli elementi autoaggiunti di questa algebra si dicono **osservabili generalizzate**, esse non hanno sempre diretto significato fisico, ma sono utili da considerare. Poiché per una

particella non relativistica senza spin, esiste una rappresentazione irriducibile e le altre sono tutte equivalenti, abbiamo che in tutte le rappresentazioni irriducibili di $\mathcal{A}_W$ si ottengono le stesse chiusure (forti o deboli), perché l'equivalenza unitaria dota gli spazi di Hilbert della medesima topologia. D'altra parte, l'irriducibilità, comporta che il commutante sia ridotto ai soli multipli dell'identità, per cui in tutte le rappresentazioni, l'algebra delle osservabili generalizzate, cioè l'algebra di von Neumann generata da $\pi(\mathcal{A}_W)$, coincide con l'insieme $L(\mathcal{H})$ degli operatori limitati su $\mathcal{H}$.
L'asserto secondo cui tutte le osservabili sono gli operatori (limitati) autoaggiunti su $\mathcal{H}$ che si fa nella formulazione alla Dirac della meccanica quantistica è vero!!

Stati puri come funzioni d'onda Poiché la rappresentazione è irriducibile, gli stati puri del sistema sono rappresentati da vettori in $\mathcal{H}$, cioè da funzioni L^2. Queste ultime sono dette anche **funzioni d'onda**.

Posizione e impulso Poiché la rappresentazione di Schrödinger è fortemente continua, dal teorema di Stone, esistono gli operatori (illimitati) autoaggiunti

$$\begin{aligned} q_k &= -i\frac{\partial}{\partial\alpha_k}U(0) \\ p_k &= -i\frac{\partial}{\partial\beta_k}V(0) \end{aligned}$$

dove le derivate sono intese in senso forte. Allora

$$\begin{aligned} q_k\psi(\mathbf{x}) &= x_k\psi(\mathbf{x}) \\ p_k\psi(\mathbf{x}) &= -i\frac{\partial}{\partial x_k}\psi(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

che ammettono un denso comune di essenziale autoaggiunzione, $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$, sul quale valgono le regole canoniche di commutazione.

V.3.5 Rappresentazioni non regolari

Finora abbiamo studiato le rappresentazioni regolari dell'algebra di Weyl, tuttavia non è escluso che esistano rappresentazioni irregolari che abbiano un qualche interesse fisico.

Un esempio non banale Consideriamo il funzionale (sarebbe il fondamentale per una particella libera, i.e. $p\psi = 0$) definito sul denso di $\mathcal{A}_W$ dato da $\sum \lambda_i W(\alpha_i, \beta_i)$ da

$$\omega(W(\alpha,\beta)) = \begin{cases} 1, & \alpha = 0 \\ 0, & \alpha \neq 0 \end{cases}$$

Mostreremo che ω è un funzionale positivo e poi considereremo la GNS su questo stato. Poiché

$$(\psi_\omega, \pi_\omega(W(\alpha,\beta))\psi_\omega) = \begin{cases} 1, & \alpha = 0 \\ 0, & \alpha \neq 0 \end{cases}$$

la rappresentazione che otterremo non sarà debolmente continua, perciò, essendo non regolare, non sarà equivalente alla rappresentazione di Schrödinger.
Sul denso definito dagli elementi del tipo $\sum \lambda_i W(\alpha_i, \beta_i)$ ω è positivo, perché pari al limite per $n \to \infty$ della seguente successione di funzionali positivi

$$\omega_n(W(\alpha,\beta)) = e^{-\left(n\alpha^2 + \beta^2/n\right)/4}$$

(funzionali positivi come si vede in rappresentazione di Schrödinger). Ora, un funzionale positivo normalizzato su un denso contenente l'identità in una C^*-algebra è continuo e normalizzato, sicché, una volta esteso per continuità, essendo continuo e normalizzato, è positivo ovunque.
Vediamo che "razza" di rappresentazione si ottiene tramite la GNS. La metrica nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}_\omega$ è data da

$$\begin{aligned} (\pi_\omega(W(\gamma,\delta))\psi_\omega, \pi_\omega(W(\alpha,\beta))\psi_\omega) &= e^{i(\alpha\delta-\beta\gamma)/2}(\psi_\omega, W(\alpha-\gamma,\beta-\delta)\psi_\omega) = \\ &= \begin{cases} e^{i\alpha(\delta-\beta)/2}, & \alpha = \gamma \\ 0, & \alpha \neq \gamma \end{cases} \end{aligned}$$

Lo spazio $\mathcal{H}_\omega$ costruito è **non separabile** visto che un dato vettore si possono individuare un'infinità non numerabile di vettori a lui ortogonali.

Notiamo che preso $\alpha = 0$, otteniamo

$$(\pi_\omega (W(\gamma, \delta)) \psi_\omega, \pi_\omega (W(0, \beta)) \psi_\omega) = \begin{cases} 1, & \gamma = 0 \\ 0, & \gamma \neq 0 \end{cases}$$

di modo che il vettore ψ_ω è non nullo e invariante sotto traslazione! Infine, in questa rappresentazione, poiché si ha regolarità in β, esiste l'impulso.

Particella su un cerchio Un modo per rendere $\mathcal{H}_\omega$ separabile è considerare il sottospazio in cui $\alpha \in \mathbb{Z}$. In questo caso la metrica dello spazio $\mathcal{H}$ diventa

$$(\pi_\omega (W(m, \delta)) \psi_\omega, \pi_\omega (W(n, \beta)) \psi_\omega) = e^{in(\delta - \beta)/2} \delta_{nm}$$

perciò, posto

$$e_n \equiv \pi_\omega (W(n, 0)) \psi_\omega$$

abbiamo

$$(e_m, e_n) = \delta_{nm}.$$

Mostriamo che $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, e_0)$ è equivalente alla rappresentazione di Schrödinger di una particella su un cerchio.
Consideriamo, infatti, la rappresentazione

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\equiv L^2((0, 2\pi), d\varphi/2\pi) \\ (\pi(W(n, 0)) f)(\varphi) &\equiv e^{in\varphi} f(\varphi) \\ (\pi(W(0, \beta)) f)(\varphi) &\equiv f(\varphi + \beta) \end{aligned}$$

allora, posto $e_n(\varphi) \equiv e^{in\varphi} \in \mathcal{H}$, abbiamo che $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ è un s.o.n.c., e, poiché e_0 è invariante per traslazione, passiamo a calcolare

$$\hat{e}_0 (W(n, \beta)) = (e_0, \pi(W(n, \beta)) e_0) = e^{i\alpha\beta/2} \left(e_0, e^{in\varphi} e_0\right) = e^{in\beta/2} (e_0, e_n) = \delta_{n0} = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

Poiché e_0 è ciclico, essendo $\pi(W(n, 0)) e_0 = e_n$, e $\hat{e}_0 = \omega$, abbiamo che la GNS di sopra coincide proprio con la rappresentazione di sopra che descrive una particella su un cerchio.
In generale, avevamo

$$(\psi_\omega, W(0, \beta) \psi_\omega) = (\psi_\omega, V(\beta) \psi_\omega) = 1,$$

da cui, essendo $V(\beta)$ unitario, $V(\beta) \psi_\omega = \psi_\omega$. Ora, come si vede, derivando in β ambo i membri, $p\psi_\omega = 0$, ψ_ω è lo stato fondamentale di particella libera.
I vettori e_n sono tutti autostati dell'impulso,

$$V(\beta) e_n = V(\beta) U(n) \psi_\omega = e^{in\beta} U(n) \psi_\omega = e^{in\beta} e_n$$

da cui

$$pe_n = ne_n.$$

Gli autostati dell'impulso hanno condizioni al bordo periodiche, infatti, $e_n(0) = 1 = e_n(2\pi)$. Sappiamo che per le particelle su un cerchio sono possibili tutte le condizioni al bordo seguenti $f(2\pi) = e^{i\alpha} f(0)$. Dove sono tutte queste meccaniche? Chiaramente stanno nella scelta della rappresentazione! Basta considerare la GNS su un vettore diverso da ψ_ω, per esempio $\psi_\omega^{(\alpha)} = W(\alpha, 0) \psi_\omega$. In questo caso

$$V(\beta) \psi_\omega^{(\alpha)} = V(\beta) U(\alpha) \psi_\omega = e^{i\alpha\beta} U(\alpha) \psi_\omega = e^{i\alpha\beta} \psi_\omega^{(\alpha)}.$$

Abbiamo così costruito una infinità non numerabile di rappresentazioni dell'algebra di Weyl tutte inequivalenti alla rappresentazione di Schrödinger.

Conclusioni Il fatto che una particella libera abbia stato fondamentale non è insensato fisicamente (!), perciò – come si vede – il caso di rappresentazioni non regolari dell'algebra di Weyl è più importante di quanto sembri.

V.4 Sistemi infiniti

Introduzione La meccanica quantistica dei sistemi infiniti è... infinitamente più complicata e ricca di quella

dei sistemi finiti che abbiamo considerato nella sezione precedente.
I sistemi infiniti non sono oziose astrazioni, ma derivano in modo necessario dalla teoria della relatività: poiché non è possibile ipotizzare un'azione a distanza, tutte le interazioni devono avvenire per contatto, sicché si deve introdurre il concetto di campo. Quest'ultimo però ha infiniti gradi di libertà!

I sistemi infiniti in meccanica statistica

I sistemi infiniti forniscono un modello per lo studio dei sistemi macroscopici. Questi, pur essendo formati dagli stessi costituenti di atomi e molecole, presentano un comportamento del tutto peculiare: per esempio, essi danno luogo a fenomeni quali le transizioni di fase, i processi dissipativi, la crescita biologica... che non hanno analogo a livello microscopico. Tali fenomeni sono giocoforza legati alla presenza di un enorme numero di costituenti elementari, per questo motivo sono detti **collettivi**. L'interpretazione (se non la giustificazione stessa) dei fenomeni collettivi va dunque ricercato nel grande numero di particelle coinvolte.
La meccanica statistica si prefigge di fornire un adeguato modello per le leggi della termodinamica (le quali, appunto, regolano gli aspetti collettivi di cui sopra) e, come noto, essa deve far uso della meccanica quantistica, come discende subito dalla sola considerazione del terzo principio della termodinamica.
Si tratta di legare le proprietà microscopiche ben note a livello teorico a quelle macroscopiche le quali, invece, sono note solo dal punto di vista fenomenologico. Vista l'importanza del carattere collettivo che non può essere evinto che dal numero di particelle che formano il sistema, il modello che si deve costruire ha da essere formulato fin da subito in modo che siano chiari e distinti i termini macroscopici da quelli microscopici. Un sistema di 10^{24} particelle è determinato non solo dai suoi costituenti elementari, ma dai vincoli macroscopici che su di esso sono posti: per studiare il sistema si deve sapere a priori se esso si trova in fase gassosa o in fase liquida!
Il modello quantistico che descrive correttamente il problema distinguendo i parametri macroscopici e microscopici si basa sulla schematizzazione del sistema macroscopico come sistema infinito.
L'idea della modellizzazione dei sistemi macroscopici come sistemi infiniti deriva dalle seguenti considerazioni:

(i) i sistemi macroscopici presentano proprietà che si stabilizzano all'aumentare della loro estensione a parità di densità: questo aspetto, che è chiaro in termodinamica, è rigorosamente dimostrato nell'ambito di modelli di sistemi finiti sui quali si opera il cosiddetto **limite termodinamico**;

(ii) le transizioni di fase si individuano sperimentalmente come singolarità dei potenziali termodinamici; questi ultimi sono però analitici fintantoché il sistema è considerato finito. Il punto è che alle transizioni di fase, i potenziali, pur restando lisci, presentano gradienti enormi che nella pratica sperimentale, in effetti, sono singolarità; da un punto di vista metodologico è facile individuare delle singolarità, laddove è impossibile trovare grossi gradienti, ecco perché è conveniente usare i sistemi infiniti: sono più agevoli da trattare e non differiscono di troppo dai sistemi finiti, ma formati da un gran numero di particelle (anzi sono indistinguibili sperimentalmente, che è quello che ci interessa).

Detto il perché la meccanica statistica si deve basare sui sistemi infiniti, vediamo di capire quali ulteriori vantaggi concettuali porta il loro studio in relazione ai fenomeni collettivi. Come vedremo, la meccanica quantistica dei sistemi infiniti chiarisce la distinzione tra variabili locali e variabili globali, le prime essendo riferite a regioni spaziali finite, le seconde all'intero sistema. Questo consente di individuare a priori le variabili macroscopiche come quelle globali.
Inoltre, le variabili globali consentono di classificare gli stati del sistema rispetto alle loro proprietà macroscopiche, laddove questo non sarebbe possibile per un sistema finito. Infatti, se un sistema infinito ammette infinite rappresentazioni inequivalenti, ciascuna collegata a una classe di stati macroscopicamente equivalenti, ma microscopicamente diversi, i sistemi finiti, come abbiamo visto, ammettono un'unica rappresentazione irriducibile.
Allora uno stato di un sistema infinito si definisce macroscopicamente come una **rappresentazione** dell'algebra delle variabili, e microscopicamente come un vettore o una matrice densità all'interno della rappresentazione detta. Ecco che il modello tracciato ha

strutture sufficienti per descrivere la fisica dei sistemi macroscopici mettendola in relazione con quella dei sistemi microscopici.

Struttura di un sistema infinito

Come abbiamo imparato, la definizione di un sistema fisico avviene attraverso la dichiarazione delle sue variabili, in altre parole, dalla definizione della C^*-algebra delle sue osservabili. Andiamo dunque a delineare i sistemi infiniti, descrivendone l'algebra delle variabili.
Del tutto in generale, dato un sistema infinito, associamo a ogni regione limitata Λ dello spazio L in cui è posto l'algebra di osservabili $\mathcal{A}(\Lambda)$ che competerebbe al sistema finito contenuto in Λ. Ogni esperimento fisicamente realizzabile avviene in una regione limitata, perciò coinvolge una delle algebre $\mathcal{A}(\Lambda)$ così definite.
L'algebra $\mathcal{A}$ delle osservabili dell'intero sistema è costruita come segue

(i) *se $\Lambda \subset \Lambda'$, allora $\mathcal{A}(\Lambda) \subset \mathcal{A}(\Lambda')$ e la restrizione ad $\mathcal{A}(\Lambda)$ della norma su $\mathcal{A}(\Lambda')$ è la norma su $\mathcal{A}(\Lambda)$. Dunque, se Λ e Λ' sono regioni limitate, $\mathcal{A}(\Lambda)$ e $\mathcal{A}(\Lambda')$ sono sottoalgebre dell'algebra $\mathcal{A}(\Lambda \cup \Lambda')$. Questo comporta che gli elementi di $\mathcal{A}(\Lambda)$ e $\mathcal{A}(\Lambda')$ possono essere moltiplicati, addizionati, aggiunti tra loro;*

(ii) *in vista dell'ultima proprietà di cui al punto precedente, abbiamo che se Λ e Λ' sono regioni limitate disgiunte tra loro, allora gli elementi di $\mathcal{A}(\Lambda)$ commutano con gli elementi di $\mathcal{A}(\Lambda')$;*

(iii) *unendo le algebre di osservabili $\mathcal{A}(\Lambda)$, i.e. $\mathcal{A}(\Lambda) \cup \mathcal{A}(\Lambda')$ è formata dagli elementi di $\mathcal{A}(\Lambda \cup \Lambda')$ che appartengono ad $\mathcal{A}(\Lambda)$ o ad $\mathcal{A}(\Lambda')$, si ottiene ancora un'algebra normata. Completando tale algebra, si ottiene la C^*-algebra $\mathcal{A}$ che definiamo essere la C^*-algebra che descrive il sistema infinito in studio.*

La struttura $\mathcal{A}$ definita sopra si dice **algebra quasi-locale** (le singole $\mathcal{A}(\Lambda)$ sono, appunto, le algebre locali).

In questa sezione passeremo bervemente in rassegna alcuni interessanti temi legati ai sistemi infiniti, senza alcuna pretesa di completezza (rimandiamo ai testi indicati nella bibliografia per gli approfondimenti necessari).

V.4.1 Un esempio di sistema infinito: la catena di spin

In questa sottosezione presentiamo un esempio di sistema infinito, allo scopo di vedere che i sistemi infiniti ammettono, in generale, infinite rappresentazioni inequivalenti.

Catena infinita

Consideriamo una catena di spin, cioè un sistema di spin 1/2 posti su una retta in un reticolo unidimensionale indicizzato da $n \in \mathbb{Z}$.
Per prima cosa definiamo il sistema attraverso la solita dichiarazione di variabili. Ogni sito, cioè ogni $n \in \mathbb{Z}$, individua una particella fissa di spin 1/2. Come sappiamo la C^*-algebra che descrive tale particella è rappresentata dall'insieme degli operatori lineari (ovviamente continui) su $\mathbb{C}^2$. Tale algebra si riduce all'insieme delle combinazioni lineari delle matrici σ^μ ($\mu = 0, \ldots, 4$) di Pauli che soddisfano le regole di commutazione del momento angolare. A ogni sito corrisponde lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}_n \equiv \mathbb{C}^2$, sul quale agisce la C^*-algebra $\mathcal{A}_n \equiv L(\mathcal{H}_n)$.
Adesso, dato $\Lambda \subset \mathbb{Z}$, definiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\Lambda &\equiv \bigotimes_{n \in \Lambda} \mathcal{H}_n; \\ \mathcal{A}_\Lambda &\equiv L(\mathcal{H}_\Lambda). \end{aligned}$$

Se $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ identifichiamo $\mathcal{A}_{\Lambda_1}$ con una sottoalgebra di $\mathcal{A}_{\Lambda_2}$ tramite l'isomorfismo

$$A \mapsto A \otimes \mathbb{I}_{\Lambda_2 \setminus \Lambda_1}.$$

In questo modo, unendo le $\mathcal{A}_\Lambda$ così ottenute e chiudendo, troviamo esattamente la nostra C^*-algebra quasi-locale $\mathcal{A}$.

