TORTUGA
Publisher

Metodi matematici delle teorie quantistiche

Volume1

Operatori negli spazi di Hilbert e analisi di Fourier

Luglio 2002

Alberto Maggi

[219,915]

55 via Lopez, 57010 Guasticce (LI)

0586 984 980

Sommario

Prefazione

In queste dispense ci proponiamo di fornire gli strumenti adeguati a una formulazione rigorosa della meccanica quantistica dei sistemi finiti ed infiniti. Si tratta, dunque, di introdurre strutture ad alto contenuto matematico che vengono presentate in ordine crescente di difficoltà: dagli operatori lineari negli spazi di Hilbert alla teoria delle C^*-algebre. L'apparato matematico è presentato in modo interamente ispirato dalla fisica (senza fronzoli fini a se stessi): nel secondo volume esso è utilizzato per illustrare in modo rigoroso tre grosse questioni della meccanica quantistica

(i) i sistemi finiti e il teorema di unicità di von Neumann;

(ii) l'esistenza di una dinamica per i sistemi finiti;

(iii) il problema dell'interpretazione probabilistica della meccanica quantistica.

Il lavoro è articolato in due volumi. Nel primo si dà una presentazione dei fatti matematici più semplici e allo stesso tempo più importanti: la teoria degli operatori (preceduta da una sezione introduttiva sulla misura) ambientata, prevalentemente, negli spazi di Hilbert. Nel secondo, apriamo con la teoria spettrale per gli operatori autoaggiunti e poi prendiamo in considerazione il problema dell'esistenza di una dinamica. Lo studio dell'autoaggiunzione, cui si uniscano i teoremi di Wigner e Bargmann sulla rappresentazione unitaria delle simmetrie, è del tutto sufficiente per l'introduzione rigorosa della versione elementare della meccanica quantistica (per intenderci, quella presentata in un corso undergraduate, tipo Istituzioni, che è prerequisito fondamentale per lo studio di questa materia).
A questo punto, siamo in grado di presentare la formulazione C^*-algebrica della più generale teoria fisica. In meccanica quantistica il punto di vista algebrico è superiore non solo perché consente di chiarire i vari bachi della teoria alla Dirac, ma perché fornisce l'unico strumento veramente adatto alla comprensione dei sistemi infiniti (con le loro particolarità, quali le rotture spontanee di simmetria, che non hanno analogo nel caso finito). Nei sistemi infiniti, infatti, fondare la teoria a partire da uno spazio di Hilbert come spazio degli stati è sbagliato, visto che le rappresentazioni delle regole di commutazione non sono tutte equivalenti (come afferma all'incirca il teorema di von Neumann nel caso finito) e, anzi, la scelta della rappresentazione è un problema dinamico, ancorché cinematico (la scelta di una rappresentazione sbagliata comporta la mancata esistenza della hamiltoniana!!), strettamente collegato al fallimento (teorico, non sperimentale) degli approcci perturbativi.
Dunque, vista l'importanza capitale dei sistemi infiniti (che sorgono in modo naturale e inevitabile dalla teoria della relatività speciale, e che sono la base della meccanica statistica), abbiamo dedicato alla teoria delle algebre di operatori la gran parte del secondo volume.
Lo studio delle algebre è molto più complicato di quello delle strutture hilbertiane, perciò, se nei capitoli relativi alla teoria degli operatori negli spazi di Hilbert, si procede a dimostrare puntualmente tutte le affermazioni fatte, nei capitoli successivi ci si deve accontentare della dimostrazione di quei fatti che hanno rilevanza nella comprensione piena del fatto fisico di fondo e che non richiedono strutture matematiche che non appartengono a quell'arsenale matematico di base che – secondo me – deve far parte del bagaglio culturale del fisico matematico prima della Laurea.

Concludendo, queste dispense costituiscono un'esposizione (senza pretese, sia chiaro) dei più importanti metodi della fisica matematica moderna e nascono dalle note da me prese durante la frequentazione dei corsi tenuti dal professor Giovanni Morchio presso l'Università di Pisa.

Guasticce, 25 Novembre 2001
8 Aprile 2002
Alberto Maggi

Piano dell'opera

Volume 1 *Operatori negli spazi di Hilbert e analisi di Fourier*
1. Cenni di teoria della misura
2. Spazi di Banach e di Hilbert
3. Teoria degli operatori lineari negli spazi di Hilbert
4. Analisi complessa
5. Analisi di Fourier
6. Teoria spettrale
7. Operatori compatti e traccia

Volume 2 *Autoaggiunzione e formulazione algebrica della meccanica quantistica*
1. Autoaggiunzione ed esistenza di una dinamica
2. Operatori di Schrödinger
3. Formulazione algebrica della meccanica quantistica
4. Interpretazione probabilistica della meccanica quantistica

Capitolo I

Cenni di teoria della misura

La filosofia di questo testo è quella di chiarire a fondo ogni argomento nella convinzione che solo dalla sistemazione metodica e rigorosa della matematica di base può scaturire uno studio della fisica che sia veramente penetrante. In questo senso, ho ritenuto indispensabile riportare in apertura di trattazione un capitolo in cui vengano esposte le nozioni basilari di teoria generale della misura.
Per la migliore comprensione di quanto segue può risultare utile avere già acquisito i rudimenti della teoria di Lebesgue sugli spazi euclidei, per i quali rimandiamo al corso *Analisi II per fisici* (vedi bibliografia).

I.1 Algebre di insiemi e spazi di misura

I.1.1 Algebre di insiemi

Denoteremo il complementare di un insieme $A \subset X$, con il simbolo $A^c \equiv X \backslash A$. Detto questo, poniamo la prima

Definizione I.1 *Un'algebra di sottoinsiemi di un insieme X è una famiglia $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ che goda delle seguenti proprietà*

(i) $\varnothing \in \mathcal{A}$;

(ii) *(stabilità per unione) se $A, B \in \mathcal{A}$, allora $A \cup B \in \mathcal{A}$;*

(iii) *(stabilità per complementazione) se $A \in \mathcal{A}$, allora $A^c \in \mathcal{A}$.*

Esempio I.1 L'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$ è un'algebra di sottoinsiemi di X. Parimenti, è un'algebra $\{X, \varnothing\}$. ▪

Osservazione I.1 Per le leggi di de Morgan, si ha che se $\mathcal{A}$ è un'algebra e $A, B \in \mathcal{A}$, allora anche $A \cap B$ appartiene ad $\mathcal{A}$, infatti

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$$

ma $A^c, B^c \in \mathcal{A}$ da cui $A^c \cup B^c \in \mathcal{A}$, perciò anche $(A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{A}$. ▪

Osservazione I.2 Un'algebra di insiemi è sempre dotata di un'**ordinamento parziale** indotto dalla relazione

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A.$$

Inoltre, rispetto a tale ordinamento un'algebra è sempre un **reticolo** , per ogni coppia di insiemi $A, B \in \mathcal{A}$ ha un massimo e un minimo: $A \cup B$, $A \cap B$. ▪

Non tutti le sottofamiglie dell'insieme delle parti formano un'algebra d'altra parte è sempre possibile associargliene una

Proposizione I.1 *Se $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}(X)$, allora esiste un'algebra minima $\mathcal{A}(\mathcal{X})$ contenente $\mathcal{X}$ (ogni algebra contenente $\mathcal{X}$ deve contenere $\mathcal{A}(\mathcal{X})$).*

Dimostrazione Sia $\mathcal{F}$ la famiglia di tutti le algebre su X contenenti $\mathcal{X}$. Siccome l'insieme delle parti contiene $\mathcal{X}$ ed è un'algebra, allora $\mathcal{P}(\mathcal{X}) \in \mathcal{F}$ ed $\mathcal{F}$ è non vuoto. Consideriamo allora la famiglia

$$\mathcal{A}(\mathcal{X}) \equiv \bigcap_{\mathcal{A} \in \mathcal{F}} \mathcal{A}$$

essa è non vuota, contiene $\mathcal{X}$, è minima per definizione ed è un'algebra. Infatti, $\varnothing \in \mathcal{A}(\mathcal{X})$; siano $A, B \in \mathcal{A}(\mathcal{X})$, allora $A, B \in \mathcal{A}$ per ogni $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$, ne consegue che in ogni $\mathcal{A}$ è contenuto $A \cup B$ che perciò appartiene ad $\mathcal{A}(\mathcal{X})$. Analogamente si dimostra la stabilità per complementazione. **(c.v.d.)**

Definizione I.2 *L'algebra $\mathcal{A}(\mathcal{X})$ di cui nella proposizione precedente si dice algebra generata da $\mathcal{X}$.*

I.1.2 Sigma algebre di insiemi

Poniamo la seguente fondamentale

Definizione I.3 *Una σ-algebra è un'algebra $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di X tale che per ogni successione $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di $\mathcal{A}$ l'insieme $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ appartiene ancora ad $\mathcal{A}$.*

Osservazione I.3 Ancora per le leggi di de Morgan si ha che anche le intersezioni numerabili di elementi di $\mathcal{A}$ appartengono ad $\mathcal{A}$. Si noti inoltre come sia sufficiente verificare la stabilità per unione numerabile su successioni di insiemi disgiunti. Infatti, data una successione di insiemi, si possono sempre partire gli insiemi dati in modo da produrre una sequenza di insiemi disgiunti la cui unione è ancora l'unione della successione di partenza. ▪

Osservazione I.4 La proposizione precedente vale banalmente anche per le σ-algebre, sicché si può ancora parlare di σ-algebre generate. ▪

Definizione I.4 *Si dice σ-algebra di Borel, la σ-algebra, $\beta(X)$, di uno spazio topologico X generata dalla collezione degli aperti di X. Gli elementi di $\beta(X)$ si dicono boreliani.*

Osservazione I.5 $\beta(X)$ è anche la σ-algebra generata dai chiusi di X, più in generale è la σ-algebra generata da una qualsiasi base per la topologia di X.
Ne deriva che la σ-algebra di Borel sulla retta reale è quella generata dagli intervalli aperti. ▪

Se X è uno spazio topologico, diremo che $A \subset X$ è F_σ se è unione numerabile di chiusi, mentre diremo che è G_δ se è intersezione numerabile di aperti. È chiaro che gli F_σ e i G_δ sono boreliani.
Fermiamoci un attimo a caratterizzare le σ-algebre dei boreliani sulla retta reale. In primo luogo abbiamo

Proposizione I.2 *Gli aperti di $\mathbb{R}$ sono unioni numerabili di intervalli aperti.*

Dimostrazione L'unione numerabile di intervalli aperti è, per definizione, un aperto. Sia A un aperto di $\mathbb{R}$. Allora consideriamo l'insieme numerabile di tutti gli intervalli aperti contenuti in A aventi estremi razionali. Adesso prendiamo l'unione B degli intervalli detti. Vogliamo vedere che $A = B$. Cominciamo col dimostrare che $B \subset A$. Sia $x \in B$ allora esistono $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ tali che $x \in]q_1, q_2[\subset A$ sicché $x \in A$. Vediamo che $A \subset B$: sia $x \in A$, esiste una palla di raggio δ e di centro x contenuta in A, sicché possiamo considerare l'intervallo chiuso $[x - \delta/2, x + \delta/2] \subset A$. Per il teorema di densità di $\mathbb{Q}$ esistono due razionali q_1, q_2 (contenuti uno in $(x - \delta/2, x)$ e uno in $(x, x + \delta/2)$) tali che $q_1 < x < q_2$ e $]q_1, q_2[\subset A$. Ne concludiamo che $A = B$. **(c.v.d.)**

Corollario I.1 *I chiusi di $\mathbb{R}$ sono intersezioni numerabili di intervalli chiusi.*

Dalla proposizione segue che la σ-algebra generata da tutti gli intervalli aperti contiene tutti gli aperti e perciò tutti i boreliani. Quindi la σ-algebra di Borel su $\mathbb{R}$ è generata dagli intervalli aperti. Ma si può dire di più

Proposizione I.3 *La σ-algebra di Borel su $\mathbb{R}$ è generata*

(i) *dagli aperti;*

(ii) *dagli intervalli aperti;*

(iii) *dalle semirette del tipo* $]a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$;

(iv) *dalle semirette del tipo* $[a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$;

(v) *dalle semirette del tipo* $]-\infty, a[$, $a \in \mathbb{R}$;

(vi) *dalle semirette del tipo* $]-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$;

Dimostrazione Il primo punto discende dalla definizione, mentre il secondo è già stato dimostrato. Dimostriamo ora il (iii) (gli altri essendo analoghi). La σ-algebra generata dalle semirette del tipo in (iii) contiene gli intervalli semiaperti, $]a, b] =]a, +\infty[\setminus]b, +\infty[$; ma allora contiene tutti gli intervalli aperti, perché sono unione numerabile dei semiaperti

$$]a, b[= \bigcup_{j=1}^{\infty} \left] a, b - \frac{b-a}{j} \right].$$

(c.v.d.)

I.1.3 Spazi misurabili e misura esterna

Definizione I.5 *La coppia $(X, \mathcal{A})$ formata da un insieme X e da una σ-algebra di suoi sottoinsiemi $\mathcal{A}$ si dice spazio misurabile (o di misura) . Ciascun elemento $A \in \mathcal{A}$ si dice misurabile .*

Introduciamo ora la nozione di **misura esterna** con la seguente

Definizione I.6 *Una misura esterna μ^* su un insieme X è una funzione $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ tale che*

(i) $\mu^*(\varnothing) = 0$;

(ii) *(monotonia) se $E \subset F$, allora $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$;*

(iii) *(subadditività numerabile) se $\{E_n\}$ è una successione di sottoinsiemi di X, allora*

$$\mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(E_n)$$

In analogia con quanto si fa nella teoria classica di Lebesgue, poniamo

Definizione I.7 *Se μ^* è una misura esterna su un insieme X, un sottoinsieme $Y \subset X$ tale che*

$$\forall Z \subset X \ \mu^*(Z) = \mu^*(Y \cap Z) + \mu^*(Y^c \cap Z)$$

si dice misurabile rispetto a μ^*.

Osservazione I.6 Notiamo che basta dimostrare che, per ogni Z, risulta $\mu^*(Z) \geq \mu^*(Y \cap Z) + \mu^*(Y^c \cap Z)$. Infatti,

$$\mu^*(Z) = \mu^*((Z \cap Y) \cup (Z \cap Y^c)) \leq \mu^*(Y \cap Z) + \mu^*(Y^c \cap Z)$$

■

È naturale ora dimostrare il seguente

Teorema I.1 *Se μ^* è una misura esterna su X, allora l'insieme $\mathcal{A}$ dei sottoinsiemi misurabili rispetto a μ^* di X è una σ-algebra di X.*

Inoltre, se E_i è una successione di insiemi di $\mathcal{A}$ disgiunti, allora

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} E\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(E_i)$$

Dimostrazione

Poniamo $\mathcal{A} \equiv \{Y \subset X \,| Y \text{ è misurabile rispetto a } \mu^*\}$. Abbiamo che $\varnothing \in \mathcal{A}$, infatti

$$\mu^*(\varnothing \cap Z) + \mu^*(X \cap Z) = \mu^*(Z).$$

Sia ora $Y \in \mathcal{A}$, per ogni $Z \subset X$ abbiamo

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Y \cap Z) + \mu^*(Y^c \cap Z) = \mu^*((Y^c)^c \cap Z) + \mu^*(Y^c \cap Z)$$

da cui $Y^c \in \mathcal{A}$. Vediamo ora la stabilità rispetto all'unione. Siano $Y_1, Y_2 \in \mathcal{A}$, per ogni $Z \subset X$ abbiamo

$$\begin{aligned} \mu^*(Z) &= \mu^*(Y_2 \cap Z) + \mu^*(Y_2^c \cap Z) \\ \mu^*(Z \cap Y_2^c) &= \mu^*(Y_1 \cap Z \cap Y_2^c) + \mu^*(Y_1^c \cap Z \cap Y_2^c) \end{aligned}$$

da cui

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Y_2 \cap Z) + \mu^*(Y_1 \cap Z \cap Y_2^c) + \mu^*(Y_1^c \cap Y_2^c \cap Z)$$

per la legge di de Morgan

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Y_2 \cap Z) + \mu^*(Y_1 \cap Z \cap Y_2^c) + \mu^*((Y_1 \cup Y_2)^c \cap Z)$$

per la subadditività di μ^* sussiste

$$\mu^*(Y_2 \cap Z) + \mu^*(Y_1 \cap Z \cap Y_2^c) \geq \mu^*((Y_2 \cap Z) \cup (Y_1 \cap Z \cap Y_2^c))$$

ma

$$(Y_2 \cap Z) \cup (Y_1 \cap Z \cap Y_2^c) = ((Y_1 \cap Y_2^c) \cup Y_2) \cap Z = (Y_1 \cup Y_2) \cap Z$$

perciò

$$\mu^*(Z) \geq \mu^*((Y_1 \cup Y_2) \cap Z) + \mu^*((Y_1 \cup Y_2)^c \cap Z)$$

per l'osservazione precedente si conclude che

$$\mu^*(Z) = \mu^*((Y_1 \cup Y_2) \cap Z) + \mu^*((Y_1 \cup Y_2)^c \cap Z)$$

e dunque $\mathcal{A}$ è un'algebra.

Siano ora due insiemi Y_1 e Y_2 **misurabili** e **disgiunti**. Allora preso $Y_1 \cup Y_2$ si ha

$$\mu^*(Y_1 \cup Y_2) = \mu^*((Y_1 \cup Y_2) \cap Y_1) + \mu^*((Y_1 \cup Y_2) \cap Y_1^c)$$

ma per la disgiunzione dei due insiemi si conclude

$$\begin{aligned} (Y_1 \cup Y_2) \cap Y_1 &= Y_1 \\ (Y_1 \cup Y_2) \cap Y_1^c &= Y_2 \end{aligned}$$

da cui si conclude che $\mu^*(Y_1 \cup Y_2) = \mu^*(Y_1) + \mu^*(Y_2)$.

Dobbiamo mostrare adesso la stabilità per unione numerabile. Sia $E \equiv \bigcup_n E_n$ con E_n successione di misurabili disgiunti, i.e. $E_n \in \mathcal{A}$. Definiamo $F_n \equiv \bigcup_{i=0}^n E_i$, allora $F_n \in \mathcal{A}$. Per induzione abbiamo immediatamente che $F_n \in \mathcal{A}$, perciò

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap F_n) + \mu^*(Z \cap F_n^c)$$

Inoltre, $F_n \subset E$ e perciò $E^c \subset F_n^c$, quindi

$$\mu^*(Z \cap F_n) + \mu^*(Z \cap E^c) \leq \mu^*(Z \cap F_n) + \mu^*(Z \cap F_n^c) = \mu^*(Z)$$

Notiamo ora che $F_n \cap E_n = E_n \in \mathcal{A}$ e che $F_n \cap E_n^c = F_{n-1}$ (e qui entra l'ipotesi di disgiunzione) perciò

$$\mu^*(Z \cap F_n) = \mu^*((Z \cap F_n) \cap E_n) + \mu^*((Z \cap F_n) \cap E_n^c) = \mu^*(Z \cap E_n) + \mu^*(Z \cap F_{n-1})$$

dunque, per induzione,

$$\mu^*(Z \cap F_n) = \sum_{i=0}^{n} \mu^*(Z \cap E_i)$$

Riportando il risultato ottenuto nella diseguaglianza di sopra, troviamo

$$\sum_{i=0}^{n} \mu^*(Z \cap E_i) + \mu^*(Z \cap E^c) \leq \mu^*(Z)$$

da cui

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(Z \cap E_i) + \mu^*(Z \cap E^c) \leq \mu^*(Z)$$

Allora, siccome $Z \cap E = \bigcup_{i=0}^{\infty} Z \cap E_i$, vale, per la subadditività numerabile

$$\mu^*(Z \cap E^c) + \mu^*(Z \cap E) \leq \mu^*(Z \cap E^c) + \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(Z \cap E_i) \leq \mu^*(Z)$$

ancora per l'osservazione si ha la tesi. Si noti come si è pure ottenuto che

$$\mu^*(Z \cap E^c) + \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(Z \cap E_i) = \mu^*(Z)$$

se ora sostituiamo a Z l'insieme $Z \cap E$

$$\mu^*(Z \cap E) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(Z \cap E \cap E_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(Z \cap E_i)$$

Infine, sostituendo a Z l'insieme E stesso, si ottiene

$$\mu^*(E) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(E_i)$$

(c.v.d.)

I.1.4 Misura

Data la definizione di misura esterna vediamo adesso la

Definizione I.8 *Si definisce misura μ su uno spazio misurabile $(X, \mathcal{A})$ una funzione $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ tale che*

(i) $\mu(\varnothing) = 0$;

(ii) *(additività numerabile) se $\{E_n\}$ è una successione di insiemi misurabili disgiunti allora*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Costruzione di misure tramite funzioni da X in $\overline{\mathbb{R}}^+$

Ad esempio, sia X un insieme non vuoto e fissiamo $\mathcal{A} \equiv \mathcal{P}(X)$. Data una funzione $f : X \to [0, +\infty]$ poniamo per ogni $E \in \mathcal{A}$

$$\mu(E) \equiv \sup_{x_1, \ldots, x_n \in E;\, n \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

verifichiamo che si tratta di una misura. Se in E f assume un valore infinito allora la misura di E è infinita. Se questo non accade, fissata una successione $\{x_i\}$in E, $\mu(E)$ risulta banalmente maggiore o eguale della somma della serie di $f(x_i)$, di cui ha senso parlare perché abbiamo a che fare con una serie a termini positivi. D'altra parte preso il sup delle somme dette al variare delle successioni in E, si trova un numero maggiore o eguale a $\mu(E)$ dunque

$$\mu(E) = \sup_{\{x_n\} \subset E} \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)$$

Questo implica immediatamente l'additività numerabile: se nell'unione degli E_n si trova un punto su cui f assume infinito la tesi è banalmente verificata. Altrimenti prendiamo la successione y_m a valori nell'unione E degli E_n. Consideriamo l'insieme E_n e numeriamo in senso crescente tutti gli y_m appartenenti a E_n giungendo a costruire la successione $x_{n,i} \in E_n$. Viceversa data $x_{n,i}$ costruiamo y_m. Allora

$$\sum_{m=1}^{\infty} f(y_m) = \sum_{i,n\in\mathbb{N}} f(x_{n,i})$$

siccome la serie è a termini positivi vale la proprietà commutativa e

$$\sum_{m=1}^{\infty} f(y_m) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} f(x_{n,i})$$

questo comporta

$$\mu(E) = \sup_{\{x_i\}\subset E_n;\, n\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} f(x_{n,i}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{\{x_i\}\subset E_n} \sum_{i=1}^{\infty} f(x_{n,i}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

Infatti, è ovvio che $\mu(E) \le \sum \mu(E_n)$. D'altra parte

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \mu(E_n) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \sup_{\{x_i\}\subset E_n} \sum_{i=1}^{\infty} f(x_{n,i}) = \lim_{k\to\infty} \sup_{\{x_i\}\subset E_n} \sum_{n=1}^{k}\sum_{i=1}^{\infty} f(x_{n,i}) \le \\ &\le \sup_{\{x_i\}\subset E_n} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} f(x_{n,i}) = \mu(E) \end{aligned}$$

Misura di Dirac Notiamo allora che per $x_0 \in X$ fissato, posto $f(x) = \delta(x - x_0)$ otteniamo la **misura di Dirac concentrata in** x_0 :

$$\delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Cominciamo ora a legare misura esterna e misura.

Teorema I.2 *Se μ^* è una misura esterna su un insieme X e $\mathcal{A}$ è la σ-algebra degli insiemi misurabili secondo μ^*, allora $\mu \equiv \mu^*|_{\mathcal{A}}$, restrizione di μ^* ad $\mathcal{A}$, è una misura su $\mathcal{A}$.*

Dimostrazione Abbiamo già provato la additività numerabile dei misurabili disgiunti nel teorema precedente. Il fatto che $\mu^*(\varnothing) = 0$ e che $\varnothing \in \mathcal{A}$ conclude la dimostrazione. **(c.v.d.)**

Consideriamo ancora la retta reale con la misura esterna l^* di Lebesgue definita sugli intervalli aperti (come loro lunghezza). l^* definisce per il teorema dimostrato una misura su $\mathcal{A}$. Siccome l'unione infinita di intervalli aperti è ancora appartenente a $\mathcal{A}$ si ha che i boreliani appartengono ad $\mathcal{A}$, perciò sono misurabili e $\beta(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}$.
Vediamo ora le proprietà salienti delle misure

Proposizione I.4 *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Allora*

(i) *se $A \subset B$ sono misurabili, allora $\mu(A) \le \mu(B)$;*

(ii) *data una successione $\{E_n\}$ di insiemi misurabili incapsulati, $E_{n+1} \subset E_n$, con $\mu(E_1) < \infty$, si ha*

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n);$$

(iii) *data una successione $\{E_n\}$ di insiemi misurabili vale*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Dimostrazione Vediamo (i). $\mu(B) = \mu(A \cup (B \backslash A)) = \mu(A) + \mu(B \backslash A) \geq \mu(A)$.
Vediamo (ii). Chiamiamo E l'intersezione di tutti gli E_n, allora

$$E_1 = E \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} (E_i \backslash E_{i+1})$$

dove l'unione è disgiunta. Per l'additività numerabile

$$\begin{aligned} \mu(E_1) &= \mu(E) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i \backslash E_{i+1}) = \mu(E) + \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \mu(E_i \backslash E_{i+1}) = \\ &= \mu(E) + \lim_{n \to \infty} (\mu(E_1) - \mu(E_n)) = \mu(E) + \mu(E_1) - \lim_{n \to \infty} \mu(E_n) \end{aligned}$$

da cui la tesi.
(iii) Definiamo la successione di insiemi disgiunti $F_n \equiv E_n \backslash \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i$. Allora $F_n \subset E_n$, dunque

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

(c.v.d.)

I.1.5 Misure complete e completamenti di spazi di misura

Torniamo a dare una

Definizione I.9 *Una misura μ su uno spazio X si dice finita se $\mu(X) < \infty$. e σ-finita se è possibile ricoprire l'insieme X con insiemi misurabili $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di modo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ $\mu(X_n) < \infty$.*

Un insieme misurabile E ha misura finita se $\mu(E) < \infty$ e misura σ-finita se è unione numerabile di misurabili di misura finita.

Definizione I.10 *Uno spazio con misura $(X, \mathcal{A}, \mu)$ si dice completo se $\mathcal{A}$ contiene tutti i sottoinsiemi degli insiemi di misura nulla:*

$$\forall E \in \mathcal{A},\ \forall A \subset E,\ \mu(E) = 0 \Rightarrow A \in \mathcal{A}$$

Se $A \subset E$ è misurabile con $\mu(E) = 0$ per la monotonia di cui nella proposizione precedente abbiamo $\mu(A) \leq \mu(E) = 0$

Osservazione I.7 La misura indotta da una misura esterna è completa grazie alla monotonia. Sia E misurabile di misura nulla e sia A sottoinsieme di E. Siccome $\mu^*(E) = 0$ si ha $\mu^*(A) \leq \mu^*(E) = 0$. Ora, $\mu^*(Z \cap A) \leq \mu^*(A) = 0$ perciò

$$\mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \cap A^c) = \mu^*(Z \cap A^c) \leq \mu^*(Z)$$

da cui A è misurabile. ■

Di ogni spazio di misura esiste il **completamento** :

Teorema I.3 (di completamento della misura) *Se $(X, \mu, \mathcal{A})$ è uno spazio di misura, allora esiste un secondo spazio di misura $\left(X, \tilde{\mu}, \widetilde{\mathcal{A}}\right)$ tale che*

(i) *$\mathcal{A} \subset \widetilde{\mathcal{A}}$;*

(ii) *se $E \in \mathcal{A}$ allora $\mu(E) = \tilde{\mu}(E)$;*

(iii) *$E \in \widetilde{\mathcal{A}}$ se e solo se esistono due insiemi A e B tali che $E = A \cup B$ con $A \subset C \in \mathcal{A}$ e $\mu(C) = 0$, e con $B \in \mathcal{A}$.*

Dimostrazione Sia $\mathcal{N} \equiv \{C \in \mathcal{A} \,|\, \mu(C) = 0\}$. Sia $\mathcal{A}_0$ la σ-algebra generata da $\mathcal{A} \cup \mathcal{P}(\mathcal{N})$. Dalla (iii) abbiamo che $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup \mathcal{P}(\mathcal{N})$, perciò, per definizione, $\widetilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}_0$. Questo implica che se $\widetilde{\mathcal{A}}$ è una σ-algebra, allora $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_0$. Dimostriamo dunque che $\widetilde{\mathcal{A}}$ è una σ-algebra. Siccome C e B sono μ-misurabili anche $C\backslash B$ è misurabile, perciò ha μ-misura nulla. Allora $E = (A\backslash B) \cup B$ con B μ-misurabile e $A\backslash B$ sottoinsieme di $C\backslash B$ misurabile, di misura nulla e disgiunto da B. Possiamo allora modificare (iii) richiedendo che ogni elemento di $\widetilde{\mathcal{A}}$ possa essere partito in due insiemi di cui uno μ-misurabile e un altro sottoinsieme di un misurabile di misura nulla e disgiunto dal primo. Detto questo, se $E \in \widetilde{\mathcal{A}}$ si può senz'altro scrivere

$$E^c = (B \cup C)^c \cup (A^c \cap C)$$

da cui E^c si scrive come l'unione di un misurabile e di un sottoinsieme di un insieme misurabile a misura nulla (tutto secondo μ). Ne consegue che $E^c \in \widetilde{\mathcal{A}}$. Ovviamente $\varnothing \in \widetilde{\mathcal{A}}$. Resta da vedere la stabilità per unione numerabile. Sia $\{E_n\} \subset \widetilde{\mathcal{A}}$, allora

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

banalmente $B \equiv \bigcup B_n \in \mathcal{A}$, inoltre,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \equiv C \Rightarrow \mu(C) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) = 0$$

da cui $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup \mathcal{P}(\mathcal{N})$ è una σ-algebra.