Rappresentazioni di $\mathcal{A}$

Veniamo alla rappresentazione di $\mathcal{A}$. Vogliamo costruire delle rappresentazioni GNS su stati diversi per far vedere che si ottengono rappresentazioni **inequivalenti** anche considerando sistemi che si ambientano in spazi di dimensione finita, la qual cosa testimonia quanto accennato in precedenza: i sistemi infiniti sono molto più complicati di quelli finiti e non ammettono una formulazione alla Dirac (la quale posa interamente sul teorema di von Neumann che in questo ambito è falso).

Per vedere che le rappresentazioni sono inequivalenti, costruiremo il limite forte di una successione S_N di elementi di $\mathcal{A}$ e vedremo che tale limite cambia a seconda delle rappresentazioni in modo che esse non possono essere connesse da una isometria.

Stati Per costruire una GNS dobbiamo selezionare uno stato ω. Un denso in $\mathcal{A}$ è dato dalle combinazioni lineari di osservabili del tipo

$$A_\Lambda^{\boldsymbol{\mu}} \equiv \bigotimes_{j\in\Lambda} \sigma_j^{\mu_j},$$

dove $\sigma_j^{\mu_j}$ è la μ_j-esima matrice di Pauli associata al sito j (e perciò agente su $\mathcal{H}_j$). Possiamo allora definire uno stato sugli $A_\Lambda^{\boldsymbol{\mu}}$, se quanto si ottiene è un funzionale positivo, esso risulterà pure continuo sul denso, perciò potrà essere esteso per continuità su tutto $\mathcal{A}$. Poiché la continuità implica la positività, avremo raggiunto il nostro scopo.

L'elemento di $\mathcal{A}$ di cui calcoleremo il limite forte in diverse rappresentazioni per mostrare che queste sono inequivalenti, sarà il seguente

$$S_N \equiv \frac{1}{2N+1}\sum_{i=-N}^{N} \sigma_i^3.$$

Come si vede l'aspettazione di S_N su uno stato ω, al limite per $N\to\infty$, fornisce lo spin medio del sistema lungo la direzione 3. Si tratta, in qualche modo, di una variabile termodinamica, ecco perché riveste un interesse che va ben oltre gli scopi di questo esempio.

Rappresentazione GNS su ω_+ Definiamo gli stati $\omega_\pm$ come segue

$$\omega_\pm\left(A_\Lambda^{\boldsymbol{\mu}}\right) \equiv \prod_{j\in\Lambda}\left(e_j^\pm, \sigma_j^{\mu_j} e_j^\pm\right)$$

dove il prodotto scalare si intende in $\mathcal{H}_j$ e $e_j^\pm$ è l'autovettore all'autovalore positivo (risp. negativo) di σ_j^3. Nelle GNS costruite su $\omega_\pm$ denoteremo gli operatori tirando via la notazione $\pi_{\omega_\pm}$.

Per semplicità concentriamoci sulla rappresentazione data da ω_+ (i risultati per l'altra saranno ovvi). Calcoliamo il limite forte (se esiste) di S_N sul denso in $\mathcal{H}_{\omega_+}$ dato dai vettori del tipo $\psi_\pm = A_\Lambda^{\boldsymbol{\mu}}\psi_{\omega_\pm}$. Abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} S_N\psi_+ = A_\Lambda^{\boldsymbol{\mu}}\lim_{n\to\infty} S_N\psi_{\omega_+} + \lim_{n\to\infty}\left[S_N, A_\Lambda^{\boldsymbol{\mu}}\right]\psi_{\omega_+}$$

Vediamo cosa si ha del secondo addendo. Il commutatore di S_N con $A_\Lambda^{\boldsymbol{\mu}}$ porta un $2N+1$ a denominatore ed è formato al più da $\#\Lambda$ termini a numeratore (visto che se $i\notin\Lambda$, σ_i^3 commuta con tutte le matrici di Pauli $\sigma_j^{\mu_j}$, $j\in\Lambda$), perciò il secondo addendo converge a 0 (in norma). Questo fatto in sé ci dice che se la rappresentazione è irriducibile, allora il limite forte di S_N appartiene a $\mathbb{C}\mathbb{I}$.

Rimane dunque

$$\lim_{n\to\infty} S_N A_\Lambda^{\boldsymbol{\mu}}\psi_{\omega_+} = A_\Lambda^{\boldsymbol{\mu}}\lim_{n\to\infty} S_N\psi_{\omega_+},$$

si tratta allora di vedere che esiste e, in tal caso, calcolarlo,

$$\lim_{n\to\infty} S_N\psi_{\omega_+}.$$

Notiamo che

$$\left(\psi_{\omega_\pm}, S_N\psi_{\omega_\pm}\right) = \omega\left(S_N\right) = \frac{1}{2N+1}\sum_{i=-N}^{N}\omega_\pm\left(\sigma_i^3\right) = \frac{1}{2N+1}\sum_{i=-N}^{N}\omega_\pm\left(\sigma_i^3\right) = \pm 1,$$

perciò possiamo pensare che ese il limite esiste esso è pari a $\psi_{\omega_\pm}$. Calcoliamo, dunque,

$$\left\|\left(S_N \mp \mathbb{I}\right)\psi_{\omega_\pm}\right\|^2 = \omega_\pm\left(\left(S_N\mp\mathbb{I}\right)^2\right) = \omega_\pm\left(S_N^2 \mp 2S_N + \mathbb{I}\right) = \omega_\pm\left(S_N^2\right) \mp 2\omega_\pm\left(S_N\right) + 1$$

ora, $\omega_\pm(S_N) = \pm 1$, mentre

$$\omega_\pm\left(S_N^2\right) = \frac{1}{(2N+1)^2}\sum_{i,j}\omega_\pm(\sigma_i\sigma_j) = 1,$$

sicché

$$\left\|(S_N \mp \mathbb{I})\,\psi_{\omega_\pm}\right\|^2 = 1 - 2 + 1 = 0,$$

infine,

$$\lim_{n\to\infty} S_N\psi_\pm = -\psi_\pm$$

Conclusioni Le rappresentazioni su ω_+ e ω_- non possono essere connesse da un operatore unitario, altrimenti

$$-\mathbb{I} = \text{s}-\lim_{n\to\infty}\pi_-(S_N) = \text{s}-\lim_{n\to\infty} U\pi_+(S_N)\,U^{-1} = U\mathbb{I}U^{-1} = \mathbb{I}$$

la qual cosa è assurda.
Come si vede variando lo stato ω si ottengono infinite rappresentazioni di $\mathcal{A}$ che sono tutte inequivalenti tra loro.
Nel caso discusso fin qui, il commutante dell'algebra di von Neumann generata da $\pi(\mathcal{A})$ è ridotto ai soli multipli dell'identità. Questo segue che le variabili medie – cioè le osservabili termodinamiche (!!) – sono semplicemente numeri (come ci si aspetta trattando la termodinamica di un sistema). Una rappresentazione in cui il commutante dell'algebra di von Neumann sia ridotto ai multipli dell'identità si dice **fattoriale**. Si ha subito che una rappresentazione irriducibile è fattoriale (ma non è vero il viceversa, come si vede facendo la GNS su uno stato misto).
In generale ogni stato termico dà luogo a una rappresentazione fattoriale che ad alte temperature diviene irriducibile (presenza della sola fase gassosa).

V.4.2 Automorfismi e simmetrie

L'esistenza di rappresentazioni inequivalenti si riflette in modo molto ricco sul problema della implementabilità delle simmetrie.

Simmetrie e gruppi di simmetria Data la C^*-algebra $\mathcal{A}$ che contiene le osservabili, si dice **simmetria** un automorfismo di $\mathcal{A}$. In altre parole, una simmetria α è un elemento del gruppo degli automorfismi di $\mathcal{A}$, $\operatorname{Aut}\mathcal{A}$.
Un **gruppo di simmetria** su $\mathcal{A}$ è invece dato da un gruppo G e da un omomorfismo di gruppo tra G e $\operatorname{Aut}\mathcal{A}$,

$$\begin{aligned}\alpha : G &\to \operatorname{Aut}\mathcal{A}\\ g &\mapsto \alpha_g\end{aligned}$$

Simmetrie esatte e rotte Fissata una rappresentazione π su $\mathcal{H}$ di $\mathcal{A}$, una simmetria α si dice **esatta** se è implementabile in π, cioè se esiste un operatore unitario U su $\mathcal{H}$ tale che

$$\pi(\alpha(A)) = U\pi(A)\,U^{-1}.$$

Viceversa, se α non è implementabile, si dice che α è **rotta** nella rappresentazione π.

Stati invarianti Uno stato ω si dice **invariante** sotto la simmetria α se

$$\omega(\alpha(A)) = \omega(A),$$

per ogni $A \in \mathcal{A}$. ω si dice invariante sotto il gruppo di simmetria G se

$$\omega(\alpha_g(A)) = \omega(A),$$

per ogni $g \in G$ e per ogni $A \in \mathcal{A}$.
La costruzione GNS si lega in modo immediato al problema dell'implementabilità:

Teorema V.14 (Segal) *Sia ω uno stato invariante sotto il gruppo di simmetria (G,α) sulla C^*-algebra $\mathcal{A}$. Sia $(\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega, \psi_\omega)$ la rappresentazione GNS su ω, allora su $\mathcal{H}_\omega$ esistono unici gli operatori unitari U_g che implementano il gruppo, cioè*

$$U_g\psi_\omega = \psi_\omega, \quad U_g\pi_\omega(A)\,U_g^* = \pi_\omega(\alpha_g(A)).$$

L'applicazione $g \mapsto U_g$ fornisce una rappresentazione unitaria del gruppo G su $\mathcal{H}_\omega$. Infine, se G è un gruppo topologico e $g \mapsto \varphi(\alpha_g(A))$ è continua in g per ogni $A \in \mathcal{A}$ e per ogni stato φ, allora U_g è una rappresentazione fortemente continua di G.

Dimostrazione Sul sottospazio denso $\pi_\omega(\mathcal{A})\,\psi_\omega$, definiamo ciascun U_g come

$$U_g \pi_\omega(A)\,\psi_\omega = \pi_\omega(\alpha_g(A))\,\psi_\omega.$$

Allora l'immagine di U_g è densa e abbiamo

$$\begin{aligned}(U_g\pi_\omega(A)\,\psi_\omega, U_g\pi_\omega(B)\,\psi_\omega) &= (\pi_\omega(\alpha_g(A))\,\psi_\omega, \pi_\omega(\alpha_g(B))\,\psi_\omega) = \\ &= \left(\psi_\omega, \pi_\omega\left(\alpha_g^*(A)\,\alpha_g(B)\right)\psi_\omega\right) = (\psi_\omega, \pi_\omega(\alpha_g(A^*B))\,\psi_\omega) = \\ &= \omega(\alpha_g(A^*B)) = \omega(A^*B) = (\pi_\omega(A)\,\psi_\omega, \pi_\omega(B)\,\psi_\omega)\end{aligned}$$

sicché U_g è una isometria che, avendo immagine densa, si estende a un operatore unitario su $\mathcal{H}_\omega$.

Preso $A = \mathbb{I}$, si conclude

$$U_g\psi_\omega = \psi_\omega.$$

Abbiamo, dalla definizione,

$$\begin{aligned}U_g\pi_\omega(A)\,U_g^*\pi_\omega(\alpha_g(B))\,\psi_\omega &= U_g\pi_\omega(A)\,U_g^*U_g\pi_\omega(B)\,\psi_\omega = U_g\pi_\omega(AB)\,\psi_\omega = \\ &= \pi_\omega(\alpha_g(AB))\,\psi_\omega = \pi_\omega(\alpha_g(A))\,\pi_\omega(\alpha_g(B))\,\psi_\omega,\end{aligned}$$

sicché, sul denso $\pi_\omega(\mathcal{A})\,\psi_\omega$ concludiamo

$$\pi_\omega(\alpha_g(A)) = U_g\pi_\omega(A)\,U_g^*.$$

Viceversa, se U_g soddisfa le relazioni

$$U_g\psi_\omega = \psi_\omega, \quad U_g\pi_\omega(A)\,U_g^* = \pi_\omega(\alpha_g(A))$$

allora

$$U_g\pi_\omega(A)\,\psi_\omega = U_g\pi_\omega(A)\,U_g^*U_g\psi_\omega = \pi_\omega(\alpha_g(A))\,U_g\psi_\omega = \pi_\omega(\alpha_g(A))\,\psi_\omega$$

da cui l'unicità di U_g.

Vediamo che U_g è una rappresentazione di G. Abbiamo

$$\begin{aligned}U_gU_h\pi_\omega(A)\,\psi_\omega &= U_gU_h\pi_\omega(A)\,U_h^*\psi_\omega = U_g\pi_\omega(\alpha_h(A))\,\psi_\omega = U_g\pi_\omega(\alpha_h(A))\,U_g^*\psi_\omega = \\ &= \pi_\omega(\alpha_g\alpha_h(A))\,\psi_\omega = \pi_\omega(\alpha_{gh}(A))\,\psi_\omega = U_{gh}\pi_\omega(A)\,\psi_\omega.\end{aligned}$$

Nel caso in cui G sia un gruppo topologico, la continuità segue dal fatto che

$$\lim_{g\to e}\|(U_g - U_e)\,\pi_\omega(A)\,\psi_\omega\|^2 = 2\omega(A^*A) - \lim_{g\to e}\omega(\alpha_g(A^*)\,A) - \lim_{g\to e}\omega(A^*\alpha_g(A)) = 0.$$

(c.v.d.)

Osservazioni Nel seguito, intenderemo sempre che $g \mapsto \omega(\alpha_g(A))$ sia continua in g per ogni $A \in \mathcal{A}$. Dunque, l'esistenza di uno stato invariante risulta nell'implementabilità sulla GNS corrispondente. In particolare, se ω è invariante rispetto a un gruppo di simmetria, nella sua GNS esiste il generatore, via Stone, del gruppo unitario che implementa il gruppo di simmetria.

Se consideriamo come gruppo di simmetria l'evoluzione temporale, $G = \mathbb{R}$, l'esistenza della hamiltoniana è assicurata nello spazio base della rappresentazione GNS su uno stato invariante sotto l'evoluzione temporale, cioè su uno stato stazionario. In generale, la hamiltoniana non esiste!

Possiamo considerare il gruppo delle traslazioni nello spazio e nel tempo, $G = \mathbb{R}^4$, dato uno stato invariante sotto traslazione, ricaviamo che nel corrispondente GNS esiste il quadrimpulso.

Rappresentazioni di G Il fatto che per ciascun g esista l'implementante U_g di α_g non implica che U_g sia una rappresentazione di G su $\mathcal{H}$, base di $(\pi, \mathcal{H})$ rappresentazione di $\mathcal{A}$.

Abbiamo

$$\left(U_{gh}^{-1}U_gU_h\right)\pi(A)\left(U_{gh}^{-1}U_gU_h\right)^{-1} = U_{gh}^{-1}U_gU_h\pi(A)\,U_h^{-1}U_g^{-1}U_{gh} =$$

$$= U_{(gh)^{-1}}\pi\left(\alpha_{gh}\left(A\right)\right)U_{(gh)^{-1}}^{-1} = \pi\left(A\right).$$

Dunque,

$$U_{gh}^{-1}U_gU_h \in \pi'\left(\mathcal{A}\right).$$

Se la rappresentazione è irriducibile, allora

$$U_{gh}^{-1}U_gU_h = \lambda\mathbb{I}$$

da cui

$$U_gU_h = \lambda U_{gh}$$

con λ che è una fase. Il problema dell'eliminazione della fase è molto complicato (teorema di Bargmann) e noi non ce ne occuperemo. In ogni caso, come visto, non si pone dato uno stato invariante.

Esempio: momento angolare Torniamo a considerare il caso di sistemi finiti, cioè il caso Schrödinger. Possiamo introdurre il gruppo di simmetria delle rotazioni associando a ogni $R \in \mathrm{SO}\left(3\right)$ l'automorfismo α_R che agisce sull'algebra di Weyl equivalentemente alla posizione $q \mapsto Rq$ e $p \mapsto Rp$. Poiché lo stato di Fock, ω_{F}, è invariante sotto rotazione, concludiamo che nella rappresentazione GNS su ω_{F} il gruppo SO(3) è rappresentato unitariamente e, grazie al teorema di Stone, esistono tre generatori indipendenti, le componenti del momento angolare.

Poiché tutte le rappresentazioni regolari sono equivalenti, in tutte le rappresentazioni regolari esiste il momento angolare e SO(3) è rappresentato unitariamente.