Se ora $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è completo allora $\mathcal{P}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{A}$ e $\mathcal{A} = \widetilde{\mathcal{A}}$, perciò ci basta porre $\tilde{\mu} \equiv \mu$. Altrimenti, preso $E \in \widetilde{\mathcal{A}}$ si ha $E = A \cup B$ e poniamo $\tilde{\mu}(E) \equiv \mu(B)$. Vediamo che si tratta di una definizione ben posta: sia $E = A' \cup B'$ con $A' \subset C'$ con $\mu(C') = 0$, abbiamo

$$B \subset A \cup B = A' \cup B' \subset C' \cup B'$$

con $C' \cup B'$ μ-misurabile: allora

$$\mu(B) \le \mu(C') + \mu(B') = \mu(B')$$

scambiando B con B' si ha $\mu(B) = \mu(B') = \tilde{\mu}(E)$.

Verifichiamo che si tratta di una misura: $\mu(\varnothing) = \tilde{\mu}(\varnothing) = 0$. Adesso prendiamo una successione di elementi disgiunti di $\widetilde{\mathcal{A}}$ $\{E_n\}$, abbiamo

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

le unioni sono tutte disgiunte, inoltre $\bigcup A_n \subset \bigcup C_n$ a misura nulla, sicché

$$\tilde{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mu}(E_n)$$

(c.v.d.)

Osservazione I.8 Una nota immediata da fare al teorema precedente è che lo spazio $\left(X, \widetilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu}\right)$ è uno spazio di misura completo. Infatti se E ha misura nulla secondo $\tilde{\mu}$ allora si ha $E = A \cup B$ con $B \in \mathcal{A}$ e $\mu(B) = 0$: preso $B \cup C$ si ha che $E = (A \cup B) \cup \varnothing$ con $A \cup B \subset B \cup C \in \mathcal{A}$ e $\mu(B \cup C) = 0$. Adesso, preso $Y \subset E$ si ha $Y = ((A \cup B) \cap Y) \cup \varnothing$ con $(A \cup B) \cap Y \subset B \cup C$ a μ-misura nulla. Allora $Y \in \widetilde{\mathcal{A}}$ e $\tilde{\mu}(Y) = 0$. ▪

Ricordiamo che la misura di Lebesgue è il completamento della misura di Borel ottenuta restringendo la misura indotta dalla misura esterna di Lebesgue alla sola classe dei boreliani di $\mathbb{R}$.

I.1.6 Misure su algebre e teorema di estensione

Finora abbiamo introdotto misure solo su σ-algebre, adesso poniamo la seguente

Definizione I.11 *Se $\mathcal{A}$ è un'algebra di insiemi, una misura su $\mathcal{A}$ è una applicazione $\bar{\mu} : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$. talché*

(i) $\bar{\mu}(\varnothing) = 0$;

(ii) *se* $\{E_n\} \subset \mathcal{A}$ *è una successione di elementi disgiunti tale che*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$$

allora

$$\bar{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}\left(E_n\right).$$

Data una misura su una algebra di sottoinsiemi di X, $\mathcal{A}$, esiste su X una misura esterna μ^* indotta da $\bar{\mu}$. A questo scopo basta porre

$$\mu^*(E) = \inf_{E \subset \bigcup_i A_i} \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_i)$$

dove l'inferiore viene calcolato al variare di tutte le successioni $\{A_i\} \subset \mathcal{A}$. Dimostriamo che μ^* è effettivamente una misura esterna

Lemma I.1 μ^* *è una misura esterna e* $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \bar{\mu}$.

Dimostrazione Evidentemente vale $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \bar{\mu}$ (l'inf diventa un minimo), perciò $\mu^*(\varnothing) = 0$. Vediamo la monotonia. Sia $E \subset F$, allora ogni successione che contiene F contiene anche E, perciò

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$$

Non ci resta che la subadditività numerabile. Sia $E = \bigcup_n E_n$ con gli E_n disgiunti (a meno di ridefinire gli insiemi possiamo sempre supporli disgiunti). Se per qualche n risulta $\mu^*(E_n) = +\infty$ la tesi è ovvia. Supponiamo perciò che per ogni n e per ogni $\varepsilon > 0$ esista la successione $\{A_{n_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ per cui

$$E_n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{n_i}$$

e

$$\sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_{n_i}) < \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Ora, $A_{n_i} \in \mathcal{A}$ e

$$E \subset \bigcup_{n,i=1}^{\infty} A_{n_i}$$

per definizione dunque

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_{n_i}) < \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon$$

(c.v.d.) e per l'arbitrarietà di ε si deduce la tesi.

Teorema I.4 (di estensione di Carathéodory) *Se* $\bar{\mu}$ *è una misura su un'algebra* $\mathcal{A}$ *e* μ^* *è la misura esterna indotta da* $\bar{\mu}$, *allora la restrizione* μ *di* μ^* *alla* σ*-algebra dei suoi insiemi misurabili è una misura sulla* σ*-algebra (contenente* $\mathcal{A}$*) di questi insiemi. Se* $\bar{\mu}$ *è una misura finita, anche* μ *lo è, e se* $\bar{\mu}$ *è* σ*-finita allora* μ *è l'unica misura definita sulla* σ*-algebra generata da* $\mathcal{A}$ *tale che* $\mu|_{\mathcal{A}} = \bar{\mu}$.

Dimostrazione La prima parte del teorema è già stata dimostrata: data $\bar{\mu}$ sappiamo costruire μ^* tale che $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \bar{\mu}$; adesso, gli insiemi misurabili secondo μ^* costituiscono una σ-algebra $\mathcal{B}$ sulla quale μ^* è una misura: $\mu^*|_{\mathcal{B}} = \mu$. Noi richiediamo che $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ di modo che $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \bar{\mu}$ da cui $\bar{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$. Per ogni $A \in \mathcal{A}$, preso un qualunque sottoinsieme di X, E, si abbia

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

Se E ha misura infinita la tesi è ovvia. Altrimenti, per ogni $\varepsilon > 0$, si trova una successione $\{A_i\} \subset \mathcal{A}$ talché $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, a meno di ridefinire la successione possiamo sempre supporre che essa sia formata da elementi tutti disgiunti, infine

$$\mu^*(E) + \varepsilon > \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_i)$$

inoltre, per la definizione di μ^* a partire da $\bar{\mu}$, visto che $A \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned}
\mu^*(E \cap A) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_i \cap A) \\
\mu^*(E \cap A) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_i \cap A^c)
\end{aligned}$$

sicché

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_i \cap A) + \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_i \cap A^c)$$

come detto gli A_i sono stati scelti tutti disgiunti, perciò, per additività,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_i \cap A) + \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_i \cap A^c) = \bar{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_i) < \mu^*(E) + \varepsilon$$

dunque, per arbitrarietà di ε, si conclude

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E).$$

Veniamo alla seconda parte della dimostrazione. Se $\bar{\mu}$ è finita allora μ è finita, essendo $\mu(X) = \bar{\mu}(X)$. Resta da dimostrare l'unicità di μ nel caso in cui $\bar{\mu}$ sia σ-finita.

Sia allora ν una misura definita sulla σ-algebra $\mathcal{C}$ generata da $\mathcal{A}$ che coincida con $\bar{\mu}$ - e perciò con μ - su $\mathcal{A}$. La nostra tesi è che su $\mathcal{C}$ sia $\nu = \mu|_{\mathcal{C}}$. Siccome $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ (σ-algebra dei μ^*-misurabili) si ha che, per definizione di σ-algebra generata, $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$. Ora, prendiamo $B \in \mathcal{C}$ che **abbia misura esterna finita**. Fissato $\varepsilon > 0$, troviamo allora un insieme $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, (con $A_i \in \mathcal{A}$ disgiunti), con $A \in \mathcal{C}$, tale che $B \subset A$ e

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \varepsilon$$

Ma A, B sono ν-misurabili, perciò

$$\nu(B) \leq \nu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_i) = \mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \varepsilon$$

per l'arbitrarietà di ε si conclude

$$B \in \mathcal{C},\ \mu^*(B) < +\infty \Rightarrow \nu(B) \leq \mu^*(B)$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}
\nu(A) &= \mu^*(A) = \mu^*(B) + \mu^*(A \backslash B) \\
\nu(A) &= \mu^*(A) = \nu(B) + \nu(A \backslash B)
\end{aligned}$$

ma

$$\nu(A \backslash B) \leq \mu^*(A \backslash B) = \mu^*(A) - \mu^*(B) \leq \varepsilon$$

da cui

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(A) \leq \nu(B) + \varepsilon$$

per l'arbitrarietà di ε vale

$$B \in \mathcal{C},\ \mu^*(B) < +\infty \Rightarrow \nu(B) = \mu^*(B).$$

Adesso usiamo la σ-finitezza di $\bar{\mu}$: esiste una successione $\{X_i\} \subset \mathcal{A}$ di elementi disgiunti la cui unione è X con $\bar{\mu}(X_i) < \infty$. Allora per ogni $B \in \mathcal{C}$, si ha

$$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} (X_i \cap B)$$

unione disgiunta, per cui

$$\nu(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(X_i \cap B) \text{ e } \mu(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(X_i \cap B)$$

Ma gli insiemi $\mathcal{C} \ni (X_i \cap B) \subset X_i$ sono a misura finita, perciò $\nu(X_i \cap B) = \mu^*(X_i \cap B) = \mu(X_i \cap B)$ (perché $X_i \cap B \in \mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ e $\mu^*|_{\mathcal{B}} = \mu$), infine

(c.v.d.)

$$\nu(B) = \mu(B).$$

I.2 Integrazione

Nel seguito assumeremo di lavorare con misure **complete** (cosa sempre possibile a meno di completamento, come abbiamo visto). Inoltre adottiamo la seguente familiare terminologia: se una proprietà che si riferisce a uno spazio di misura si verifica su tutto lo spazio tranne al più un insieme di misura nulla, si dice che tale proprietà vale **quasi ovunque** (*almost everywhere*, a.e.) .

I.2.1 Funzioni misurabili

Cominciamo col porre la seguente fondamentale

Definizione I.12 *Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ sono spazi di misura, una funzione $f : X \to Y$ si dice misurabile se per ogni insieme $E \in \mathcal{B}$, l'insieme $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$, i.e. la controimmagine di insiemi misurabili è misurabile.*

Osservazione I.9 Sia $\mathcal{B}$ generata dall'insieme $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(Y)$. Sia $\mathcal{T}'$ l'unione di $\mathcal{T}$ con l'insieme dei complementari degli elementi di $\mathcal{T}$, allora $\mathcal{B}$ è l'insieme che contiene tutte le unioni degli elementi di $\mathcal{T}'$. Ora, notiamo che $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Se ora ogni elemento di $\mathcal{T}'$ ha controimmagine misurabile, allora la controimmagine dell'unione, anche infinita, di elementi di $\mathcal{T}'$ è unione (anche infinita) di misurabili di X e perciò è misurabile. Se tutti gli elementi di $\mathcal{T}'$ hanno controimmagine misurabile, f è misurabile. D'altra parte, $f^{-1}(A^c) = \left[f^{-1}(A)\right]^c$, da cui se la controimmagine di A è misurabile tale è il suo complementare e perciò $f^{-1}(A^c)$. Infine,
se $\mathcal{B}$ è generata da $\mathcal{T}$ la funzione $f : X \to Y$ è misurabile se e solo se la controimmagine di elementi di $\mathcal{T}$ è misurabile. ▪

Ad esempio, se X e Y sono spazi topologici e li dotiamo della σ-algebra di Borel indotta dalla loro topologia si ha che le funzioni continue da X in Y sono misurabili. Ovviamente si ha pure che la composizione di funzioni misurabili è misurabile.
Le funzioni a valori reali si dicono misurabili se le controimmagini di boreliani sono misurabili.
In forza della proposizione I.3 e dell'osservazione di sopra si ha la seguente

Proposizione I.5 *Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio di misura, una funzione $f : X \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ è misurabile se e solo se vale una delle seguenti proprietà*

(i) *per ogni $a \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in X \,|\, f(x) > a\}$ è misurabile;*

(ii) *per ogni $a \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in X \,|\, f(x) \geq a\}$ è misurabile;*

(iii) *per ogni $a \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in X \,|\, f(x) < a\}$ è misurabile;*

(iv) *per ogni $a \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in X \,|\, f(x) \leq a\}$ è misurabile.*

Ne abbiamo subito che le funzioni caratteristiche di insiemi misurabili sono misurabili, viceversa, se la funzione caratteristica di un insieme è misurabile, allora l'insieme è misurabile.

Fissato uno spazio di misura $(X, \mathcal{A}, \mu)$ chiamiamo $\mathcal{M}$ l'insieme delle funzioni misurabili definite su X a valori reali. Usando la proposizione precedente si trova

Lemma I.2 *Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni misurabili, l'insieme*

$$E \equiv \{x \in X \,|\, f(x) > g(x)\}$$

è misurabile.

Dimostrazione Sia $x \in E$, allora risulta $f(x) > g(x)$ ed esisterà un razionale r per cui

$$f(x) > r > g(x)$$

da cui

$$E = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{x \in X \,|\, f(x) > r\} \cap \{x \in X \,|\, g(x) < r\}$$

(c.v.d.) poiché $\mathbb{Q}$ è numerabile, E, come unione numerabile di misurabili, è misurabile.

Teorema I.5 *Valgono le seguenti proprietà per le funzioni misurabili a valori in $\mathbb{R}$:*

(i) *se $f \in \mathcal{M}$ è misurabile e $c \in \mathbb{R}$ allora $f + c$ e $cf \in \mathcal{M}$;*

(ii) *se $f, g \in \mathcal{M}$ allora $f + g$ e fg sono misurabili;*

(iii) *se $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ allora le funzioni*

$$M(x) \equiv \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k(x),\ m(x) \equiv \inf_{k \in \mathbb{N}} f_k(x)$$

sono misurabili;

(iv) *se $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ e $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$ per ogni $x \in X$, allora la funzione*

$$f(x) \equiv \lim_{k \to \infty} f_k(x)$$

è misurabile;

(v) *se $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ le funzioni*

$$f(x) \equiv \limsup_{k \to \infty} f_k(x)$$
$$g(x) \equiv \liminf_{k \to \infty} f_k(x)$$

sono misurabili.

Dimostrazione Vediamo la (i). Per ogni reale $t \in \mathbb{R}$ l'insieme $F_t \equiv \{x \in X \,|\, f(x) > t\}$ è misurabile, perciò è misurabile l'insieme $F_{t/c} = \{x \in X \,|cf(x) > t\}$ per ogni t. Da cui cf è misurabile. Considerando F_{t-c} si ottiene che $f + c$ è misurabile.

Vediamo (ii). Si ha

$$\{x \in X \,|\, f(x) + g(x) > t\} = \{x \in X \,|\, f(x) > t - g(x)\}$$

per (i) e per il lemma quest'ultimo è misurabile per cui $f + g \in \mathcal{M}$.

Ora mostriamo che f^2 è misurabile: se $t \geq 0$

$$\left\{x \in X \,\middle|\, f^2(x) > t\right\} = \left\{x \in X \,\middle|\, f(x) > \sqrt{t}\right\} \cup \left\{x \in X \,\middle|\, f(x) < -\sqrt{t}\right\}$$

che è un insieme misurabile. Se $t < 0$ allora l'insieme diviene X. In ogni caso si avrà misurabilità e perciò $f^2 \in \mathcal{M}$. D'altra parte per questo e per i punti precedenti fg è misurabile essendo

$$fg = \frac{1}{4}(f+g)^2 - \frac{1}{4}(f-g)^2$$

Veniamo a (iii). Per ogni t

$$\{x \in X \,|M(x) > t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in X \,|f_k(x) > t\}$$

se un punto appartiene al primo insieme, per le proprietà del sup, dovrà esistere un indice k per cui $f_k(x) > t$ e allora il punto apparterrà al secondo insieme. Se un punto appartiene al secondo insieme, ovviamente apparterrà al primo. Il secondo insieme è l'unione numerabile di insiemi misurabili, perciò è misurabile. Usando l'insieme

$$\{x \in X \,|m(x) < t\}$$

si deduce in modo del tutto analogo la misurabilità di $m(x)$.

Adesso (iv). Essa discende subito da (iii), in quanto $f(x) = \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k(x)$.

Per (v) si ha

$$M_k(x) = \sup_{j \geq k} f_j(x)$$

è misurabile per ogni k, perciò è misurabile anche

$$f(x) = \inf_{k \in \mathbb{N}} M_k(x) = \limsup_{k \to \infty} f_k(x)$$

(c.v.d.) in modo completamente analogo si dimostra l'asserzione per il minimo limite.

Una conseguenza immediata di (v) è che se una successione di funzioni misurabili converge puntualmente alla funzione f, allora f (limite puntuale) è misurabile.
Prese ora due funzioni misurabili, $f(x)$ e $g(x)$, posto $f_1(x) \equiv f(x)$ e $f_k(x) \equiv g(x)$ per ogni $k > 1$, allora

$$M(x) = \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k(x) = \max\{f(x), g(x)\} \equiv f(x) \vee g(x)$$

è misurabile, così come

$$m(x) = \inf_{k \in \mathbb{N}} f_k(x) = \min\{f(x), g(x)\} \equiv f(x) \wedge g(x)$$

in particolare sono misurabili $f^+(x)$ e $f^-(x)$. Viceversa se f^+ e f^- sono misurabili allora $f = f^+ - f^-$ è misurabile. Sarà misurabile anche $|f|$.

I.2.2 Funzioni semplici

Si definisce **funzione semplice** è una funzione misurabile da $(X, \mathcal{A}, \mu)$ in $\overline{\mathbb{R}}$ che assume un numero finito $\{c_i\}_{i \in J_N}$ di valori. Se ne ricava che una funzione semplice è

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{E_i}$$

dove, per ogni $i \in J_n$, gli E_i sono insiemi misurabili essendo φ misurabile. Si conviene di porre $\varphi(x) = 0$ fuori dall'unione degli E_i, perciò possiamo sempre supporre che i c_i siano non nulli e distinti. In questo modo la rappresentazione di φ come combinazione lineare di funzioni caratteristiche è unica. Sia infatti

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{M} b_i \chi_{D_i}$$

allora, fissiamo $x \in E_i$, φ vale ivi c_i perciò deve esistere un indice j talché $x \in D_j$ e dunque $b_j = c_i$. Siccome $D_j = \varphi^{-1}(b_j) = \varphi^{-1}(c_i) = E_i$ si conclude che a meno di permutazioni la rappresentazione di φ è unica. Tale rappresentazione si dice **canonica**.

Teorema I.6 *Se $f : X \to [0, +\infty]$ è una funzione misurabile a valori sulla retta reale, allora esiste una successione monotona $\{\varphi_n\}$ di funzioni semplici che converge puntualmente a f. Se lo spazio di misura è σ-finito possiamo scegliere le φ_n a supporto compatto.*

Dimostrazione

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $t \in \mathbb{R}$ esiste un unico $k_{t,n} \in \mathbb{N}$ talché

$$\frac{k_{t,n}}{2^n} \leq t \leq \frac{k_{t,n}+1}{2^n}$$

definiamo la successione di funzioni

$$s_n(t) \equiv \begin{cases} 2^{-n}k_{t,n}, & \text{se } 0 \leq t < n \\ n, & \text{se } n \leq t \leq +\infty \end{cases}$$

Si tratta di una successione di funzioni semplici su boreliani, perciò è una successione di funzioni misurabili definite su $[0,+\infty]$. Inoltre, per ogni t si ha

$$0 \leq s_1(t) \leq s_2(t) \leq \ldots \leq s_n(t) \leq \ldots \leq t$$

Infatti, per ogni n si ha $s_n(t) \leq t$, e

$$2k_{t,n} \leq k_{t,n+1} \Rightarrow \frac{k_{t,n}}{2^n} \leq \frac{k_{t,n+1}}{2^{n+1}}.$$

Si ha poi che, in $[0,+\infty]$,

$$\lim_{n\to+\infty} s_n(t) = t$$

Ponendo

$$\varphi_n(x) \equiv s_n(f(x))$$

troviamo una successione di funzioni semplici (essendo f misurabile gli insiemi $f^{-1}([0,n[)$ e $f^{-1}([0,\infty[)$ e $f^{-1}(\infty)$ sono misurabili) che soddisfa le richieste del teorema.

Per la seconda parte, sarà $X = \bigcup_{i=1}^{+\infty} X_i$ con X_i a misura finita. Per ottenere la tesi basterà definire φ_n solo su $\bigcup_{i=1}^{n} X_i$ (per ogni x da un certo n in poi varrà $\varphi_n(x) = s_n(f(x)) \to f(x)$ per $n \to \infty$). **(c.v.d.)**

Siamo ora in grado di definire l'integrale di una funzione semplice: se $E \subset X$ è un insieme misurabile poniamo

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{E_i} \Rightarrow \int_E \varphi(x)\, d\mu \equiv \sum_{i=1}^{N} c_i \mu(E_i \cap E)$$

Il risultato dell'integrazione operata su una qualsiasi rappresentazione è sempre lo stesso, perché ogni rappresentazione può essere ridotta in forma canonica.

Proposizione I.6 *Se φ e ψ sono funzioni semplici i cui supporti hanno misura finita, allora, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ risulta*

$$\int (a\varphi + b\psi)\, d\mu = a\int \varphi\, d\mu + b\int \psi\, d\mu$$

e se $\varphi \geq \psi$ quasi ovunque, allora

$$\int \varphi\, d\mu \geq \int \psi\, d\mu.$$

Dimostrazione Se gli insiemi che rappresentano canonicamente φ e ψ sono A_i e B_j rispettivamente, consideriamo tutte le loro intersezioni E_k. Sugli E_k abbiamo

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k} \text{ e } \psi = \sum_{k=1}^{N} b_k \chi_{E_k}$$

quindi

$$a\varphi + b\psi = \sum_{k=1}^{N} (aa_k + bb_j)\, \chi_{E_k}$$

e per additività della misura si ha la tesi. Veniamo alla seconda parte. Consideriamo una funzione semplice che sia non negativa quasi ovunque, allora

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{E_i}$$

$c_i < 0 \Rightarrow \mu(E_i) = 0$, dunque

$$\int \varphi \, d\mu = \sum_{i=1}^{N} c_i \mu(E_i) \geq 0$$

Si conclude perciò che se $\varphi \geq \psi$ a.e., allora $\varphi - \psi \geq 0$ a.e. e

$$\int (\varphi - \psi) \; d\mu \geq 0 \Rightarrow \int \varphi \, d\mu - \int \psi \, d\mu \geq 0 \Rightarrow \int \varphi \, d\mu \geq \int \psi \, d\mu.$$

(c.v.d.)

Proposizione I.7 *Se f è una funzione reale limitata, definita su un insieme misurabile E di misura finita, allora*

$$\inf_{f \leq \psi} \int_E \psi \, d\mu = \sup_{\varphi \leq f} \int_E \varphi \, d\mu$$

se e solo se f è misurabile.

Dimostrazione Sia f misurabile e valga $|f| \leq M$. Fissiamo $n \in \mathbb{N}$, definiamo, al variare di k in $-n \leq k \leq n$ gli insiemi

$$E_k \equiv \left\{ x \in X \left| \frac{k-1}{n} M < f(x) \leq \frac{k}{n} M \right. \right\}$$

Essi sono disgiunti, misurabili e hanno per unione E. Dunque

$$\mu(E) = \sum_{k=-n}^{n} \mu(E_k)$$

Consideriamo ora le funzioni semplici

$$\psi_n(x) \equiv \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} k \chi_{E_k}, \quad \psi_n(x) \equiv \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} (k-1) \chi_{E_k},$$

abbiamo $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$. Perciò

$$\begin{aligned} \inf_{f \leq \psi} \int_E \psi \, d\mu \quad &\leq \quad \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} k \mu_{E_k} \\ \sup_{\varphi \leq f} \int_E \varphi \, d\mu \quad &\geq \quad \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} (k-1) \mu_{E_k} \end{aligned}$$

Quindi per ogni intero n si ha

$$0 \leq \inf_{f \leq \psi} \int_E \psi \, d\mu - \sup_{\varphi \leq f} \int_E \varphi \, d\mu \leq \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} \mu_{E_k} = \frac{M}{n} \mu(E)$$

e passando al limite per $n \to \infty$ si conclude la tesi.

Viceversa, valga

$$\lambda \equiv \inf_{f \leq \psi} \int_E \psi \, d\mu = \sup_{\varphi \leq f} \int_E \varphi \, d\mu$$

allora, per ogni intero n, esistono funzioni semplici φ_n e ψ_n tali che $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ e

$$\int \psi_n \, d\mu - \frac{1}{2n} < \lambda < \int \varphi_n \, d\mu + \frac{1}{2n}$$

perciò

$$\int \psi_n \, d\mu - \int \varphi_n \, d\mu < \frac{1}{n}$$

D'altra parte anche le funzioni $\bar{\psi} \equiv \inf \psi_n$ e $\bar{\varphi} \equiv \sup \varphi_n$ sono misurabili con $\bar{\varphi} \leq f \leq \bar{\psi}$. Ora, l'insieme misurabile

$$D \equiv \left\{ x \in X \,\middle|\, \bar{\varphi}(x) < \bar{\psi}(x) \right\}$$

è dato dall'unione numerabile dei seguenti

$$D_\nu \equiv \left\{ x \in X \,\middle|\, \bar{\varphi}(x) < \bar{\psi}(x) - \frac{1}{\nu} \right\}$$

Ogni D_ν è contenuto nell'insieme

$$D_{\nu,n} \equiv \left\{ x \in X \,\middle|\, \varphi_n(x) < \psi_n(x) - \frac{1}{\nu} \right\}$$

vogliamo dimostrare che $\mu(D_{\nu,n}) \leq \nu/n$. A questo scopo notiamo che

$$\int_{D_{\nu,n}} (\psi_n - \varphi_n)\, d\mu \leq \int (\psi_n - \varphi_n)\, d\mu < \frac{1}{n}$$

essendo $\psi_n - \varphi_n \geq 0$. D'altra parte

$$\int_{D_{\nu,n}} (\psi_n - \varphi_n)\, d\mu \geq \mu(D_{\nu,n}) \inf_{D_{\nu,n}} (\psi_n - \varphi_n) \geq \frac{\mu(D_{\nu,n})}{\nu}$$

quindi

$$\frac{\mu(D_{\nu,n})}{\nu} \leq \frac{1}{n}$$

Ne deriva che

$$\mu(D_\nu) \leq \mu(D_{\nu,n}) \leq \frac{\nu}{n}$$

e passando al limite per $n \to \infty$ si trova

$$\mu(D_\nu) = 0 \Rightarrow \mu(D) = 0$$

Da cui $\bar{\psi} = \bar{\varphi} = f$ quasi ovunque: f è eguale a una funzione misurabile tranne al più su un insieme a misura nulla, perciò è misurabile (la controimmagine dell'insieme sul quale f è diversa dalla misurabile è, per ipotesi, un insieme misurabile di misura nulla: tutti i suoi
(c.v.d.) sottoinsiemi sono misurabili per completezza, la tesi).

Se una funzione è misurabile esistono due successioni (monotone) di funzioni misurabili superiori e inferiori a f i cui integrali convergono allo stesso limite (basta prendere la successione minimizzante e quella massimizzante nella proposizione precedente).

I.2.3 Definizione di integrale

Definizione I.13 *Se $f : X \to [0, +\infty]$ è misurabile sullo spazio di misura $(X, \mathcal{A}, \mu)$ allora definiamo l'integrale di f come*

$$\int f\, d\mu \equiv \sup_{0 \leq \varphi \leq f} \int \varphi\, d\mu$$

con φ che varia tra le funzioni semplici inferiori a f.