In ogni caso, per un sistema finito, ogni singola simmetria è implementabile, visto che $\pi \circ \alpha$ definisce una nuova rappresentazione che, se regolare, è equivalente alla rappresentazione π. Nel caso finito, resta il problema della fase, per i gruppi di simmetria.

Invarianze Come detto, una simmetria particolare è l'**evoluzione temporale**, α_t, $t \in \mathbb{R}$, che associa a ogni osservabile A al tempo 0 la sua evoluta al tempo t, $\alpha_t\left(A\right)$ (in termini elementari, si tratta dello schema di Heisenberg).

Una qualsiasi simmetria β si dice un'**invarianza** per il sistema fisico se e solo se commuta con l'evoluzione temporale, cioè

$$\alpha_t\beta\left(A\right) = \beta\alpha_t\left(A\right)$$

per ogni $A \in \mathcal{A}$. Una simmetria è un'invarianza se e solo se *l'evoluto del trasformato è eguale al trasformato dell'evoluto.*

Chiaramente le invarianze sono le uniche simmetrie che hanno rilevanza fisica, perciò ci dedichiamo momentaneamente ad esse.

Supponiamo di lavorare in una rappresentazione in cui l'evoluzione temporale è esatta e data dal gruppo a un parametro U_t. Supponiamo pure che ivi l'invarianza β sia implementata da U. Vogliamo vedere se U_t ed U commutano come le corrispondenti simmetrie. La risposta è che, in generale, questo non avviene. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} U_tUAU^{-1}U_t^{-1} &= UU_tAU_t^{-1}U^{-1} \\ U_t^{-1}U^{-1}U_tUA &= AU_t^{-1}U^{-1}U_tU \end{aligned}$$

dunque,

$$U_t^{-1}U^{-1}U_tU \in \pi'\left(\mathcal{A}\right).$$

Ammettendo che la rappresentazione sia irriducibile,

$$\begin{aligned} U_t^{-1}U^{-1}U_tU &= \lambda\mathbb{I} \\ U_tU &= \lambda UU_t \end{aligned}$$

infine

$$U_tU = \lambda\left(t\right)UU_t$$

dove $\lambda\left(t\right)$ è una fase, $\lambda\left(t\right) = e^{i\eta(t)}$

Ne viene che U_t e U non commutano a causa di una fase. Esistono però delle ipotesi in cui tale fase può essere posta eguale a 1.

Consideriamo il generatore H di U_t, cioè la hamiltoniana del sistema. È ragionevole pensare che la hamiltoniana sia limitata inferiormente, perciò possiamo assumere che $H \geq 0$ (**condizione spettrale**, $\inf \sigma(H) = 0$). Ebbene, la condizione spettrale garantisce la possibilità di eliminare la fase $\lambda(t)$.

Proposizione V.17 *Sia β un'invarianza implementata dall'operatore unitario U sulla rappresentazione irriducibile $(\pi, \mathcal{H})$, in cui l'evoluzione temporale è esatta, essendo implementata dal gruppo U_t che ha come generatore la hamiltoniana H per cui vale la condizione spettrale $H \geq 0$. Allora U e U_t commutano a ogni tempo.*

Dimostrazione Poiché $U_t = e^{-itH}$ e $U_t U = e^{i\eta(t)} U U_t$, derivando in t ambo i membri dell'eguaglianza

$$\begin{aligned} -iHU_tU &= -ie^{i\eta(t)}UHU_t + i\dot{\eta}e^{i\eta(t)}UU_t \\ -e^{i\eta(t)}HUU_t &= -e^{i\eta(t)}UHU_t + \dot{\eta}e^{i\eta(t)}UU_t \\ -[H,U] &= \dot{\eta}U \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \dot{\eta}U &= UH - HU \\ \dot{\eta} &= H - U^*HU \end{aligned}$$

Calcoliamo il valor medio di ambo i membri su un qualsiasi vettore normalizzato di $\mathcal{H}$, abbiamo

$$\dot{\eta} = (\psi, H\psi) - (U\psi, HU\psi).$$

Poiché $0 = \inf \sigma(H) \in \sigma(H)$, scegliamo $\psi \equiv \psi_n$ nell'immagine del proiettore spettrale su $(0, 1/n)$. $\psi_n \to \psi_0$ nell'immagine del proiettore spettrale su $\{0\}$. Se 0 non è un autovalore, $\psi_0 = 0$, altrimenti $H\psi_0 = 0$, perciò concludiamo

$$\dot{\eta} = \lim_{n\to\infty} [(\psi_n, H\psi_n) - (U\psi_n, HU\psi_n)] = -\lim_{n\to\infty} (U\psi_n, HU\psi_n) \leq 0.$$

Ripetendo l'intero ragionamento per U^{-1} che implementa l'invarianza β^{-1}, abbiamo

$$U_t U^{-1} = e^{i\kappa(t)} U^{-1} U_t$$

da cui $\dot{\kappa} \leq 0$. D'altra parte,

$$e^{i\kappa(-t)} UU_t = U_t U$$

sicché $\kappa(-t) = \eta(t)$, infine, $\dot{\eta}(t) \geq 0$, cioè $\dot{\eta}(t) = 0$, infine, per ogni t

$$e^{i\eta(t)} = 1.$$

(c.v.d.)

Invarianze e rottura di simmetria Ammettiamo di avere uno stato puro ω invariante sotto evoluzione temporale. Consideriamo la rappresentazione GNS su ω, $(\pi, \mathcal{H})$. Poiché ω è invariante, l'evoluzione temporale è ivi esatta e se U_t è il suo generatore,

$$U_t \psi_\omega = \psi_\omega$$

da cui

$$H\psi_\omega = 0.$$

Se vale la condizione spettrale, $H \geq 0$, ψ_ω è lo stato fondamentale della hamiltoniana.
Sia β un'invarianza, allora β è esatta se e solo se ω è β-invariante. Infatti, se ω è β-invariante, si ha la tesi, viceversa, sia β implementata da U. Nell'ipotesi in cui lo stato fondamentale è non degenere, poiché, per la proposizione precedente, U commuta con U_t, $U\psi_\omega = e^{i\theta}\psi_\omega$ di modo che

$$\omega(\beta(A)) = (\psi_\omega, U^*AU\psi_\omega) = (\psi_\omega, A\psi_\omega) = \omega(A).$$

Teorema V.15 *Sia ω uno stato puro invariante sotto evoluzione temporale (stazionario). Nella rappresentazione π_ω GNS su ω valga la condizione spettrale per l'hamiltoniana e sia il fondamentale ψ_ω non degenere, allora una invarianza è esatta su π_ω se e solo se lascia invariato lo stato ω.*

Le ipotesi di irriducibilità, condizione spettrale e unicità del fondamentale assicurano rottura spontanea di simmetria per ogni invarianza β per cui $\omega(\beta(A)) \neq \omega(A)$, per qualche A. Questo spiega perché a livello elementare si dice che una simmetria è rotta spontaneamente se non lascia invariato lo stato fondamentale.

V.4.3 Evoluzione temporale nei sistemi di spin

Algebra quasi-locale

Torniamo a considerare i sistemi di spin introdotti come esempio più semplice di sistema infinito. Richiamiamo la costruzione dell'algebra delle osservabili, descritta nell'introduzione a questa sezione. Sia L un insieme numerabile infinito. Possiamo vedere L come un reticolo e, talvolta, sarà ineteressante assumere $L = \mathbb{Z}^\nu$. Per ogni $x \in L$ sia dato uno spazio di Hilbert finito dimensionale $\mathcal{H}_x$. Per ogni sottoinsieme finito $\Lambda \subset X$ definiamo

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\Lambda &\equiv \bigotimes_{x\in\Lambda}\mathcal{H}_x\\ \mathcal{A}_\Lambda &\equiv \mathcal{B}(\mathcal{A}_\Lambda),\end{aligned}$$

le $\mathcal{A}_\Lambda$ si dicono **algebre locali**.
In questo modo, se $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$, è definito l'isomorfismo

$$\mathcal{A}_{\Lambda_1} \mapsto \mathcal{A}_{\Lambda_1} \otimes \mathbb{I}_{\Lambda_2\setminus\Lambda_1} \subset \mathcal{A}_{\Lambda_2}$$

per cui è possibile identificare $\mathcal{A}_{\Lambda_1}$ con una sottoalgebra di $\mathcal{A}_{\Lambda_2}$.
Passando all'unione delle algebre locali e chiudendo in norma, otteniamo l'**algebra quasi-locale** $\mathcal{A}$. Essa è caratterizzata dalle seguenti proprietà

(i) $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ implica $\mathcal{A}_{\Lambda_1} \subset \mathcal{A}_{\Lambda_2}$;

(ii) $\bigcup_\Lambda \mathcal{A}_\Lambda$ è denso in $\mathcal{A}$;

(iii) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}_\Lambda$ hanno idenitità comune $\mathbb{I}$;

(iv) $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$ implica $[\mathcal{A}_{\Lambda_1}, \mathcal{A}_{\Lambda_2}] = 0$.

Traslazioni e abelianità asintotica

Supponiamo adesso che $L = \mathbb{Z}^\nu$ e che tutti gli $\mathcal{H}_x$ siano copie di $\mathcal{H}_0$, di modo che per ogni $a \in \mathbb{Z}^\nu$, esistono le mappe unitarie canoniche $U_a : \mathcal{H}_\Lambda \to \mathcal{H}_{\Lambda+a}$ e gli isomorfismi $\tau_a : A \mapsto U_a A U_a^{-1}$ di $\mathcal{A}_\Lambda$ in $\mathcal{A}_{\Lambda+a}$, che si estendono agli automorfismi di $\mathcal{A}$ che chiamiamo ancora τ_a che godono della proprietà di gruppo

$$\tau_a\tau_b = \tau_{a+b}.$$

Ora, dalla proprietà (iv) abbiamo che se A, B appartengono a qualche algebra locale, allora

$$\lim_{a\to\infty} \|[A, \tau_a B]\| = 0,$$

dalla (ii), per ogni $A, B \in \mathcal{A}$, abbiamo

$$\lim_{a\to\infty} \|[A, \tau_a B]\| = 0$$

che si dice **abelianità asintotica (in norma)**.

Interazioni e hamiltoniane locali

In questa sottosezione, ci proponiamo di costruire l'evoluzione temporale α_t sull'algebra quasi-locale $\mathcal{A}$, a partire da interazioni locali.

Una funzione Φ dai sottoinsiemi finiti di L in $\mathcal{A}$ tale che $\Phi(X) = \Phi^*(X) \in \mathcal{A}_X$ si dice **interazione**. Per un sottoinsieme $\Lambda \subset L$ finito, definiamo l'hamiltoniana associata come

$$H_\Lambda \equiv \sum_{X\subset\Lambda} \Phi(X).$$

Ne viene che H_Λ è un elemento autoaggiunto di $\mathcal{A}_\Lambda$.
Se $L = \mathbb{Z}^\nu$ diciamo che le interazioni Φ sono **invarianti per traslazione** se

$$\Phi(X + a) = \tau_a\Phi(X)$$

per ogni X finito e per ogni $a \in \mathbb{Z}^\nu$.

Un'interazione si dice a **range finito** se dato $x \in L$, l'insieme

$$S_x \equiv \{X \subset L, \#X < \infty \,|x \in X \,\wedge\, \Phi(X) \neq 0\}$$

è finito. In altri termini, un'interazione ha range finito se ogni punto interagisce con un numero finito di insiemi finiti di altri punti (in particolare, ogni punto interagisce con un numero finito di altri punti).

Ipotesi Sotto varie condizioni di limitatezza un'interazione Φ definisce un gruppo a un parametro di automorfismi dell'algebra $\mathcal{A}$ che possiamo assumere come evoluzione temporale del sistema. Nella nostra discussione assumeremo che l'interazione Φ sia invariante sotto traslazione e a range finito.

Grazie alle due ipotesi, abbiamo che il numero di insiemi N_x che interagiscono con x, cioè

$$N_x \equiv \#S_x$$

è indipendente da x. Indipendente da x sono anche

$$\begin{aligned} M_x &\equiv \sup_{X \in S_x} \|\Phi(X)\| \\ Q_x &\equiv \max_{X \in S_x} \#X \end{aligned}$$

sicché si ha range finito uniforme in x.

Costruzione di α_t: tempi piccoli Per ogni A in un'algebra locale $\mathcal{A}_V$, possiamo considerare l'evoluto temporale secondo H_Λ dato da

$$\alpha_t^\Lambda(A) \equiv e^{itH_\Lambda} A e^{-itH_\Lambda},$$

l'idea è di ottenere α_t passando al limite in norma per $\Lambda \to L$.

Notiamo che

$$\alpha_t^\Lambda(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} [H_\Lambda, [H_\Lambda, \dots [H_\Lambda, A] \dots]]$$

Infatti, la serie converge totalmente essendo H_Λ limitato:

$$\|[H_\Lambda, [H_\Lambda, \dots [H_\Lambda, A] \dots]]\| \leq 2^n \|H_\Lambda\|^n \|A\|$$

e risolve, come $\alpha_t^\Lambda(A)$, l'equazione differenziale

$$\frac{d}{dt} A_t = i [H_\Lambda, A_t].$$

Abbiamo allora

$$\alpha_t^\Lambda(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \sum_{X_n \subset \Lambda} \dots \sum_{X_1 \subset \Lambda} [\Phi(X_n), [\Phi(X_{n-1}), \dots [\Phi(X_1), A] \dots]].$$

In primo luogo, valutiamo la norma di

$$\sum_{X_n} \dots \sum_{X_1} [\Phi(X_n), [\Phi(X_{n-1}), \dots [\Phi(X_1), A] \dots]].$$

Ciascuna sommatoria si restringe a un certo numero di insiemi X_i tali che il commutatore corrispondente non sia nullo e $\Phi(X_i) \neq 0$. Ogni singolo addendo dell'intera somma contribuisce al più per $2^n M^n \|A\|$, perciò ci basta trovare il numero S_n di addendi per concludere la stima.

Fissiamo $n = 1$. Allora gli insiemi X_1 che compaiono nella somma sono quelli appartenenti all'insieme

$$\{X_1 \subset \Lambda \,|X_1 \cap V \neq \emptyset \wedge \Phi(X_1) \neq 0\} = \bigcup_{v \in V} \{X_1 \subset \Lambda \,|v \in X_1 \wedge \Phi(X_1) \neq 0\}$$

sicché, contando gli addendi come gli elementi del secondo membro, abbiamo, posto $|V| \equiv \#V$,

$$S_1 \leq N |V|.$$

Vediamo che succede per $n = 2$. Per ogni fissato X_1, ripetendo il ragionamento di sopra a

$V \cup X_1$, gli addendi che compaiono sono $N(|V| + Q)$. Dunque,

$$S_2 \leq S_1 \cdot N(|V| + Q).$$

Il termine generale è allora formato da

$$S_{n+1} \leq S_n \cdot N(|V| + nQ)$$

Infatti, per ognuna delle S_n scelte di $X_1, \ldots, X_n$ si deve contare il numero di X_{n+1} che interagiscono con

$$V \cup X_1 \cup \ldots \cup X_n.$$

Definito $\bar{N} = \max\{|V|, Q, N\}$ abbiamo $S_1 \leq \bar{N}^2$ e

$$S_{n+1} \leq S_n \bar{N}^2 (n+1),$$

perciò

$$S_n \leq \bar{N}^{2k} k!$$

In definitiva, raggruppando le costanti,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{X_n} \cdots \sum_{X_1} [\Phi(X_n), [\Phi(X_{n-1}), \ldots [\Phi(X_1), A] \ldots]] \right\| &\leq C^n n! \, \|A\|, \\
\left\| \sum_{X_n \subset \Lambda} \cdots \sum_{X_1 \subset \Lambda} [\Phi(X_n), [\Phi(X_{n-1}), \ldots [\Phi(X_1), A] \ldots]] \right\| &\leq C^n n! \, \|A\|,
\end{aligned}$$

Vale la stessa stima, perché anche nel secondo caso si tratta solo di contare gli addendi non nulli e stavolta essi sono in numero inferiore per la presenza del vincolo $X_i \subset \Lambda$.

Dunque, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \sum_{X_n} \cdots \sum_{X_1} [\Phi(X_n), [\Phi(X_{n-1}), \ldots [\Phi(X_1), A] \ldots]]$$

converge totalmente per ogni $|t| < 1/C$. Se chiamiamo A_n il suo termine n-esimo, e se chiamiamo A_n^Λ il termine n-esimo della serie per α_t^Λ, abbiamo $\|A_n\|, \|A_n^\Lambda\| \leq c_n \in \ell^1$, $A_n^\Lambda \to A_n$ e, dunque,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|A_n - A_n^\Lambda\| = \sum_{n=0}^{N} \|A_n - A_n^\Lambda\| + 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n \to 0.$$

Perciò esiste, per $|t| < 1/c$,

$$\lim_{\Lambda \to \infty} \alpha_t^\Lambda (A) \equiv \alpha_t (A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \sum_{X_n} \cdots \sum_{X_1} [\Phi(X_n), [\Phi(X_{n-1}), \ldots [\Phi(X_1), A] \ldots]].$$

Estensione di α_t a tempi piccoli

A $|t| < 1/c$ fissato, possiamo estendere α_t per continuità a un automorfismo di $\mathcal{A}$. Infatti, sull'algebra locale α_t è continuo essendo

$$\|\alpha_t(A)\| \leq \|\alpha_t(A) - \alpha_t^\Lambda(A)\| + \|\alpha_t^\Lambda(A)\| = \|A\|.$$

Estensione gruppale

La legge di gruppo per α_t vale sull'intervallo $(-1/c, 1/c)$, di modo che la definizione di α_t può essere estesa in modo da far valere ovunque la legge gruppale: fissato $T < 1/2c$

$$\alpha_t \equiv (\alpha_T)^n \alpha_{t-nT}$$

dove $n = [t/T]$.

Generalizzazioni

Nella nostra costruzione abbiamo chiesto che ogni punto interagisse con un numero finito di insiemi finiti. Possiamo rimuovere la condizione di numero finito di insiemi, introducendo interazioni a lungo raggio (va ancora tutto bene se queste sono sommabili) e possiamo pure rimuovere la condizione di insiemi finiti, come nella trattazione di Ruelle (vedi bibliografia) in cui si fa l'ipotesi che per qualche $\lambda > 0$

$$\sum_{n\geq 0} e^{n\lambda} \sup_{x\in L} \sum_{\substack{X\ni x\\ \#X=n+1}} \|\Phi(X)\| < +\infty.$$

V.4.4 Medie ergodiche e cluster property

Causalità e principio di località

In questa sottosezione ci riferiamo, anziché al caso dei sistemi di spin su un reticolo, all'algebra quasi-locale della teoria dei campi. In essa a ogni sottoinsieme limitato $\Lambda \subset M$ dello spaziotempo si associa un'algebra locale $\mathcal{A}(\Lambda)$ i cui elementi autoaggiunti sono le osservabili del sistema fisico considerato. Agli assiomi di algebra quasi-locali ricordati nella sottosezione precedente, si aggiunge il **principio di località**, per cui se Λ_1 e Λ_2 sono regioni separate di tipo spazio, allora $[\mathcal{A}(\Lambda_1), \mathcal{A}(\Lambda_2)] = 0$.

Ipotesi e questioni

In $\mathcal{A}$ saranno definite l'evoluzione temporale, α_t, e le traslazioni, $\alpha_{\mathbf{x}}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, di modo che α_x, $x = \left(x^0, \mathbf{x}\right)$, interpola tra algebre locali diverse.
Possiamo considerare varie ipotesi sullo stato ω sul quale andiamo a costruire la rappresentazione

(i) ω sia invariante sotto traslazione,

$$\omega(\alpha_{\mathbf{x}}(A)) = \omega(A)$$

e nella GNS corrispondente il gruppo unitario $U_{\mathbf{x}}$ sia fortemente continuo e generato dall'impulso $\mathbf{p}$;

(ii) ω sia stazionario,

$$\omega(\alpha_t(A)) = \omega(A)$$

di modo che nella GNS corrispondente esista la hamiltoniana H;

(iii) oltre all'ipotesi (ii), richiediamo che ω sia lo stato fondamentale, cioè $H \geq 0$;

(iv) infine, oltre alle richieste fin qui fatte, possiamo imporre la condizione spettrale di **spettro in un cono** per la quale lo spettro congiunto di hamiltoniana e impulso (spettro del quadrimpulso) sia contenuto in un cono Γ, i.e., se $x \in \Gamma$ anche $\lambda x \in \Gamma$ per ogni $\lambda > 0$ e $\Gamma \cap (-\Gamma) = \emptyset$.

Nel seguito ci concentriamo sulle conseguenze delle ipotesi qui delineate. Le ipotesi (i) e (ii) sono tipiche della meccanica statistica e sono proprie degli stati termici. Le ipotesi (i)-(iv) descrivono, invece, gli stati fondamentali.
Poste tali ipotesi ci possiamo chiedere se esse garantiscono l'unicità del fondamentale ψ_ω, $H\psi_\omega = 0$, essendo $U_t\psi_\omega = \psi_\omega$, che abbiamo visto essere importante nella discussione della rottura di simmetria.

Medie ergodiche

Un prezioso strumento per lo studio che intendiamo compiere è dato dalle cosiddette **medie ergodiche**, quali le variabili medie.
Fissiamo una rappresentazione π di $\mathcal{A}$ (per esempio, GNS su ω). Nel proseguo ometteremo la notazione π confondendo rappresentato e rappresentante. Se $|V|$ è la misura di Lebesgue della regione spaziale V, definiamo, se esiste, media ergodica su $A \in \mathcal{A}$ l'operatore $A_\infty \in \pi''(\mathcal{A})$

$$A_\infty \equiv \mathrm{w-}\lim_{V\to\infty} \frac{1}{|V|} \int_V d^3\mathbf{x}\, \alpha_{\mathbf{x}}(A) = \mathrm{w-}\lim_{V\to\infty} A_V$$

dove gli integrali sono intesi alla Riemann.
Il nostro sistema goda di **abelianità asintotica debole**, cioè per ogni $A, B \in \mathcal{A}$ valga

$$\mathrm{w-}\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} [\alpha_{\mathbf{x}}(A), B] = 0,$$

allora le medie ergodiche appartengono al commutatore e dunque al **centro**, $\mathcal{A}' \cap \mathcal{A}''$, dell'algebra. Abbiamo

$$[A_\infty, B] = \mathrm{w-}\lim_{V\to\infty} [A_V, B] = \mathrm{w-}\lim_{V\to\infty} \frac{1}{|V|} \int d^3\mathbf{x}\, [\alpha_{\mathbf{x}}(A), B].$$

Vediamo che il limite è nullo. Presi φ e $\psi \in \mathcal{H}$, scegliamo R_ε in modo che se $|\mathbf{x}| > R_\varepsilon$, allora

$$(\varphi, [\alpha_{\mathbf{x}}(A), B]\psi) < \frac{\varepsilon}{2}$$

dunque

$$\begin{aligned}\left(\varphi, \frac{1}{|V|}\int d^3\mathbf{x}\,[\alpha_{\mathbf{x}}(A), B]\psi\right) &= \frac{1}{|V|}\int_V d^3\mathbf{x}\,(\varphi, [\alpha_{\mathbf{x}}(A), B]\psi) = \\ &= \frac{1}{|V|}\int_{V,|\mathbf{x}|>R_\varepsilon} d^3\mathbf{x}\,(\varphi, [\alpha_{\mathbf{x}}(A), B]\psi) \\ &\quad + \frac{1}{|V|}\int_{V,|\mathbf{x}|<R_\varepsilon} d^3\mathbf{x}\,(\varphi, [\alpha_{\mathbf{x}}(A), B]\psi) \leq \\ &\leq \varepsilon + \frac{1}{|V|}\int_{|\mathbf{x}|<R_\varepsilon} d^3\mathbf{x}\,(\varphi, [\alpha_{\mathbf{x}}(A), B]\psi)\end{aligned}$$

adesso consideriamo V di modo che il secondo sia sotto $\varepsilon/2$ e abbiamo la tesi.

Esistenza delle medie ergodiche Mostriamo adesso che le medie ergodiche esistono. Vediamolo su un denso, la conclusione segue dal fatto che la successione A_V è equilimitata essendo

$$\|A_V\| \leq \frac{1}{|V|}\int d^3\mathbf{x}\,\|\alpha_{\mathbf{x}}(A)\| = \|A\|.$$

Dunque, presi B e $C \in \mathcal{A}$ dobbiamo calcolare il limite per $V \to \infty$ di

$$\begin{aligned}\frac{1}{|V|}\int d^3\mathbf{x}\,(C\psi_\omega, \alpha_{\mathbf{x}}(A)B\psi_\omega) &= \frac{1}{|V|}\int d^3\mathbf{x}\,(C\psi_\omega, \alpha_{\mathbf{x}}(A)B\psi_\omega) = \\ = \frac{1}{|V|}\int d^3\mathbf{x}\,(B^*C\psi_\omega, \alpha_{\mathbf{x}}(A)\psi_\omega) &+ \frac{1}{|V|}\int d^3\mathbf{x}\,(C\psi_\omega, [\alpha_{\mathbf{x}}(A), B]\psi_\omega)\end{aligned}$$

Procedendo come prima, si riconosce che il secondo addendo tende a zero, grazie alla abelianità asintotica debole. Concentriamoci sul primo termine, poiché $\alpha_{\mathbf{x}}$ è implementato da $e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{|V|}\int d^3\mathbf{x}\,(B^*C\psi_\omega, \alpha_{\mathbf{x}}(A)\psi_\omega) &= \frac{1}{|V|}\int d^3\mathbf{x}\,\left(B^*C\psi_\omega, e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\psi_\omega\right) = \frac{1}{|V|}\int d^3\mathbf{x}\int d\mu(\mathbf{p})\,e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = \\ &= \int d\mu(\mathbf{p})\int \frac{d^3\mathbf{x}}{|V|}\,e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = \int d\mu(\mathbf{p})\,F(L,\mathbf{p})\end{aligned}$$

dove $|V| = L^3$ e

$$\begin{aligned}F(L,\mathbf{p}) &= \prod_i g(L,p_i) \\ g(L,p) &= \begin{cases} 1, & p = 0 \\ \sin Lp/Lp, & \text{altrimenti}\end{cases}\end{aligned}$$

poiché la funzione è limitata, converge a $\chi_{\{\mathbf{0}\}}(\mathbf{p})$, e μ è una misura finita,

$$\lim_{|V|\to\infty}(C\psi_\omega, A_V B\psi_\omega) = \left(B^*C\psi_\omega, E_{\{\mathbf{0}\}}A\psi_\omega\right)$$

cioè

$$A_\infty B\psi_\omega = BE_{\{\mathbf{0}\}}A\psi_\omega$$

se $E_{\{\mathbf{0}\}} = \chi_{\{\mathbf{0}\}}(\mathbf{p})$ è il proiettore spettrale dell'impulso nel punto $\mathbf{0} = (0,0,0)$.
Dunque, come sottoprodotto della dimostrazione dell'esistenza delle medie ergodiche abbiamo la seguente proposizione (formulazione di von Neumann del teorema ergodico)

Proposizione V.18 *Siano $A, B \in \mathcal{A}$, allora, se $E_{\{\mathbf{0}\}}$ è il proiettore spettrale congiunto dell'impulso nell'origine, nella rappresentazione GNS su ω invariante sotto traslazioni, abbiamo*

$$\text{w-}\lim_{V\to\infty}\frac{1}{|V|}\int_V d^3\mathbf{x}\,\alpha_{\mathbf{x}}(A)B\psi_\omega = A_\infty B\psi_\omega = BE_{\{\mathbf{0}\}}A\psi_\omega.$$

Cluster property Poiché le medie ergodiche sono legate al proiettore sull'autospazio fondamentale, il problema dell'unicità del fondamentale potrà essere affrontato usando le medie ergodiche.

Troviamo il seguente

Teorema V.16 *Lo spazio $\mathcal{H}_0 \equiv R\left(E_{\{\mathbf{0}\}}\right)$, autospazio relativo all'autovalore nullo dell'impulso, è unidimensionale se e solo se vale la* **cluster property in media**, *cioè se e solo se per ogni $A, B \in \mathcal{A}$ vale*

$$\lim_{V\to\infty} \frac{1}{V}\int d^3\mathbf{x}\, \omega\left(\alpha_{\mathbf{x}}\left(A\right)B\right) = \omega\left(B\right)\omega\left(A\right).$$

Dimostrazione La cluster property in media si riscrive

$$\lim_{V\to\infty} \frac{1}{V}\int d^3\mathbf{x}\, \left(\psi_\omega, \alpha_{\mathbf{x}}\left(A\right)B\psi_\omega\right) = \left(\psi_\omega, B\psi_\omega\right)\left(\psi_\omega, A\psi_\omega\right)$$

Per quanto dimostrato sopra

$$\lim_{V\to\infty} \frac{1}{V}\int d^3\mathbf{x}\, \left(\psi_\omega, \alpha_{\mathbf{x}}\left(A\right)B\psi_\omega\right) = \left(\psi_\omega, BE_{\{\mathbf{0}\}}A\psi_\omega\right).$$

Poiché

$$\left(\psi_\omega, B\psi_\omega\right)\left(\psi_\omega, A\psi_\omega\right) = \left(\psi_\omega, BP_{\psi_\omega}A\psi_\omega\right)$$

abbiamo l'eguaglianza dei due primi membri se e solo se

$$\left(B^*\psi_\omega, E_{\{\mathbf{0}\}}A\psi_\omega\right) = \left(B^*\psi_\omega, P_{\psi_\omega}A\psi_\omega\right),$$

cioè se e solo se

$$E_{\{\mathbf{0}\}} = P_{\psi_\omega},$$

(c.v.d.) equivalentemente, $E_{\{\mathbf{0}\}}$ è unidimensionale.

CP e CP in media La cluster property propriamente detta è invece

$$\lim_{\mathbf{x}\to\infty} \omega\left(\alpha_{\mathbf{x}}\left(A\right)B\right) = \omega\left(A\right)\omega\left(B\right).$$

La cluster property (CP) implica la cluster property in media, dunque, l'unicità del generatore dello spazio invariante per traslazione.
Come abbiamo visto,

$$A_\infty B\psi_\omega = BE_{\{\mathbf{0}\}}A\psi_\omega,$$

se vale la CP, $E_{\{\mathbf{0}\}}$ è il proiettore su ψ_ω, sicché

$$A_\infty\left(B\psi_\omega\right) = B\left(\psi_\omega, A\psi_\omega\right)\psi_\omega = \omega\left(A\right)\left(B\psi_\omega\right)$$

da cui le medie ergodiche sono λ volte l'identità, ossia

$$A_\infty = \omega\left(A\right)\mathbb{I}.$$

Dunque, se con $\mathcal{A}_\infty$ indichiamo l'insieme delle medie ergodiche, abbiamo che la CP implica $\mathcal{A}_\infty = \{\lambda\mathbb{I}\}$.
Viceversa, se $\mathcal{A}_\infty = \{\lambda\mathbb{I}\}$, allora

$$\begin{aligned}\lim_{V\to\infty} \frac{1}{V}\int d^3\mathbf{x}\, \left(\psi_\omega, \alpha_{\mathbf{x}}\left(A\right)B\psi_\omega\right) &= \left(\psi_\omega, A_\infty B\psi_\omega\right) = \lambda\left(\psi_\omega, B\psi_\omega\right) = \\ &= \left(\psi_\omega, B\psi_\omega\right)\left(\psi_\omega, A\psi_\omega\right)\end{aligned}$$

da cui lo spazio invariante per traslazione è unidimensionale.

Riassunto Ricapitolando

$$\text{CP} \Rightarrow \text{CP in media} \Leftrightarrow \dim R\left(E_{\{\mathbf{0}\}}\right) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{A}_\infty = \{\lambda\mathbb{I}\}$$

In particolare, se la rappresentazione è irriducibile, o, il che è lo stesso se ω è puro, $\dim R\left(E_{\{\mathbf{0}\}}\right) = 1$. Il viceversa, in generale non vale.
Passando ad adoperare tutte le ipotesi (i)-(iv) e andando a considerare adesso traslazioni spaziotemporali, troviamo

$$\dim R\left(E_{\{0\}}\right) = 1 \Rightarrow \omega \text{ puro}.$$

Il punto è che andiamo a usare pesantemente le condizioni spettrali (iii) e (iv).

Rottura spontanea di simmetria

Una volta supposte vere (i)-(iv) e preso ω puro, abbiamo unicità del fondamentale di modo che un'invarianza è esatta se e solo se lascia ω invariante, i.e., tutte le invarianze che non lasciano inalterato il fondamentale sono rotte spontaneamente.

$\dim R\left(E_{\{0\}}\right) = 1 \Rightarrow \omega$ puro

Vediamo di dimostrare l'asserto fatto usando la condizione spettrale. Essa garantisce che tutti gli operatori nel commutante sono invarianti spaziotemporali, cioè

$$A \in \pi'_\omega(\mathcal{A}) \Rightarrow U_x A U_x^{-1} = A.$$

Ammettiamo di averlo mostrato. Allora

$$A\psi_\omega = U_x A U_x^{-1}\psi_\omega = U_x A\psi_\omega,$$

ma se $\dim R\left(E_{\{0\}}\right) = 1$, avendo $A\psi_\omega \in R\left(E_{\{0\}}\right)$, concludiamo

$$A\psi_\omega = \lambda\psi_\omega,$$

dunque

$$A(B\psi_\omega) = BA\psi_\omega = \lambda(B\psi_\omega)$$

da cui $A = \lambda\mathbb{I}$. Infine, $\pi'_\omega(\mathcal{A}) = \{\lambda\mathbb{I}\}$ e ω è uno stato puro.