Definizione I.14 *Sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile sullo spazio di misura $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Se esistono finiti gli integrali della parte positiva e della parte negativa di f, allora f si dice integrabile e si pone*

$$\int f\, d\mu \equiv \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu$$

Se f è a valori complessi, si dice che è integrabile se e solo se sono integrabili parte reale e parte immaginaria, e si pone

$$\int f\, d\mu \equiv \int \operatorname{Re} f\, d\mu + i \int \operatorname{Im} f\, d\mu$$

Se f è a valori reali e $f \leq g$ integrabile, allora $f^+ \leq g^+$ e $f^- \leq g^-$. Per ogni φ funzione semplice minore o eguale a f^+, esiste certamente ψ funzione semplice tale che

$$\varphi \leq \psi \leq g^+$$

perciò, per ogni φ,

$$\int \varphi \, d\mu \leq \int \psi \, d\mu \leq \int g^+ \, d\mu$$

da cui

$$\sup_{\varphi \leq f} \int \varphi \, d\mu \leq \int g^+ \, d\mu$$

Ne consegue che sia parte positiva che parte negativa di f hanno integrale finito, perciò f è integrabile.
Sia ora f una funzione integrabile su $X \backslash E$ con $\mu(E) = 0$. Allora f è integrabile su X perché f ha integrale nullo su E. Dunque, abbiamo dimostrato il seguente

Teorema I.7 *Siano f, g funzioni misurabili a valori reali e sia g è integrabile. Se $f \leq g$ quasi ovunque, allora f è integrabile.*

Si ha, inoltre, il

Teorema I.8 *Valgono le seguenti proprietà dell'integrazione*

(i) *se f e g sono integrabili e $\lambda \in \mathbb{C}$ allora anche $f + \lambda g$ è integrabile e vale*

$$\int (f + \lambda g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \lambda \int g \, d\mu;$$

(ii) *se f e g sono funzioni integrabili a valori reali e $f \leq g$ allora*

$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu;$$

(iii) *condizione necessaria e sufficiente affinché f sia integrabile è che $|f|$ sia integrabile. In questo caso*

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu.$$

(iv) *se $f = g$ quasi ovunque, allora $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$; se f è a valori reali e $f \geq 0$ e $\int f \, d\mu = 0$, allora $f = 0$ quasi ovunque.*

Dimostrazione (i) e (ii) discendono direttamente dalla definizione di integrale. Vediamo (iv) sia $f = 0$ quasi ovunque, sia E l'insieme sul quale $f = 0$, allora E^c ha misura nulla. Ogni funzione semplice ha allora supporto in E^c, perciò è nulla quasi ovunque, dunque ha integrale nullo, così varrà per f.
Sia ora $f \geq 0$ e valga $\int f \, d\mu = 0$, ma, per assurdo esista $E \subset X$, $\mu(E) > 0$ sul quale $f \neq 0$ cioè $f > 0$. Consideriamo la funzione semplice $\varphi = (\inf_E f) \chi_E$: essa ha integrale maggiore di zero, perciò l'integrale di f deve essere positivo: assurdo.
In conclusione, occupiamoci di (iii). Consideriamo anzitutto una funzione integrabile a valori reali. f^+ e f^- sono integrabili, perciò tale è la loro somma, e dunque $|f| = f^+ + f^-$ è integrabile. Se ora $|f|$ è integrabile, essendo $f \leq |f|$ si ha che f è integrabile. Se f a valori complessi è integrabile si ha che $|\mathrm{Re}\, f|$ e $|\mathrm{Im}\, f|$ sono integrabili, perciò lo è anche $|f| \leq |\mathrm{Re}\, f| + |\mathrm{Im}\, f|$. Viceversa, sono integrabili $|\mathrm{Re}\, f| \leq f$ e $|\mathrm{Im}\, f| \leq |f|$. Veniamo alla stima. Sia $z \equiv \int f \, d\mu$, allora esiste $\alpha \in \mathbb{C}$, con $|\alpha| = 1$ talché $\alpha z = |z|$, dunque

$$\left| \int f \, d\mu \right| = \int \alpha f \, d\mu = \int \mathrm{Re}\,(\alpha f) \, d\mu + i \int \mathrm{Im}\,(\alpha f) \, d\mu$$

ma allora, necessariamente, $\int \operatorname{Im} \alpha f = 0$ e $\operatorname{Re} \alpha f \leq |\alpha f| \leq |f|$ perciò

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu.$$

(c.v.d.)

Si consideri ora una funzione f non negativa e integrabile e sia $E \subset X$ la controimmagine di $+\infty$. Siccome E è misurabile, vogliamo determinare la misura di E. La funzione f maggiora la funzione semplice che vale $+\infty$ su E e 0 altrove, ne consegue che f ha integrale finito solo se E ha misura nulla. Se ora f ha segno qualsiasi ed è integrabile, la controimmagine di $\pm\infty$ ha ancora misura nulla:

Teorema I.9 *Una funzione integrabile a valori reali assume valore infinito solo su un insieme a misura nulla.*

I.3 Teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale

I.3.1 Il teorema di Beppo Levi

Cominciamo con il dimostrare il seguente

Teorema I.10 *Sia f_j una successione crescente di funzioni misurabili positive, tendente puntualmente alla funzione f. Allora*

$$\int f \, d\mu = \lim_{j \to \infty} \int f_j \, d\mu.$$

Dimostrazione Come sappiamo f è misurabile e positiva, perciò integrabile. Per la monotonia della successione vale

$$\int f_j \, d\mu \leq \int f \, d\mu$$

per ogni $j \in \mathbb{N}$; ancora per monotonia il limite degli integrali esiste sulla retta reale estesa. Si ha perciò

$$\lim_{j \to \infty} \int f_j \, d\mu = \sup_j \int f_j \, d\mu \leq \int f \, d\mu$$

Sia ora φ semplice, con $0 \leq \varphi \leq f$, proviamo che

$$\int \varphi \, d\mu \leq \lim_{j \to \infty} \int f_j \, d\mu$$

il che concluderebbe la dimostrazione. Allo scopo dimostreremo che per ogni $0 < c < 1$

$$\int c\varphi \, d\mu \leq \sup_j \int f_j \, d\mu$$

da cui facendo tendere $c \to 1^-$ avremo

$$\int \varphi \, d\mu = \lim_{c \to 1^-} c \int \varphi \, d\mu \leq \sup_j \int f_j \, d\mu$$

Sia quindi

$$\varphi = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \chi_{A_k}$$

con gli $A_k \in \mathcal{A}$. φ non assuma il valore $+\infty$. Per ogni $j \in \mathbb{N}$ e $k = J_m$ poniamo

$$E_{j,k} \equiv \{x \in A_k \, | f_j > c\alpha_k \}$$

Ora, per ogni $x \in A_k$ vale $\lim_{j \to \infty} f_j(x) = f(x) > \varphi(x) = \alpha_k > c\alpha_k$, perciò, pur di scegliere

j abbastanza grande, varrà $f_j(x) > c\alpha_k$. Di conseguenza

$$A_k = \bigcup_j E_{j,k}$$

ma, per la monotonia, $E_{j,k} \subset E_{j+1,k}$, dunque

$$\mu(A_k) = \lim_{j\to\infty} \mu(E_{j,k})$$

per ogni $k \in J_m$. Dunque

$$\int f_j\, d\mu \geq \int_{\bigcup_{k=1}^m A_k} f_j\, d\mu = \sum_{k=1}^m \int_{A_k} f_j\, d\mu \geq \sum_{k=1}^m \int_{E_{j,k}} f_j\, d\mu \geq \sum_{k=1}^m c\alpha_k \mu(E_{j,k})$$

facendo tendere $j \to \infty$ si ottiene

$$\lim_{j\to\infty} \int f_j\, d\mu \geq c \sum_{k=1}^m \alpha_k \mu(A_k) = c \int \varphi\, d\mu$$

Se φ assume valore infinito su un insieme a misura nulla, ciò non ha effetti sull'integrazione e dunque la dimostrazione fatta resta valida. Se invece φ assume il valore $+\infty$ su un insieme di misura non nulla E, $\mu(E) > 0$, si ha allora $\int \varphi\, d\mu = +\infty$ e dunque f ha integrale infinito. Dato c arbitrario (ma finito) sia $E_j \equiv \{x \in E \,|\, f_j(x) > c\}$; gli E_j formano nuovamente una successione crescente di insiemi misurabili con unione E (infatti, ogni $E_j \subset E$, perciò $\bigcup E_j \subset E$; sia ora $x \in E$, allora $\lim f_j = \infty$, esiste un j talché $f_j(x) > c$ e $x \in \bigcup E_j$); si ha perciò

$$\int f_j\, d\mu \geq \int_{E_j} f_j\, d\mu \geq c\mu(E_j) \text{ da cui } \lim_{j\to\infty} \int f_j\, d\mu \geq c\mu(E)$$

(c.v.d.) per l'arbitrarietà di c si ha $\lim_{j\to\infty} \int f_j = +\infty$.

Siamo ora in grado di dimostrare il teorema della convergenza monotona di Beppo Levi

Teorema I.11 (della convergenza monotona o di Beppo Levi) *Sia f_j una successione monotona di funzioni integrabili. La successione converge quasi ovunque ad una funzione f integrabile a valori in $\mathbb{R}$ se e solo se la successione degli integrali $\left\{\int f_j\, d\mu\right\}$ è limitata; in tal caso vale anche*

$$\int f\, d\mu = \lim_{j\to\infty} \int f_j\, d\mu.$$

Dimostrazione Se f_j è crescente poniamo $g_j \equiv f_j - f_0$; altrimenti $g_j \equiv f_0 - f_j$. Siamo così ricondotti al caso di una successione crescente di funzioni misurabili positive. Per monotonia di g_j esiste il limite puntuale g (eventualmente a valori estesi) di g_j. Come sappiamo g è misurabile e positiva: dal teorema precedente si ha allora che

$$\int g\, d\mu = \lim_{j\to\infty} \int g_j\, d\mu$$

Ora, se la successione degli integrali è limitata, g ha integrale finito, perciò l'insieme sul quale g assume valore infinito è a misura nulla. g coincide quasi ovunque con una funzione integrabile (a integrale finito) a valori sulla retta reale (definita ad arbitrio su $g^{-1}(\{\infty\})$) Ne consegue che quasi ovunque esiste in $\mathbb{R}$ il limite puntuale di g_j.

Ora, quasi ovunque $g_j \to \bar{g}$ a valori in $\mathbb{R}$ e integrabile con integrale finito. D'altra parte continua a valere il fatto che $\lim_{j\to\infty} g_j = g$ a valori in $\overline{\mathbb{R}}$ e che

$$\int g\, d\mu = \lim_{j\to\infty} \int g_j\, d\mu$$

Ma $g = \bar{g}$ quasi ovunque, ne consegue che

$$\mathbb{R} \ni \int \bar{g}\, d\mu = \lim_{j\to\infty} \int g_j\, d\mu = \sup_j \int g_j\, d\mu$$

(c.v.d.) da cui la successione degli integrali è limitata.

I.3.2 Il lemma di Fatou

Il lemma di Fatou stabilisce la semicontinuità (sequenziale) superiore dell'integrale:

Lemma I.3 (di Fatou) *Se f_j è una successione di funzioni misurabili positive si ha*

$$\int \liminf_{j\to\infty} f_j \, d\mu \leq \liminf_{j\to\infty} \int f_j \, d\mu$$

Dimostrazione L'enunciato è corretto essendo il minimo limite definito ovunque (a valori sulla retta estesa) e misurabile. Definita la successione

$$f_{*m} \equiv \inf_{p\in\mathbb{N}} f_{m+p}$$

si ha

$$f \equiv \liminf_{j\to\infty} f_j = \lim_{m\to\infty} f_{*m}$$

Come sappiamo f_{*m} è misurabile ed è inoltre positiva e crescente. Si ha poi che $f_{*m} \leq f_{m+p}$ per ogni $p \in \mathbb{N}$. Ne deriva che

$$\int f_{*m} \, d\mu \leq \int f_{m+p} \, d\mu \; \forall p \in \mathbb{N}$$

da cui si ottiene

$$\int f_{*m} \, d\mu \leq \inf_{p\in\mathbb{N}} \int f_{m+p} \, d\mu$$

Se passiamo al limite per $m \to \infty$, il secondo membro tende al minimo limite della successione degli integrali. Il primo mebro, come notato è una successione crescente di funzioni misurabili e positive che tende puntualmente a f: per il teorema della convergenza monotona

$$\lim_{m\to\infty} \int f_{*m} \, d\mu = \int \lim_{m\to\infty} f_{*m} \, d\mu = \int f \, d\mu,$$

(c.v.d.) la tesi.

I.3.3 Il teorema della convergenza dominata di Lebesgue

L'ultimo teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale è dovuto a Lebesgue:

Teorema I.12 (della convergenza dominata o di Lebesgue) *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni (a valori in $\mathbb{C}$) misurabili su X, tutte dominate (i.e. maggiorate in modulo) da una stessa funzione g positiva e con integrale finito, convergente quasi ovunque ad una funzione misurabile f. Allora f è integrabile con integrale finito e vale*

$$\int f \, d\mu = \lim_{j\to\infty} \int f_j \, d\mu.$$

Inoltre si ha

$$\lim_{j\to\infty} \int |f - f_j| \, d\mu = 0.$$

Dimostrazione Dall'ipotesi si ha che, quasi ovunque in X,

$$|f_j| \leq g$$

con g integrabile a integrale finito. Ne consegue che tutte le f_j sono integrabili e così vale anche per f, visto che pure f è dominata da g. Introducendo parte reale e parte immaginaria, possiamo supporre che tutte le funzioni in gioco siano reali. Alterando f_j, f e g su un insieme di misura nulla, la qual cosa lascia invariati gli integrali, possiamo supporre che la convergenza sia **ovunque** e che, ovunque, $-g \leq f_j \leq g$. Applichiamo il lemma di Fatou a $g - f_j \geq 0$ abbiamo

$$\int \liminf_{j\to\infty} (g - f_j) \, d\mu \leq \liminf_{j\to\infty} \int (g - f_j) \, d\mu$$

Il primo membro è l'integrale di $g - f$, mentre il secondo è

$$\liminf_{j\to\infty} \int (g - f_j)\ d\mu = \int g\, d\mu - \limsup_{j\to\infty} \int f_j\, d\mu$$

perciò

$$\limsup_{j\to\infty} \int f_j\, d\mu \le \int f\, d\mu$$

Se ora applichiamo il lemma di Fatou a $f_j + g \ge 0$ troviamo

$$\begin{aligned} \int \liminf_{j\to\infty} (g + f_j)\ d\mu &\le \liminf_{j\to\infty} \int (g + f_j)\ d\mu \\ \int f\, d\mu &\le \liminf_{j\to\infty} \int f_j\, d\mu \end{aligned}$$

da cui troviamo

$$\limsup_{j\to\infty} \int f_j\, d\mu \le \int f\, d\mu \le \liminf_{j\to\infty} \int f_j\, d\mu$$

perciò esiste il limite della successione degli integrali ed è eguale all'integrale del limite puntuale.

La seconda parte, si dimostra applicando la prima a $|f - f_j|$ che è convergente quasi ovunque a 0 ed è dominata da $2g$. **(c.v.d.)**

I.4 Misure prodotto: i teoremi di Fubini e Tonelli

I.4.1 Misura prodotto

Siano dati due spazi di misura completi $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$. Consideriamo l'insieme $X \times Y$. Se $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$ chiamiamo l'insieme $A \times B$ **rettangolo misurabile**. La famiglia $\mathcal{R}$ dei rettangoli misurabili non è né unìalgebra né tantomeno una σ-algebra, tuttavia

(i) l'intersezione di elementi di $\mathcal{R}$ appartiene a $\mathcal{R}$, dato che

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)\,;$$

(ii) il complementare di un elemento di $\mathcal{R}$ è unione disgiunta di elementi di $\mathcal{R}$:

$$(A \times B)^c = (A^c \times B) \cup (A^c \times B^c) \cup (A \times B^c)$$

Si dice allora che $\mathcal{R}$ è una **semialgebra** di insiemi. Definiamo su $\mathcal{R}$ la funzione

$$\lambda\,(A \times B) = \mu\,(A)\,\nu\,(B)$$

Abbiamo allora il seguente

Lemma I.4 *Sia $\{(A_n \times B_n)\}$ una successione di elementi disgiunti di $\mathcal{R}$ la cui unione sia $A \times B \in \mathcal{R}$. Allora si ha*

$$\lambda\,(A \times B) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda\,(A_n \times B_n)$$

Dimostrazione Sia $x \in A$, per ogni $y \in B$ esiste un unico $n_y \in \mathbb{N}$ tale che $(x, y) \in A_{n_y} \times B_{n_y}$. Infatti, fissato y deve esistere almeno un indice n talché $(x, y) \in A_n \times B_n$, d'altra parte gli elementi della successione sono tutti disgiunti, perciò l'indice è unico $n_y \equiv n$. Ne consegue che, se $x \in A$

$$\{y\,|(x, y) \in A \times B\,\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{y\,|(x, y) \in A \times B_n\,\}$$

dove, per quanto detto, l'unione è disgiunta. Per additività di ν abbiamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n) \chi_{A_n} = \nu(B) \chi_A$$

Dal teorema di Levi

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n) \chi_{A_n} \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int \nu(B_n) \chi_{A_n} \, d\mu = \int \nu(B) \chi_A \, d\mu$$

cioè

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n) \mu(A_n) = \nu(B) \mu(A).$$

(c.v.d.)

Lemma I.5 *Esiste un'unica misura $\bar{\lambda}$ sull'algebra $\mathcal{A}$ generata dalla famiglia $\mathcal{R}$ che estende λ.*

Dimostrazione $\mathcal{A}$ contiene l'insieme vuoto, e ogni suo elemento è unione finita disgiunta di elementi di $\mathcal{R}$. Definiamo allora

$$\bar{\lambda}(A) \equiv \sum_{i=1}^{n} \lambda(R_i)$$

dove $A = R_1 \cup \ldots \cup R_n$ con $R_i \in \mathcal{R}$. Dobbiamo vedere che la definizione è ben posta, sicché la $\bar{\lambda}$ è unica. Se $A = S_1 \cup \ldots \cup S_m$ abbiamo $R_j = R_j \cap A = (R_j \cap S_1) + \ldots + (R_j \cap S_m)$ sicché

$$\bar{\lambda}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(R_i) = \sum_{i,j} \lambda(R_i \cap S_j)$$

da cui si ha l'indipendenza dalla scomposizione di A. Ancora per il lemma di sopra si ha che $\bar{\lambda}$ è una misura su un'algebra. **(c.v.d.)**

Visto che abbiamo prodotto una misura su una σ-algebra, per il teorema di Carathéodory, abbiamo una misura completa sulla σ-algebra $\mathcal{S}$ generata da $\mathcal{A}$. La misura che abbiamo costruito si chiama **misura prodotto** di μ e ν e si indica con $\mu \otimes \nu$. Come sappiamo essa è finita (o σ-finita) se lo sono μ e ν.

I.4.2 Il teorema di Fubini

Prima di giungere al teorema di Fubini ci occorrono dei risultati preliminari.

Lemma I.6 *Se $\bar{\mu}$ è una misura su una algebra $\mathcal{A}$ e μ^* è la misura esterna da essa indotta, allora per ogni $E \subset X$ a msiura finita e $\varepsilon > 0$, esiste $A \in \mathcal{A}_\sigma$ (l'insieme delle unioni numerabili di elementi di A) tale che $E \subset A$ e*

$$\mu^*(A) \le \mu^*(E) + \varepsilon$$

ed esiste un $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ (l'insieme delle intersezioni numerabili di elementi di A_σ) tale che $E \subset B$ e

$$\mu^*(E) = \mu^*(B).$$

Dimostrazione La prima parte del lemma è stata dimostrata nel corso della dimostrazione del teorema di estensione. Veniamo al secondo enunciato. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, consideriamo $A_n \in \mathcal{A}$, con $E \subset A_n$ e $\mu^*(A_n) \le \mu^*(E) + 1/n$. Poniamo adesso $B \equiv \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Ovviamente $E \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = B$ e $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$. Infine,

$$\mu^*(E) \le \mu^*(B) \le \mu^*(A_n) \le \mu^*(E) + \frac{1}{n}$$

(c.v.d.) Per l'arbitrarietà di n, la tesi.

Sia ora $E \subset X \times Y$ e definiamo le **sezioni** di E in x e in y:

$$E_x \equiv \{y \in Y \,|(x,y) \in E\}\,; \quad E_y \equiv \{x \in X \,|(x,y) \in E\}$$

Sia $E_x \in \mathcal{R}_{\sigma\delta}$ allora è ν-misurabile. Se $E \in \mathcal{R}$ questo è ovvio. Se ora $\mathcal{R}_\sigma \ni E = \bigcup E_n$ allora

$$\chi_{E_x}(y) = \chi_E(x,y) = \sup_n \chi_E(x,y) = \sup_n \chi_{E_{nx}}(y)$$

e quest'ultima funzione è misurabile come inferiore di funzioni misurabili. Se ora $\mathcal{R}_{\sigma\delta} \ni E = \bigcap E_n$ (ora $E_n \in \mathcal{R}_\sigma$) si procede come sopra considerando

$$\chi_{E_x}(y) = \chi_E(x,y) = \inf_n \chi_E(x,y) = \inf_n \chi_{E_{nx}}(y)\,.$$

Lemma I.7 *Se $E \in \mathcal{R}_{\sigma\delta}$ e $\mu \otimes \nu(E) < \infty$ allora la funzione $g(x) = \nu(E_x)$ è misurabile in $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e*

$$\int g(x)\, d\mu = \mu \otimes \nu(E)$$

Dimostrazione Se $E \in \mathcal{R}$ il lemma è banale, infatti, $E = A \times B$ e $g(x) = \nu(B)\chi_A(x)$

$$\int g(x)\, d\mu = \nu(B) \int \chi_A(x)\, d\mu = \mu(A)\nu(B) = \mu \otimes \nu(E)$$

Sia ora E l'unione degli elementi disgiunti di una successione $\{E_n\} \subset \mathcal{R}$. Poniamo

$$g_n(x) = \nu(E_{nx})$$

per quanto visto nel lemma I.4, vale

$$g(x) = \sum_n g_n(x)$$

Siccome le g_n sono misurabili, g è misurabile e per il teorema della convergenza monotona

$$\int g(x)\, d\mu = \sum_n \mu \otimes \nu(E_n) = \mu \otimes \nu(E)$$

Perciò il lemma è vero in $\mathcal{R}_\sigma$. Infine, se $E \in \mathcal{R}_{\sigma\delta}$ ha misura finita, allora esiste una successione $\{E_n\} \subset \mathcal{R}_\sigma$ con $E = \bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n$. Possiamo sempre suppore che gli E_n siano incapsulati e che E_1 abbia misura finita (lemma precedente). Poniamo

$$g_n(x) = \nu(E_{nx})$$

Per quanto visto

$$\int g_1\, d\mu = \mu \otimes \nu(E_{1x}) < \infty$$

Si ha allora $g_1 < \infty$ quasi ovunque: se dunque x è tale che $g_1(x) < \infty$ si ha

$$g(x) = \nu(E_x) = \lim_{n\to\infty} \nu(E_{nx}) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$$

Allora g è misurabile e $g_n(x) \le g_1(x)$, per il teorema di Lebesgue, abbiamo

$$\int g\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \mu \otimes \nu(E_n) = \mu \otimes \nu(E)\,.$$

(c.v.d.)

Se indichiamo con $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ l'insieme delle funzioni integrabili a valori complessi identificando le funzioni eguali a parte un insieme di misura nulla, giungiamo al seguente

Teorema I.13 (di Fubini) *Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ sono spazi completi di misura e $f \in L^1(X \times Y, \mu \otimes Y)$ allora*

(i) *per quasi ogni x la funzione $f_x(y) \equiv f(x,y)$ appartiene a $L^1(Y, \nu)$ e*

$$\int_Y f_x(y)\, d\nu(y) \in L^1(X, \mu)\,;$$

(ii) *per quasi ogni y la funzione $f_y(x) \equiv f(x,y)$ appartiene a $L^1(X, \mu)$ e*

$$\int_X f_y(x)\, d\mu(x) \in L^1(Y, \nu)\,;$$

(iii) *infine,*

$$\int_Y d\nu\,(y) \int_X f_y\,(x)\;d\mu\,(x) = \int_X d\mu\,(x) \int_Y f_x\,(y)\;d\nu\,(y) = \int_{X\times Y} f\,(x,y)\;d\,(\mu\otimes\nu)$$

Dimostrazione Basta dimostrare (i) e l'ultima eguaglianza della (iii). Inoltre basta limitarsi a funzioni positive, il teorema varrà poi per combinazioni lineari e perciò per funzioni qualsiasi.

Dimostriamo la tesi nel caso di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili di misura finita. Sia E l'insieme che andiamo a considerare con $\mu\otimes\nu\,(E) < \infty$. Per il lemma I.6 esiste un insieme $F \in \mathcal{R}_{\sigma\delta}$ contenente E tale che $\mu\otimes\nu\,(E) = \mu\otimes\nu\,(F)$. L'insieme $G \equiv F\backslash E$ è misurabile e perciò

$$\mu\otimes\nu\,(F) = \mu\otimes\nu\,(E) + \mu\otimes\nu\,(G)$$

da cui G ha misura nulla. A sua volta, esiste $H \in \mathcal{R}_{\sigma\delta}$ contenente G e con $\mu\otimes\nu\,(H) = \mu\otimes\nu\,(G) = 0$. Dunque, per il lemma precedente $\nu\,(H_x) = 0$ per quasi ogni x. Questo comporta, per completezza, che $\nu\,(G_x) = 0$. Quindi, quasi ovunque,

$$g\,(x) = \nu\,(E_x) = \nu\,(F_x)$$

e, ancora, per il lemma precedente, g è misurabile e

$$\int g\,(x)\;d\mu = \mu\otimes\nu\,(F) = \mu\otimes\nu\,(E)$$

Ne segue che

$$\int g\,(x)\;d\mu = \int_X d\mu\,(x) \int_Y \chi_{Ex}\,(y)\;d\nu\,(y) = \int_{X\times Y} \chi_E\,(x,y)\;d\,(\mu\otimes\nu)\,.$$

Il teorema è allora dimostrato per funzioni caratteristiche di insiemi misurabili di misura finita, perciò per linearità, per funzioni semplici nulle al di fuori di un insieme di misura finita. Ma per il teorema I.6 abbiamo che ogni f non negativa integrabile è limite puntuale di una successione crescente di funzioni semplici: $f\,(x,y) = \lim_{n\to\infty}\varphi_n\,(x,y)$. Notato che le φ_n hanno integrale finito essendo dominate da f (questo comporta che sono nulle al di fuori di insiemi di misura finita), e che $f_x\,(y) = \lim_{n\to\infty}\varphi_{nx}\,(y)$, per il teorema di Levi, si ha

$$\int_Y f_x\,(y)\;d\nu = \lim_{n\to\infty}\int_Y \varphi_{nx}\,(y)\;d\nu$$

Ne consegue che l'integrale è una funzione misurabile della x (limite di una successione di funzioni misurabili), ancora per Levi

$$\int_X d\mu \int_Y f_x\,(y)\;d\nu = \lim_{n\to\infty}\int_X d\mu \int_Y \varphi_{nx}\,(y)\;d\nu = \lim_{n\to\infty}\int_{X\times Y}\varphi_n\,d\,(\mu\otimes\nu) = \int_{X\times Y} f\,d\,(\mu\otimes\nu)$$

(c.v.d.)

I.4.3 Il teorema di Tonelli

Nel teorema di Fubini, usiamo l'ipotesi di integrabilità di f una volta sola, per mostrare che le funzioni semplici φ_n hanno supporto a misura finita. A questo scopo, se supponiamo che gli spazi di misura siano σ-finiti, abbiamo in forza del solo teorema I.6, che le φ_n sono nulle al di fuori di un insieme a misura finita e questo ci consente di richiedere la sola misurabilità per f.

Teorema I.14 (di Tonelli) *Se $(X,\mathcal{A},\mu)$ e $(Y,\mathcal{B},\nu)$ sono spazi completi e σ-finiti di misura e f è una funzione misurabile definita su $X\times Y$, allora*

(i) *per quasi ogni x la funzione $f_x\,(y) \equiv f\,(x,y)$ è misurabile ed è pure misurabile la*

$$x \mapsto \int_Y f_x\,(y)\;d\nu\,(y)\,;$$

(ii) *per quasi ogni* y *la funzione* $f_y(x) \equiv f(x,y)$ *è misurabile ed è pure misurabile la*

$$y \mapsto \int_X f_y(x)\, d\mu(x);$$

(iii) *infine,*

$$\int_Y d\nu(y) \int_X f_y(x)\, d\mu(x) = \int_X d\mu(x) \int_Y f_x(y)\, d\nu(y) = \int_{X\times Y} f(x,y)\, d(\mu\otimes\nu)$$

I.5 Gli spazi L^p

I.5.1 Definizione degli spazi L^p

Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura (supponiamo anche se adesso non sarebbe strettamente necessario che la misura sia σ-finita e completa) e sia $1 \le p \le \infty$. Cominciamo a considerare p finito. Allora lo spazio $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ è costituito dalle classi di equivalenza di funzioni misurabili $f : X \to \mathbb{K}$ (la relazione di equivalenza è l'eguaglianza quasi ovunque), tali che

$$\int_X |f|^p\, d\mu < \infty.$$

Linearità degli spazi $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$

$L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio vettoriale, definite le operazioni di somma e prodotto per scalare su un elemento rappresentativo di ciascuna classe (la definizione è ovviamente ben posta). Infatti, se $[x], [y] \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $[x + \alpha y] \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, poiché

$$|x(s) + y(s)|^p \le 2^p \left(|x(s)|^p + |y(s)|^p\right).$$

Infatti, se $a, b \in \mathbb{C}$

$$|a + b| \le |a| + |b| \le 2 \max\{|a|, |b|\}$$

da cui

$$|a + b|^p \le 2^p \max\{|a|^p, |b|^p\} \le 2^p \left(|a|^p + |b|^p\right)$$

Norma $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$

Su $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ è anche possibile definire la norma L^p

$$\|[x]\|_{L^p} = \left(\int_S |x(s)|^p\, d\mu\right)^{1/p}$$

(che, ancora, si calcola su un elemento qualsiasi di ciascuna classe) essa, infatti, è tale che

(i) per ogni $[x] \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ vale $\|x\| \ge 0$, inoltre $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$ **quasi ovunque** in S, perciò $x \in [0]$;

(ii) per ogni $[x] \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, vale $\|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|$;

(iii) per ogni $[x], [y] \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ vale la **diseguaglianza triangolare** $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$;

Dimostrare la diseguaglianza triangolare non è ovvio se $p > 1$. Ci occorrono dei risultati preliminari. Prima di procedere avvertiamo che, con abuso di notazione e di linguaggio, confonderemo, come è uso, le classi $[f] \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ con le funzioni $f \in [f]$.