Condizione spettrale implica $\pi'_\omega(\mathcal{A})$ invariante

Non ci resta che dimostrare che l'invarianza del commutante è dovuta alla condizione spettrale. Prima di procedere notiamo che

$$(\varphi, U_x\psi) = \int d^4\mu_{\varphi,\psi}(p)\, e^{ip\cdot x}$$

sicché la trasformata di Fourier di $(\varphi, U_x\psi)$ è la misura complessa $d^4\mu_{\varphi,\psi}(p)$ che ha supporto nello spettro congiunto del quadrimpulso, $\sigma(p)$. Analogamente,

$$(\varphi, U_{-x}\psi) = \int d^4\mu_{\varphi,\psi}(p)\, e^{-ip\cdot x},$$

di modo che la trasformata di Fourier di $(\varphi, U_{-x}\psi)$ è la misura complessa $d^4\mu_{\varphi,\psi}(-p)$ che ha supporto in $-\sigma(p)$. Nella dimostrazione useremo questo fatto.
Vogliamo vedere che se $A \in \pi'_\omega(\mathcal{A})$ allora $A = U_x A U_x^{-1}$, cioè, ommettendo la notazione π_ω, per ogni $B, C \in \mathcal{A}$

$$\left(C\psi_\omega, U_x A U_x^{-1} B\psi_\omega\right) = (C\psi_\omega, AB\psi_\omega).$$

A questo scopo notiamo che

$$\begin{aligned}\left(C\psi_\omega, U_x A U_x^{-1} B\psi_\omega\right) &= \left(U_x\psi_\omega, C^* U_x A U_x^{-1} B\psi_\omega\right) = \left(\psi_\omega, U_x^{-1} C^* U_x A U_x^{-1} B\psi_\omega\right) = \\ &= \left(\psi_\omega, A U_x^{-1} C^* B\psi_\omega\right) = \left(\psi_\omega, U_x A U_x^{-1} C^* B\psi_\omega\right)\end{aligned}$$

perciò ci basta dimostrare che

$$\left(\psi_\omega, U_x A U_x^{-1} B\psi_\omega\right) = (\psi_\omega, AB\psi_\omega),$$

o, equivalentemente, che $\left(\psi_\omega, U_x A U_x^{-1} B\psi_\omega\right)$ è indipendente da x.
Ora,

$$\begin{aligned}\left(\psi_\omega, U_x A U_x^{-1} B\psi_\omega\right) &= \left(\psi_\omega, U_x A U_x^{-1} B U_x\psi_\omega\right) = (B^*\psi_\omega, U_x A\psi_\omega) \\ \left(\psi_\omega, U_x A U_x^{-1} B\psi_\omega\right) &= \left(A^*\psi_\omega, U_x^{-1} B\psi_\omega\right) = (A^*\psi_\omega, U_{-x} B\psi_\omega)\end{aligned}$$

passando alla trasformata di Fourier, abbiamo, esaminando l'ultimo mebro della prima equazione, che essa ha supporto in $\sigma(p) \subset \Gamma$, mentre esaminando l'ultimo membro della seconda equazione, che essa ha supporto in $-\sigma(p) \subset -\Gamma$. Per la condizione spettrale, $\Gamma \cap (-\Gamma) = \{0\}$, concludiamo che la trasformata di Fourier di $\left(\psi_\omega, U_x A U_x^{-1} B\psi_\omega\right)$ ha supporto nel solo $\{0\}$, perciò è una combinazione della delta di Dirac in 0 e delle sue derivate. D'altra parte, la funzione $x \mapsto \left(\psi_\omega, U_x A U_x^{-1} B\psi_\omega\right)$ è limitata, perciò non può avere come trasformate delle derivate di delta. Infine, essa ha come trasformata una delta, perciò è una costante, come volevamo.

Teorema V.17 *Sia ω uno stato invariante sotto traslazioni spaziotemporali. Nella rappresentazione GNS su ω, si considerino impulso ed energia, generatori via Stone, delle traslazioni spaziotemporali.*

Nelle ipotesi che impulso ed energia commutino, che lo spettro congiunto contenga l'origine e sia contenuto in un cono con vertice nell'origine, si ha che lo spazio dei vettori invarianti per traslazioni spaziotemporali in $\mathcal{H}_\omega$ è unidimensionale (unicità del fondamentale), se e solo se ω è uno stato puro.

Come corollario della dimostrazione di sopra abbiamo che $U_x \in \pi''(\mathcal{A})$ e, infine, impulso e posizione appartengono all'algebra di von Neumann generata da $\mathcal{A}$ su $\mathcal{H}_\omega$, cioè sono osservabili generalizzate (Borchers).

Capitolo VI

Interpretazione probabilistica delle teorie quantistiche

Di seguito discutiamo il problema dell'interpretazione del formalismo della meccanica quantistica (abbrevieremo con MQ) introdotto nel capitolo precedente. La questione è ancora oggi molto controversa, sicché il nostro scopo principale sarà quello di chiarirne bene i termini: ogni problema, prima di essere risolto, deve essere impostato correttamente!
L'intera trattazione è pesantemente basata sugli appunti di Giovanni Morchio (si veda la bibliografia).

VI.1 Necessità di una interpretazione

Sistemi classici

Le teorie classiche, quali la meccanica classica, l'elettromagnetismo, la termodinamica... rappresentano la realtà in termini di **stato di cose**, associando ai diversi ambiti fenomenologici e ai diversi sistemi opportune **variabili** che assumono, tutte insieme, valori ben definiti per ogni singolo sistema assegnato.
In altre parole, le teorie classiche hanno un apparato simbolico che proviene dalla formalizzazione di nozioni che si pensano ben stabilite dal punto di vista sperimentale. Eventuali incertezze sui valori da assegnare alle variabili così individuate sono attribuite ai limiti degli apparati di misura o di preparazione che, in linea di principio, possono essere rimossi. Le incertezze possono essere codificate nel formalismo identificando uno stato con una misura di probabilità che riproduca le frequenze con cui le variabili assumono determinati valori su una successione di sistemi sottoposti ad eguale preparazione.

Sistemi quantistici

La meccanica quantistica nasce dalle difficoltà di tutte le teorie classiche nella descrizione dei sistemi atomici. Tali difficoltà sono attribuite alla necessità di prevedere concetti quali indeterminazione e complementarità del tutto estranei alla formulazione classica. Inoltre, almeno inizialmente, l'oggetto della MQ appariva ben separabile, in termini di scale spaziotemporali, dagli apparati di misura e, in generale, dal mondo macroscopico. Non è dunque strano che il formalismo della meccanica delle matrici, come quello della meccanica ondulatoria, vertesse su variabili (operatori o funzioni d'onda) prive di un significato empirico evidente o univoco e che necessitassero per questo di una **interpretazione**.
Tutto questo spiega perché nella formulazione ordinaria della MQ appare immediatamente la distinzione tra formalismo e interpretazione. A livello elementare, per formalismo si intendono le regole che identificano le variabili quantistiche con operatori su uno spazio di Hilbert, gli stati con le funzioni d'onda...; per interpretazione si intende invece l'insieme delle regole che dal formalismo fanno discendere alle previsioni sulle osservazioni sperimentali, che in MQ fanno associare operatori autoaggiunti ad apparati di misura, il loro spettro coi risultati delle possibili misure, i coefficienti di espansione delle funzione d'onda con le ampiezze di probabilità dei relativi risultati...
Se è vero che ogni teoria necessita di un'interpretazione, in MQ la costruzione dell'interpretazione è particolarmente difficile a causa del linguaggio poco realistico di cui è permeato il formalismo.

Principio di indeterminazione e interpretazione

Peraltro, si deve riconoscere il ruolo vincolante nell'interpretazione esercitato dal principio di indeterminazione che afferma l'impossibilità di misurare simultaneamente posizione ed impulso. Infatti, a causa del principio di indeterminazione, ogni interpretazione può essere applicata solo a situazioni sperimentali in cui non si proceda all'osservazione contemporanea di posizione e impulso. L'**interpretazione ordinaria** della MQ, quella di Copenhagen, riconosce e generalizza questo vincolo, limitandosi a fornire previsioni per la misura di insiemi di **osservabili compatibili**, identificati con gli insiemi di operatori autoaggiunti commutanti.

Scopo della trattazione

Quello che vorremo fare nel corso di questo capitolo è

- capire le implicazioni della *prudenza interpretativa* che deriva dalla considerazione delle sole osservabili compatibili;
- capire se tale prudenza sia realmente necessaria, equivalentemente, se la MQ sia o no riformulabile come teoria classica, in cui il principio di indeterminazione assume il significato di **impossibilità di preparazione di stati** per cui siano noti assieme impulso e posizione.

Un'alternativa

Un modo alternativo in cui si può compiere un'analisi sulle regole interpretative della MQ è quello di capire se esse discendono o meno dal formalismo. In altre parole, si tratta di rimuovere la distinzione tra oggetto della MQ e apparato di misura (in ultima analisi, osservatore!) e applicare il formalismo della MQ all'apparato di misura stesso. In questo modo si persegue l'obiettivo di eliminare le regole interpretative, o meglio di restringerle, renderle implicite come avviene nelle teorie classiche.

La difficoltà di questa strada è quella di ottenere dal formalismo della MQ la realtà dei fenomeni macroscopici, cioè il fatto che i sistemi macroscopici, in particolare gli apparati di misura, non si trovino mai in stati che presentino delle indeterminazioni tali da impedire la lettura del risultato (per esempio, un contatore scatta o no, il gatto di Schrödinger è vivo o morto...). Questo problema coincide in parte con il problema della **localizzazione**, cioè dell'assenza, o della mancata osservazione, di stati che presentino dispersione sulla posizione per sistemi macroscopici.

In ogni caso, i risultati dell'applicazione del formalismo della MQ all'analisi dei processi di misura possono essere interpretati con i limiti di cui sopra sulla comprensione degli stati dei sistemi macroscopici: tali limiti rendono necessarie nuove ipotesi, le quali conducono a una interpretazione autodeterminata della MQ. Per quello che se ne sa oggi, l'interpretazione così ottenuta sembra coincidere con quella ordinaria, oggetto del nostro studio.

VI.2 Interpretazioni parziali

VI.2.1 Formalismo classico e formalismo quantistico

Prima di andare a studiare nel dettaglio l'interpretazione ordinaria della MQ per riconoscerne conseguenze, limiti ed estendibilità, allo scopo di fissare le idee sugli aspetti fondamentali, richiamiamo brevemente le strutture dei formalismi classici e quantistici di cui ci siamo occupati diffusamente nel capitolo precedente.

Sistemi classici

Un sistema classico è di solito definito da un insieme di punti (spazio delle fasi) e da equazioni (hamiltoniane) di evoluzione temporale. La sue variabili possono essere identificate con le funzioni, per esempio continue, su uno spazio dato, localmente identificabile con $\mathbb{R}^\nu$ (come le coordinate su una varietà); gli stati del sistema sono allora i punti dello spazio detto o, se si vuole dare una descrizione probabilistica, dalle misure su tale spazio. Per misurare le funzioni continue, occorreranno misure boreliane.

Generalizzando, come è necessario per rendere conto dei sistemi classici a infiniti gradi di libertà, bisogna ipotizzare che lo spazio delle fasi, non sia una varietà, ma semmai uno spazio topologico di Hausdorff X, le cui funzioni continue rappresentano le osservabili. Gli stati sono adesso le misure di Baire sullo spazio delle fasi.

Per il teorema di Riesz-Markov, si può parlare di funzionali lineari e positivi sull'algebra delle funzioni continue, anziché di misure regolari.

I punti $x \in X$ rappresentano gli stati puri, dati da misure delta, non decomponibili in combinazioni convesse di altre misure. Gli stati puri definiscono sulle funzioni continue dei funzionali lineari moltiplicativi, $x(f) \equiv f(x)$,

$$x(fg) = fg(x) = f(x)\,g(x) = x(f)\,x(g)\,.$$

Assegnare uno stato, significa assegnare una probabilità a ogni evento, cioè una misura a ogni misurabile. Dunque, assegnare uno spazio X e una misura, equivale ad assegnare un funzionale lineare positivo sulla C^*-algebra delle funzioni continue su X.
Come abbiamo visto, i punti di X definiscono funzionali moltiplicativi sulla C^*-algebra $\mathcal{C}(X)$, e, come sappiamo, vale il vicersa: ogni C^*-algebra commutativa contenente l'identità è isomorfa all'algebra delle funzioni continue sul suo spettro di Gel'fand, cioè sullo spazio dei funzionali moltiplicativi, con la topologia debole che rende tale spazio compatto di Hausdorff. Ne viene che assegnare uno spazio di Hausdorff compatto e una probabilità per i suoi eventi è equivalente ad assegnare un funzionale lineare positivo su una C^*-algebra astratta commutativa, con identità.
Un sistema classico è **definito** da una C^*-algebra commuativa i cui elementi sono interpretati come osservabili, mentre gli stati sono i suoi funzionali positivi (le misure di Baire sul suo spettro di Gel'fand).
L'evoluzione temporale è descritta da un gruppo di applicazioni $\Gamma_t : X \to X$ che definisce il gruppo a un parametro di automorfismi

$$\alpha_t(f)(x) = f(\Gamma_{-t}(x))\,.$$

Viceversa, ogni automorfismo di $\mathcal{C}(X)$ è della forma di sopra:

Proposizione VI.1 *α è un automorfismo della C^*-algebra $\mathcal{A}$ se e solo se esiste l'applicazione Γ dallo spettro in sé talché*

$$\alpha(f) = f \circ \Gamma^{-1}.$$

Dimostrazione Se un tale Γ esiste, allora, per $x \in X \equiv \Sigma(\mathcal{A})$,

$$\begin{aligned} \alpha(f)(\Gamma(x)) &= f(x) \\ \Gamma(x)(f) &= \alpha^{-1}(f)(x) = x\left(\alpha^{-1}(f)\right) \end{aligned}$$

Poiché Γ manda funzionali moltiplicativi in funzionali moltiplicativi, Γ manda X in sé e sosituito tale Γ in $f \circ \Gamma^{-1}$ otteniamo α come si voleva.

(c.v.d.)

Sistemi quantistici In MQ come si ottiene astraendo dalla formulazione più elementare, le osservabili sono operatori autoaggiunti su uno spazio di Hilbert. Poiché, dal teorema spettrale, gli operatori illimitati sono funzioni illimitate di operatori limitati, ci possiamo restringere, senza troppa perdita di generalità (basta riscalare le tarature degli strumenti!) a considerare operatori limitati. Chiamiamo algebra delle osservabili, l'algebra di Banach generata dalle osservabili, cioè dagli operatori autoaggiunti che rappresentano osservabili.
Astraendo ancora è chiaro che possiamo assumere le osservabili come gli elementi hermitiani di una C^*-algebra $\mathcal{A}$. Questo perché

(i) lo spazio degli operatori limitati su uno spazio di Hilbert è una C^*-algebra;

(ii) ogni C^*-algebra è isomorfa a una sottoalgebra della C^*-algebra degli operatori limitati su un certo spazio di Hilbert (teorema di Gel'fand-Naimark).

Questa ulteriore astrazione, come sappiamo dal capitolo precedente, è particolarmente utile perché consente di separare nettamente gli stati dalle osservabili, con gli stati che non sono più vettori o matrici densità sullo spazio di Hilbert sul quale agiscono le osservabili, ma divengono i funzionali positivi e normalizzati (dunque continui) su $\mathcal{A}$ (vedremo che questa definizione di stato necessiterà di una ulteriore discussione essendo troppo generale e fisicamente scarsamente motivata).
Dato uno stato, attraverso la costruzione GNS, si ottiene una rappresentazione di $\mathcal{A}$ su uno spazio di Hilbert andando a riottenere comunque la prima formulazione della MQ.
La formulazione algebrica, come abbiamo sottolineato più volte nel capitolo precedente, è molto utile nello studio dei sistemi infiniti e quindi nelle teorie relativistiche, dopo $\mathcal{A}$ è l'algebra

quasi-locale ottenuta chiudendo in norma l'unione delle algebre delle osservabili associate a misurazioni effettuate in regioni limitate dello spaziotempo. Osservabili associate a regioni con separazione di tipo spazio risulteranno compatibili a causa della limitatezza della velocità di trasmissione dei segnali, sicché le corrispondenti algebre conterranno elementi che commutano (località).

Bisogna notare che i vincoli dovuti alla località sono molto forti. Per esempio, escludono che in ciascuna algebra locale vi siano operatori con spettro puramente discreto non degenere. Infatti, se in Λ, B ha spettro discreto non degenere, ogni osservabile in Λ', regione separata di tipo spazio da Λ, commuta con B e perciò ha spettro puramente discreto non degenere e ha autovettori comuni a quelli di B. Tutte le osservabili in Λ' commutano tra loro, sicché, usando gli automorfismi di traslazione, si ottiene che ogni algebra locale è commutativa.

VI.2.2 Interpretazioni parziali della meccanica quantistica

Interpretazione ordinaria

Nell'interpretazione ordinaria della meccanica quantistica a ogni apparato o processo di misura corrisponde un elemento hermitiano A di una C^*-algebra, il cui spettro consiste dei risultati che l'apparato può indicare e che, ripetendo la misura su sistemi tutti in un in fissato stato ω, i risultati contenuti nell'intervallo spettrale I compaiono con frequenza relativa pari a $\omega\left(E_A\left(I\right)\right)$, dove $E_A\left(I\right) = \chi_I\left(A\right)$ è il proiettore spettrale relativo ad A sull'intervallo I. Questa regola deriva la sua consistenza dal fatto che il proiettore spettrale su boreliani disgiunti è pari alla somma dei rispettivi proiettori spettrali e che il proiettore spettrale dell'intera retta reale è pari all'identità.

La regola detta si estende in modo ovvio agli insiemi finiti di operatori commutanti, cioè di apparati compatibili: i risultati per A_i nell'intervallo I_i compariranno con frequenze relative

$$\omega\left(E_{A_1}\left(I_1\right)\ldots E_{A_N}\left(I_N\right)\right).$$

Possiamo generalizzare la regola per contemplare il caso in cui si considerano simultaneamente intere sottoalgebre commutative $\mathcal{A}_\alpha$. Stavolta dobbiamo ammettere che i risultati delle osservazioni simultanee degli elementi hermitiani di $\mathcal{A}_\alpha$ appartengono a un insieme X che coincide con lo spettro di Gel'Fand di $\mathcal{A}_\alpha$. A questo proposito, si noti che se $\mathcal{A}_\alpha$ è generata da un insieme finito $A_1, \ldots, A_n$, il suo spettro di Gel'fand (come dimostrato nel capitolo precedente) coincide con il prodotto cartesiano degli spettri $\sigma\left(A_i\right)$ e perciò $X \subset \mathbb{R}^n$; inoltre, un punto $\lambda \in \sigma\left(A\right)$ per $A \in \mathcal{A}_\alpha$ se solo se esiste $x \in X$, funzionale moltiplicativo, tale che $x\left(A\right) = \lambda$, perciò gli spettri degli elementi di $\mathcal{A}_\alpha$ possono essere considerati immersi nello spettro di Gel'fand X.

Algebre commutative come sistemi classici

La regola interpretativa spiegata coincide con l'interpretazione probabilistica del formalismo del sistema classico definito dalla sottoalgebra commutativa $\mathcal{A}_\alpha$.

Fissata $\mathcal{A}_\alpha$, gli stati, cioè i funzionali lineari positivi ω, una volta ristretti a $\mathcal{A}_\alpha$, non sono altro che misure di probabilità su $X = \Sigma\left(\mathcal{A}\right)$ come afferma il teorema di Riesz-Markov combinato con il teorema di Gel'fand. Se $B \in \mathcal{A}_\alpha$ e $B\left(x\right)$ è la sua trasformata di Gel'fand, allora

$$\omega\left(B\right) = \int d\mu_\omega\left(x\right)\, B\left(x\right)$$

e la interpretazione probabilistica della misura $d\mu_\omega$ è precisamente la regola interpretativa di sopra essendo

$$\mathrm{prob}\left(I\right) = \int d\mu_\omega\, \chi_I\left(x\right) = \omega\left(E\left(I\right)\right)$$

per ogni boreliano I (cioè per ogni evento) nello spettro di Gel'fand.

Concludiamo che *l'interpretazione ordinaria* (quella di Copenhagen) della meccanica quantistica (originata dalla regola di sopra) *consiste semplicemente nella collezione delle interpretazioni probabilistiche dei sottosistemi classici definiti dalle sottoalgebre commutative dell'algebra delle osservabili.*

Possibilità di una interpretazione probabilistica globale

Il problema che vogliamo affrontare è quello di capire se la limitazione a sottoalgebre commutative è rimuovibile o meno, in altri termini se la MQ ammetta o meno una interpretazione probabilistica globale, non più indicizzata dalla sottoalgebre. In questo modo, la MQ avrebbe un'interpretazione classica, in cui tutte le variabili potrebbero assumere congiuntamente certi valori con certe probabilità. La MQ non sarebbe allora completa, come sostenuto da Einstein, ma pur sempre completabile!

Principio di indeterminazione L'eventualità che la MQ ammetta un'interpretazione classica non è in diretta contrapposizione con il principio di indeterminazione se esso esprime una impossibilità di preparazione di stati del tutto definiti rispetto alla misura di osservabili non compatibili. Viceversa, l'esistenza di una interpretazione probabilistica globale sarebbe inconciliabile con un principio di indeterminazione che vietasse la possibilità di assegnare simultaneamente dei valori a osservabili incompatibili. Dunque, chiarire il problema dell'interpretabilità classica (c'è una descrizione probabilistica a causa di una ignoranza dello stato di fatto che però esiste) consente anche di capire il vero significato del principio di Heisenberg che fin qui resta un po' oscuro.

Si noti che l'impossibilità di preparazione di uno stato a impulso e posizione definiti è compatibile con una teoria classica, tanto che si verifica nel moto browniano essendo

$$\left\langle x^2 \right\rangle \approx ct \Longrightarrow \left\langle \frac{x^2}{t^2} \right\rangle \approx \frac{c}{t} \Longrightarrow \left\langle x^2 \right\rangle \left\langle v^2 \right\rangle \approx c.$$

Nonostante questo, se assumiamo vere tutte le ipotesi fin qui fatte, l'esistenza di stati che diano origine a valori definiti per ciascuna osservabile è esclusa dal risultato seguente che generalizza il principio di indeterminazione e ne mostra la relazione con il carattere non commutativo dell'algebra delle osservabili:

Teorema VI.1 *Se uno stato ω della C^*-algebra con identità $\mathcal{A}$ definisce stati puri una volta ristretto a ciascuna sottoalgebra generata da un elemento autoaggiunto, allora la rappresentazione GNS di $\mathcal{A}$ sullo stato ω, $\pi_\omega(\mathcal{A})$, è un'algebra commutativa.*

Dimostrazione Sia B un elemento autoaggiunto di $\mathcal{A}$ e ω un funzionale lineare positivo normalizzato su $\mathcal{A}$ che ristretto all'algebra $\mathcal{A}_B$ generata da B sia uno stato puro. Poiché $\mathcal{A}_B$ è un'algebra commutativa, uno stato puro su di essa è una misura di Dirac, perciò un punto dello spettro, infine, la restrizione di ω ad $\mathcal{A}_B$ è un funzionale moltiplicativo, sicché

$$\omega\left(B^2\right) = \omega^2(B).$$

Passiamo a considerare la rappresentazione GNS su ω di $\mathcal{A}$. Se $C \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned}
|\omega(BC) - \omega(B)\,\omega(C)| &= |\omega[(B-\omega(B)\mathbb{I})(C-\omega(C)\mathbb{I})]| = \\
&= |((\pi_\omega(B)-\omega(B)\mathbb{I})\psi_\omega, (\pi_\omega(C)-\omega(C)\mathbb{I})\psi_\omega)| \leq \\
&\leq \omega\left[(B-\omega(B)\mathbb{I})^2\right]\omega\left[(C-\omega(C)\mathbb{I})^2\right] = 0
\end{aligned}$$

da cui

$$\omega(BC) = \omega(B)\,\omega(C),$$

analogamente

$$\omega(CB) = \omega(B)\,\omega(C),$$

Siano A, B, C, D autoaggiunti allora

$$\begin{aligned}
&(\pi_\omega(A)\psi_\omega, \pi_\omega(B)\pi_\omega(C)\;\pi_\omega(D)\psi_\omega) = \omega(ABCD) = \omega(AB)\,\omega(CD) = \\
=\;& \omega(A)\,\omega(B)\,\omega(C)\,\omega(D) = \omega(ACBD) = (\pi_\omega(A)\psi_\omega, \pi_\omega(C)\pi_\omega(B)\;\pi_\omega(D)\psi_\omega)
\end{aligned}$$

Poiché ogni elemento di $\mathcal{A}$ è combinazione lineare di due autoaggiunti, possiamo ripetere il ragionamento per A e D qualsiasi e ottenere infine

$$\pi_\omega(B)\,\pi_\omega(C) = \pi_\omega(C)\,\pi_\omega(B).$$

Ancora, scrivendo ogni elemento come combinazione di autoaggiunti, abbiamo che $\pi_\omega(\mathcal{A})$ è commutativa. **(c.v.d.)**

In altri termini, l'esistenza di stati ω (come sarebbero i punti dello spazio delle fasi del sistema classico corrispondente) che assegnino valori definiti a tutte le osservabili (che siano perciò

puri sulle algebre generate dalle singole osservabili) è possibile solo nel caso in cui l'algebra rappresentata GNS su ω sia commutativa.
In sostanza, l'assenza di stati senza dispesione (perciò di uno spazio delle fasi i cui punti possono essere visti come le *variabili nascoste* di von Neumann, cui è dovuto il teorema di sopra) è data da

(i) la non commutatività dell'algebra delle osservabili;

(ii) l'identificazione degli stati con i funzionali lineari positivi (normalizzati) sulle osservabili.

Il problema della linearità Poiché il secondo punto non è fisicamente ben motivato, il teorema dimostrato non esclude un'interpretazione probabilistica globale della MQ. In effetti, assumere che gli stati siano funzionali **lineari** non ha alcuna interpretazione fisica dal momento che la relazione

$$\omega(A+B) = \omega(A) + \omega(B)$$

coinvolge la somma di due osservabili, A e B, che non hanno interpretazione congiunta, a meno che non appartengano alla stessa sottoalgebra commutativa.
Ne segue che il problema va riformulato esclusivamente sulla base delle interpretazioni parziali associate agli insiemi di osservabili compatibili, assunte come ipotesi.

Ridefinizione di sistema quantistico Dunque, vogliamo vedere se esiste una interpretazione probabilistica globale per un sistema quantistico definito nel modo seguente

I1 le osservabili formano una collezione $\{\mathcal{A}_\alpha\}_\alpha$ di C^*-algebre commutative, in generale non disgiunte, con identità comune $\mathbb{I}$;

I2 gli stati sono collezioni di misure di probabilità, cioè sono collezioni $\{\omega_\alpha\}_\alpha$ di funzionali lineari positivi normalizzati sulle singole algebre che siano anche compatibili, nel senso che ω_α e ω_β coincidano su $\mathcal{A}_\alpha \cap \mathcal{A}_\beta$.

Assumiamo allora l'esistenza di osservabili, sulle quali sia definita una relazione riflessiva e simmetrica di compatibilità. Ammettiamo che gli insiemi di osservabili compatibili siano trattabili come sistemi classici e che gli stati siano funzionali lineari positivi e normalizzati una volta ristretti alle algebre commutative. Così facendo abbiamo posto in primo piano la questione della compatibilità ed eliminato le ipotesi che non fossero consistenti con questa.
Adesso vogliamo vedere se il sistema così definito gode di una interpretazione classica globale, cioè se esistono

T1 uno spazio X, un'applicazione $A \mapsto F_A$ dalle osservabili nelle funzioni su X che ristretta a ogni $\mathcal{A}_\alpha$ sia un isomorfismo, cioè una mappa iniettiva tra $\mathcal{A}_\alpha$ e la sua immagine che conserva le relazioni algebriche;

T2 una misura di probabilità $d\mu$ su X rispetto alla quale le F_A siano misurabili, tale che per ogni α e per ogni $A \in \mathcal{A}_\alpha$

$$\omega_\alpha(A) = \int d\mu(x)\ F_A(x).$$

In altre parole, discuteremo l'immergibilità di un sistema quantistico in un sistema classico.

Modifica tecnica di T1 e T2 Dal punto di vista strettamente tecnico conviene modificare leggermente T1. In effetti, è immediato verificare che i punti di X definiscono funzionali lineari moltiplicativi compatibili sulla collezione di algebre essendo

$$x : A \mapsto F_A(x).$$

Questo pone X in corrispondenza con l'insieme dei funzionali lineari moltiplicativi e compatibili che, per il teorema di Gel'fand è dato dallo spazio $\mathcal{X}$ prodotto topologico degli spettri di Gel'fand delle singole algebre $\mathcal{A}_\alpha$. Per identificare X con la sua immagine in $\mathcal{X}$ si deve allora richiedere che la corrispondenza sia iniettiva, cioè che

$$F_A(x) = F_A(y) \Longrightarrow x = y.$$

A questo punto, X è (si può identificare con) un sottoinsieme di $\mathcal{X}$. Passando alla chiusura X^a di X in $\mathcal{X}$, abbiamo che i suoi punti sono ancora funzionali moltiplicativi compatibili.

Un chiuso in un compatto è compatto, perciò X^a è compatto, le funzioni $F_A(x)$ sono automaticamente continue per il teorema di Gel'fand e le misure $d\mu$ possono essere cercate tra le misure di Baire su X^a.
Lo spazio $\mathcal{X}$ così costruito è allora sede della più generale rappresentazione classica del sistema quantistico definito in I1 e I2.

VI.3 Il problema dell'intepretazione globale

In questa sezione vogliamo discutere il problema delineato accuratamente nella sezione precedente. Assunte le ipotesi I1 e I2, vedremo in quali casi sarà possibile derivare T1 e/o T2. Nel seguito diremo **stati nel senso di Bell** quelli definiti in I2, mentre **stati della MQ** quelli definiti nel modo solito, funzionali lineari positivi e normalizzati.

VI.3.1 Il teorema di Gleason

Stati secondo Bell e stati della MQ

Abbiamo avuto modo di vedere (teorema di von Neumann sull'assenza delle variabili nascoste) che, presi gli stati della meccanica quantistica, è impossibile costruire lo spazio X sul quale ambientare l'interpretazione globale a causa dell'inesistenza di stati (i quali giocherebbero il ruolo di punti di X) che assegnino valori ben definiti a ogni osservabile (quale che sia l'insieme di osservabili che si scelga, purché non commutativo). Prendendo spunto da questo teorema, abbiamo avviato una critica al concetto di stato come funzionale lineare sull'intera algebra delle osservabili. Usando solo l'interpretazione ordinaria della MQ, abbiamo preferito riformulare la nozione di stato, giungendo alla definizione di Bell, I2.

Conseguenze del teorema di Gleason

Ebbene, il teorema di Gleason che ci apprestiamo a discutere (non lo dimostreremo), afferma che se in I1 prendiamo <u>tutte</u> le sottoalgebre commutative dell'algebra $L(\mathcal{H})$ a fissato $\mathcal{H}$, con $\dim \mathcal{H} \geq 3$, allora i funzionali lineari nel senso di Bell coincidono con i funzionali lineari della MQ, di modo che la critica derivante dall'interpretazione ordinaria riproduce la stessa nozione di stato del formalismo.
Come si vede, il punto debole del teorema di Gleason risiede nella richiesta che <u>tutti</u> gli operatori autoaggiunti (limitati) siano osservabili. Del resto, era ragionevole supporre che maggiore è la ricchezza dell'algebra delle osservabili in I1, minori sono le possibilità che un'interpretazione globale esista.

Teorema VI.2 (di Gleason)

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio complesso di Hilbert separabile di dimensione almeno 3, $\dim \mathcal{H} \geq 3$. Sia σ un funzionale a valori reali non negativi definito su tutti i proiettori di $\mathcal{H}$, additivo su coppie di proiettori ortogonali, normalizzato e, in dimensione infinita, continuo su successioni crescenti di proiettori, $P_n \uparrow P$ implica $\sigma(P_n) = \sup_n \sigma(P_n)$. Esiste allora una matrice densità ρ tale che

$$\sigma(P) = \mathrm{Tr}(\rho P)$$

per ogni proiettore P su $\mathcal{H}$.

Dimostrazione

La dimostrazione è abbastanza complicata e la sua parte centrale è costituita da un'analisi degli spazi tridimensionali. Noi la omettiamo. Per una discussione rimandiamo a **R. Jost**, in *Studies in Mathematical Physics*, Princeton University Press.

(c.v.d.)

Commenti sul teorema di Gleason

Vediamo di collegare il teorema di Gleason alla formulazione algebrica del nostro problema. Definiamo come segue il sistema quantistico.
Fissiamo $\mathcal{H}$. Per ogni insieme finito (indicizzato da α) di proiettori ortogonali, passiamo alle combinazioni lineari e chiudiamo in norma, ottenendo una C^*-algebra commutativa $\mathcal{A}_\alpha$.
Prendiamo la collezione $\{\mathcal{A}_\alpha\}$ così costruita come insieme di osservabili (I1). Per continuità, σ si estende a un funzionale lineare positivo e normalizzato σ_α su ogni $\mathcal{A}_\alpha$. Viceversa, ogni famiglia $\{\sigma_\alpha\}$ di funzionali compatibili definisce un funzionale σ che rispetta le ipotesi del teorema di Gleason. Dunque, proprio in forza del teorema di Gleason, ogni funzionale nel senso di Bell è in realtà un funzionale lineare e positivo sull'intera algebra $\mathcal{A}$ di osservabili.

Alternativamente, possiamo prendere per $\mathcal{A}_\alpha$ le sottoalgebre commutative di $L(\mathcal{H})$. Ogni famiglia di funzionali compatibili, lineari, positivi e normalizzati definisce (per restrizione) un funzionale positivo e normalizzato sui proiettori di $\mathcal{H}$ tale che se P_1 e P_2 sono ortogonali, allora appartengono a qualche $\mathcal{A}_\alpha$, perciò

$$\sigma(P_1+P_2)=\sigma_\alpha(P_1+P_2)=\sigma_\alpha(P_1)+\sigma_\alpha(P_2)=\sigma(P_1)+\sigma(P_2)$$

dove la prima e l'ultima eguaglianza seguono dalla definizione di σ come funzionale sui proiettori. Aggiungendo l'ipotesi di continuità richiesta dal teorema di Gleason[8], abbiamo che σ è un funzionale lineare, positivo e normalizzato su tutti i proiettori. Infine, usando la continuità (qui entra davvero l'ipotesi di continuità di σ sulle successioni di proiettori), σ è un funzionale della MQ, di più, è una matrice densità.