Lemma I.8 (diseguaglianza di Young)

Se $1 < p < \infty$ *e* q*, coniugato di* p*, è tale che*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

allora, se $a, b \in [0, +\infty[$*, vale*

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

dove l'eguaglianza è soddisfatta se e solo se $a = b^{1/(p-1)}$.

Dimostrazione Definita la funzione

$$f(c) \equiv \frac{c^p}{p} + \frac{1}{q} - c, \quad c \in [0, +\infty[$$

essa ha un unico minimo, 0, che è ottenuto per $c = 1$, sicché posto $c = ab^{-1/(p-1)}$

$$\begin{aligned} \frac{a^p}{p} b^{-p/(p-1)} + \frac{1}{q} &\geq ab^{-1/(p-1)} \\ \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p/(p-1)}}{q} &\geq ab \end{aligned}$$

(c.v.d.) essendo $p/(p-1) = q$.

Lemma I.9 (diseguaglianza di Hölder) *Se $x \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $y \in L^q(X, \mathcal{A}, \mu)$ con p e q coniugati,*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

allora

$$\int_X |x(s)\, y(s)|\, d\mu \leq \left(\int_X |x(s)|^p\, d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X |y(s)|^q\, d\mu \right)^{1/q}$$

Dimostrazione Assumiamo che $A \equiv \|x\|_{L^p}$ e $B \equiv \|y\|_{L^q}$ sono ambedue diverse da 0, altrimenti la tesi è ovvia essendo q.o. $x = 0$ e $y = 0$. Prendiamo $a \equiv |x| / A$ e $b \equiv |y| / B$

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

e integriamo ottenendo la tesi,

$$\frac{\int_X |x(s)\, y(s)|\, d\mu}{AB} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

(c.v.d.)

Infine dimostriamo la diseguaglianza triangolare

Teorema I.15 (diseguaglianza di Minkowski) *Se $x, y \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ allora*

$$\left(\int_X |x(s) + y(s)|^p\, d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int_X |x(s)|^p\, d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_X |y(s)|^p\, d\mu \right)^{1/p}$$

Dimostrazione Abbiamo

$$|x + y|^p = |x + y|^{p-1} |x + y| \leq |x + y|^{p-1} (|x| + |y|)$$

sfruttiamo questo e la diseguaglianza di Hölder per scrivere

$$\int_X |x(s) + y(s)|^p\, d\mu \leq \int_X |x(s) + y(s)|^{p-1} |x(s)|\, d\mu + \int_X |x(s) + y(s)|^{p-1} |y(s)|\, d\mu \leq$$
$$\left(\int_X |x(s) + y(s)|^{(p-1)q}\, d\mu \right)^{1/q} \left(\int_X |x(s)|\, d\mu \right)^{1/p}$$
$$+ \left(\int_X |x(s) + y(s)|^{(p-1)q}\, d\mu \right)^{1/q} \left(\int_X |y(s)|\, d\mu \right)^{1/p}$$

(c.v.d.) da cui, essendo $1 - 1/q = 1/p$ si ottiene la diseguaglianza cercata.

Lo spazio $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ Lo spazio $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ è l'unico spazio $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ per cui la norma può essere considerata come indotta da un prodotto scalare. Si consideri infatti

$$(x, y) \equiv \int_S \bar{x} y\, d\mu$$

la cui norma è

$$\|x\| = (x,x)^{1/2} = \left(\int_S |x|^2 \, d\mu\right)^{1/2} = \|x\|_{L^2}$$

Dunque, lo spazio $L^p(X,\mathcal{A},\mu)$ è uno spazio pre-hilbertiano. Gli altri spazi $L^p(X,\mathcal{A},\mu)$ sono spazi normati. Vedremo tra poco che gli spazi $L^p(X,\mathcal{A},\mu)$ sono di Banach, perciò sono completi. Ne consegue che lo spazio $L^p(X,\mathcal{A},\mu)$ è uno spazio di Hilbert (ovviamente a dimensione infinita).

Convergenza uniforme ed L^p Alcune considerazioni sulla convergenza. Sia x_n una successione di funzioni continue in X. Se supponiamo X compatto di misura finita, allora $x_n \in L^p(X,\mathcal{A},\mu)$. Se x_n converge uniformemente a x_∞ allora la convergenza avviene anche in norma L^p, infatti

$$\begin{aligned}\left(\int_X |x_\infty - x_n|^p \, d\mu\right)^{1/p} &\le \left(\int_X \left(\max_X |x_\infty - x_n|\right)^p d\mu\right)^{1/p} \le \\ \mu(X)\max_X |x_\infty - x_n| &= \mu(X)\|x_\infty - x_n\|_\infty\end{aligned}$$

Convergenza L^2 ed L^1 Siccome poi $L^2(X,\mathcal{A},\mu)$ è pre-hilbertiano vale la diseguaglianza di Cauchy-Schwartz e dunque

$$|(|x|,1)| = \int_S |x| \, d\mu = \|x\|_{L^1} \le \|x\|_{L^2}$$

perciò la convergenza L^2 implica la convergenza L^1 e inoltre $L^2(S) \subset L^1(S)$. Facile vedere che non vale il contrario, basta prendere $1/\sqrt{x}$ in $[0,1]$.

I.5.2 Completezza degli spazi L^p

Richiamiamo alcuni risultati sugli spazi completi.

Lemma I.10 *Una successione di Cauchy, avente una sottosuccessione convergente, è convergente.*

Dimostrazione Sia $\{x_n\}$ di Cauchy e sia $\{x_{k_n}\}$ una sottosuccesione, mappata dalla $k_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ crescente, convergente ad a. Fissato $\varepsilon > 0$ sia $\mu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\|x_j - x_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

se $j,n \ge \mu$. Sia poi $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\|x_{k_m} - a\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

se $m \ge \nu$. Fissiamo $\lambda \equiv \max\{\mu,\nu\}$, allora $m \ge \nu$ e $k_m \ge m \ge \mu$, perciò, scelto $n \ge \lambda$, valgono contemporaneamente

$$\begin{aligned}\|x_{k_m} - x_n\| &< \frac{\varepsilon}{2} \\ \|x_{k_m} - a\| &< \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

dalla diseguaglianza triangolare

$$\|x_n - a\| \le \|x_{k_m} - x_n\| + \|x_{k_m} - a\| < \varepsilon$$

(c.v.d.) sicché $x_n \to a$.

Lemma I.11 *Ogni successione di Cauchy ha una sottosuccessione a variazione finita.*

Dimostrazione Sia $\varepsilon_j \equiv 1/2^{j+1}$, sicché

$$\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j < \infty$$

Presa la assegnata x_n, definiamo la seguente successione in $\mathbb{N}$

$$\nu'(i) \equiv \min\{m \in \mathbb{N}\,|\sup\{\|x_{k+m} - x_m\|\} < \varepsilon_i\},$$

la definizione data è ben posta perché

$$\lim_{m\to\infty} \sup\left\{\|x_{k+m} - x_m\|\right\} = 0$$

essendo la x_n di Cauchy.

Tramite la ν' definiamo

$$\nu(j) \equiv \max\left\{\nu(i) \,|i \le j\right\}$$

quest'ultima è crescente e definisce una sottosuccessione della x_n. Ora la quantità

$$\left\|x_{\nu(m+1)} - x_{\nu(m)}\right\| \le \sup\left\{\|x_{k+m} - x_m\|\right\} < \varepsilon_m$$

(c.v.d.) perciò la sottosucessione costruita è a variazione finita.

Teorema I.16 *$L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio di Banach, se $p \le 1 < \infty$.*

Dimostrazione Sia $\{x_n\} \subset L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ di Cauchy. Esiste allora la mappa n_k tale che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right\| < \infty$$

Definiamo ora la successione

$$y_t(s) = |x_{n_1}(s)| + \sum_{k=1}^{t} \left|x_{n_{k+1}}(s) - x_{n_k}(s)\right|$$

perciò, dalla disuguaglianza triangolare

$$\|y_t\| \le \|x_{n_1}(s)\| + \sum_{k=1}^{\infty} \left\|x_{n_{k+1}}(s) - x_{n_k}(s)\right\|$$

da cui segue che $y_t \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. La successione $y_t(s)$ è monotona crescente e positiva, così sarà $(y_t(s))^p$ che è pure sommabile. Grazie al teorema di Beppo Levi possiamo concludere che quasi ovunque in S esiste il limite puntuale di $y_t(s)$ e, inoltre,

$$\int_X \lim_{t\to\infty} (y_t(s))^p \, d\mu = \lim_{t\to\infty} \|y_t\|^p \le \left(\|x_{n_1}(s)\| + \sum_{k=1}^{\infty} \left\|x_{n_{k+1}}(s) - x_{n_k}(s)\right\|\right)^p$$

Si ha dunque che $y(s) \equiv \lim_{t\to\infty}(y_t(s)) \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Consideriamo ora la successione x_{n_t}, siccome

$$x_{n_t}(s) = x_{n_1}(s) + \sum_{k=1}^{t} \left(x_{n_{k+1}}(s) - x_{n_k}(s)\right)$$

essa converge quasi ovunque, poichè la serie a secondo membro è assolutamente convergente (essendo $y_t(s)$ convergente). Abbiamo che la successione in t

$$|x_{n_t}(s) - x_{n_k}(s)|^p$$

è data da funzioni sommabili e positive. Applicando quindi il lemma di Fatou, otteniamo

$$\begin{aligned} \|x_\infty - x_{n_k}\|^p &= \int_X \lim_{t\to\infty} |x_{n_t}(s) - x_{n_k}(s)|^p \, d\mu \le \liminf_{t\to\infty} \|x_{n_t} - x_{n_k}\|^p \le \\ &\le \left(\sum_{m=k}^{\infty} \left\|x_{n_{m+1}}(s) - x_{n_m}(s)\right\|\right)^p \end{aligned}$$

Passando al limite per $k \to \infty$, siccome il secondo membro va a zero, si ricava che x_{n_k} converge a x_∞ in norma L^p. Inoltre la disuguaglianza provata mostra che x_∞ appartiene allo spazio $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Dal secondo lemma di sopra si conclude che x_n converge in norma L^p a $x_\infty \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Abbiamo così concluso.

Per completezza dell'esposizione, giustifichiamo gli (ovvi!) passaggi di cui sopra

$$\|x_{n_t} - x_{n_k}\| \leq \sum_{m=k}^{t-1} \left\|x_{n_{m+1}}(s) - x_{n_m}(s)\right\|$$

da cui elevando alla p e passando al limite inferiore in t di ambo i membri si ottiene l'ultima diseguaglianza scritta. Per quello che riguarda il passaggio al limite per $k \to \infty$ notiamo che se $b = \sum a_m$ si ha

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{m=k}^{\infty} a_m = \lim_{k\to\infty} \left(b - \sum_{m=1}^{k-1} a_m\right) = b - b = 0.$$

(c.v.d.)

Incidentalmente abbiamo provato che

Corollario I.2 *Una successione di Cauchy $\{x_n\}$ a valori in uno spazio $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ contiene una sottosuccessione tale che esiste quasi ovunque $x_\infty(s) = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}(s)$, $x_\infty \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $x_n \to x_\infty$ in norma L^p.*

I.5.3 Lo spazio L^∞

Funzioni essenzialmente limitate Una funzione misurabile $f : X \to \mathbb{C}$ si dice **essenzialmente limitata** se esiste $K > 0$ tale che

$$\mu\{s \in X \,||f(s)| > K\} = 0$$

Un tale K è detto **maggiorante essenziale**. Lo spazio $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ è lo spazio delle classi di equivalenza di funzioni misurabili essenzialmente limitate. Anche per $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ adotteremo la convenzione di chiamare con f la classe di equivalenza cui f appartiene.

Linearità di $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ Evidentemente $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio vettoriale: siano f e g in $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$, allora esistono K_f e K_g tali che fuori da A_f e A_g (di misura nulla) $|f| \leq K_f$ e $|g| \leq K_g$, ora

$$|f + g| \leq |f| + |g| \leq K_f + K_g, \text{per } s \in A_f \cup A_g$$

ma per subadditività $\mu(A_f \cup A_g) = 0$, da cui $f + g \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$. Con un analogo ragionamento si ottiene che $f \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) \Rightarrow \lambda f \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Superiore essenziale $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ può essere normato da

$$\|[f]\|_\infty \equiv \inf\{K \,|K \text{ è maggiorante essenziale di } f\}$$

La norma di f si dice anche **superiore essenziale** e si indica con $\operatorname{ess\,sup}|f|$. Vediamo la diseguaglianza traingolare. Fuori da A_f (intersezione di insiemi a misura nulla, perciò sottoinsiemi di insiemi a misura nulla, perciò a misura nulla) di misura nulla vale $|f| \leq \operatorname{ess\,sup}|f|$ e fuori da A_g di misura nulla $|g| \leq \operatorname{ess\,sup}|g|$ dunque

$$|f + g| \leq |f| + |g| \leq \operatorname{ess\,sup}|f| + \operatorname{ess\,sup}|g|$$

perciò, per le proprietà dell'inferiore

$$\operatorname{ess\,sup}|f + g| \leq \operatorname{ess\,sup}|f| + \operatorname{ess\,sup}|g|$$

Veniamo a dimostrare la completezza di $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$

Teorema I.17 *Lo spazio $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ è completo.*

Dimostrazione Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy in $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$; sia $A_k \equiv \{s \in X \,|||x_k(s)| \geq \|x_k\|_\infty|\}$ e sia $B_{n,m} \equiv \{s \in X \,||x_n(s) - x_m(s)| \geq \|x_n - x_m\|_\infty\}$. Ora, gli A_k e i $B_{n,m}$ sono insiemi misurabili di misura nulla, perciò la loro unione E ha misura nulla. Nel complementare di E la successione data è di Cauchy rispetto alla norma uniforme per costruzione ed è formata da funzioni limitate a valori in uno spazio completo ($\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$). Come sappiamo da Analisi II per Fisici, questo implica che la successione converge uniformemente a una funzione limitata sul complementare di E. Se estendiamo la funzione limite a X, ponendola nulla fuori da E^c, otteniamo un elemento $x_\infty \in L^\infty(X,\mathcal{A},\mu)$ cui la successione converge in norma L^∞. Infatti, se

$$\sup_{s\in E^c} |x_\infty(s) - x_n(s)| = \lambda_n$$

allora λ_n è un maggiorante essenziale di $x_\infty(s) - x_n(s)$, dunque

$$\operatorname{ess\,sup} |x_\infty(s) - x_n(s)| < \lambda_n$$

(c.v.d.) siccome per $n \to \infty$ $\lambda_n \to 0$, si ha la tesi.

Presa x_n di Cauchy in $L^\infty(X,\mathcal{A},\mu)$ essa converge quasi ovunque puntualmente (uniformemente) a una funzione limitata che è il limite in norma L^∞ di x_n.
Possiamo allora ricapitolare

Teorema I.18 (di completezza degli spazi $L^p(X,\mathcal{A},\mu)$) *Lo spazio $L^p(X,\mathcal{A},\mu)$, $1 \le p \le \infty$, è completo.*

Corollario I.3 *Una successione di Cauchy $\{x_n\}$ a valori in uno spazio $L^p(X,\mathcal{A},\mu)$, $1 \le p \le \infty$, contiene una sottosuccessione tale che esiste quasi ovunque $x_\infty(s) = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}(s)$, $x_\infty \in L^p(X,\mathcal{A},\mu)$ e $x_n \to x_\infty$ in norma L^p.*

I.5.4 Il lemma di Urysohn

Proposizione I.8 *Uno spazio compatto X è* normale*, nel senso che, per ogni coppia di chiusi disgiunti F_1 e F_2, esistono due aperti disgiunti G_1 e G_2, tali che $F_1 \subset G_1$ e $F_2 \subset G_2$.*

Dimostrazione Siano dati due punti x, y appartenenti, rispettivamente, a F_1 e F_2. Allora esistono due aperti disgiunti $G(x,y)$ e $G(y,x)$ per cui $x \in G(x,y)$ e $y \in G(y,x)$. Al variare di y in F_2 la famiglia $G(y,x)$ ricopre F_2. D'altra parte F_2 è compatto essendo sottoinsieme chiuso di un compatto, perciò, fissato x, esiste un numero finito $n(x)$ di insiemi $G(y_i,x)$, $i \le n(x)$, che ricoprono F_2. Ne consegue che

$$F_2 \subset G_x \equiv \bigcup_{i=1}^{n(x)} G(y_i,x)$$

Consideriamo inoltre

$$G(x) \equiv \bigcap_{i=1}^{n(x)} G(x,y_i)$$

che è aperto e disgiunto da G_x. Ora, anche F_1 è completo perciò esiste un numero finito di punti $x_1,\dots,x_k$ tali che

$$F_1 \subset G_1 \equiv \bigcup_{i=1}^{k} G(x_i).$$

Per la tesi, basterà scegliere

$$G_2 \equiv \bigcap_{i=1}^{k} G_{x_i}.$$

(c.v.d.)

Dato $A \subset X$, X spazio topologico, denoteremo con A^a la **chiusura** di A, ossia l'intersezione di tutti i chiusi contenenti A (l'apice a sta per *abgeschlossene Hülle*).

Corollario I.4 *Uno spazio normale X è* regolare*, nel senso che, per ogni aperto non vuoto G_1', esiste un aperto non vuoto G_2' talché $(G_2')^a \subset G_1'$.*

Dimostrazione

Si prenda $F_1 = (G_1')^c$ e $F_2 = \{x\} \in G_1'$. Allora per G_2' basta prendere l'insieme G_2 costruito nella proposizione precedente, con ciò avremo l'esistenza di un chiuso tra G_2' e G_1' di modo che

$$\left(G_2'\right)^a \subset G_1'.$$

L'esistenza del chiuso si mostra così: esiste G_1 aperto tale che $\left(G_1'\right)^c \subset G_1$, allora $A \equiv (G_1)^c \subset G_1'$ ed A è chiuso. Inoltre, G_2 è un aperto disgiunto da G_1 e contenente un punto di G_1', x. Allora $x \notin G_1$ e perciò $x \in A$, ma allora

$$\begin{aligned} A \cap G_2 &\neq \varnothing \\ A^c \cap G_2 &= \varnothing \end{aligned}$$

(c.v.d.) dunque $G_2 = G_2' \subset A \subset G_1'$.

Corollario I.5 *Sia X uno spazio normale e siano $A \subset B$ due aperti in X. Allora esiste sempre un aperto G tale che*

$$A^a \subset G \subset G^a \subset B$$

Dimostrazione Sia $F_1 = A^a$ e sia $F_2 = B^c$, allora F_1 e F_2 sono nelle ipotesi della proposizione precedente ed esistono gli aperti disgiunti G_1 e G_2 contenenti A^a e B^c. Ora, $G_2^c \subset B$ e G_1^c interseca G_2, poiché $G_1^c \subset A^c$, $B^c \subset A^c$ con $B^c \subset G_2$. Ma allora,

$$\begin{aligned} G_1^c \cap G_2 &\neq \varnothing \\ G_1 \cap G_2^c &= \varnothing \end{aligned}$$

da cui $G_1 \subset G_2^c \subset B$, esistendo un chiuso tra G_1 e B

$$A \subset G_1 \subset (G_1)^a \subset B$$

(c.v.d.)

Lemma I.12 (di Urysohn) *Siano A e B chiusi disgiunti in uno spazio topologico normale. Allora esiste una funzione a valori reali continua in X tale che*

$$f(X) = [0,1]\,;$$
$$f(A) = \{0\}\,,\ f(B) = \{1\}\,.$$

Dimostrazione Assegnamo a ogni numero razionale del tipo $r = k/2^n$, con $k \in \{0, 1, \ldots, 2^n\}$, un aperto $G(r)$ tale che

(i) $A \subset G(0)$ e $B = (G(1))^a$;

(ii) $(G(r))^a \subset G\left(r'\right)$ se $r < r'$.

Conduciamo la dimostrazione dell'esistenza di tali insiemi per induzione su n. Per $n = 0$, dalla normalità di X, si ha l'esistenza di due aperti disgiunti G_0 e G_1 tali che $A \subset G_0$ e $B \subset G_1$. Dobbiamo solo porre $G_0 = G(0)$.

Supponiamo di aver costruito $G(r)$ per r della forma $k/2^{n-1}$. Sia k un intero dispari. Siccome $(k-1)/2^n$ e $(k+1)/2^n$ sono del tipo $k'/2^{n-1}$ con $0 \le k' \le 2^{n-1}$, abbiamo che

$$G\left(\frac{k-1}{2^n}\right) \subset G\left(\frac{k+1}{2^n}\right).$$

Per la normalità di X, esiste un aperto G tale che

$$\begin{aligned} \left(G\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right)^a &\subset G \\ G^a &\subset G\left(\frac{k+1}{2^n}\right) \end{aligned}$$

Basterà porre $G(k/2^n) = G$ per completare l'induzione.
Definiamo $f(x)$ come segue

$$f(x) = 0,\ x \in G(0)\,,\ \text{e } f(x) = \sup_{x \in G(r)} r \text{ se } x \in (G(0))^C$$

da cui $f(A) = \{0\}$ e $f(B) = \{1\}$. Passiamo alla continuità di f. Sia $x_0 \in X$ e sia n un intero positivo.

(c.v.d.)

I.5.5 Teoremi di densità

Cominciamo con il seguente semplice

Teorema I.19 *L'insieme Σ delle funzioni semplici di $(X, \mathcal{A}, \mu)$ a supporto in un insieme di misura finita è denso in $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.*

Dimostrazione Anzitutto, notiamo che possiamo limitarci a dimostrare il teorema per il caso di funzioni positive (usando parte positiva, negativa, reale e immaginaria si conclude il teorema). Ovviamente, poi, $\Sigma \subset L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.
Ora, ogni funzione positiva $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ si approssima con una successione crescente di funzioni semplici dominate da f a supporto in un insieme di misura finita (teorema I.6). Dunque, esiste $\varphi_n \subset \Sigma$, tale che $0 \le f - \varphi_n \le f$, allora

$$|f - \varphi_n|^p \le f^p$$

quindi, dal teorema di Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \varphi_n\|_{L^p}^p = \lim_{n\to\infty} \int_X |f - \varphi_n|^p \, d\mu = \int_X \left(\lim_{n\to\infty} |f - \varphi_n|\right)^p d\mu = 0.$$

(c.v.d.)

Sia ora X uno spazio di Hausdorff localmente compatto, $\mathcal{A}$ una σ-algebra contenente i boreliani e μ una misura su X.
Vogliamo ora approssimare ogni elemento di Σ con una funzione semplice che sia generata da funzioni caratteristiche di insiemi compatti. Per far questo dobbiamo supporre che la misura μ sia **regolare**. Allora dato l'insieme E misurabile di misura finita si trova per ogni $\varepsilon > 0$ fissato, un compatto $K_\varepsilon \subset E$, talché $\mu(E \backslash K_\varepsilon) < \varepsilon$. Allora

$$\left\|\chi_E - \chi_{K_\varepsilon}\right\|_{L^p} = \mu^{1/p}(E \backslash K_\varepsilon) < \varepsilon^{1/p}$$

ma $p \ge 1$, sicché ogni funzione caratteristica di insiemi misurabili si approssima con la funzione caratteristica di un compatto. Dunque, ogni funzione in Σ (combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche) si approssima con una funzione semplice generata da funzioni caratteristiche di compatti.

Lemma I.13 *Per ogni $1 \le p < \infty$, se μ è regolare, ogni funzione semplice non nulla su un insieme a misura finita è approssimabile in norma L^p con una funzione semplice che sia combinazione lineare di funzioni caratteristiche su insiemi compatti. Σ_c è denso in Σ*

Se adesso dimostriamo che ogni funzione semplice in Σ_c si approssima con una funzione continua a supporto compatto, abbiamo la densità di $\mathcal{C}_c(X)$ in $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Per vedere quest'ultima cosa, ci basta dimostrare che ogni funzione caratteristica su un compatto si approssima con una continua a supporto compatto. A questo scopo ci occorre il lemma di Urysohn (che vale perché se X è di Hausdorff e localmente compatto, allora è normale, vedi **Singer-Thorpe**, pagina 53). Infatti, sia K compatto e consideriamo χ_K. Per regolarità della misura, per ogni $\varepsilon > 0$, troviamo un aperto A contenente K, tale che $\mu(A \backslash K) < \varepsilon$. Ora, consideriamo i due chiusi disgiunti A^c e K. Per il lemma di Urysohn troviamo una funzione continua g a valori in $[0, 1]$ che vale 1 su K e 0 in A^c. g differirà da χ_K solo su $A \backslash K$ allora

$$\|g - \chi_K\|_{L^p} = \left(\int_{A\backslash K} |g|^p \, d\mu\right)^{1/p} \le \mu^{1/p}(A \backslash K) < \varepsilon^{1/p}$$

Teorema I.20 (di densità di C_c in L^p) *Sia $1 \leq p < \infty$, e consideriamo lo spazio L^p su uno spazio di Hausdorff localmente compatto X, dotato della σ-algebra contenente i boreliani $\mathcal{A}$ e della misura regolare μ. Allora l'insieme delle funzioni continue a supporto compatto $\mathcal{C}_c(X)$ è denso in $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.*

I.5.6 Spazi $\ell^p(\mathbb{C})$

Lo spazio $\ell^p(\mathbb{C})$, $1 \leq p < +\infty$ contiene le successioni a valori in $\mathbb{C}$ tali che

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty$$

Ora, posto $X \equiv \mathbb{N}$, $\mathcal{A} \equiv \mathcal{P}(\mathbb{N})$ e $\mu(E) \equiv \#E$, è facile vedere che $\ell^p(\mathbb{C}) = L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \#)$ e che

$$\int a_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Lo spazio ℓ^∞ è invece costituito dalle successioni limitate ed è normato dal sup. La norma sugli spazi ℓ^p è invece

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p}$$

Ne consegue che il teorema di completezza dimostrato prima si estende agli spazi ℓ^p.

I.6 Spazi localmente compatti

In questa sezione ci occuperemo dell'integrazione sugli spazi topologici localmente compatti. D'ora in avanti, con X indicheremo uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto. Prima di procedere ci occorre un corollario al lemma di Urysohn

Corollario I.6 *Sia X uno spazio di Hausdorff localmente compatto e sia K un suo sottoinsieme compatto. Allora esiste una funzione continua g su X che vale 1 su K ed è nulla al di fuori di un compatto.*

Dimostrazione Ogni $x \in K$ ha un intorno aperto V_x con chiusura compatta. Un numero finito di tali intorni ricopre K. Siano tali intorni $V_{x_1}, \ldots, V_{x_n}$. Definiamo

$$V \equiv V_{x_1} \cup \ldots \cup V_{x_n}$$

allora V ha chiusura compatta. V^a è compatto e di Hausdorff, dunque normale. Possiamo allora applicare il lemma di Urysohn a V^a. Esiste una funzione continua $g \geq 0$ definita su V^a che è 1 su K e 0 su $V^a \cap V^c$ (visto che $K \subset V$, si ha $K \cap V^c = \varnothing$). Adesso non ci resta che porre $g = 0$ su $X \backslash V^a$ per completare la dimostrazione. **(c.v.d.)**

I.6.1 Funzionali positivi e limitati su $\mathcal{C}_c(X)$

Mappe lineari limitate Denotiamo con $\mathcal{C}_c(X)$ lo spazio vettoriale delle funzioni continue su X, a supporto compatto (nulle al di fuori di un compatto). Normiamo tale spazio con la norma del sup. Una mappa lineare λ definita su $\mathcal{C}_c(X)$ a valori in $\mathbb{C}$ si dice **limitata** se esiste $C \geq 0$ talché, per ogni $f \in \mathcal{C}_c(X)$

$$|\lambda(f)| \leq C \|f\|$$

Risulta chiaro (lo dimostreremo più volte in seguito a proposito di spazi normati qualunque) che una mappa lineare è limitato se e solo se è continuo. Una mappa lineare si dice anche **funzionale**.

Mappe lineari positive Una mappa lineare λ da $\mathcal{C}_c(X)$ sul campo complesso si dice **positiva** se per ogni f a valori reali positivi in $\mathcal{C}_c(X)$ si ha

$$\mathbb{R} \ni \lambda(f) \geq 0$$

Denotiamo con $\mathcal{C}_K$ l'insieme delle funzioni continue a supporto in $K \subset X$. Troviamo il seguente

Lemma I.14 *Sia $\lambda : \mathcal{C}_c(X) \to \mathbb{C}$ una mappa lineare positiva. Allora λ è limitata su $\mathcal{C}_K$ per ogni $K \subset X$ compatto.*

Dimostrazione Grazie al corollario I.6 esiste una funzione reale e continua $g \geq 0$ definita su X e che vale 1 su K e 0 fuori da K. Sia ora $f \in \mathcal{C}_K(X)$ a valori reali. Abbiamo

$$\sup_K |f| \geq |f| \Rightarrow \sup_K |f|\, g \geq |f| \Rightarrow \|f\|\, g \pm f \geq 0$$

Per ipotesi,

$$\lambda(\|f\|\, g \pm f) \geq 0$$

ma λ è lineare, dunque

$$\lambda(\|f\|\, g) \pm \lambda(f) \geq 0$$

cioè

$$|\lambda(f)| \leq \lambda(g)\, \|f\|$$

Se ora f è a valori complessi, possiamo ripetere il ragionamento per parte reale e parte immaginaria, essendo

$$|f| \geq \mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f)$$

sicché

$$|\lambda(f)| = |\lambda(\mathrm{Re}\, f) + i\lambda(\mathrm{Im}\, f)| \leq |\lambda(\mathrm{Re}\, f)| + |\lambda(\mathrm{Im}\, f)| \leq 2\lambda(g)\, \|f\|$$

(c.v.d.)