Dunque, preso l'intero $L(\mathcal{H})$ come insieme di osservabili (siano poi le $\mathcal{A}_\alpha$ le sottoalgebre commutative o quelle generate dai proiettori ortogonali) l'ipotesi I2 si riduce all'ipotesi che gli stati siano quelli della MQ, cioè i funzionali lineari sull'intera algebra delle osservabili. Dal teorema di von Neumann, segue l'impossibilità della costruzione dello spazio X stesso, di cui in T1 (non si arriva neppure a discutere T2).
Esplicitiamo quest'ultimo punto senza usare il teorema delle variabili nascoste. Valga T_1. Siano P e Q ortogonali. Allora

$$F_P(x)+F_Q(x)=F_{P+Q}(x)$$

da cui il funzionale $x(P)\equiv F_P(x)$ è tale che

$$x(P)+x(Q)=x(P+Q)\,.$$

Ora,

$$[x(P)]^2=F_P^2(x)=F_{P^2}(x)=F_P(x)=x(P)$$

perciò $x(P)=0$ oppure 1 (peraltro, $x(P)\geq 0$, da cui la monotonia richiesta dal teorema di Gleason).
D'altra parte,

$$x(P)=\mathrm{Tr}\,(\rho P)\,,$$

Presi i proiettori sui singoli autovettori di ρ (ha un sonc di autovettori, essendo una matrice densità), imponendo che la traccia sia 1 e che $x(P)$ sia 0 o 1, otteniamo $\rho=(e_1,\cdot)\,e_1$, dove e_1 è uno degli autovettori di ρ. Preso però il proiettore su $(e_1+e_2)/\sqrt{2}$, troviamo $x(P)=\mathrm{Tr}\,(\rho P)=1/2$, da cui l'assurdo.

Come vedremo l'ipotesi $\dim\mathcal{H}\geq 3$ è essenziale. Tale ipotesi è molto restrittiva, basti pensare a uno spin 1/2, o agli stati di polarizzazione di un fotone!

VI.3.2 Algebre disgiunte

Particella di spin 1/2

Vediamo che succede rimuovendo l'ipotesi $\dim\mathcal{H}\geq 3$. Prendiamo $\mathcal{H}\equiv\mathbb{C}^2$ e andiamo a discutere uno spin 1/2 o le polarizzazioni di un fotone. Ammettiamo che le osservabili siano date da tutti gli operatori (giocoforza limitati) hermitiani.
Un elemento dell'algebra è dato da $a_0\mathbb{I}+\mathbf{a}\cdot\sigma$ di modo che le sottoalgebre commutative sono tutte e sole quelle generate dall'identità e da $\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}$, con $\mathbf{n}$ versore tridimensionale. In altre parole le sottoalgebre commutative sono indicizzate dai versori della sfera $\mathbb{S}^2$.

Algebre disgiunte

Il punto strutturale importante di una tale collezione risiede nel fatto che le algebre $\mathcal{A}_\alpha$ (nel nostro caso $\mathcal{A}_\mathbf{n}$) hanno intersezione data solo dai multipli dell'identità o, come diremo sbrigativamente, sono disgiunte.
Quando il sistema quantistico è definito da una collezione di algebre disgiunte allora esiste un'interpretazione probabilistica globale. Il problema di una particella di spin 1/2 è immergibile in un sistema classico!

---
[8] in realtà non serve: rimossa l'ipotesi di continuità, il teorema di Gleason afferma comunque che σ è un funzionale lineare sull'insieme dei proiettori (si perde la costruzione in termini di una matrice densità).

Poiché se in I1 prendiamo algebre disgiunte, allora valgono T1 e T2, si deve concludere che il principio di indeterminazione va espresso nella forma in cui esso nega la possibilità di **preparare** stati senza dispersione in tutte le variabili.
Prima di vedere altri esempi, a parte la particella isolata e ferma di spin $1/2$, di sistemi descritti da algebre disgiunte, vediamo di dimostrare che questa ipotesi garantisce l'estendibilità a un sistema classico.

Teorema VI.3 *Sia $\{\mathcal{A}_\alpha\}_\alpha$ una collezione di C^*-algebre commutative e con identità comue $\mathbb{I}$. Sia $\{\omega_\alpha\}$ una collezione di funzionali compatibili, lineari positivi e normalizzati su ciascuna $\mathcal{A}_\alpha$ separatamente. Se per ogni coppia di indici $\alpha \neq \beta$, $\mathcal{A}_\alpha \cap \mathcal{A}_\beta = \{\lambda\mathbb{I}\}$, allora esistono uno spazio di Hausdorff X, un'applicazione $A \mapsto F_A$ di $\mathcal{A}$ nell'insieme delle funzioni continue su X che ristretta a ciascuna $\mathcal{A}_\alpha$ conservi le relazioni C^*-algebriche e una misura di probabilità $d\mu$ su X tali che, per ogni α e per ogni $A \in \mathcal{A}_\alpha$,*

$$\omega\left(A\right) \equiv \omega_\alpha\left(A\right) = \int_X d\mu\left(x\right)\ F_A\left(x\right).$$

Dimostrazione Indichiamo con $X_\alpha \equiv \Sigma\left(\mathcal{A}_\alpha\right)$ spettro di Gel'fand di $\mathcal{A}_\alpha$. Sia f_A la trasformata di Gel'fand di $A \in \mathcal{A}_\alpha$. Sia X il prodotto topologico degli spazi X_α. I punti di X non sono altro che le successioni generalizzate $\{x_\alpha\}$ e, grazie al teorema di Tychonoff, X è uno spazio compatto di Hausdorff.

Ogni $A \in \mathcal{A}$, diversa da un multiplo dell'identità, appartiene a una e una sola algebra $\mathcal{A}_{\alpha_A}$ perciò è ben definita la funzione F_A data da

$$F_A\left(\{x_\alpha\}\right) = f_A\left(x_{\alpha_A}\right).$$

Infine,

$$F_{\lambda\mathbb{I}}\left(\{x_\alpha\}\right) = \lambda.$$

Per il teorema di Gel'fand, $A \mapsto F_A$ rispetta le relazioni C^*-algebriche. Su ciascun X_α il funzionale ω_α definisce una misura di probabilità $d\mu_\alpha$ che lo rappresenta in base al teorema di Riesz-Markov. Indichiamo con $d\mu$ la misura prodotto delle $d\mu_\alpha$ su X, allora

$$\omega\left(A\right) \equiv \omega_\alpha\left(A\right) = \int_{X_{\alpha_A}} d\mu_{\alpha_A}\left(x_{\alpha_A}\right)\ f_A\left(x_{\alpha_A}\right) = \int_X d\mu\left(x\right)\ F_A\left(x\right).$$

(c.v.d.)

Interpretazioni contestuali Senza ipotesi di disgiunzione, ripetendo i ragionamenti di cui nella dimostrazione, risulta sempre possibile, lavorando nello spazio X prodotto topologico degli spettri di Gel'fand (sede della più generale rappresentazione classica, come abbiamo visto), scrivere, per $B \in \mathcal{A}_\alpha$

$$\omega\left(B\right) = \int_X d\mu\left(x\right)\ F_B^\alpha\left(x\right).$$

Le F_B^α sono definite come

$$F_B^\alpha\left(x\right) = f_B\left(x_\alpha\right),$$

cioè con la trasformata di Gel'fand di B su $\mathcal{A}_\alpha$. A ogni B possono corrispondere più rappresentazioni, a seconda che B sia visto come appartenente a una o a un'altra algebra $\mathcal{A}_\alpha$. Dunque, le funzioni F_B^α riproducono le relazioni di B con gli altri elementi di $\mathcal{A}_\alpha$ e per avere le relazioni di B con tutte le altre osservabili occorre considerare tutte le altre funzioni F_B^β.
Ogni collezione di algebre commutative e stati compatibili ammette una pseudo-interpretazione classica che viene chiamata **contestuale**, nel senso che l'identificazione della variabile classica corrispondente a una data osservabile dipende dal contesto, cioè dalla scelta delle osservabili compatibili per le quali si vogliano riprodurre i risultati previsti dalla interpretazione parziale associata.

Località e intersezioni I sistemi ad algebre disgiunte sono fin troppo semplici, infatti, intersezioni non banali sono automaticamente imposte dalla località: se in regioni causalmente disgiunte Λ_1 e Λ_2 sono rispettivamente localizzate le osservabili A_1 e A_2, B_2, con $[A_2, B_2] \neq 0$, l'osservabile A_1

appartiene ovviamente sia all'algebra che genera assieme ad A_2, sia assieme a quella che genera con B_2. Poiché A_2 e B_2 queste algebre commutative sono disgiunte e si intersecano in $A_1 \neq \lambda\mathbb{I}$.

Altri esempi di sistemi ad algebre disgiunte

In ogni caso, oltre alla polarizzazione di un fotone, esistono altri sistemi quantistici descrivibili in termini di algebre disgiunte. Per esempio, consideriamo una particella libera su una retta. A ogni tempo t definiamo l'algebra commutativa $\mathcal{A}_t$ generata dalla posizione al tempo t, o meglio da una sua funzione limitata, cioè da $f(q(t))$. $\mathcal{A}_t$ si ottiene considerando il calcolo funzionale su $f(q(t))$, di modo che essa conterrà $e^{i\alpha q(t)}$.
Sia $A \in \mathcal{A}_t \cap \mathcal{A}_s$. Poiché $A \in \mathcal{A}_s$, A commuta con $e^{i\alpha q(s)}$, inoltre, poiché $A \in \mathcal{A}_t$, abbiamo che A commuta con $e^{i\alpha q(t)} = e^{i\alpha[q(s)+(t-s)p/m]}$. Grazie alle relazioni di Weyl e al fatto che A commuta con $e^{i\alpha q(s)}$, concludiamo che A commuta con $e^{i\beta p}$. Infine, per l'irriducibilità della rappresentazione di Schrödinger, $A = \lambda\mathbb{I}$. Infine, se solo le coordinate sono osservabili allora vi è immergibilità in un sistema classico. Chiaramente in dimensione due le cose cambiano essendo $[q_1(t), q_2(s)] = 0$.

Costruzione dello spazio X per lo spin $1/2$

Prima di concludere vogliamo esplicitare la costruzione del sistema classico in cui è immergibile secondo il teorema di sopra il sistema quantistico dello spin $1/2$. Fu Bell nel 1967 a riconoscere in questo modo l'immergibilità classica dello spin $1/2$. Costruiremo X in due modi.
Il primo modo è quello di ripercorrere la dimostrazione del teorema. Ogni algebra commutativa $\mathcal{A}_{\mathbf{n}}$ è generata sugli operatori lineari di $\mathbb{C}^2$ da $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ versore di $\mathbb{R}^3$). $X_{\mathbf{n}}$, spettro di Gel'fand di $X_{\mathbf{n}}$, coincide con lo spettro di $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}$, quindi $X_{\mathbf{n}} \equiv \{-1, 1\}$. A $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}$ corrisponde la funzione $x_{\mathbf{n}}$ su $X_{\mathbf{n}}$, perciò a $\alpha\mathbb{I} + \beta\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}$ corrisponde la funzione $\alpha + \beta x_n$.
Ogni stato puro della MQ è autovettore di un qualche $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{m}$, perciò gli stati puri sono indicizzati anch'essi da $\mathbb{R}^3$. Abbiamo

$$\begin{aligned}\omega_{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}) &= (\psi_{\mathbf{m}}, \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\psi_{\mathbf{m}}) = \left(\psi_{\mathbf{m}}, \frac{1+\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{m}}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\psi_{\mathbf{m}}\right) = \\ &= \mathrm{Tr}\left(\frac{1+\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{m}}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\right) = \frac{1}{2}n_i m_j \,\mathrm{Tr}(\sigma_i\sigma_j) = \mathbf{n}\cdot\mathbf{m}\end{aligned}$$

dunque

$$\begin{aligned}\omega_{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}) &= \mathbf{n}\cdot\mathbf{m} = \int d\mu_{\mathbf{m}}^{\mathbf{n}}(x_{\mathbf{n}})\, x_{\mathbf{n}} = \int dx\, [p\delta(x-1) + (1-p)\delta(x+1)]\, x = \\ &= 2p+1\end{aligned}$$

di modo che la misura è definita dal peso

$$p = \frac{1+\mathbf{n}\cdot\mathbf{m}}{2}.$$

Passando al prodotto degli spazi $X_{\mathbf{n}}$ e delle misure $d\mu_{\mathbf{m}}^{\mathbf{n}}$ riproduciamo lo spazio classico in cui è immergibile il sistema quantistico.
Il secondo modo di procedere è quello usato da Bell.A $\mathcal{A}_{\mathbf{n}}$ associamo lo spazio $Y_{\mathbf{n}} \equiv [-1, 1]$, a $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}$ la funzione segno $\varepsilon(x)$, e a $\omega_{\mathbf{m}}$ la misura $\chi_{\mathbf{n}\cdot\mathbf{m}}(x)\,dx$ dove $\chi_{\mathbf{n}\cdot\mathbf{m}}(x)$ è la funzione caratteristica dell'intervallo

$$\left[\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{m}-1}{2}, \frac{1+\mathbf{n}\cdot\mathbf{m}}{2}\right].$$

VI.3.3 Il teorema di Bell-Kochen-Specker

Introduzione

Abbiamo visto come algebre troppo povere (per esempio, disgiunte, come per uno spin $1/2$) soddisfino T1 e T2; di contro, algebre troppo ricche, come tutte quelle finitamente generate da proiettori ortogonali, non giungano a soddisfare neppure T1.
D'altra parte indebolendo successivamente le ipotesi del teorema di Gleason otteniamo

- ancora l'impossibilità a soddisfare T1, teorema di Bell-Kochen-Specker;
- costruzione di T1, ma impossibilità a soddisfare T2, diseguaglianze di Bell;
- algebre disgiunte: T1 e T2.

Abbiamo già visto l'ultimo punto, nella sottosezione precedente. Qui ci occuperemo del primo

punto; nella prossima sottosezione vedremo il secondo (forse il più famoso).
Dall'analisi del teorema di Gleason, abbiamo che il caso interessante compare in dimensione tre, perciò impoveriamo l'algebra delle osservabili di cui nel teorema di Gleason, partendo da uno spazio di Hilbert tridimensionale. In particolare, possiamo considerare le osservabili di momento angolare per un sistema di spin 1.

Spin 1 Consideriamo dunque l'algebra $\mathcal{A}$ generata da operatori autoaggiunti L_i, $i \in J_3$, in dimensione 3, tali che

$$\begin{aligned} [L_i, L_j] &= i\varepsilon_{ijk} L_k; \\ \sum_{i=1}^{3} L_i^2 &= 2. \end{aligned}$$

Restringiamoci ad occuparci di operatori del tipo $P_{\mathbf{n}} \equiv (\mathbf{L} \cdot \mathbf{n})^2$, $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$, $|\mathbf{n}| = 1$. Poiché $\mathbf{L} \cdot \mathbf{n}$ ha autovalori $\{-1, 0, 1\}$ i $P_{\mathbf{n}}$ sono proiettori. Sia $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$ una terna ortogonale, allora

$$[P_{\mathbf{n}_1}, P_{\mathbf{n}_2}] = 0.$$

Infatti, sia $\psi^0_{\mathbf{n}_i}$ autovettore all'autovalore 0 di $P_{\mathbf{n}}$, allora, essendo $P_{n_1} + P_{n_2} + P_{n_3} = 2$,

$$\left(\psi^0_{n_1}, (P_{n_2} + P_{n_3})\, \psi^0_{n_1}\right) = 2,$$

perciò, trattandosi di proiettori,

$$\left(\psi^0_{n_1}, P_{n_2} \psi^0_{n_1}\right) = \left(\psi^0_{n_1}, P_{n_3} \psi^0_{n_1}\right) = 1,$$

sicché $\psi^0_{n_1}$ è autovettore di P_{n_2} e P_{n_3} all'autovalore 1. Ne viene che $\psi^0_{n_1}, \psi^0_{n_2}, \psi^0_{n_3}$, sono vettori ortogonali in $\mathbb{R}^3$ sui quali i P_{n_i} commutano. Infine, i P_{n_i} commutano.
Per ogni terna ortonormale $\{\mathbf{n}_i\}$ in $\mathbb{R}^3$ consideriamo l'algebra $\mathcal{A}_{\{\mathbf{n}_i\}}$ generata dai proiettori $P_{\mathbf{n}_i}$. Il nostro sistema quantistico sia definito dalla collezione di algebre siffatte.

Impossibilità della costruzione di X La misura di uno stato senza dispersione su $P_{\mathbf{n}}$ dà come risultato 0 oppure 1, perciò, assumendo vera T1, concludiamo che a ogni versore $\mathbf{n}$, cioè a ogni $P_{\mathbf{n}}$, corrisponde una funzione $f_{\mathbf{n}}(\xi)$ su uno spazio X a valori in $\{0, 1\}$.
In particolare, sempre per T1, per ogni terna ortonormale $\{\mathbf{n}_i\}$ abbiamo

$$f_{\mathbf{n}_1}(\xi) + f_{\mathbf{n}_2}(\xi) + f_{\mathbf{n}_3}(\xi) = 2.$$

Ragionando a ξ fisso, se vale T1, allora deve esistere una funzione f dalla sfera unitaria bidimensionale in $\{0, 1\}$, tale che per ogni terna $\{\mathbf{n}_i\}$ ortonormale si abbia

$$f(\mathbf{n}_1) + f(\mathbf{n}_2) + f(\mathbf{n}_3) = 2.$$

Il teorema di Bell-Kochen-Specker nega proprio l'esistenza di una tale funzione! Dunque, T1 non può valere.
Si noti che, a differenza del teorema di Gleason, qui non entra minimamente la struttura degli stati, ma quello che preclude l'esistenza di una interpretazione globale sono relazioni all'interno di algebre commutative fissate. Dunque, nessuna collezione di stati compatibili (non necessariamente quelli della MQ) su tali variabili ammette un'interpretazione probabilistica globale.

Veniamo alla dimostrazione del

Teorema VI.4 (Bell-Kochen-Specker)

Non esistono applicazioni f dalla sfera bidimensionale unitaria in $\{0, 1\}$ che su ogni terna ortonormale $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$ soddisfino la relazione

$$f(\mathbf{n}_1) + f(\mathbf{n}_2) + f(\mathbf{n}_3) = 2.$$

Dimostrazione Ragioniamo per assurdo. Valga

$$f(0, 0, 1) = 0,\ f(1, 0, 0) = 1,\ f(0, 1, 0) = 1.$$

Poiché f assume lo stesso valore su punti agli antipodi, identifichiamo i punti della sfera con la retta che passa per essi e l'origine e otteniamo una funzione f sull'intero spazio.

Vogliamo dimostrare che la funzione f vale 0 su tutti i versori che formano un angolo con $(0,0,1)$ il cui seno sia inferiore a $1/3$. In questo modo, ripetendo il ragionamento, riempiamo la sfera e f viene a essere 0 ovunque, assurdo.

Abbiamo subito

$$f(x,y,0)=1$$

di modo che il problema diviene invariante per rotazione attorno all'asse $(0,0,1)$. Dunque, ci basta dimostrare che

$$f(0,\varepsilon,1)=0,\ \varepsilon\in\left(0,\frac{1}{2\sqrt{2}}\right].$$

Supponiamo al contrario che per un ε nell'intervallo detto valga $f(0,\varepsilon,1)=1$. Poiché $f(1,0,0)=1$, si ha $f(0,1,-\varepsilon)=0$.

Poiché $f(0,1,-\varepsilon)=0$, allora

$$f\left(1,-\frac{1}{y},-\frac{1}{\varepsilon y}\right)=1$$

Sia $\mathbf{v}(y)$ il completamento a una terna ortogonale dei vettori ortogonali

$$(1,y,0),\ \left(1,-\frac{1}{y},-\frac{1}{\varepsilon y}\right),$$

allora

$$f(\mathbf{v}(y))=0.$$

Abbiamo

$$\mathbf{v}(y)=\left(1,-\frac{1}{y},\varepsilon y\left(1+y^{-2}\right)\right)$$

Ora, se per ogni ε nell'intervallo considerato $\mathbf{v}(-y)$ è ortogonale a $\mathbf{v}(y)$, allora $f(\mathbf{v}(-y))=1$, contro il fatto che, scambiando y con $-y$ nei ragionamenti di sopra, $f(\mathbf{v}(-y))=0$.

In effetti, $\mathbf{v}(y)$ e $\mathbf{v}(-y)$ sono ortogonali se e solo se

$$\begin{aligned}1-y^{-2}-\varepsilon^2y^2\left(1+y^{-2}\right)^2 &= 0\\ \frac{x^2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2} &= \varepsilon^2\end{aligned}$$

(c.v.d.) che ha soluzioni reali (positive) se e solo se $\varepsilon^2\leq 1/8$, come si voleva.

Dimostrazione topologica All'osso, la dimostrazione si riduce al fatto topologico che su quasi ortogonali si trovano coppie di vettori ortogonali, il cui terzo vettore ortogonale è vicino all'intersezione degli equatori stessi. L'argomento che usa esplicitamente questo fatto topologico è il seguente. Sia A il punto della sfera in cui f vale 0. Se non esiste un intorno di A in cui f vale sempre 0, ci possiamo avvicinare arbitrariamente ad A con punti sui quali f vale 1. Consideriamo uno di questi punti e chiamiamolo B. Sull'equatore relativo ad A, che chiameremo γ_1, f vale 1. Prendiamo un punto F in γ_1 tale che OF (O sia il centro della sfera) sia ortogonale a OB. Preso C tale che OC, OB e OF siano ortogonali, abbiamo che $f(C)=0$. Sia γ_2 l'equatore relativo a C, γ_2 interseca γ_1 in F e G. Adesso, al variare di un punto X su γ_1, consideriamone il corrispondente ortogonale Y su γ_2 e sia γ_3 la curva del punto Z che completa il sistema a una terna ortonormale. Come si vede Y si ottiene considerando l'intersezione dell'equatore per C con l'equatore per X.

La curva continua γ_3 è formata da punti su cui f vale 0. Se B tende ad A, C tende a un punto H di γ_1 ortogonale a F. Per un qualsiasi $X\in\gamma_1$, allora Y tende ad A, con ciò Z tende al punto in γ_1 ruotato di $\pi/2$ di X. Dunque, scelto $X\equiv H$, otteniamo che Z tende a F. Allora la curva γ_3 si avvicina quanto si vuole a F e G, cioè contiene punti distanti di $\pi/2$, la qual cosa è assurda essendo tutti i punti di γ_3 a f nulla.

Commenti Il teorema di Bell-Kochen-Specker non classifica le collezioni di funzionali compatibili come il teorema di Gleason, ma esclude sotto ipotesi molto più deboli, l'esistenza di funzionali senza dispersione.

Come detto nell'introduzione, indebolendo ancora le ipotesi si avrà rappresentabilità classica (T1), ma non si avrà rappresentabilità degli stati della MQ in termini di misure sullo spazio classico (T2).

VI.3.4 Le diseguaglianze di Bell

Collezioni prodotto

Collezioni di algebre commutative che abbiano rappresentazione classica nel senso di T1 eppure presentino intersezioni non banali sono costruibili in termini di prodotti di collezioni distinte disgiunte.
Siano $\{\mathcal{A}^1_\alpha\}$ e $\left\{\mathcal{A}^2_\beta\right\}$ due collezioni di algebre commutative ciascuna disgiunta e perciò ciascuna rappresentabile classicamente sullo spazio X_i, $i \in J_2$.
La collezione delle algebre prodotto, $\{\mathcal{A}_{\alpha\beta}\} \equiv \left\{\mathcal{A}^1_\alpha \times \mathcal{A}^2_\beta\right\}$, ammette rappresentazione funzionale sullo spazio $X \equiv X_1 \times X_2$, data da

$$F_{A_1\times A_2}(x_1, x_2) = F^1_{A_1}(x_1)\, F^2_{A_2}(x_2)\,.$$

Inoltre, lo spazio X coincide con il prodotto su α e β degli spettri di Gel'fand delle algebre $\mathcal{A}_{\alpha\beta}$ (avendo queste spettro di Gel'fand pari al prodotto degli spettri di Gel'fand di $\mathcal{A}^1_\alpha$ e $\mathcal{A}^2_\beta$, come si verifica subito). Per il paragrafo **Modifica tecnica di T1 e T2**, al termine della precedente sezione, questo significa che X è sede della più generale rappresentazione classica del sistema quantistico $\{\mathcal{A}_{\alpha\beta}\}$.
L'interesse delle collezioni prodotto è dato dal fatto che esse soddisfano T1 pur non presentando intersezioni banali. Infatti, $\mathcal{A}^1_\alpha \times \mathcal{A}^2_\beta$ e $\mathcal{A}^1_\alpha \times \mathcal{A}^2_\gamma$ si intersecano in $\mathcal{A}^1_\alpha \times \mathbb{I}$.
Il caso più semplice è dato dal prodotto di due collezioni ciascuna formata da due algebre disgiunte generate da un solo elemento a spettro in $\{-1, 1\}$.
Consideriamo allora le osservabili non commutanti A_1 e B_1, entrambi commutanti con le due non commutanti A_2 e B_2. A questo punto, consideriamo la collezione delle algebre commutative generate, rispettivamente da A_1, A_2; A_1, B_2; B_1, A_2; B_1, B_2.

Realizzazione fisica

Dal punto di vista fisico, possiamo pensare che gli indici diversi siano associati a regioni spaziotemporali causalmente distinte, mentre le ipotesi sugli spettri possono essere verificate pensando ad osservabili come matrici di Pauli. In definitiva, si può pensare a un sistema di due particelle di spin 1/2, localizzate in regioni causalmente distinte dello spaziotempo di ciascuna delle quali si misurano due componenti dello spin. Oppure, si può pensare al sistema formato da due fotoni di cui si misurano le polarizzazioni lungo due direzioni.

Gli stati senza dispersione su questo sistema assegnano ± 1 a ciascuna osservabile e si identificano con gli elementi di $X = \{-1, 1\} \times \{-1, 1\} \times \{-1, 1\} \times \{-1, 1\}$.
Il problema è ora quello di capire se gli stati di un tale sistema quantistico ammettano interpretazione probabilistica globale, cioè se esistano misure di probabilità che riproducono su tutte le variabili i valori medi previsti dalle interpretazioni parziali della MQ.
La risposta è, in generale, negativa. Questo perché si riconosce che tutte le misure di probabilità su X assegnano a certe variabili valori medi diversi da quelli di <u>certi</u> stati. Poiché X contiene ogni spazio di rappresentazione funzionale, i vincoli sui possibili risultati delle misure di probabilità valgono per ogni possibile rappresentazione.

Teorema VI.5 (diseguaglianze di Bell)

Con le notazioni di cui sopra, il valor medio della funzione

$$F_{A_1}F_{A_2} + F_{B_1}F_{A_2} + F_{B_1}F_{B_2} - F_{A_1}F_{B_2},$$

calcolato con qualsiasi misura di probabilità su X, è compreso tra -2 e 2.

Dimostrazione

Si noti che $F_{A_1}(\xi_1) = \xi_1$, $F_{B_1}(\eta_1) = \eta_1$, $F_{A_2}(\xi_2) = \xi_2$, $F_{B_2}(\eta_2) = \eta_2$, perciò la funzione considerata vale

$$\xi_1\xi_2 + \eta_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 - \xi_1\eta_2.$$

Le medie di una funzione X, sotto qualsiasi misura di probabilità, sono le combinazioni convesse dei valori che essa assume su X. Poiché ciascuna F prende valori in $\{-1, 1\}$, le diseguaglianze di Bell si ottengono per verifica diretta. Notando che la funzione considerata assume valori in $[-2,2]$, anche le sue combinazioni convesse assumono valori in $[-2,2]$. **(c.v.d.)**

Irrealizzabilità di T2 Consideriamo il nostro sistema di due spin in cui

$$\begin{aligned} A_1 &= \sigma_1^x, \quad B_1 = \sigma_1^z \\ A_2 &= \frac{\sigma_2^z + \sigma_2^x}{\sqrt{2}}, \quad B_2 = \frac{\sigma_2^z - \sigma_2^x}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Prendiamo allora lo stato definito da

$$\psi = \frac{|+-\rangle - |-+\rangle}{\sqrt{2}}$$

che è autovettore dello spin totale all'autovalore 0.
Lo stato ψ è invariante per rotazione sicché

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\psi, (\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2)^2 \psi\right) = 3 + 3 + 2\,(\psi, \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \psi) = 6 + 6\,(\psi, \sigma_1^x \sigma_2^x \psi) \\ (\psi, \sigma_1^x \sigma_2^x \psi) &= -1 \end{aligned}$$

Poiché ψ è invariante per rotazione e per una rotazione attorno a x di π σ_z va in $-\sigma_z$,

$$(\psi, \sigma_1^x \sigma_2^z \psi) = 0.$$

Dunque,

$$(\psi, A_1 A_2 \psi) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Abbiamo poi

$$(\psi, A_1 A_2 \psi) = (\psi, B_1 A_2 \psi) = (\psi, B_1 B_2 \psi) = -\,(\psi, A_1 B_2 \psi)$$

Ne risulta che, per lo stato definito da ψ, la somma dei risultati medi previsti dalle distinte interpretazioni parziali associate a A_1A_2, B_1A_2, B_1B_2 e A_1B_2 vale $2\sqrt{2}$. Se esistesse una misura di probabilità sullo spazio X riproducente tutte le interpretazioni parziali, la somma dei valori medi su tale misura sarebbe il valor medio della somma, ma esso, per il teorema di Bell, è compreso tra -2 e 2. Perciò, per questo nostro sistema, è il punto T2 a essere irrealizzabile.

Commenti Solitamente le diseguaglianze di Bell sono presentate come segue: le osservabili vengono subito identificate con funzioni su X e gli stati con misure di probabilità. La violazione da parte della MQ delle diseguaglianze di Bell (che seguono da questa ipotesi: osservabili funzioni su X e stati misure su X) sono attribuite alla necessità di considerare diverse misure di probabilità per A_1 a seconda che la si misuri assieme a A_2 o a B_2. Da questo si conclude che la MQ è non locale, visto che la distribuzione di probabilità di una variabile, per esempio A_1, è modificata dalla decisione di misurare, in regioni causalmente distinte, A_2 o B_2.
Il punto è che la non località segue non già dal solo pensare che gli stati siano misure di probabilità, ma che abbia senso ritenere il sistema quantistico immergibile in un sistema classico (ipotesi che le osservabili siano funzioni su X). L'immersione, come abbiamo visto, è possibile dal punto di vista matematico, ma non è detto che abbia senso fisico. Anzi, la non località che se ne deriva una volta assunta la classicità, ci dice proprio che l'identificazione con uno spazio classico è assurda.
In altre parole, *l'origine delle diseguaglianze di Bell* non *è da ricercarsi* nella non località, ma *nella pretesa di assegnare simultaneamente valori definiti a osservabili incompatibili, la qual cosa è in generale falsa*, come dimostrano i teoremi di von Neumann, Gleason e Kochen-Specker (non si vede perché i sistemi di spin 1/2 dovrebbero essere classici, nel senso dell'assegnabilità di cui sopra, quando non lo sono quelli di spin 1).
La violazione delle diseguaglianze di Bell può essere invece vista come una specializzazione, a sistemi che ammettono rappresentazione funzionale comune (cioè T1), del fatto che cercando interpretazioni classiche della MQ si finisce in una certa generalità in interpretazioni contestuali (come avviene quando non vale T1), in particolare non locali.

Conclusioni di Morchio L'esistenza di una rappresentazione funzionale comune di una collezione di algebre di osservabili compatibili non è altro che la possibilità di riprodurre le relazioni interne agli insiemi di osservabili compatibili in termini di assegnazione di valori comuni a tutte le osservabili. Il risultato di Bell-Kochen-Specker mostra in una certa generalità che tale assegnazione è impossibile. Le diseguaglianze di Bell aggiungono che, anche nei casi in cui risulta possibile, *tale assegnazione non è compatibile con le distribuzioni di probabilità definite dagli stati della meccanica quantistica*.

Del tutto in generale (a parte per i sistemi ad algebre disgiunte), l'interpretazione parziale di una teoria quantistica non è estendibile a una interpretazione globale: una teoria quantistica non è allora immergibile in una teoria classica.

Bibliografia

[1] **Michael Reed, Barry Simon**, *Modern Methods of Mathematical Physics*, (volume 1) *Functional Analysis*, Academic Press;
[2] **Michael Reed, Barry Simon**, *Modern Methods of Mathematical Physics*, (volume 2) *Fourier Analysis*, *Self-Adjointness*, Academic Press;
[3] **Michael Reed, Barry Simon**, *Modern Methods of Mathematical Physics*, (volume 3) *Scattering Theory*, Academic Press;
[4] **Michael Reed, Barry Simon**, *Modern Methods of Mathematical Physics*, (volume 4) *Analysis of Operators*, Academic Press;
[5] **Kôsaku Yosida**, *Functional Analysis*, Springer-Verlag;
[6] **Serge Lang**, *Real and Functional Analysis*, GTM, Springer;
[7] **Maria Cristina Abbati, Renzo Cirelli**, *Metodi matematici per la fisica, operatori lineari negli spazi di Hilbert*, Città Studi Edizioni;
[8] **A. A. Kirillov, A. D. Gvišiani**, *Teoremi e problemi dell'analisi funzionale*, MIR;
[9] **Walter Thirring**, *A Course in Mathematical Physics 3: Quantum Mechanics of Atoms and Molecules*, Springer-Verlag;
[10] **Walter Thirring**, *A Course in Mathematical Physics 4: Quantum Mechanics of Large Systems*, Springer-Verlag;
[11] **Paolo Caressa**, *Meccanica quantistica*, appunti dal web `math.unifi.it/~caressa`;
[12] **Gerald Teschl**, *Schrödinger Operators*, appunti dal web `mat.univie.ac.at/~gerald/ftp/book-schroe/`;
[13] **Franco Strocchi**, *An Introduction to the Mathematical Structure of Quantum Mechanics*, Scuola Normale Superiore;
[14] **Franco Strocchi**, *Elements of Quantum Mechanics of Infinite Systems*, World Scientific;
[15] **Rudolf Haag**, *Local Quantum Physiscs*, Springer-Verlag;
[16] **Huzihiro Araki**, *Mathematical Theory of Quantum Fields*, Oxford Science Publications;
[17] **G. L. Sewell**, *Quantum Theory of Collective Phenomena*, Oxford Science Publications;
[18] **C. R. Putnam**, *Commutations Properties of Hilbert Space Operators*, Springer-Verlag;
[19] **Giovanni Morchio**, *Appunti sull'autoaggiunzione*, Università di Pisa;
[20] **Giovanni Morchio**, *Interpretazione probabilistica della meccanica quantistica*, Università di Pisa.