Definiamo una mappa lineare su $\mathcal{C}_c(X)$ a valori in $\mathbb{C}$, che sia limitata su $\mathcal{C}_K(X)$ per ogni $K \subset X$ compatto, **$\mathcal{C}_c$-funzionale** su $\mathcal{C}_c(X)$. Chiaramente, una mappa lineare limitata sull'intero spazio è un **$\mathcal{C}_c$-funzionale**.

Teorema I.21 *Sia λ un funzionale reale limitato definito su $\mathcal{C}_c(X;\mathbb{R})$. Allora λ è esprimibile come differenza di due funzionali positivi limitati.*

Dimostrazione Sia $f \geq 0$ in $\mathcal{C}_c(X)$, definiamo

$$\lambda^+(f) \equiv \sup \lambda(g),\ 0 \leq g \leq f,\ g \in \mathcal{C}_c(X;\mathbb{R})$$

Allora

$$\lambda^+(f) = \sup \lambda(g) \leq \sup C\, \|g\| \leq C\, \|f\|$$

dove C è la costante positiva per cui

$$|\lambda(g)| \leq C\, \|g\|$$

Inoltre, $\lambda^+(f) \geq 0$, essendo

$$\lambda^+(f) = \sup \lambda(g) \geq \lambda(0) = 0.$$

Sia $c \in \mathbb{R}$ con $c > 0$. Allora

$$\lambda^+(cf) = \sup \lambda(cg),\ 0 \leq g \leq f,\ g \in \mathcal{C}_c(X;\mathbb{R})$$

da cui

$$\lambda^+(cf) = c\lambda^+(f)$$

Siano ora $f_1, f_2 \in \mathcal{C}_c(X;\mathbb{R})$ funzioni non negative. Prese $0 \leq g_1 \leq f_1$ e $0 \leq g_2 \leq f_2$, abbiamo

$$\begin{aligned}\lambda^+(f_1) + \lambda^+(f_2) &= \sup \lambda(g_1) + \sup \lambda(g_2) = \sup[\lambda(g_1) + \lambda(g_2)] = \\ &= \sup \lambda(g_1 + g_2) \leq \lambda^+(f_1 + f_2)\end{aligned}$$

Viceversa, se $0 \leq g \leq f_1 + f_2$, allora

$$0 \leq \inf(g, f_1) \leq f_1$$

$$0 \quad \le \quad g - \inf(g, f_1) \le f_2$$

e dunque

$$\lambda(g) = \lambda(\inf(g, f_1)) + \lambda(g - \inf(g, f_1)) \le \lambda^+(f_1) + \lambda^+(f_2)$$

Passando al sup,

$$\lambda^+(f_1 + f_2) \le \lambda^+(f_1) + \lambda^+(f_2)$$

Estendiamo ora la definizione di λ^+ a tutto lo spazio $\mathcal{C}_c(X; \mathbb{R})$, esprimendo ciascuna funzione f come differenza di due funzioni positive (parte positiva e parte negativa):

$$\lambda^+ f = \lambda^+ f^+ - \lambda^+ f^-$$

Si ha subito che λ^+ è lineare. Se $f \ge 0$ si ha che $\lambda^+ f \ge \lambda f$, perciò definiamo la mappa lineare positiva

$$\lambda^- f = \lambda^+ f - \lambda f$$

Infine,

$$\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$$

(c.v.d.) con $\lambda^\pm$ positivi e limitati (essendo λ, λ^+ limitati, tale deve essere λ^-).

Teorema I.22 (di Dini) *Sia Φ una famiglia di funzioni positive in $\mathcal{C}_c(X)$ che sono minori o eguali a f e tali che*

$$\sup_{\varphi \in \Phi} \varphi = f\mathcal{C} \in_c (X)$$

e, se $\varphi, \psi \in \Phi$, allora $\sup(\varphi, \psi) \in \Phi$. In queste ipotesi, si ha che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\varphi \in \Phi$ talché

$$\|f - \varphi\| < \varepsilon$$

e, se λ è un funzionale positivo su $\mathcal{C}_c(X)$, allora

$$\lambda(f) = \sup_{\varphi \in \Phi} \lambda(\varphi)$$

Dimostrazione f sia nulla fuori del compatto K. Per ogni $x \in K$, possiamo trovare una funzione $\varphi_x \in \Phi$ tale che

$$f(x) - \varphi(x) < \varepsilon$$

Allora esiste un intorno V_x di x per cui

$$f(y) - \varphi_x < \varepsilon$$

per la permanenza del segno. Se ricopriamo K con un un numero finito di V_{x_i}, $i \in J_n$ e poniamo

$$\varphi = \sup\left(\varphi_{x_1}, \ldots, \varphi_{x_n}\right)$$

allora

$$\|f - \varphi\| < \varepsilon$$

Questo prova la prima parte del teorema. Inoltre, è dimostrato che f è il limite uniforme di una successione φ_n a valori in Φ. Dal lemma precedente che λ è continuo su $\mathcal{C}_K$ perciò

$$\lambda(f) = \lim_{n \to \infty} \lambda(\varphi_n)$$

Ora, ovviamente

$$\lim_{n \to \infty} \lambda(\varphi_n) \le \sup_{\varphi} \lambda(\varphi)$$

d'altra parte,

$$\lambda(\varphi) \le \lambda(f)$$

perciò

$$\sup_{\varphi} \lambda(\varphi) \leq \lambda(f) = \lim_{n\to\infty} \lambda(\varphi_n)$$

da cui

$$\sup_{\varphi} \lambda(\varphi) = \lambda(f)$$

(c.v.d.)

I.6.2 Il teorema di Riesz-Markov

Misura come funzionale positivo Il risultato principale della teoria della misura sugli spazi localmente compatti è l'interpretazione di ogni funzionale su $\mathcal{C}_c(X)$ come integrale: la dimostrazione di questo fatto sta nel teorema di Riesz-Markov che ci apprestiamo a studiare.
Sia $\mathcal{M}$ l'algebra degli insiemi di Borel su X. Se μ è una misura definita su $\mathcal{M}$, finita sui compatti, allora μ genera un funzionale positivo che denotiamo con $d\mu$ dato da

$$\langle f, d\mu\rangle \equiv \int_X f\, d\mu$$

Il teorema di Riesz-Markov ci consente di affermare anche l'inverso.

Notazione Nel seguito indicheremo con $\operatorname{supp} f$ il **supporto** (la chiusura dell'insieme dei punti sui quali $f \neq 0$) di f. Se V è un insieme aperto scriveremo

$$f \prec V$$

per significare che f è reale, $f \in \mathcal{C}_c(X)$, $f \in [0,1]$ e $\operatorname{supp} f \subset V$. Similmente, se K è un compatto, la scrittura

$$K \prec f$$

denoterà f reale, $\chi_K \leq f \leq 1$ e $f \in \mathcal{C}_c(X)$.

Lemma I.15 *Dato K compatto, $K \subset V$ aperto, esiste f talché*

$$K \prec f \prec V$$

Dimostrazione Ovviamente dobbiamo usare il lemma di Urysohn. Infatti, è sufficiente prendere un aperto W che ammetta chiusura compatta W^a tale che

$$K \subset W \subset W^a \subset V$$

Allora, W^a è normale e perciò esisterebbe f reale a valori in $[0,1]$ pari a 1 su K e nulla in $W^a \cap W^c$. f si prolunga a 0 ed è continua in X. **(c.v.d.)**

Lemma I.16 *Se V è aperto, allora*

$$\chi_V(x) = \sup_{f\prec V} f(x)$$

Dimostrazione Dato $x \in V$, esiste un intorno aperto W di x avente chiusura compatta, tale che $x \in W \subset W^a \subset V$. Ora, possiamo trovare una funzione continua f a valori in $[0,1]$ pari a 1 su W^a e nulla al di fuori di un compatto contenente W^a e contenuto in V. Perciò, troviamo $f \prec V$ con

$$f(x) = 1$$

e dunque

$$\sup_{f\prec V} f(x) = 1 = \chi_V(x)$$

per ogni $x \in V$. **(c.v.d.)**

Enunciamo il teorema di Riesz-Markov e poi passiamo a dimostrarlo in steps successivi.

Teorema I.23 (di Riesz-Markov) *Sia λ un funzionale positivo su $\mathcal{C}_c(X)$. Allora esiste un'unica misura di Borel tale che*

[(i)]

(i) *se V è aperto, allora*

$$\mu(V) = \sup \lambda(g), \; g \prec V;$$

(ii) *se A è un boreliano, allora*

$$\mu(A) = \inf \mu(V)$$

al variare degli aperti V contenenti A.

La misura μ soddisfa anche le proprietà seguenti

[(iii)]

(iii) *se K è compatto, allora $\mu(K)$ è finita;*

(iv) *se A è un boreliano σ-finito, o A è aperto, allora*

$$\mu(A) = \sup \mu(K)$$

al variare dei compatti K contenuti in A.

Infine, per ogni $f \in \mathcal{C}_c(X)$, si ha

$$\lambda(f) = \int_x f \, d\mu$$

Osservazione I.10 Notiamo, in primo luogo, che l'unicità della misura di Borel è immediatamente discendente dalla (ii), dal momento che μ è univocamente definita sui boreliani.
Se K è compatto, allora, dalla (ii), si ha

$$\mu(K) = \inf \mu(V)$$

con $K \subset V$ e V aperto, cioè

$$\mu(K) = \inf_{K\subset V} \sup_{f\prec V} \lambda(f) = \inf_{K\subset V} \sup_{K\prec f\prec V} \lambda(f) = \inf_{K\prec f} \lambda(f)$$

dove il secondo passaggio è dovuto al fatto che se $g \prec K$ esiste comunque una funzione f a supporto esterno a K tale che

$$\lambda(g) \le \lambda(f)$$

visto che basta prendere $f = g + h$ continua con $h \ge 0$ fuori dal supporto di g.

Fissiamo la notazione che useremo fino alla fine della sottosezione: f, g, h sono funzioni continue a supporto compatto, reali e non negative. Una misura per cui valgano (ii), (iii) e (iv) si dice **misura di Borel regolare** (abbiamo già incontrato la nozione di misura regolare quando abbiamo trattato la densità di $\mathcal{C}_c$ in L^p).

Lemma I.17 *Sia λ un funzionale positivo su $\mathcal{C}_c(X)$. Per ogni aperto V definiamo*

$$\mu(V) = \sup_{g\prec V} \lambda(g)$$

Per ogni sottoinsieme Y di X definiamo

$$\mu(Y) = \inf \mu(V)$$

al variare di V, aperto contenente Y. Allora μ è una misura esterna sulla σ-algebra dell'insieme delle parti di X.

Dimostrazione Chiaramente $\mu(\varnothing) = 0$ e se $A \subset B$ allora $\mu(A) \le \mu(B)$. Per convenienza di notazione scriveremo

$$\sup(f, g) \equiv f \vee g, \; \inf(f, g) \equiv f \wedge g$$

Cominciamo col provare la subadditività finita per gli aperti. Siano V_1 e V_2 due aperti. Sia $h \prec V_1 \cup V_2$. Sia Φ la famiglia di tutte le funzioni $\sup(g_1, g_2)$ con $g_i \prec V_i, i \in J_2$. Allora Φ è chiuso per sup e abbiamo

$$\sup_{g\in\Phi} g = \chi_{V_1\cup V_2}$$

Sia ora Φ_h la famiglia di tutte le funzioni del tip

$$h \wedge (g_1 \vee g_2)\,,\; g_i \prec V_i, i \in J_2$$

Allora h è il sup di tutte le funzioni contenute in Φ_h, allora, dal teorema di Dini

$$\lambda(h) = \sup_{g_1,g_2} \lambda(h \wedge (g_1 \vee g_2)) \leq \sup_{g_1,g_2} \lambda(h \wedge g_1 + h \wedge g_2) \leq \mu(V_1) + \mu(V_2)$$

passando al sup su h si ha

$$\mu(V_1 \cup V_2) \leq \mu(V_1) + \mu(V_2)\,.$$

Ora, prendiamo $\{A_n\}$, successione di sottoinsiemi di X tale che

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A$$

Sia V_n aperto con $A_n \subset V_n$ e

$$\mu(V_n) \leq \mu(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Sia V l'unione numerabile dei V_n. Allora $A \subset V$. Sia $g \prec V$. Dato che g ha supporto compatto, esiste un n per cui

$$g \prec V_1 \cup \ldots \cup V_n$$

e usando la subadditività finita degli aperti per induzione,

$$\begin{aligned} \lambda(g) &\leq \mu(V_1) + \ldots + \mu(V_n) \\ \lambda(g) &\leq \mu(V_1) + \ldots + \mu(V_n) \leq \sum_n \mu(A_n) + \varepsilon \end{aligned}$$

Passando al sup su g si ha

$$\mu(A) \leq \mu(V) \leq \sum_n \mu(A_n) + \varepsilon$$

(c.v.d.) da cui si ha la tesi.

Osservazione I.11 Vogliamo costruire la μ del teorema tramite la μ del lemma. Il fatto principale che riguarda quest'ultima è che

$$K \prec f \prec V \Rightarrow \mu(K) \leq \lambda(f) \leq \mu(V)$$

dove K è un compatto e V un aperto. La seconda diseguaglianza è ovvia. Vediamo la prima. Definiamo l'aperto

$$W \equiv \{x \in X \,|\, f(x) > 1 - \varepsilon\}$$

Se $x \in K$ allora $1 = \chi_K(x) \leq f(x)$ perciò $x \in W$ e dunque $K \subset W$. Per ogni ε, essendo W aperto, esiste $g \prec W$ per cui

$$\mu(W) \leq \lambda(g) + \varepsilon$$

Abbiamo

$$(1-\varepsilon)\, g \leq (1-\varepsilon) < f$$

perciò

$$(1-\varepsilon)\, \lambda(g) \leq \lambda(f)$$

e dunque

$$\mu(K) \leq \mu(W) \leq \frac{\lambda(f)}{1-\varepsilon} + \varepsilon \leq \lambda(f) + \varepsilon$$

da cui

$$\mu(K) \leq \lambda(f) \leq \mu(V)$$

D'ora in poi chiameremo la misura costruita nel lemma precedente, la **misura esterna determinata** da λ.

Lemma I.18 *Sia $\mathcal{A}$ la collezione di tutti i sottoinsiemi A di X tali che $\mu(A) \in \mathbb{R}$ e*

$$\mu(A) = \sup \mu(K)$$

al variare dei compatti $K \subset A$. Allora $\mathcal{A}$ è un'algebra contenente tutti i compatti e tutti gli aperti di misura finita. Inoltre, μ è una misura positiva su $\mathcal{A}$; se $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ è una successione di insiemi disgiunti e $A = \bigcup A_n$, allora

$$\mu(A) = \sum_n \mu(A_n)$$

Infine, se $\mu(A) \in \mathbb{R}$ allora $A \in \mathcal{A}$.

Dimostrazione Se K è compatto, allora esiste un aperto V contenente K tale che V^a è compatto. Sia $V^a \prec g$. Per ogni $f \prec V$, abbiamo $f \leq g$, di conseguenza $\lambda(f) \leq \lambda(g)$ e $\mu(V) \leq \lambda(g)$, sicché $\mu(K) \leq \lambda(g)$ è finito. Ne ricaviamo che $K \in \mathcal{A}$.

Sia V aperto. Proveremo che

$$\mu(V) = \sup \mu(K)$$

al variare dei compatti $K \subset V$. Possiamo assumere che $\mu(V) > 0$. Per coprire anche il caso $\mu(V) = \infty$, sia $r \in \mathbb{R}$ di modo che $0 < r < \mu(V)$. Esiste f per cui

$$r < \lambda(f) \leq \mu(V)$$

Sia K il supporto di f. Se W è un aperto contenente K, allora $f \prec W$, sicché

$$r < \lambda(f) \leq \mu(W)$$

passando all'inf all'ultimo membro riusciamo a mostrare che

$$r \leq \mu(K)$$

In definitiva,

$$\mu(V) = \sup \mu(K)$$

e se $\mu(V) < \infty$ allora $V \in \mathcal{A}$.

Vediamo l'additività finita. Cominciamo con il prendere due compatti disgiunti K_1 e K_2. Mostriamo allora che

$$\mu(K_1) + \mu(K_2) = \mu(K_1 \cup K_2)$$

Siano V_1 e V_2 due aperti disgiunti contenenti, rispettivamente, K_1 e K_2. Sia W un aperto tale che

$$\mu(W) \leq \mu(K_1 \cup K_2) + \varepsilon$$

Sia $g_i \prec W \cap V_i$ con $i \in J_2$, talché

$$\mu(W \cap V_i) \leq \lambda(g_i) + \varepsilon$$

allora

$$\begin{aligned}
\mu(K_1) + \mu(K_2) &\leq \mu(W \cap V_1) + \mu(W \cap V_2) \leq \lambda(g_1) + \lambda(g_2) + 2\varepsilon = \\
&= \lambda(g_1 + g_2) + 2\varepsilon \leq \mu(W) + 2\varepsilon \leq \mu(K_1 \cup K_2) + 3\varepsilon
\end{aligned}$$

perciò

$$\mu(K_1) + \mu(K_2) \leq \mu(K_1 \cup K_2)$$

Siccome μ è una misura esterna, vale la diseguaglianza opposta e perciò si ottiene l'eguaglianza, come preannunciato.

Data una sequenza di insiemi disgiunti $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ e $A = \bigcup A_n$, si considerino i compatti (disgiunti) $K_n \subset A_n$ per cui

$$\mu(A_n) \leq \mu(K_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Allora per ogni n

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(K_n) + \varepsilon = \mu(K_1 \cup \ldots \cup K_n) + \varepsilon \leq \mu(A) + \varepsilon$$

Passando al limite per $n \to \infty$ e $\varepsilon \to 0$ e tenendo conto del fatto che μ è una misura esterna, si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$$

Ciò dà la additività numerabile e prova anche che se $\mu(A)$ è finito, $A \in \mathcal{A}$.

Proviamo, adesso, che $\mathcal{A}$ è un'algebra. Chiaramente $\varnothing \in \mathcal{A}$. Se $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, possiamo trovare K_1, K_2 compatti e V_1, V_2 aperti, tali che

$$K_i \subset A_i \subset V_i,\ i \in J_2$$

e tali che

$$\mu(K_i) \leq \mu(A_i) \leq \mu(V_i) < \mu(K_i) + \varepsilon$$

In particolare, grazie alla additività finita di μ

$$\mu(V_i \backslash K_i) < \varepsilon$$

Dal momento che

$$(V_1 \cup V_2) \setminus (K_1 \cup K_2) \subset (V_1 \backslash K_1) \cup (V_2 \backslash K_2)$$

si ha

$$\mu(A_1 \cup A_2) < \mu((V_1 \cup V_2) \setminus (K_1 \cup K_2)) + \mu(K_1 \cup K_2) < \mu(K_1 \cup K_2) + 2\varepsilon$$

da cui $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$.

Poi notiamo che $K_1 \backslash V_2$ è compatto e $V_1 \backslash K_2$ è aperto e

$$K_1 \backslash V_2 \subset A_1 \backslash A_2 \subset V_1 \backslash K_2$$

da cui

$$(V_1 \backslash K_2) \setminus (K_1 \backslash V_2) \subset (V_1 \backslash K_1) \cup (V_2 \backslash K_2)$$

cosicché si ha

$$\mu(A_1 \backslash A_2) < \mu((V_1 \backslash K_2) \setminus (K_1 \backslash V_2)) + \mu(K_1 \backslash V_2) < \mu(K_1 \backslash V_2) + 2\varepsilon$$

(c.v.d.) e anche $A_1 \backslash A_2 \in \mathcal{A}$. Infine, $A_1 \cap A_2 = A_2 \setminus (A_2 \backslash A_1) \in \mathcal{A}$ e $\mathcal{A}$ è un'algebra.

Veniamo così al seguente risultato che prova la prima parte del teorema di Riesz-Markov:

Teorema I.24 *Sia λ un funzionale positivo su $\mathcal{C}_c(X)$. Sia μ la misura esterna determinata da λ, e sia $\mathcal{A}$ l'algebra degli insiemi di misura finita tali che*

$$\mu(A) = \sup \mu(K)$$

al variare dei compatti $K \subset A$. Sia $\mathcal{M}$ la collezione di tutti i sottoinsiemi Y di X tali che, per ogni compatto K, $Y \cap K$ appartiene a $\mathcal{A}$, allora $\mathcal{M}$ è una σ-algebra contenente i boreliani e μ è una misura su $\mathcal{M}$. Inoltre, $\mathcal{A}$ consiste di tutti gli insiemi di misura finita in $\mathcal{M}$.

Dimostrazione Siccome i compatti appartengono banalmente ad $\mathcal{A}$, si ha che $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$. Denotiamo con $\mathcal{M}_K$ la collezione di tutti gli insiemi $Y \cap K$ per $Y \in \mathcal{M}$; con analoga denotazione definiamo $\mathcal{A}_K$. Allora $\mathcal{M}_K = \mathcal{A}_K$. Mostriamo che $\mathcal{A}_K$ è una σ-algebra. Per il lemma precedente $\mathcal{A}$ è un'algebra contenente K, da cui $\mathcal{A}_K$ è un'algebra. Sia ora $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una famiglia di insiemi contenuti in $\mathcal{A}_K$, allora, per ogni n, $A_n = B_n \cap K$ con $B_n \in \mathcal{A}$. Siccome $\mu(K)$ è finito (lemma precedente) si ha che

$$\mu(B_n \cap K) = \sup_{K' \subset B_n \cap K} \mu(K') \leq \mu(K) < \infty$$

perciò, ancora dal lemma precedente, $\bigcup B_n \in \mathcal{A}$ e - dunque - $\bigcup A_n = \bigcup B_n \cap K \in \mathcal{A}_K$.

Ne viene che $\mathcal{M}_K$ è una σ-algebra per ogni compatto K in X. Mostriamo che da questo segue che $\mathcal{M}$ è una σ-algebra. Cominciamo a vedere che $\mathcal{M}$ è un'algebra. $\varnothing \in \mathcal{M}_K$ per ogni compatto K, dunque, $\varnothing \in \mathcal{M}$. Siano $A, B \in \mathcal{M}$, allora $A' = A \cap K \in \mathcal{M}_K$ e $B' = B \cap K \in \mathcal{M}_K$. Dunque, $A' \cap B' \in \mathcal{M}_K$, ma

$$A' \cap B' = (A \cap K) \cup (B \cap K) = (A \cup B) \cap K \in \mathcal{M}_K$$

perciò $A \cup B \in \mathcal{M}$. Vediamo la stabilità per complementazione: sia $A \in \mathcal{M}$, allora

$$A^c \cap K = K \setminus (A \cap K)$$

ma $K \in \mathcal{M}$, $K \in \mathcal{M}_K$ e $A \cap K \in \mathcal{M}_K$, perciò

$$A^c \cap K \in \mathcal{M}_K$$

e, infine, $A^c \in \mathcal{M}$. Resta da vedere l'unione numerabile. Sia $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$, allora

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap K) \in \mathcal{M}_K$$

perciò

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap K) = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \cap K \in \mathcal{M}_K$$

dunque,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}.$$

$\mathcal{M}$ contiene tutti i chiusi, perciò i boreliani. Infatti, se A è chiuso, allora $A \cap K$ è compatto, perciò appartiene a $\mathcal{A}$ e dunque a $\mathcal{M}$.

Sia A contenuto in $\mathcal{M}$ e tale che $\mu(A) < \infty$. Sia V un aperto di misura finita contenente A. Sia $K \subset V$ compatto talché

$$\mu(V) < \mu(K) + \varepsilon$$

(che esiste essendo $\mu(K)$ l'inf delle misure degli aperti che lo contengono). Siccome $A \cap K$ appartiene a $\mathcal{A}$ esiste un compatto K' per cui

$$\mu(A \cap K) < \mu(K') + \varepsilon$$

ma $A \subset (A \cap K) \cup (V \setminus K)$ per cui

$$\mu(A) \leq \mu(A \cap K) + \mu(V \setminus K) < \mu(K') + 2\varepsilon$$

la qual cosa prova che $A \in \mathcal{A}$. Ne segue che $\mathcal{A}$ è precisamente la collezione degli insiemi di $\mathcal{M}$ che hanno misura finita.

Infine, sia $\{A_n\} \subset \mathcal{M}$. Se tra gli A_n ve n'è uno di misura infinita, l'additività numerabile è
(c.v.d.) ovvia, altrimenti, $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ e si applica il lemma precedente.

Con quest'ultimo teorema abbiamo completato la dimostrazione della prima parte del teorema di Riesz-Markov.

Seconda parte Veniamo alla dimostrazione della seconda parte del teorema di Riesz-Markov, secondo cui, per ogni $f \in \mathcal{C}_c(X)$, si ha

$$\lambda(f) = \int_x f \, d\mu$$

se μ è la misura determinata da λ secondo il teorema di Riesz-Markov.

Anzitutto notiamo che $f \in \mathcal{C}_c(X)$ implica che f è misurabile poiché continua, essendo μ una misura boreliana. Poi, il supporto di f è compatto ed ha, perciò, misura finita. Inoltre, sul suo supporto (compatto) f è limitata, grazie al teorema di Weierstraß. ne segue che

$$\int_x |f| \, d\mu \leq M\mu\,(\mathrm{supp}\, f) < \infty$$

cioè $f \in L^1(X, \mu)$.
Per proseguire ci occorre il seguente lemma

Lemma I.19 (partizione dell'unit paà) *emma!di partizione dell'unitàSia K un compatto e sia $\{U_1, \ldots, U_n\}$ un suo ricoprimento aperto finito. Allora esistono n funzioni f_i tali che $f_i \prec U_i$ e tali che*

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 1, \, \forall x \in K.$$

Dimostrazione Per ogni $x \in K$ sia W_x un intorno aperto di x tale che $W_x^a \subset U_{i(x)}$ con $i(x) \in J_n$. Possiamo ricoprire K con un numero finito di aperti $W_{x_1}, \ldots, W_{x_m}$. Sia V_i l'unione di tutti gli aperti W_{x_j} tali che

$$W_{x_j}^a \subset U_i$$

Allora $\{V_1, \ldots, V_n\}$ è un ricoprimento aperto di K, dove

$$V_i^a \subset U_i$$

con V_i^a compatto (poiché intersezione di un chiuso con un compatto). Siano g_i funzioni tali che

$$V_i^a \prec g_i \prec U_i$$

Adesso definiamo

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv g_1 \\ f_2 &\equiv g_2(1 - g_1) \\ &\vdots \\ f_n &\equiv g_n(1 - g_{n-1}) \ldots (1 - g_1) \end{aligned}$$

Allora, banalmente, $f_i \prec U_i$. Inoltre, per induzione, si ha

$$f_1 + \ldots + f_n = 1 - (1 - g_n) \ldots (1 - g_1)$$

Sia $x \in K$, allora $x \in V_{i(x)}^a$ perciò $g_{i(x)}(x) = 1$ e

$$f_1 + \ldots + f_n = 1 - (1 - g_n) \ldots (1 - g_1) = 1$$

(c.v.d.) la tesi.

La sequenza di funzioni $\{f_i\}$ si dice **partizione dell'unità su K, subordinata al ricoprimento $\{U_i\}$**.

Dimostrazione della seconda parte del teorema di Riesz-Markov Siamo adesso in grado di terminare la dimostrazione del teorema di Riesz-Markov. È sufficiente operare la dimostrazione per f reale non nulla. Anzi, ci si può limitare a provare la diseguaglianza

$$\lambda(f) \leq \int_X f \, d\mu$$

visto che la diseguaglianza inversa, segue da questa, per $-f$.
Sia K il supporto di f. Per $\varepsilon < \|f\|$, troviamo una partizione di K in n insiemi misurabili, una funzione semplice

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}$$

tale che

$$f \leq \varphi \leq f + \varepsilon,$$

e n aperti V_i per cui $A_i \subset V_i$ e

$$\mu(V_i) \leq \mu(A_i) + \frac{\varepsilon}{n\|f\|}$$

Infatti, tagliamo un intervallo contenente l'immagine di f (teorema di Weierstraß) in $\varepsilon/2$-sottointervalli chiusi-aperti di modo che siano disgiunti. Sia c_i' l'estremo superiore di ciascun sottointervallo. Sia A_i la controimmagine in K dell'i-esimo sottointervallo. Sia $c_i = c_i' + \varepsilon/2$. Per ogni i, sia W_i aperto contenente A_i tale che $f \leq c_i$ su W_i. Infine restringiamo V_i di modo che valga la diseguaglianza di sopra (il che è possibile essendo la misura di A_i (che è un boreliano) data dall'inf degli aperti che lo contengono).

Sia $h_1, \ldots, h_n$ una partizione dell'unità su K, subordinata al ricoprimento $V_1, \ldots, V_n$. Allora fh_i ha supporto in V_i e $fh_i \leq c_i h_i$. Inoltre,

$$K \prec \inf\left(1, \sum_{i=1}^{n} h_i\right)$$

sicché

$$\mu(K) \leq \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} h_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(h_i)$$

Sia $c = \max|c_i|$, allora $c \leq f + \varepsilon$, abbiamo

$$f = f\sum_{i=1}^{n} h_i = \sum_{i=1}^{n} h_i f$$

da cui

$$\lambda(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(h_i f) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda(h_i c_i) \leq \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda(h_i) = \sum_{i=1}^{n} (c_i + c)\lambda(h_i) - c\sum_{i=1}^{n} \lambda(h_i)$$

Ora, $h_i \prec V_i$ dunque

$$\lambda(h_i) \leq \mu(V_i)$$

da cui, ricordando che $\mu(K) \leq \sum \lambda(h_i)$ si ha

$$\begin{aligned}\lambda(f) &\leq \sum_{i=1}^{n} (c_i + c)\mu(V_i) - c\mu(K) \leq \sum_{i=1}^{n} (c_i + c)\left(\mu(A_i) + \frac{\varepsilon}{n\|f\|}\right) - c\mu(K) \leq \\ &\leq \int_K \varphi\, d\mu + c\mu(K) + 2c\frac{\varepsilon}{\|f\|} - c\mu(K) \leq \int_K f\, d\mu + \varepsilon\mu(K) + 2c\frac{\varepsilon}{\|f\|}\end{aligned}$$

Ora, valutiamo $c/\|f\|$ dove $\|f\| = \sup|f|$. Per ogni $x \in A_i$ abbiamo

$$c_i - \varepsilon \leq f \leq c_i$$

da cui

$$|c_i| - \varepsilon \leq |f|$$

perciò

$$c \leq \|f\| + \varepsilon \Rightarrow \frac{c}{\|f\|} \leq 1 + \frac{\varepsilon}{\|f\|} \leq 2$$

sicché

$$\lambda(f) \leq \int_K f\, d\mu + \varepsilon\mu(K) + 4\varepsilon$$

passando al limite per ε che tende a zero abbiamo la tesi.

Corollario I.7 *Sia M_0 l'insieme delle misure di Borel σ-regolari. La mappa*

$$\mu \mapsto d\mu$$

è una biiezione tra M_0 e l'insieme dei funzionali positivi su $\mathcal{C}_c(X)$.

Dimostrazione Il teorema di Riesz-Markov mostra che la mappa è suriettiva. Vediamo l'iniettività. Siano μ_1 e μ_2 misure σ-regolari, cioè soddisfacenti (ii), (iii) e (iv) del teorema di Riesz-Markov. Assumiamo che i funzionali $d\mu_1$ e $d\mu_2$ siano eguali e mostriamo che $\mu_1 = \mu_2$. A questo scopo basta mostrare la tesi sui compatti, infatti, grazie a (iv) esse coincideranno sugli aperti, e per (ii) saranno eguali su ogni boreliano. Dunque, sia K un compatto e sia V un aperto contenente K tale che

$$\mu_2 (V) < \mu_2 (K) + \varepsilon$$

Sia $K \prec f \prec V$, allora $\chi_K \leq f \leq \chi_V$ e quindi

$$\mu_1 (K) \leq \int_X f \, d\mu_1 = \int_X f \, d\mu_2 \leq \mu_2 (V) < \mu_2 (K) + \varepsilon$$

sicché

$$\mu_1 (K) \leq \mu_2 (K)$$

su ogni compatto. Invertendo i ruoli di μ_1 e μ_2 si ottiene la diseguaglianza opposta e si conclude l'iniettività. **(c.v.d.)**

Alcune osservazioni Abbiamo dimostrato che a ogni funzionale corrisponde una e una sola **misura di Borel** (definita sui boreliani e tale che i compatti abbiano misura finita) **regolare** tale da soddisfare il teorema di Riesz-Markov. A volte si introduce la nozione di misura di Baire e si dimostra che a ogni funzionale positivo si può associare una e una sola misura di Baire tale da verificare il teorema di Riesz-Markov. D'altra parte, si dimostra che ogni misura di Baire ammette una e una sola estensione a una misura di Borel regolare, perciò noi non abbiamo perso nulla ignorando le misure di Baire (anzi, usando la corrispondenza tra misure di Baire e misure di Borel regolari, abbiamo l'asserto di Riesz-Markov per le misure di Baire).
Ad ogni modo, le misure di Baire sono definite sulla più piccola σ-algebra tale che le funzioni $\mathcal{C}_c (X)$ risultino misurabili. Si mostra facilmente che tale σ-algebra è quella generata dagli insiemi G_δ compatti.

I.7 Decomposizione di Lebesgue

Cominciamo con il porre le seguenti definizioni

Definizione I.15 *Siano μ e ν due misure sullo spazio di misura σ-finito $(X, \mathcal{A})$. Diciamo che μ e ν sono* **mutuamente singolari** *(od* **ortogonali***) se esiste un insieme misurabile A tale che $\mu (A) = 0$ e $\nu (A^c) = 0$.*

Definizione I.16 *Siano μ e ν due misure sullo spazio di misura σ-finito $(X, \mathcal{A})$. Diciamo che ν è* **assolutamente continua** *rispetto a μ (si abbrevia scrivendo ν a.c.w.r.t. – absolutely continuous with respect to – μ) se per ogni A tale che $\mu (A) = 0$, risulta $\nu (A) = 0$.*

Le due nozioni sono molto importanti a causa del teorema di Radon-Nikodym che vedremo tra poco. Prima ci occorre il seguente

Lemma I.20 (teorema della media) *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito. Sia f una funzione sommabile tale che per ogni $A \in \mathcal{A}$ di misura finita e diversa da 0 risulti*

$$\frac{1}{\mu (A)} \int_A f \, d\mu \in [a, b] \, ,$$

allora $f (x) \in [a, b]$ a parte un insieme di misura nulla.

Dimostrazione Cominciamo con il suppore che lo spazio X abbia misura finita. Sia $c_n \equiv b + n$ o $a - n$ con $n \geq 1$ e consideriamo $B (c_n, 1)$. $A_n \equiv f^{-1} (B (c_n, 1))$ è un insieme misurabile di misura finita. Mostriamo che A ha misura nulla per ogni n. Poiché gli A_n sono una famiglia numerabile e ricoprono $f^{-1} ([a, b]^c)$, avremmo la tesi.

Per assurdo sia $\mu(A_n) > 0$, allora

$$\left|\frac{1}{\mu(A_n)}\int_{A_n} f\,d\mu - c_n\right| = \left|\frac{1}{\mu(A_n)}\int_{A_n}(f - c_n)\,d\mu\right| \leq \frac{1}{\mu(A_n)}\int_{A_n}|f - c_n|\,d\mu < 1$$

la qual cosa è assurda.

(c.v.d.) Il caso σ-finito si riduce a questo restingendoci a un qualsiasi insieme di misura finita in X.

Siamo finalmente in grado di dimostrare il teorema di Radon-Nikodym che presentiamo qui unitamente al teorema della decomposizione di Lebesgue. La dimostrazione fa uso di strumenti dell'analisi operatoriali che saranno esposti solo nei capitoli II e III.

Teorema I.25 (di Radon-Nikodym e Lebsegue) *Siano μ e ν due misure sullo spazio di misura σ-finito $(X, \mathcal{A})$. Allora esiste un'unica decomposizione*

$$\nu = \nu_{\mathrm{ac}} + \nu_{\mathrm{s}}$$

dove ν_{ac} è assolutamente continua rispetto a μ e ν_{s} è ortogonale a μ. Inoltre, esiste una funzione misurabile f tale che, per ogni $A \in \mathcal{A}$,

$$\nu_{\mathrm{ac}}(A) = \int \chi_A(x)\, f(x)\, d\mu(x),$$

si scrive $d\nu_{\mathrm{ac}} = f d\mu$.

Dimostrazione La dimostrazione è dovuta a von Neumann è fa uso di fatti di analisi operatoriale negli spazi di Hilbert che saranno dimostrati nei capitoli II e III (ai quali rimandiamo per la comprensione di questa sezione intera).

L'unicità è ovvia: se f_1 e f_2 sono misurabili e ν_{s} e ν'_{s} sono singolari rispetto a μ, ma vale

$$\begin{aligned} d\nu &= f_1 d\mu + d\nu_{\mathrm{s}} \\ d\nu &= f_2 d\mu + d\nu'_{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

allora

$$(f_1 - f_2)\, d\mu = d\nu = d\nu_{\mathrm{s}} - d\nu'_{\mathrm{s}}$$

Siano A e A' tali che

$$\begin{aligned} \nu_{\mathrm{s}}(A) &= 0 \;\&\; \mu(A^c) = 0 \\ \nu'_{\mathrm{s}}(A') &= 0 \;\&\; \mu(A'^c) = 0 \end{aligned}$$

consideriamo $B = A \cap A'$, abbiamo $\nu_{\mathrm{s}}(B) = \nu'_{\mathrm{s}}(B) = 0$, e

$$\mu(B^c) = \mu(A^c \cup A'^c) = 0$$

perciò

$$\int \chi_B (f_1 - f_2)\, d\mu = \int \chi_B d\nu_{\mathrm{s}} - \int \chi_B d\nu'_{\mathrm{s}} = 0$$

cioè $(f_1 - f_2)$ quasi ovunque in B, ma essendo $\mu(B^c) = 0$, quasi ovunque in X.

Vediamo l'esistenza. Restringiamoci prima al caso in cui μ e ν siano entrambe finite. Ne viene che $\mu + \nu$ è una misura finita. Consideriamo lo spazio di Hilbert $L^2(\mu + \nu)$, e consideriamo il funzionale

$$\varphi \mapsto \int_X \varphi\, d\nu$$

definito sul denso delle funzioni semplici. Abbiamo, usando la diseguaglianza di Cauchy,

$$\left|\int_X \varphi\, d\nu\right| \leq \int_X |\varphi|\, d\nu \leq \int_X |\varphi|\, d(\mu + \nu) \leq \|\varphi\|\, \|\chi_X\|$$

dove la seconda diseguaglianza è verificata in modo ovvio proprio perché φ è una funzione semplice. Ne viene che il funzionale è continuo sul dominio denso e perciò si estende in modo unico all'insieme di tutte le funzioni $\varphi \in L^2(\mu + \nu)$. Per il teorema di Riesz, L^2 è autoduale, sicché esiste $h \in L^2(\mu + \nu)$ tale che

$$\int_X \varphi \, d\nu = \int_X \varphi h \, d(\mu + \nu).$$

Ora, presa per φ la funzione caratteristica di un qualsiasi misurabile, abbiamo

$$\int_A h \, d(\mu + \nu) = \nu(A) \leq (\mu + \nu)(A)$$

dal teorema della media, concludiamo che $0 \leq h \leq 1$.

Per le funzioni semplici

$$\int_X \varphi \, d(\mu + \nu) = \int_X \varphi \, d\mu + \int_X \varphi \, d\nu,$$

la stessa cosa vale per ogni funzione misurabile limitata come si vede subito usando il teorema della convergenza dominata.

Dunque per ogni misurabile limitata g si ha

$$\int_X g \, d\nu = \int_X gh \, d(\mu + \nu) = \int_X gh \, d\mu + \int_X gh \, d\nu.$$

Sia Y l'insieme dei punti $x \in X$ tali che $0 \leq h(x) < 1$ e sia Z l'insieme degli x per cui $h(x) = 1$. Visto che h è misurabile, ciascuno dei due insiemi è misurabile. Inoltre,

$$\int_Z d\nu = \int_Z d\mu + \int_Z d\nu$$

da cui Z ha μ-misura nulla.

Sia g ancora una funzione limitata, allora, per induzione

$$\begin{aligned}\int_X g \, d\nu &= \int_X gh \, d\mu + \int_X gh \, d\nu = \int_X g\left(h + h^2\right) d\mu + \int_X gh^2 \, d\nu \\ &= \int_X g\left(h + h^2 + \ldots + h^n\right) d\mu + \int_X gh^n \, d\nu\end{aligned}$$

Prendiamo il limite per $n \to 0$. Dal teorema della convergenza dominata,

$$\int_X gh^n \, d\nu \to \int_Z g \, d\nu$$

Posto

$$f \equiv \frac{h}{1-h}$$

in Y e 0 in Z, abbiamo, essendo $\mu(Z) = 0$,

$$\int_X g\left(h + h^2 + \ldots + h^n\right) d\mu \to \int_Y gf \, d\mu$$

perciò

$$\int_X g \, d\nu = \int_Y g f d\mu + \int_Z g \, d\nu$$

Definiamo $\nu_{\mathrm{s}}(A) \equiv \nu(A \cap Z)$ e ν_{ac} la misura definita da $f d\mu$. Allora

$$\begin{aligned}\nu(A) &= \nu_{\mathrm{ac}}(A) + \nu_{\mathrm{s}}(A) \\ \nu_{\mathrm{ac}}(A) &= \int_{A \cap Y} f \, d\mu\end{aligned}$$

Ovviamente, ν_{ac} è assolutamente continua rispetto a μ, e $\nu_{\mathrm{s}}(Z^c) = 0$, laddove $\mu(Z) = 0$.

L'estensione al caso σ-finito è ovvia, una volta notato che esiste una decomposizione di X in una famiglia numerabile di sottoinsiemi disgiunti misurabili X_n di misura finita sia per μ che per ν. A quel punto

$$\nu(A) = \sum_n \nu(A \cap X_n) = \sum_n \nu_{\mathrm{ac}}^{(n)}(A \cap X_n) + \sum_n \nu_{\mathrm{s}}^{(n)}(A \cap X_n) \equiv \nu_{\mathrm{ac}}(A) + \nu_{\mathrm{s}}(A)$$

la definizione essendo ben posta perché

$$\tilde{\nu}(A) \equiv \sum_n \nu^{(n)}(A \cap X_n)$$

è una misura. Presa A_m successione disgiunta di misurabili con unione A abbiamo

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}(A) &= \sum_n \nu^{(n)}(A \cap X_n) = \sum_n \sum_m \nu^{(n)}(A_m \cap X_n) = \\ &= \sum_m \sum_n \nu^{(n)}(A_m \cap X_n) = \sum_m \tilde{\nu}(A_m)\end{aligned}$$

(c.v.d.) dove le serie si scambiano perché a termini positivi.

Misure boreliane puntuali e continue

La decomposizione della misura può essere ulteriormente raffinata. Data una misura di Borel regolare su uno spazio X localmente compatto, consideriamo

$$P \equiv \{x \,|\mu(\{x\}) \neq 0\}$$

si dice che P è l'insieme dei **punti puri** di μ. Siccome la misura è regolare i compatti hanno misura finita perciò i punti di P hanno misura finita. Le funzioni caratteristiche sui punti di P sono sommabili e anzi L^2. Ma se $x \neq x' \in P$, allora le funzioni caratteristiche sono ortogonali, ne viene che il set delle funzioni caratteristiche sui punti di P può essere (a parte una mera normalizzazione) considerato ortonormale. Ma poiché i polinomi sono densi in L^2 se la misura è boreliana regolare e lo spazio localmente compatto, concludiamo che L^2 è separabile e con ciò un set ortonormale ha da essere numerabile. In definitiva P è numerabile.
Possiamo allora definire, per $A \in \mathcal{A}$

$$\mu_{\mathrm{pp}}(A) = \mu(A \cap P) = \sum_{x \in A \cap P} \mu(x)$$

dove l'ultima eguaglianza segue dal fatto che P è numerabile. Poniamo

$$\mu_{\mathrm{c}} \equiv \mu - \mu_{\mathrm{pp}}$$

allora

$$\mu_{\mathrm{c}}(A) = \mu(A) - \mu(A \cap P) \geq 0$$

Anche μ_{c} è una misura, si dice **parte continua** di μ, e ha la proprietà che l'insieme dei suoi punti puri è 0.

Decomposizione di Lebesgue di una misura boreliana reale

Ne deriva che ogni misura boreliana regolare si decompone come somma di una misura puntuale (fatta di punti puri) e di una continua.
Su $\mathbb{R}$ possiamo poi decomporre μ rispetto alla misura di Lebesgue, usando il teorema della decomposizione di Lebesgue, da cui

Teorema I.26 *Una misura boreliana regolare μ su $\mathbb{R}$ si decompone come somma di una misura puntuale, di una misura assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue e di una misura continua singolare rispetto alla misura di Lebesgue, cioè*

$$\mu = \mu_{\mathrm{pp}} + \mu_{\mathrm{ac}} + \mu_{\mathrm{s}}.$$

Capitolo II

Spazi di Hilbert e spazi di Banach

Lo scopo di questo capitolo sarà lo studio degli spazi di Hilbert e di Banach di dimensione infinita e in particolare dello spazio L^2.

II.1 Spazi di Banach e spazi di Hilbert

II.1.1 Spazi normati e spazi di prodotto scalare

Uno spazio vettoriale dotato di norma si dice **normato**. Poniamo allora la

Definizione II.1 *Sia V un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale. L'applicazione*

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\|: & V & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \|x\| \end{array}$$

si dice norma *di V, se, per ogni $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$, risulta*

(i) $\|x\| \geq 0$ *e* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$;

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;

Uno spazio di prodotto scalare è uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare secondo la seguente

Definizione II.2 *Sia V un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale. L'applicazione*

$$\begin{array}{rccc} (\cdot,\cdot): & V \times V & \to & \mathbb{C} \\ & x, y & \mapsto & (x, y) \end{array}$$

si dice prodotto scalare *in V, se, per ogni $x, y, z \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$, risulta*

(i) $\overline{(x, y)} = (y, x)$;

(ii) $\mathbb{R} \ni (x, x) \geq 0$ *e* $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(iii) $(x, \lambda y) = \lambda \, (x, y)$;

(iv) $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$;

Uno spazio di prodotto scalare è normato in modo naturale dal prodotto scalare, essendo l'applicazione $\sqrt{(x, x)}$ una norma. Per dimostrare questo occore vedere preliminarmente il seguente

Lemma II.1 (diseguaglianza di Cauchy-Schwartz) *Se $x, y \in V$ spazio di prodotto scalare, allora vale la seguente diseguaglianza*

$$|(x, y)| \leq \|x\| \, \|y\|$$

Dimostrazione Sia $\lambda \in \mathbb{R}$, poniamo $\|x\|^2 = (x, x)$

$$\|x + \lambda (y, x) y\| \geq 0$$

d'altra parte la quantità a primo membro vale

$$\|x\|^2 + 2\lambda |(x, y)|^2 + \lambda^2 |(x, y)|^2 \|y\|^2 \geq 0$$

siccome questo deve valere per ogni λ, il discriminante del polinomio in λ deve essere negativo

$$|(x, y)|^4 - |(x, y)|^2 \|y\|^2 \|x\|^2 \leq 0$$

(c.v.d.) da cui si ottiene la tesi.

Grazie alla diseguaglianza di Cauchy-Schwartz possiamo mostrare la diseguaglianza triangolare. Notato che, se $\alpha \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\alpha \leq |\alpha|$, si ha

$$\|x + y\|^2 = (x, x) + 2\operatorname{Re}(x, y) + (y, y) \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = \left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

da cui $\sqrt{(x, x)} = \|x\|$ è una norma di V.

Continuità La diseguaglianza di Schwarz può essere usata pure per dimostrare la continuità del prodotto scalare

Teorema II.1 (passaggio del limite sotto prodotto scalare) *Sia V uno spazio di prodotto scalare e $a \in V$, allora l'applicazione $(a, \cdot)$ è continua. Perciò se $\{b_n\}$ è convergente*

$$\lim_{n\to\infty} (a, b_n) = \left(a, \lim_{n\to\infty} b_n\right)$$

Dimostrazione Sia $\{b_n\} \subset V$ una successione convergente a $b \in V$, allora

$$|(a, b) - (a, b_n)| = |(a, b - b_n)| \leq \|a\| \|b - b_n\|$$

perciò

$$\lim_{n\to\infty} (a, b_n) = \left(a, \lim_{n\to\infty} b_n\right)$$

(c.v.d.) dal teorema di collegamento, la tesi.

La norma è una applicazione continua come discende immediatamente dalla diseguaglianza

$$|\|a\| - \|b\|| \leq \|a - b\| .$$

La somma di due vettori in uno spazio normato V è una applicazione da $V \times V \to V$, vediamo che è continua. Fissiamo allora $a_0, b_0 \in V$ e consideriamo due qualsiasi successioni a_n, b_n a valori in V che convergano ad a_0 e b_0 rispettivamente. Vogliamo vedere che

$$\lim_{n\to\infty} \|(a_0 + b_0) - (a_n + b_n)\| = 0$$

a questo scopo è ancora sufficiente notare che

$$\|(a_0 + b_0) - (a_n + b_n)\| \leq \|a_0 - a_n\| + \|b_0 - b_n\|$$

Anche la moltiplicazione per uno scalare è un'operazione continua da $\mathbb{C} \times V \to V$. Fissati k e u, sia k_n a valori in $\mathbb{C}$ convergente a k, e u_n a valori in V convergente a u, allora

$$\|ku - k_n u_n\| = \|ku - k_n u + k_n u - k_n u_n\| \leq |k - k_n| \|u\| + |k_n| \|u - u_n\|$$

passando al limite, la tesi.

Teorema II.2 *In uno spazio normato, sono operazioni continue somma, moltiplicazione per scalare e norma.*

Infine, occupiamoci del prodotto scalare. Consideriamo ancora a_n, b_n a valori in V che convergano ad a_0 e b_0:

$$\begin{aligned} |(a_n, b_n) - (a_0, b_0)| &= |(a_n - a_0 + a_0, b_n - b_0 + b_0) - (a_0, b_0)| = \\ &= |(a_n - a_0, b_n - b_0) + (a_n - a_0, b_0) + (a_0, b_n - b_0)| \leq \\ &\leq |(a_n - a_0, b_n - b_0)| + |(a_n - a_0, b_0)| + |(a_0, b_n - b_0)| \leq \end{aligned}$$

$$\leq \quad \|a_n - a_0\| \, \|b_n - b_0\| + \|a_n - a_0\| \, \|b_0\| + \|a_0\| \, \|b_n - b_0\| .$$

In particolare,

Teorema II.3 (passaggio del limite sotto prodotto scalare) *Sia V uno spazio di prodotto scalare e $a \in V$, allora l'applicazione $(a, \cdot)$ è continua. Perciò se $\{b_n\}$ è convergente*

$$\lim_{n \to \infty} (a, b_n) = \left(a, \lim_{n \to \infty} b_n\right)$$

Dimostrazione Ridimostriamo il risultato. Sia $\{b_n\} \subset V$ una successione convergente a $b \in V$, allora

$$|(a, b) - (a, b_n)| = |(a, b - b_n)| \leq \|a\| \, \|b - b_n\|$$

perciò

$$\lim_{n \to \infty} (a, b_n) = \left(a, \lim_{n \to \infty} b_n\right)$$

(c.v.d.) dal teorema di collegamento, la tesi.

II.1.2 Spazi di Banach

Spazi di Banach e di Hilbert Richiamiamo la seguente

Definizione II.3 *Uno spazio normato si dice completo quando le successioni di Cauchy a valori in tale spazio convergono a un elemento dello spazio stesso. Ricordiamo che una successione $\{x_n\} \subset V$ è di Cauchy se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero $\nu = \nu(\varepsilon)$ per cui se $n > m \geq \varepsilon$ allora $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.*

Definizione II.4 *Uno spazio normato completo si dice di Banach.*

Insiemi densi Prima di procedere richiamiamo anche la nozione di insieme denso. Del tutto in generale, se X è uno spazio topologico, allora $M \subset X$ si dice **denso** in X, se $M^a = X$. Sia ora X uno spazio metrico, allora

$$M^a = \left\{ x \in X \,\middle|\, d(x, M) \equiv \inf_{y \in M} d(x, y) = 0 \right\}$$

La cosa è ovvia se si considera che $M^a = M \cup \mathcal{D}M$ (dove $\mathcal{D}M$ è il **derivato** di M, cioè l'insieme dei suoi punti di accumulazione): se $x \in M$ allora $d(x, M) = 0$, se $x \in \mathcal{D}M$ allora per ogni ε esiste un $y \in M$ tale che $d(x, y) < \varepsilon$, visto che x è punto di accumulazione per M. Ne deriva che $\inf d(x, y) = 0$. Viceversa, se x dista 0 da M allora l'intersezione di ogni palla centrata in x con M è non vuota: se l'inf è un minimo, $x \in M$, altrimenti $x \in \mathcal{D}M$.
Detto questo, sia M denso in X spazio metrico. Allora ogni punto $x \in X$ dista 0 da M, perciò per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un punto di M talché $d(x, y) < \varepsilon$.
Infine,

Proposizione II.1 *Dato (X, d) spazio metrico e $M \subset X$, si ha che M è denso in X se e solo se vale una delle seguenti proprietà*

(i) *$M^a = X$, cioè ogni punto di x è di accumulazione per M;*

(ii) *per ogni $x \in X$, vale $d(x, M) = 0$;*

(iii) *per ogni $x \in X$ e $\varepsilon > 0$ esiste $y \in M$, talché $d(x, y) < \varepsilon$;*

(iv) *per ogni $x \in X$ esiste una successione a valori in M che tende a x.*

Il teorema di completamento Torniamo a concentrarci sugli spazi normati. Ha un rilevante peso teorico il teorema di completamento che mima la costruzione di Cantor dei reali a partire dai razionali. Dimostreremo che ogni spazio normato ha un unico completamento nei termini che seguono

Teorema II.4 (di completamento)

Sia X uno spazio normato non completo. Allora X è isomorfo e isometrico a un sottospazio lineare denso in uno spazio di Banach $\tilde{X}$. Esiste cioè una corrispondenza uno a uno $x \leftrightarrow \tilde{x}$ da X in un sottospazio di $\tilde{X}$ talché

$$\left(\widetilde{x+y}\right) = \tilde{x} + \tilde{y},\ (\widetilde{\alpha x}) = \alpha \tilde{x},\ \|\tilde{x}\| = \|x\|\,.$$

Lo spazio $\tilde{X}$ è univocamente determinato a meno di un isomorfismo isometrico.

Dimostrazione Consideriamo l'insieme delle successioni di Cauchy a valori in X e su di esso definiamo la relazione

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0.$$

Tale relazione è banalmente riflessiva e simmetrica. Inoltre, grazie alla diseguaglianza triangolare è pure transitiva, dunque è di equivalenza. Sia allora $\tilde{X}$ l'insieme delle successione di Cauchy modulo $\sim$. Denotiamo con $\{x_n\}'$ la classe di equivalenza cui appartiene $\{x_n\}$ e che è $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Definiamo allora

$$\{x_n\}' + \{y_n\}' \equiv \{x_n + y_n\}'\,,\ \alpha\{x_n\}' = \{\alpha x_n\}'\,.$$

Vediamo che si tratta di buone definizioni. Se $x_n, \bar{x}_n \in \{x_n\}'$ e $y_n, \bar{y}_n \in \{y_n\}'$ allora

$$\{x_n + y_n\}' = \{\bar{x}_n + \bar{y}_n\}'$$

infatti

$$\|x_n + y_n - (\bar{x}_n + \bar{y}_n)\| \le \|x_n - \bar{x}_n\| + \|y_n - \bar{y}_n\|$$

da cui

$$\{x_n + y_n\} \sim \{\bar{x}_n + \bar{y}_n\}\,.$$

Passiamo a definire la norma. Anzitutto $|\|x_n\| - \|x_m\|| \le \|x_n - x_m\|$ perciò la successione a valori in $\mathbb{R}$ $\{\|x_n\|\}$ è di Cauchy, ma $\mathbb{R}$ è completo perciò converge. Dunque è lecito porre

$$\|\tilde{x}\| = \left\|\{x_n\}'\right\| \equiv \lim_{n\to\infty} \|x_n\|$$

Vediamo ancora che si tratta di una definizione ben posta. Sia $\{\bar{x}_n\} \sim \{x_n\}$ allora

$$\|\bar{x}_n\| \le \|x_n\| + \|x_n - \bar{x}_n\|$$

passando al limite si ha

$$\lim_{n\to\infty} \|\bar{x}_n\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|\,.$$

Vediamo ora se quella che abbiamo definito su $\tilde{X}$ è effettivamente una norma.

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| \ge 0$$

per ogni $\{x_n\} \subset X$. D'altra parte valga

$$\|\tilde{x}\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$$

Sia $\tilde{y} \in \tilde{X}$ e calcoliamo $\tilde{x} + \tilde{y} = \{x_n + y_n\}'$ se $\{y_n\} \in \{y_n\}' = \tilde{y}$, d'altra parte

$$\lim_{n\to\infty} \|(x_n + y_n) - y_n\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$$

da cui $\{x_n + y_n\} \in \{y_n\}' = \tilde{y}$ cioè $\tilde{x} + \tilde{y} = \tilde{y}$ per ogni $\tilde{y} \in \tilde{X}$. Ne deriva che $\tilde{x} = 0$. È facile poi notare che $\|\alpha\tilde{x}\| = |\alpha|\,\|\tilde{x}\|$ e che $\|\tilde{x} + \tilde{y}\| \le \|\tilde{x}\| + \|\tilde{y}\|$.

Veniamo alla completezza di $\tilde{X}$. Sia

$$\tilde{X} \supset \{\tilde{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \left\{\left\{x_n^{(k)}\right\}'_{n\in\mathbb{N}}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$$

di Cauchy. Fissiamo ora k troviamo allora $\nu \equiv n_k$ talché se $m > n_k$ si ha

$$\left\|x_m^{(k)} - x_{n_k}^{(k)}\right\| < \frac{1}{k}$$

Detto questo, vogliamo dimostrare che $\tilde{x}_k$ converge alla classe di equivalenza contenente

$$\left\{x_{n_k}^{(k)}\right\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X.$$

Mostriamo anzitutto che quest'ultima è effettivamente una successione di Cauchy: Sia $\bar{x}_{n_k}^{(k)}$ l'elemento di $\tilde{X}$ nella cui classe di equivalenza si trova la successione di X identicamente eguale a $x_{n_k}^{(k)}$, allora

$$\left\|\tilde{x}_k - \bar{x}_{n_k}^{(k)}\right\| = \lim_{m\to\infty}\left\|x_m^{(k)} - x_{n_k}^{(k)}\right\| \le \frac{1}{k}$$

dunque

$$\begin{aligned}\left\|x_{n_m}^{(m)} - x_{n_k}^{(k)}\right\| &= \left\|\bar{x}_{n_m}^{(m)} - \bar{x}_{n_k}^{(k)}\right\| \le \left\|\bar{x}_{n_m}^{(m)} - \tilde{x}_m\right\| + \|\tilde{x}_k - \tilde{x}_m\| + \left\|\bar{x}_{n_k}^{(k)} - \tilde{x}_k\right\| \le \\ &\le \|\tilde{x}_k - \tilde{x}_m\| + \frac{1}{m} + \frac{1}{k}. \end{aligned} \tag{II.1}$$

Ne consegue che $\left\{x_{n_k}^{(k)}\right\}$ è di Cauchy come avevamo detto. Vediamo allora la convergenza alla sua classe di equivalenza, che chiameremo $\tilde{x} \in \tilde{X}$, di $\tilde{x}_k$. Abbiamo

$$\|\tilde{x} - \tilde{x}_k\| \le \left\|\tilde{x} - \bar{x}_{n_k}^{(k)}\right\| + \left\|\bar{x}_{n_k}^{(k)} - \tilde{x}_k\right\| \le \left\|\tilde{x} - \bar{x}_{n_k}^{(k)}\right\| + \frac{1}{k}$$

d'altra parte, abbiamo, per la (II.1)

$$\left\|\tilde{x} - \bar{x}_{n_k}^{(k)}\right\| = \lim_{m\to\infty}\left\|x_{n_m}^{(m)} - x_{n_k}^{(k)}\right\| \le \lim_{m\to\infty}\|\tilde{x}_k - \tilde{x}_m\| + \frac{1}{k}$$

perciò

$$\|\tilde{x} - \tilde{x}_k\| \le \lim_{m\to\infty}\|\tilde{x}_k - \tilde{x}_m\| + \frac{2}{k}$$

passando al limite per k che tende a ∞ e sapendo che $\tilde{x}_k$ è di Cauchy abbiamo la tesi.

Ora, la corrispondenza

$$X \ni x \leftrightarrow \tilde{x} \equiv \{x, x, \ldots, x, \ldots\}' \in \tilde{X}$$

è un isomorfismo isometrico, infatti:

$$\begin{aligned}\left(\widetilde{x+\alpha y}\right) &= \{x+\alpha y, \ldots, x+\alpha y, \ldots\}' = \{x, \ldots, x, \ldots\}' + \alpha\{y, \ldots, y, \ldots\}' = \tilde{x} + \alpha\tilde{y} \\ \|\tilde{x}\| &= \lim_{n\to\infty}\|x\| = \|x\|.\end{aligned}$$

Infine, si tratta di vedere che X è mandato dall'isomorfismo isometrico trovato in un sottoinsieme $\bar{X}$ denso in $\tilde{X}$. Ma questo è ovvio: si prenda un elemento $\tilde{x}$ in $\tilde{X}$ e si prenda un elemento $\{x_n\} \subset X$ della classe di equivalenza che $\tilde{x}$ rappresenta. Allora $x_n \leftrightarrow \bar{x}_n = \{x_n, x_n, \ldots, x_n, \ldots\}'$, $\{\bar{x}_n\} \subset \bar{X}$

$$\lim_{m\to\infty}\|\tilde{x} - \bar{x}_m\| = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\|x_n - x_m\| = 0.$$

(c.v.d.)

Se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$, sappiamo che $\mathcal{C}_c(\not\leq)$ è denso in $L^p(\Omega)$ con la misura di Lebesgue (capitolo I). Siccome $L^p(\Omega)$ è completo e $\mathcal{C}_c(\Omega)$ è un sottospazio lineare (normato dalla norma L^p)di $L^p(\Omega)$, per il teorema di completamento si ottiene che $L^p(\Omega)$ è il completamento di $\mathcal{C}_c(\Omega)$ normato L^p.

Teorema II.5 (di Riesz-Frechet) *Lo spazio delle funzioni continue a supporto compatto contenuto in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ normato dalla norma L^p ha per completamento lo spazio $L^p(\Omega)$.*

II.1.3 Esempi di spazi di Banach

È già noto al lettore che gli spazi $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ sono di Banach nella norma euclidea, perciò, data l'equivalenza delle norme in dimensione finita, si ha che rispetto a qualsiasi norma $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ sono spazi completi.

Nel capitolo I abbiamo dimostrato che gli spazi $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ sono completi per $1 \le p \le \infty$. Nel seguito esaminaimo alcuni altri semplici esempi di spazi di Banach.

Esempio II.1 ($\mathcal{B}(X)$) Con $\mathcal{B}(X)$ denotiamo lo spazio vettoriale delle funzioni **limitate** definite su X a valori in $\mathbb{C}$, e X è uno spazio di misura. Possiamo normare lo spazio $\mathcal{B}(X)$ con la **norma uniforme** o norma del sup:

$$\|f\|_\infty \equiv \sup_{x\in X} |f(x)|$$

non è neanche il caso di mostrare che si tratta di una norma (dovrebbe essere già nota dal corso di Analisi I). Mostriamo che lo spazio in questione è di Banach.
Sia $\{f_n\}$ una successione di Cauchy a valori in $\mathcal{B}(X)$. Allora per ogni $x \in X$ abbiamo

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le \|f_n - f_m\|_\infty$$

dunque $\{f_n(x)\} \subset \mathbb{C}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{C}$ completo perciò ammette limite $f(x)$. Abbiamo, intanto, che f_n ammette limite puntuale f. Vogliamo dimostrare che la convergenza a f è uniforme. Vale

$$|f(x) - f_n(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_m(x) - f_n(x)| \le \lim_{m\to\infty} \|f_m - f_n\|_\infty$$

Ma per ogni ε fissato esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che se $m, n > \nu$ allora $\|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon$, perciò preso $n > \nu$ si ha, per ogni x,

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

da cui la convergenza è uniforme. Ora, f_m è limitata perciò dominata da $K \in \mathbb{R}^+$

$$\sup_{x\in X} |f(x)| \le \sup_{x\in X} |f_n(x) - f_m(x)| + \sup_{x\in X} |f_m(x)| \le \varepsilon + K$$

dunque $f \in \mathcal{B}(X)$, la tesi.

D'ora in poi X sarà uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto secondo numerabile Ricordiamo, una volta per tutte, che uno spazio è **di Hausdorff** se ogni coppia di punti distinti ammette due intorni (uno per ciascun punto) disgiunti; è **localmente compatto** se ogni suo punto possiede un intorno compatto ed è **secondo numerabile** se esiste una collezione numerabile di aperti tale che ogni aperto si possa esprimere come unione di elementi della collezione.

Esempio II.2 ($C_B(X)$) Lo spazio $\mathcal{C}_\mathcal{B}(X)$ è lo spazio vettoriale delle funzioni continue e limitate definite in X a valori in $\mathbb{C}$ (o in un qualsiasi altro spazio di Banach, normato da $|\cdot|$). Su $\mathcal{C}_\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{B}(X)$ definiamo ancora la norma uniforme

$$\|f\|_\infty \equiv \sup_{x\in X} |f(x)|$$

e vediamo che così si ottiene uno spazio di Banach.
Se $\{f_n\} \subset \mathcal{C}_\mathcal{B}(X)$ è di Cauchy allora converge uniformemente a una funzione limitata $f \in \mathcal{B}(X)$. Ci basta allora mostrare che f è continua. Abbiamo

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f(y) - f_n(y)|$$

ora, pur di scegliere n abbastanza grande abbiamo, per convergenza puntuale,

$$|f(x) - f_n(x)|, |f(y) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

poi, siccome, f_n è continua, pur di scegliere y sufficientemente vicino a x abbiamo

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

da cui la continuità.

Si è incidentalmente dimostrato che *il limite uniforme di una successione di funzioni continue è continuo.*

Esempio II.3 Un altro esempio di spazio che si può normare con la norma uniforme è l'insieme delle funzioni continue a supporto compatto, $\mathcal{C}_c(X) \subset \mathcal{C}_\mathcal{B}(X)$ (per il teorema di Weierstraß). Stavolta però lo spazio non è di Banach. Consideriamo la seguente successione in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$

$$f_n(x) \equiv \begin{cases} (\sin x)/x - 1, & |x| < 2n\pi,\ x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \text{ e } |x| \geq 2n\pi \end{cases}$$

Siccome da un certo n in poi in ogni punto $f_n(x) = (\sin x)/x$, la successione converge in $\mathcal{C}_\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$f_n(x) \equiv \begin{cases} (\sin x)/x - 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

che **non** è a supporto compatto.

Esempio II.4 ($\mathcal{C}_\infty(X)$) Con $\mathcal{C}_\infty(X)$ si indica lo spazio delle funzioni continue che vanno a 0 all'infinito: tali cioè che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un compatto K_e tale che per le x al di fuori di K_ε $|f(x)| < \varepsilon$. Ovviamente $\mathcal{C}_\infty(X) \subset \mathcal{C}_\mathcal{B}(X)$. Vogliamo mostrare che si tratta di uno spazio completo. Se f_n è di Cauchy, allora converge a una continua limitata f. Dunque, fissiamo $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$, per cui $\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon/2$ e $|f_n(x)| < \varepsilon/2$ per $x \in K^c_{\varepsilon/2}$, allora, per gli stessi x

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \leq \|f - f_n\|_\infty + |f_n(x)| < \varepsilon.$$

Consideriamo ora $f \in \mathcal{C}_\infty(X)$ e fissiamo $\varepsilon > 0$. Fuori da K_ε la funzione è dominata da ε. Passiamo a considerare la funzione **continua** g che sia eguale a f su $K_{\varepsilon'}$ e nulla al di fuori di $K_{\varepsilon'}$, quest'ultimo sia un compatto con $K_\varepsilon \subset K_{\varepsilon'}$. Allora $g \in \mathcal{C}_c(X)$ e

$$\|f - g\|_\infty = \sup_{x \in K^c_{\varepsilon'}} |f(x) - g(x)| < 2\varepsilon$$

Ne deriva che $\mathcal{C}_c$ è *denso in* $\mathcal{C}_\infty$.

Esempio II.5 ($C(K)$) Consideriamo infine lo spazio delle funzioni continue definite su un compatto $\mathcal{C}(K)$. Allora $\mathcal{C}(K) = \mathcal{C}_c(K) = \mathcal{C}_\mathcal{B}(K)$ perciò i tre spazi sono completi.

II.1.4 Spazi di Hilbert

Si ha la seguente

Definizione II.5 *Uno spazio di prodotto scalare, completo nella norma indotta dal prodotto scalare stesso si dice di Hilbert.*

Esempi di spazi di Hilbert sono $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ dotati del prodotto scalare standard. Nel capitolo I, abbiamo visto che $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio di Hilbert e tale è $\ell^2(\mathbb{C})$. Quest'ultimo risultato è ridimostrato autonomamente nel seguente

Esempio II.6 ($\ell^2(\mathbb{C})$) Consideriamo l'insieme ℓ^2 delle successioni a valori complessi $a \equiv \{a_n\} \subset \mathbb{C}$ tali che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$$

Notiamo che ℓ^2 è uno spazio vettoriale, siano $a = \{a_n\}, b = \{b_n\} \in \ell^2$, allora

$$|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| \leq 2 \max\{|a_n|, |b_n|\}$$
$$|a_n + b_n|^2 \leq 4 \max\left\{|a_n|^2, |b_n|^2\right\} \leq 4\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)$$

per il teorema di confronto delle serie numeriche $a + b \in \ell^2$. Analogamente per αa, $\alpha \in \mathbb{C}$. Dotiamo ℓ^2 di un prodotto scalare

$$(a, b) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n} b_n,$$

la definizione è ben posta, infatti, dalla diseguaglianza di Schwartz in $\mathbb{C}^m$,

$$\left|\sum_{n=1}^{m} \overline{a_n} b_n\right|^2 \leq \sum_{n=1}^{m} |a_n|^2 \sum_{n=1}^{m} |b_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 < \infty$$

passando al limite per $m \to \infty$ si ottiene

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n} b_n\right| < \infty$$

Passiamo a verificare che si tratta effettivamente di un prodotto scalare:

(i) antisimmetria:

$$(a,b) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \overline{a_n} = \overline{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\overline{b_n} a_n\right)\right)} = \overline{(b,a)}$$

(ii) ovviamente $\|a\| \geq 0$, inoltre $\|a\| = 0 \Leftrightarrow a_n = 0 \, \forall n \in \mathbb{N}$, poiché la successione delle somme parziali S_N è monotona crescente e non negativa:

$$0 \leq S_N \leq \sup_{\mathbb{N}} S_N = 0 \Rightarrow S_N = 0 \Rightarrow a_n = 0;$$

(iii) linearità nella seconda variabile (alla moda dei fisici!):

$$(a, b + \lambda c) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n} \left(b_n + \lambda c_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n} b_n + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n} c_n = \\ = (a,b) + \lambda \, (a,c)$$

Notiamo che il prodotto scalare definito in ℓ^2 è il limite per $n \to \infty$ del prodotto scalare standard di $\mathbb{C}^n$. I vettori di ℓ^2 possono essere visti come vettori di $\mathbb{C}^n$ con $n \to \infty$

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$$

Mostriamo adesso che lo spazio ℓ^2 è completo, sicché è di Hilbert. Consideriamo la successione di elementi di ℓ^2 $\left\{a^{(m)}\right\} \subset \ell^2$, $a^{(m)} = \left\{a_l^{(m)}\right\}_{l \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$. $a^{(m)}$ sia di Cauchy, allora fissato ε esiste $\nu\left(\varepsilon\right)$ per cui

$$\left\|a^{(n)} - a^{(m)}\right\|^2 = \sum_{l=1}^{\infty} \left|a_l^{(n)} - a_l^{(m)}\right|^2 < \varepsilon^2 \text{ se } n, m > \nu\left(\varepsilon\right)$$

siccome per ogni $l \in \mathbb{N}_0$

$$\left|a_l^{(n)} - a_l^{(m)}\right|^2 \leq \sum_{l=1}^{\infty} \left|a_l^{(n)} - a_l^{(m)}\right|^2$$

per ogni l la successione numerica $\left\{a_l^{(n)}\right\}_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ è di Cauchy ed essendo $\mathbb{C}$ completo, esiste il limite

$$\mathbb{C} \ni a_l = \lim_{n \to \infty} a_l^{(n)}$$

Consideriamo allora la successione $a = \{a_l\}_{l \in \mathbb{N}_0}$, facciamo vedere che appartiene a ℓ^2 ed inoltre $a^{(n)} \to a$ in norma ℓ^2. Dalla condizione di Cauchy troviamo che per ogni M

$$\sum_{l=1}^{M} \left|a_l^{(n)} - a_l^{(m)}\right|^2 < \varepsilon^2 \text{ se } n, m > \nu\left(\varepsilon\right)$$

passando al limite per $m \to \infty$

$$\sum_{l=1}^{M} \left|a_l^{(n)} - a_l\right|^2 < \varepsilon^2 \text{ se } n > \nu\left(\varepsilon\right)$$

e al limite per $M \to \infty$

$$\left\|a^{(n)} - a\right\|^2 = \sum_{l=1}^{\infty} \left|a_l^{(n)} - a_l\right|^2 < \varepsilon^2 \text{ se } n > \nu\left(\varepsilon\right)$$

▪ dunque $a^{(n)}$ converge in norma ℓ^2 ad a. Inoltre, $a^{(n)} - a \in \ell^2$, sicché $a = a^{(n)} - \left(a^{(n)} - a\right) \in \ell^2$.

II.2 Ortogonalità

Con la prima sezione abbiamo esaurito le proprietà topologiche salienti degli spazi di Banach e di Hilbert. Adesso intendiamo concentrarci sulle proprietà geometriche degli spazi di prodotto scalare e dunque degli spazi di Hilbert. Tali proprietà ruotano tutte attorno al concetto di ortogonalità che esamineremo, dapprima in uno spazio di prodotto scalare, e poi, in tutto il suo fulgore, in uno spazio di Hilbert.

II.2.1 Ortogonalità e relazione del parallelogramma

Definizione II.6 *In uno spazio di prodotto scalare due vettori si dicono ortogonali se hanno prodotto scalare nullo.*

Notiamo che la stretta positività del prodotto scalare (che abbiamo assunto per ipotesi) garantisce il fatto che il prodotto scalare è non degenere. Infatti, sia dato un vettore x ortogonale a tutti i vettori dello spazio, in particolare $(x, x) = 0$, perciò $x = 0$. L'unico vettore ortogonale a tutti i vettori dello spazio è il vettore nullo.
Un risultato elementare, ma di fondamentale importanza è il seguente

Teorema II.6 (di Pitagora) *Siano dati due vettori ortogonali x, x' in uno spazio di prodotto scalare, allora*

$$\|x + x'\|^2 = \|x\|^2 + \|x'\|^2$$

Più in generale vale il seguente

Teorema II.7 (del parallelogramma) *In uno spazio di prodotto scalare vale*

$$\|x + x'\|^2 + \|x - x'\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|x'\|^2$$

Dimostrazione È un semplice calcolo

$$\begin{aligned}\|x + x'\|^2 + \|x - x'\|^2 &= (x, x) + (x', x') + 2\operatorname{Re}(x, x') + (x, x) + (x', x') - 2\operatorname{Re}(x, x') = \\ &= 2(x, x) + 2(x', x') = 2\|x\|^2 + 2\|x'\|^2\end{aligned}$$

(c.v.d.)

Siccome nel teorema compaiono solo le norme, può sorgere il dubbio che la tesi sia valida anche su spazi sui quali non sia definito il prodotto scalare. D'altra parte, nella dimostrazione abbiamo usato pesantemente il fatto che la norma fosse esprimibile come prodotto scalare. Cominciamo col porre la seguente

Definizione II.7 *Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato. La norma è detta hilbertiana se esiste un prodotto scalare su X tale che*

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}, \ \forall x \in X$$

Vale allora il seguente

Teorema II.8 *Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato. La norma è hilbertiana se e solo se soddisfa la relazione del parallelogramma*

$$\|x + x'\|^2 + \|x - x'\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|x'\|^2, \ \forall x, x' \in X$$

Dimostrazione Se X ha norma hilbertiana abbiamo già mostrato che questo implica la relazione del parallelogramma. Il viceversa è più complicato. Supponiamo che X sia uno spazio vettoriale complesso. Definiamo allora la mappa $\phi : X \times X \to \mathbb{C}$ come segue

$$\phi(x, x') \equiv \frac{1}{4}\left(\|x + x'\|^2 - \|x - x'\|^2\right) + \frac{1}{4i}\left(\|x + ix'\|^2 + \|x - ix'\|^2\right)$$

È banale dimostrare a questo punto che

(i) $\overline{\phi(x',x)} = \phi(x,x')$;

(ii) $\phi(x,ix') = i\phi(x,x')$;

(iii) $\phi(x,x) = \|x\|^2$.

Dalla relazione del parallelogramma si ottiene poi, per ogni $x, x', x'' \in X$

$$\|x + x' + x''\|^2 + \|x\|^2 + \|x'\|^2 + \|x''\|^2 = \|x + x'\|^2 + \|x + x''\|^2 + \|x' + x''\|^2$$

da cui si ottiene

$$\phi(x, x' + x'') = \phi(x,x') + \phi(x,x'')$$

Perciò, per ogni intero n si ha

$$\phi(x,nx') = n\phi(x,x')$$

Ora, sia $x' = n(x'/n)$ allora

$$\phi(x,x') = \phi\left(x, n\frac{x'}{n}\right) = n\phi\left(x, \frac{x'}{n}\right) \Rightarrow \frac{1}{n}\phi(x,x') = \phi\left(x, \frac{x'}{n}\right)$$

dunque la relazione sarà vera per ogni $q \in \mathbb{Q}$. Per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ e poiché la norma è continua, si ha

$$\phi(x,kx') = k\phi(x,x')$$

per ogni $k \in \mathbb{R}$. Ma visto che si ha anche $\phi(x,ix') = i\phi(x,x')$ la relazione di sopra resta valida per ogni $k \in \mathbb{C}$. Resta perciò dimostrata la linearità nella seconda variabile. La positività è ovvia, se poi $\phi(x,x) = 0$ allora $\|x\| = 0$ e $x = 0$. ϕ è dunque un prodotto scalare.

Se X fosse stato reale si sarebbe ragionato allo stesso modo usando

$$\phi(x,x') = \frac{1}{4}\left(\|x + x'\|^2 - \|x - x'\|^2\right).$$

(c.v.d.)

Per inciso, uno spazio in cui valga la relazione del parallelogramma si dice **prehilbertiano**, perciò il teorema dimostrato asserisce che uno spazio è di prodotto scalare se e solo se è prehilbertiano.

Esempio II.7 Consideriamo in $\ell^p(\mathbb{C})$ i due elementi

$$\{h_n\} \equiv (1,1,0,0,\ldots),$$
$$\{k_n\} \equiv (1,-1,0,0,\ldots);$$

abbiamo

$$\{h_n\} + \{k_n\} = (2,0,0,\ldots),$$
$$\{h_n\} - \{k_n\} = (0,2,0,\ldots);$$

inoltre $\|\{h_n\}\|_p = \|\{k_n\}\|_p = 2^{1/p}$, $\|\{h_n + k_n\}\|_p = \|\{h_n - k_n\}\|_p = 2$ dunque

$$\|\{h_n + k_n\}\|_p^2 + \|\{h_n - k_n\}\|_p^2 = 8$$
$$2\|\{h_n\}\|_p^2 + 2\|\{k_n\}\|_p^2 = 4 \cdot 2^{2/p} = 2^{2(1+1/p)}$$

allora la relazione del parallelogramma vale se e solo se

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{p} \Leftrightarrow p = 2$$

Solo se $p = 2$ $\ell^p(\mathbb{C})$ ha norma hilbertiana. Ne consegue che l'unico spazio sul quale la norma ℓ^p è indotta da un prodotto scalare è ℓ^2. Siccome gli ℓ^p sono casi particolari di spazi $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, si ha in generale che su $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, per $p \neq 2$, la norma non è indotta da alcun prodotto scalare.

Prima di concludere, una semplice

Proposizione II.2 *Un insieme di vettori ortogonali non nulli in uno spazio di prodotto scalare, forma un sistema linearmente indipendente.*

Dimostrazione Ricordiamo che una famiglia anche infinita di vettori si dice linearmente indipendente se preso ad arbitrio un numero finito di vettori della famiglia si ottiene un sistema indipendente. Siano allora $\{u_1, \ldots, u_m\}$ ortogonali e non nulli. Sia

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i = 0$$

moltiplichiamo scalarmente ambo i membri per u_j otteniamo

$$0 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (u_i, u_j) = \alpha_j (u_j, u_j)$$

(c.v.d.) ma essendo $u_j \neq 0$ si ottiene $\alpha_j = 0$, la tesi.

II.2.2 Ortocomplemento

Definita la nozione di ortogonalità è piuttosto naturale introdurre l'ortocomplementazione

Definizione II.8 *Dato uno spazio prehilbertiano H, sia M un sottoinsieme non vuoto di H. Si chiama complemento ortogonale di M, e si indica con $M^\perp$, il sottoinsieme di H costituito dai vettori ortogonali a M.*

Proprietà dell'ortocomplemento In simboli si ha

$$M^\perp \equiv \{x \in H \,|(u, x) = 0, \; \forall u \in M\}$$

Notiamo anzitutto che $M^\perp$ è non vuoto, contenendo il vettore nullo. 0 è l'unico vettore ortogonale a tutti i vettori di H e come tale $\{0\} = H^\perp$. Inoltre, siccome tutti i vettori sono ortogonali a 0 $\{0\}^\perp = H$.

$M^\perp$ come varietà lineare chiusa Si ha poi che $M^\perp$ è un sottospazio: $0 \in M^\perp$; se $x, y \in M^\perp$ allora $\forall u \in M$ $(u, x) = (u, y) = 0$ sicché

$$(u, x + \lambda y) = (u, x) + \lambda (u, y) = 0.$$

Sia adesso $\{x_n\} \subset M^\perp$ convergente a $\bar{x} \in H$ e sia $u \in M$, allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, vale

$$(u, x_n) = 0$$

passando al limite per $n \to \infty$ per continuità del prodotto scalare, si ha

$$0 = \lim_{n \to \infty} (u, x_n) = (u, \bar{x})$$

perciò $\bar{x} \in M^\perp$. Ne consegue che $M^\perp$ è chiuso. D'ora in poi con la parola **sottospazio** indicheremo, salvo avviso contrario, **varietà lineare chiusa**. In ogni caso,

$$\left(M^\perp\right)^a = M^\perp$$

$M \cap M^\perp$ Calcoliamo adesso l'intersezione di M con $M^\perp$; sia $x \in M \cap M^\perp$ allora per ogni $u \in M$ si ha $(u, x) = 0$, in particolare $(x, x) = 0$ perciò $x = 0$. Perciò, se $0 \in M$ allora l'intersezione è il vettore nullo, altrimenti l'intersezione è vuota.

Relazioni di inclusione Sia ora $M \subset N$, e sia $x \in N^\perp$, allora per ogni $u \in N$ vale $(x, u) = 0$, ma se u descrive tutto N, descrive tutto M, perciò $x \in M^\perp$: allora $N^\perp \subset M^\perp$. Allargando M si aumentano le condizioni per l'appartenenza all'ortocomplemento, di conseguenza l'ortocomplemento si restringe.

Ortocomplemento dell'ortocomplemento Consideriamo adesso $M^{\perp\perp} \equiv \left(M^\perp\right)^\perp$. Sia $u \in M$, allora per ogni $x \in M^\perp$ vale $(u, x) = 0$, ne consegue che $u \in M^{\perp\perp}$ e dunque

$$M \subset M^{\perp\perp}.$$

Da quest'ultima relazione si trova, ortocomplementando, che $M^{\perp\perp\perp} \subset M^{\perp}$ tramite la relazione di inclusione di prima; se invece sostituiamo a $M^{\perp}$ $M^{\perp\perp}$ diventa $M^{\perp\perp\perp}$ e allora $M^{\perp} \subset M^{\perp\perp\perp}$, da cui

$$M^{\perp} = M^{\perp\perp\perp}.$$

Ortocomplemento della chiusura Consideriamo M^a, siccome $M \subset M^a$ si ha $(M^a)^{\perp} \subset M^{\perp}$. Sia ora $x \in M^{\perp}$ e consideriamo un qualsiasi elemento $u \in M^a$, allora esiste una successione di vettori di M, u_n, convergente a u, ne consegue che, per continuità,

$$(u, x) = \lim_{n\to\infty} (u_n, x) = 0$$

allora $x \in (M^a)^{\perp}$. Infine,

$$(M^a)^{\perp} = M^{\perp}$$

Varietà lineari generate Prima di proseguire vogliamo stabilire un risultato che riguarda le varietà lineare generate da un insieme di vettori. Consideriamo una famiglia qualsiasi di varietà lineari W_α aventi intersezione non vuota $W \equiv \bigcap_\alpha W_\alpha$. Vogliamo dimostare che W è ancora una varietà lineare . Anzitutto abbiamo che $0 \in W$. Inoltre, se $x, y \in W$, allora per ogni α $x, y \in W_\alpha$, sicché $x + \lambda y \in W_\alpha$ per ogni α. Dunque anche $x + \lambda y \in W$. Se i W_α sono sottospazi, allora sono tutti chiusi e perciò la loro intersezione è ancora chiusa e perciò Wt è un sottospazio.
Detto questo poniamo

Definizione II.9 *Dato un sottoinsieme M in uno spazio normato, si dice varietà lineare generata da M, $\mathcal{V}M$, la più piccola varietà lineare contenente M. Si dice sottospazio generato da M, $\operatorname{Span}\langle M\rangle$, il più piccolo sottospazio contenente M.*

La definizione è ben posta in forza delle considerazioni precedenti e del fatto che

$$\begin{aligned} \mathcal{V}M &\equiv \bigcap_{M\subset W \text{varietà lineari}} W \\ \operatorname{Span}\langle M\rangle &\equiv \bigcap_{M\subset W \text{sottospazi}} W \end{aligned}$$

Uno dei risultati più importanti sulle varietà e sui sottospazi generati è dato dal seguente

Teorema II.9 *Dato un sottoinsieme M in uno spazio normato, si ha che il sottospazio generato da M è la chiusura della varietà lineare generata da M stesso:*

$$(\mathcal{V}M)^a = \operatorname{Span}\langle M\rangle$$

Dimostrazione Anzitutto è banale constatare che $\mathcal{V}M \subset \operatorname{Span}\langle M\rangle$. Infatti, sia $x \in \mathcal{V}M$, allora x appartiene a ogni varietà contenente M. Dunque, x apparterrà a tutti i sottospazi (che in particolare sono varietà lineari) contenenti M. Infine, $x \in \operatorname{Span}\langle M\rangle$. Ora, $(\mathcal{V}M)^a$ è un chiuso contenente $\mathcal{V}M$ e quindi M. Se mostriamo che è una varietà lineare, abbiamo che è un sottospazio, per definizione, allora

$$\operatorname{Span}\langle M\rangle = (\mathcal{V}M)^a.$$

Il fatto che la chiusura di una varietà lineare è ancora una varietà lineare è attestato dal lemma che segue. **(c.v.d.)**

Lemma II.2 *In uno spazio normato la chiusura di una varietà lineare è una varietà lineare.*

Dimostrazione Sia W una varietà lineare e consideriamone la chiusura W^a. $0 \in W \subset W^a$. Siano $x, y \in W$, allora esistono due successioni a valori in W, $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, che convergono, rispettivamente, a x e y. Abbiamo allora che, se $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$x + \lambda y = \lim_{n\to\infty} x_n + \lambda \lim_{n\to\infty} y_n$$

ma per la continuità della somma e della moltiplicazione per uno scalare si ha

$$x + \lambda y = \lim_{n\to\infty} (x_n + \lambda y_n)$$

(c.v.d.) per linearità di W, la successione $\{x_n + \lambda y_n\}$ è a valori in W, dunque $x + \lambda \in W^a$.

Concentriamoci ncora un attimo sulle varietà lineari generate. Anzitutto mostriamo la seguente (ovvia!)

Proposizione II.3 *Sia W un sottoinsieme non vuoto di uno spazio normato. W è una varietà lineare se e solo se presi ad arbitrio $\{u_1, \ldots, u_n\} \in W$ e $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \in \mathbb{C}$, si ha che $\sum \lambda_i u_i \in W$*

Dimostrazione Sia W una varietà lineare, allora, per induzione, essa contiene le combinazioni lineari finite dei suoi vettori. Viceversa, ponendo tutti i coefficienti eguali a 0 si ha che $0 \in W$. Poi, preso $n = 1$, si ha che $\lambda u \in W$ se $u \in W$ e, posto $n = 2$, si ha che $u_1 + u_2 \in W$ se $u_1, u_2 \in W$. **(c.v.d.)**

Siamo adesso in grado di caratterizzare $\mathcal{V}M$

Proposizione II.4 *Dato un sottoinsieme M di uno spazio normato, la varietà lineare $\mathcal{V}M$ generata da M è l'insieme delle combinazioni lineari finite dei vettori di M.*

Dimostrazione Sia $\mathcal{S}$ l'insieme delle combinazioni lineari finite di M. Se $M = \{\varnothing\}$ si ha che $\mathcal{S} = \{0\} = \mathcal{V}M$. Sia ora M non vuoto. Presa una combinazione lineare a coefficienti tutti nulli si ha subito che $0 \in \mathcal{S}$. Prendiamo ora due vettori $u, v \in \mathcal{S}$, allora esistereanno $u_1, \ldots, u_n \in M$ e $v_1, \ldots, v_m \in M$ tali che

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i,\ v = \sum_{j=1}^{m} \kappa_j v_j$$

allora è immediato verificare che $u + \alpha v \in \mathcal{S}$. Dunque $\mathcal{S}$ è una varietà lineare contenente M. Perciò $\mathcal{V}M \subset \mathcal{S}$. Sia ora W una varietà lineare contenente M. Per la proposizione precedente W contiene tutte le combinazioni lineari finite dei suoi vettori, ma W contiene M, perciò tutte le combinazioni di vettori di M. Infine, $\mathcal{S} \subset W$ e perciò $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}M$. La tesi. **(c.v.d.)**

Ortocomplemento e sottospazi generati Sia $x \in M^\perp$, consideriamo un qualunque vettore $w \in \mathcal{V}M$, allora esistono $u_1, \ldots, u_n \in M$ tali che

$$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \Rightarrow (x, w) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x, u_i) = 0$$

dunque, per ogni $w \in \mathcal{V}M$ si ha $(x, w) = 0$. Ne deriva che $M^\perp \subset (\mathcal{V}M)^\perp$. D'altra parte, siccome $M \subset \mathcal{V}M$ vale anche $(\mathcal{V}M)^\perp \subset M^\perp$ perciò

$$M^\perp = (\mathcal{V}M)^\perp$$

D'altra parte

$$\operatorname{Span} \langle M \rangle^\perp = ((\mathcal{V}M)^a)^\perp = M^\perp$$

dunque

$$M^\perp = (\mathcal{V}M)^\perp = \operatorname{Span} \langle M \rangle^\perp .$$

Riassumiamo quanto trovato

Teorema II.10 (proprietà dell'ortocomplemento) *Sia M un sottoinsieme non vuoto di uno spazio prehilbertiano H, allora si ha*

(i) $\{0\}^\perp = H$ *e* $H^\perp = \{0\}$;

(ii) $M^\perp$ *è un sottospazio (una varietà lineare chiusa) di* H;

(iii)

$$M \cap M^{\perp} = \begin{cases} \{0\}\,, & \text{se } 0 \in M \\ \varnothing, & \text{altrimenti} \end{cases} \;;$$

(iv) $M \subset N \subset H$ *implica* $N^{\perp} \subset M^{\perp}$*;*

(v) $M \subset M^{\perp\perp}$*;*

(vi) $(M^a)^{\perp} = M^{\perp}$*;*

(vii) $M^{\perp\perp\perp} = M^{\perp}$*;*

(viii) $M^{\perp} = (\mathcal{V}M)^{\perp} = \operatorname{Span}\langle M\rangle^{\perp}$.

Ortocomplemento negli spazi di Hilbert Vogliamo adesso vedere che cosa si può aggiungere se assumiamo che lo spazio prehilbertiano sia completo, cioè sia uno spazio di Hilbert. Come è d'uso denotiamo lo spazio di Hilbert con una H maisucola calligrafica: $\mathcal{H}$. Stabiliamo il seguente

Lemma II.3 *Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e sia W un suo sottospazio. Allora*

(i) *per ogni $x \in \mathcal{H}$ fissato, posto*

$$d\,(x, W) \equiv \inf_{w \in W} \|x - w\|\,,$$

esiste $w_0 \in W$ tale che

$$d\,(x, W) = \|x - w_0\|\,;$$

(ii) *se W è un sottospazio proprio, esiste in $W^{\perp}$ un elemento non nullo, cioè $W^{\perp}$ non è banale.*

Dimostrazione Consideriamo la successione $\{w_n\} \subset W$ minimizzante, tale cioè che

$$\lim_{n \to \infty} \|x - w_n\| = d\,(x, W)$$

Mostriamo che si tratta di una successione di Cauchy: usando la regola del parallelogramma abbiamo

$$\|(x - w_n) + (x - w_m)\|^2 + \|(x - w_n) - (x - w_m)\|^2 = 2\left(\|x - w_n\|^2 + \|x - w_m\|^2\right)$$

ne consegue che

$$\|(x - w_n) - (x - w_m)\|^2 = \|w_m - w_n\|^2 = 2\left(\|x - w_n\|^2 + \|x - w_m\|^2\right) - 4\left\|x - \frac{w_n + w_m}{2}\right\|^2$$

Ora, $(w_n + w_m)/2$ appartiene a W e dunque

$$d^2\,(x, W) \le \left\|x - \frac{w_n + w_m}{2}\right\|^2$$

dunque

$$\begin{aligned} \|w_m - w_n\|^2 &\le 2\left(\|x - w_n\|^2 + \|x - w_m\|^2\right) - 4d^2\,(x, W) = \\ &= 2\left(\|x - w_n\|^2 - d^2\,(x, W)\right) + 2\left(\|x - w_m\|^2 - d^2\,(x, W)\right) \end{aligned}$$

da cui la condizione di Cauchy. Ora, W è un sottospazio, perciò è chiuso. $\mathcal{H}$ è **completo**, perciò W, chiuso in un completo, è **completo** (prendiamo una successione di Cauchy in W essa converge a un elemento di $\mathcal{H}$, ma questo, essendo limite di una successione a valori in W, appartiene alla chiusura di W e dunque a W). Dunque esiste il limte $w_0 \in W$ di $\{w_n\}$. Abbiamo allora per continuità di somma e norma

$$\|x - w_0\| = \left\|x - \lim_{n \to \infty} w_n\right\| = \lim_{n \to \infty} \|x - w_n\| = d\,(x, W)\,.$$

Veniamo alla seconda parte. Certamente esiste $x \in H$ con $x \notin W$ e, dunque, $x \neq 0$.

Consideriamo $w_0 \in W$ tale che

$$\|x - w_0\| = d(x, W)$$

Poniamo $u \equiv x - w_0$. Siccome $x \notin W$ sarà certamente u non nullo. Vogliamo vedere che $u \in W^\perp$. Sia $k \in \mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$ se il campo è reale), abbiamo, se $w \in W$

$$\|u + kw\| = \|x - (w_0 - kw)\| \geq d(x, W) = \|u\|$$

da cui, essendo le norme non negative,

$$\|u + kw\|^2 - \|u\|^2 \geq 0$$

prendiamo ora $k \equiv (w, u)\, t$ con $t \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$\|u + t(w, u)\, w\|^2 - \|u\|^2 \geq 0$$

Calcoliamo il primo membro

$$\begin{aligned}\|u + t(w, u)\, w\|^2 &= \|u\|^2 + t^2 |(w, u)|^2 \|w\|^2 + 2\operatorname{Re}[t(w, u)(u, w)] = \\ &= \|u\|^2 + t^2 |(w, u)|^2 \|w\|^2 + 2t |(w, u)|^2\end{aligned}$$

perciò

$$|(w, u)|^2 \left(t^2 \|w\|^2 + 2t\right) \geq 0, \ \forall w \in W, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

se fosse $|(w, u)|^2 \neq 0$, dovrebbe allora risultare per tutti i w

$$1 - \|w\|^2 < 0$$

da cui $\|w\|^2 > 1$, il che è assurdo, dunque

(c.v.d.)

$$\forall w \in W \ \ |(w, u)|^2 = 0 \Rightarrow (w, u) = 0 \Rightarrow u \in W^\perp.$$

La conseguenza più importante del lemma è la seguente

$$\operatorname{Span}\langle M\rangle^{\perp\perp} = \operatorname{Span}\langle M\rangle$$

Già sappiamo che risulta $\operatorname{Span}\langle M\rangle \subset \operatorname{Span}\langle M\rangle^{\perp\perp}$. Ora, supponiamo per assurdo che $\operatorname{Span}\langle M\rangle$ sia diverso da $\operatorname{Span}\langle M\rangle^{\perp\perp}$. Ora $\operatorname{Span}\langle M\rangle^{\perp\perp}$ è uno spazio di Hilbert essendo un sottospazio di uno spazio di Hilbert, perciò, dal lemma, esiste un vettore u non nullo di $\operatorname{Span}\langle M\rangle^{\perp\perp}$ che è ortogonale a tutti i vettori di $\operatorname{Span}\langle M\rangle$. Perciò

$$0 \neq u \in \operatorname{Span}\langle M\rangle^\perp \cap \operatorname{Span}\langle M\rangle^{\perp\perp}$$

il che nega la (iii) del teorema precedente.
Ora, sappiamo che $M^\perp = \operatorname{Span}\langle M\rangle^\perp$, riapplicando l'ortogonale

$$M^{\perp\perp} = \operatorname{Span}\langle M\rangle^{\perp\perp} = \operatorname{Span}\langle M\rangle.$$

Se M è una varietà lineare, si ha $\operatorname{Span}\langle M\rangle = M^a$ (è ovvio M^a è il più piccolo chiuso contenente M perciò $M^a \subset \operatorname{Span}\langle M\rangle$, ma la chiusura di una varietà è un sottospazio, perciò $\operatorname{Span}\langle M\rangle \subset M^a$) dunque se M **è una varietà lineare**

$$M^{\perp\perp} = M^a$$

se poi Mt è un sottospazio $M^a = M$ e $M^{\perp\perp} = M$.
Notiamo, infine, che se risulta $M^{\perp\perp} = M$ allora M è un sottospazio perché l'ortogonale di un qualsiasi insieme è un sottospazio (proposizione (ii) del teorema precedente). Concludiamo con il seguente teorema riassuntivo:

Teorema II.11 (proprietà dell'ortocomplemento in uno spazio di Hilbert)

Se $M \subset \mathcal{H}$, spazio di Hilbert, allora risulta

(i) $\operatorname{Span}\langle M\rangle^{\perp\perp} = M^{\perp\perp} = \operatorname{Span}\langle M\rangle$;

(ii) *se M è una varietà lineare allora $M^{\perp\perp} = M^a$;*

(iii) *M è un sottospazio se e solo se $M = M^{\perp\perp}$.*

II.2.3 Il teorema della proiezione

Continuiamo a lavorare in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ e consideriamo un sottospazio $W \subset \mathcal{H}$. Come sappiamo anche $W^{\perp}$ è un sottospazio, ma c'è di più $\mathcal{H}$ si ottiene come somma diretta di W e di $W^{\perp}$, cioè ogni sottospazio di uno spazio di Hilbert ammette un supplementare canonico. Vale cioè il

Teorema II.12 (della proiezione) *Sia W un sottospazio di $\mathcal{H}$ spazio di Hilbert, allora*

$$\mathcal{H} = W \oplus W^{\perp}.$$

Dimostrazione Chiamiamo $S \equiv W \oplus W^{\perp}$. In primo luogo, mostriamo che si tratta di un sottospazio di $\mathcal{H}$. Il fatto che sia una varietà lineare è ovvio. Vediamo che è chiusa. Sia $\{x_n\} \subset S$ convergente a $x \in \mathcal{H}$. Essa definisce allora due successioni $\{w_n\} \subset W$ e $\{w'_n\} \subset W^{\perp}$ tali che, per ogni intero n, sia

$$x_n = w_n + w'_n.$$

Ora, usando il teorema di Pitagora

$$\|x_n - x_m\|^2 = \|(w_n - w_m) + (w'_n - w'_m)\|^2 = \|w_n - w_m\|^2 + \|w'_n - w'_m\|^2$$

Ne deriva che, siccome $\{x_n\}$ è di Cauchy, sono di Cauchy anche $\{w_n\}$ e $\{w'_n\}$. Dunque, essendo W e $W^{\perp}$ chiusi e perciò completi (dalla completezza di $\mathcal{H}$), si ha che esistono

$$\begin{aligned} W &\ni w = \lim_{n\to\infty} w_n \\ W^{\perp} &\ni w' = \lim_{n\to\infty} w'_n \end{aligned}$$

di modo che, per unicità del limite e per continuità della somma,

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (w_n + w'_n) = w + w'$$

perciò $x \in S$.

Adesso, $W \subset S$ e $W^{\perp} \subset S$, da cui, passando all'ortogonale

$$S^{\perp} \subset W^{\perp},\ S^{\perp} \subset W^{\perp\perp} = W$$

ne consegue che

$$S^{\perp} \subset W \cap W^{\perp} = \{0\}$$

dunque $S^{\perp} = \{0\}$ e passando nuovamente all'ortogonale, essendo S un sottospazio,

$$S = S^{\perp\perp} = \{0\}^{\perp} = \mathcal{H}$$

(c.v.d.) cioè $W \oplus W^{\perp} = \mathcal{H}$.

Unicità della decomposizione In forza del teorema, ogni vettore x di $\mathcal{H}$ si decompone nella somma $x = w + w'$ con $w \in W$ e $w' \in W^{\perp}$. La decomposizione è unica, siano $u \in W$ e $u' \in W^{\perp}$ tali che $x = u + u'$, allora, sottraendo membro a membro si ha $0 = (w - u) + (w' - u')$, da cui $v = w - u \in W$ e $v' = w' - u' \in W^{\perp}$ sono linearmente dipendenti, perciò $v, v' \in W \cap W^{\perp}$ e, infine, $v = v' = 0$.

Operatori di proiezione L'unicità della decomposizione comporta la possibilità di associare a ogni sottospazio W la mappa

$$\text{se } x = w + w',\ w \in W,\ w' \in W^{\perp} \Rightarrow \begin{array}{rccc} P_W: & \mathcal{H} & \to & \mathcal{H} \\ & x & \mapsto & w \end{array}$$

Si ha subito che P_W è lineare, perciò prende il nome di **operatore di proiezione ortogonale** (o proiettore) su W.

Proprietà di P_W Vediamo le proprietà più semplici di P_W. Ogni vettore di $\mathcal{H}$ viene mandato in un vettore di W, e ogni vettore di W viene mandato in sé, sicché

$$\begin{aligned} R(P_W) &= W \\ P_W|_W &= \mathbb{I}_W \end{aligned}$$

dove R denota l'immagine dell'applicazione (o **range**), mentre con $\mathbb{I}$ intendiamo l'applicazione identica.
Ogni vettore di $W^\perp$ viene mandato in 0, siccome tutti gli altri vettori sono mandati in sé, si ha

$$\ker(P_W) = W^\perp$$

Infine, si ha che P_W è idempotente: $P_W^2 = P_W$ e che

$$P_W + P_{W^\perp} = \mathbb{I}$$

L'ultima proprietà che rileviamo è legata direttamente (a differenza delle precedenti) all'ortogonalità. Vogliamo cioè dimostrare che

$$\{x \in \mathcal{H} \,|P_W x = x\} = \{x \in \mathcal{H} \,|\|P_W x\| = \|x\|\}$$

Una inclusione è ovvia. Sia ora x nel secondo insieme, allora, per ipotesi

$$\|P_W(w + w')\|^2 = \|w + w'\|^2 = \|w\|^2 + \|w'\|^2$$

ma

$$\|P_W(w + w')\|^2 = \|w\|^2$$

sicché $\|w'\|^2 = 0$ e $w' = 0$ e $x = w \in W$. In definitiva

$$R(P_W) = \{x \in \mathcal{H} \,|P_W x = x\} = \{x \in \mathcal{H} \,|\|P_W x\| = \|x\|\}$$

Sia $x \in \mathcal{H}$ e sia W un sottospazio di $\mathcal{H}$. Allora esiste ed è unico $w = P_W x$. Notiamo che ovviamente $x - P_W x = w'$ è ortogonale a W e che, per il lemma II.3, $d(x, W) = \|x - P_W x\|$.

II.2.4 Sistemi ortonormali

Introduciamo la naturale

Definizione II.10 *In uno spazio prehilbertiano H, si chiama sistema ortonormale (brevemente s.o.n.) un sottoinsieme non vuoto di H i cui elementi siano tali che*

$$(x, x') = \delta_{x,x'} \equiv \begin{cases} 1, & x = x' \\ 0, & x \neq x' \end{cases}$$

Come abbiamo già mostrato nella proposizione II.2 ogni s.o.n. è **libero**, cioè linearmente indipendente.

Separabilità e s.o.n. Ricordiamo che uno spazio topologico X è separabile se esiste un sottoinsieme $A \subset X$ tale che

(i) $A^a = X$, cioè A è denso in X;

(ii) A è numerabile.

Ad esempio $\mathbb{R}$ è separabile per il teorema di densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Negli spazi di Hilbert si ha

Proposizione II.5 *Se H è separabile ogni suo s.o.n. è al più numerabile.*

Dimostrazione Sia M un s.o.n. di H, allora se $x \neq x'$ vale

$$\|x - x'\|^2 = \|x\|^2 + \|x'\|^2 = (x, x) + (x', x') = 2 \Rightarrow \|x - x'\| = \sqrt{2}$$

Sia ora A un sottoinsieme denso e numerabile di H e x, x' una coppia di elementi di M. Fissato $\varepsilon > 0$ esistono $u_x, u_{x'} \in A$ tali che

$$\|u_x - x\| < \varepsilon \;\; \|u_{x'} - x'\| < \varepsilon$$

allora

$$\|x - x'\| = \|x - u_x + u_{x'} - x' + u_x - u_{x'}\| < 2\varepsilon + \|u_x - u_{x'}\|$$

se ne deduce che

$$\|u_x - u_{x'}\| > \sqrt{2} - 2\varepsilon$$

Scegliamo $\varepsilon = \sqrt{2}/3$ di modo che $\|u_x - u_{x'}\| > 0$ e cioè $u_x \neq u_{x'}$. Stabiliamo allora una corrispondenza iniettiva tra M e A ($x \mapsto u_x$), il che comporta che la cardinalità di M è al più quella di A, cioè M è al più numerabile. **(c.v.d.)**

D'ora in avanti considereremo solo **spazi separabili**, salvo avviso contrario. Ciò detto ogni s.o.n. sarà d'ora in avanti indicizzato sugli interi, perciò $M = \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o, se il s.o.n. è finito, $M = \{u_n\}_{n\in J_N}$.
Prima di proseguire dimostriamo il seguente

Teorema II.13 (di Gram-Schmidt) *In uno spazio di prodotto scalare, dato un sistema finito o numerabile, $\{x_n\}$, linearmente indipendente, è sempre possibile costruire un sistema $\{e_n\}$ ortonormale di vettori costituiti da combinazioni lineari dei vettori di partenza e avente la stessa cardinalità di $\{x_n\}$.*

Dimostrazione Certamente $x_1 \neq 0$, perciò definiamo i due seguenti set di vettori

$$\begin{array}{lcllcl}
y_1 & \equiv & x_1, & e_1 & \equiv & y_1/\|y_1\| \\
y_2 & \equiv & x_2 - (e_1, x_2)\, e_1, & e_2 & \equiv & y_2/\|y_2\| \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
y_{n+1} & \equiv & x_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} (e_j, x_{n+1})\, e_j, & e_{n+1} & \equiv & y_{n+1}/\|y_{n+1}\| \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Il processo ha un termine solo se il sistema $\{x_n\}$ è finito. In ogni caso, si noti come ciascun y_n è combinazione lineare dei primi n vettori, sicché il sistema $\{y_n\}$ è linearmente indipendente e il sistema $\{e_n\}$ è ben definito. Si ha perciò che il sistema $\{e_n\}$ è indipendente e che per ogni N

$$\mathcal{V}\{e_n\}_{n\leq N} = \mathcal{V}\{x_n\}_{n\leq N}$$

I vettori e_n hanno norma 1. Proviamo per induzione che i vettori y_n sono tutti ortogonali a $y_1 = x_1$ e perciò che gli e_n formano un sistema ortonormale:

$$(x_1, y_2) = (x_1, x_2) - (e_1, x_2)(x_1, e_1) = (x_1, x_2) - \frac{(x_1, x_1)}{\|x_1\|^2}(x_1, x_2) = 0$$

supposto y_1 ortogonale a tutti i vettori y_j (e perciò e_j) con $1 < j \leq n$, abbiamo

$$\begin{aligned}
(x_1, y_{n+1}) &= \left(x_1, x_{n+1} - \sum_{j=1}^{n}(e_j, x_{n+1})\, e_j\right) = (x_1, x_{n+1}) - (e_1, x_{n+1})(x_1, e_1) = \\
&= (x_1, x_{n+1}) - \frac{(x_1, x_1)}{\|x_1\|^2}(x_1, x_{n+1}) = 0.
\end{aligned}$$

(c.v.d.)

II.2.5 Diseguaglianza di Bessel e identità di Parseval negli spazi prehilbertiani

Avvertenza In questa sottosezione ci occuperemo della serie di Fourier negli spazi prehilbertiani. Nella prossima sottosezione lavoreremo invece su spazi di Hilbert, semplificando e arricchendo la trattazione. Siccome ridimostreremo tutti i risultati che ci occorrono, questa sottosezione può anche essere saltata, almeno in prima lettura.
Avvertiamo inoltre che, ultimata questa sottosezione, abbandoneremo definitivamente gli spazi di prodotto scalare di modo da fissare l'ipotesi di completezza.

Proiezione ortogonale Negli spazi di Hilbert, abbiamo visto che la proiezione ortogonale di x sul sottospazio W è tale che

$$d(x, W) = \|x - P_W x\|$$

Vogliamo definire la proiezione ortogonale per varietà lineari in uno spazio prehilbertiano tenendo conto di quanto accade negli spazi di Hilbert:

Proposizione II.6 *Sia H uno spazio di prodotto scalare.*

(i) *Sia $x \in H$, e sia $r \equiv \{c + \lambda v \,|\lambda \in \mathbb{K}\}$, la retta affine per c parallela a $v \neq 0$, entrambi in H. Allora esiste ed è unico $a \in r$, tale che $\|x - a\| = d\,(x, r)$, tale punto è tale che $x - a \in V^{\perp}$.*

(ii) *$V \subset H$, sottospazio vettoriale. Sia $x \in H$, allora*

$$\|x - y\| = d\,(x, H)\,,\; y \in V \Leftrightarrow \|x - y\| \in V^{\perp}$$

se esiste y è unico e si dice proiezione ortogonale *di x su V.*

Dimostrazione Vediamo (i). Sia $a \in r$

$$\begin{aligned} 0 &= (x - a, v) \Leftrightarrow 0 = (x - c - \lambda v, v) \Leftrightarrow 0 = (x - c, v) - \lambda \|v\|^2 \Leftrightarrow \\ \lambda &= \frac{(x - c\,|v\,)}{\|v\|^2} \end{aligned}$$

da cui l'unicità di a. Il fatto che $d\,(x, a) \leq d\,(x, w)$ per ogni $w \in r$ si ha notando che $w = a + \alpha v$

$$d\,(x, w) = \|x - a - \alpha v\|^2 = \|(x - a) - \alpha v\|^2 = \|x - a\|^2 + \|\alpha v\|^2 \geq d\,(x, a)$$

Vediamo (ii). Sia $(x - y) \in V^{\perp}$ allora per ogni $v \in V$, $x - y$ è ortogonale a v, usando ancora Pitagora

$$\|x - (y + v)\|^2 = \|(x - y) + v\|^2 = \|x - y\|^2 + \|v\|^2$$

questa è minima se e solo se $\|v\|^2 = 0$, cioè se e solo se $v = 0$. Viceversa risulti $y \in V$ e $d\,(x, y) = d\,(x, V)$. Se y realizza la minima distanza da V, realizza la minima distanza da ogni sottoinsieme di V contenente y, ad esempio ciascuna retta affine per y parallela a $v \in V$, allora per quanto detto sopra $x - y$ è ortogonale a v. Dunque, $x - y \in V^{\perp}$. **(c.v.d.)**

Sia allora V un sottospazio di dimensione finita m, preso un sistema ortonormale di m vettori di V, allora la proiezione di x su V vale

$$P_V\,(x) = \sum_{k=1}^{m} (u_k, x)\, u_k$$

infatti $(x - P_V\,(x)) \in V^{\perp}$. Per vedere questo è sufficiente che il vettore x meno la sua proiezione è ortogonale a ciascun u_k (infatti il sistema è una base di V: è linearmente indipendente e ha cardinalità eguale alla dimensione di V). Abbiamo

$$(u_i, x - P_V\,(x)) = (u_i, x) - \sum_{k=1}^{m} (u_k, x)\,(u_k, u_i) = (u_i, x) - (u_i, x) = 0$$

Diseguaglianza di Bessel Consideriamo ora una famiglia numerabile di vettori ortonormali, $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Per ogni $m \in \mathbb{N}$, definiamo

$$V_m = \mathcal{V}\,\{u_i\}_{i \in J_m}$$

allora

$$P_{V_m}\,(x) = \sum_{k=1}^{m} (u_k, x)\, u_k \equiv p_m\,(x)$$

vale anche

$$\begin{aligned} \|x - p_m\,(x)\|^2 &= d^2\,(x, V_m) \geq 0 \\ \|x\|^2 &= \|x - p_m\|^2 + \|p_m\|^2 \end{aligned}$$

da cui si ottiene $\|p_m\|^2 \leq \|x\|^2$ e

$$\|x\|^2 \geq \|p_m\|^2 = \sum_{k=1}^{m} |(u_k, x)|^2$$

passando al limite per $m \to \infty$, si ottiene la **diseguaglianza di Bessel**

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(u_k, x)|^2 \leq \|x\|^2$$

Identità di Parseval Adesso mostreremo quando vale l'eguaglianza (**identità di Parseval**). Sia W la varietà lineare generata da un s.o.n. $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ in H. Allora, definiti gli spazi V_m come gli spazi generati dai primi m vettori del s.o.n., si ha

$$W = \mathcal{V}\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}} = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$$

dimostriamo che nella diseguaglianza di Bessel vale l'eguaglianza se e solo se x appartiene alla chiusura di W, cioè al sottospazio generato dal s.o.n..
Dalla diseguaglianza di Bessel si ha che la serie è limitata e a termini positivi, perciò convergente. Altre considerazioni. $V_m \subset V_{m+1}$, perciò la successione $\{d(x, V_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ è decrescente e ammette limite nel suo estremo inferiore che è maggiore o eguale a 0. Vediamo che

$$\xi \equiv \inf_{m\in\mathbb{N}} d(x, V_m) = d(x, W),$$

infatti, per ogni m, $d(x, V_m) \leq d(x, W)$ per cui $\xi \leq d(x, W)$. Ora, fissiamo $\varepsilon > 0$, troviamo un $\bar{m}$ per cui

$$\xi + \frac{\varepsilon}{2} > d(x, V_{\bar{m}})$$

ma esiste $v \in V_{\bar{m}} \subset W$ per cui

$$d(x, V_{\bar{m}}) > d(x, v) - \frac{\varepsilon}{2}$$

infine, per ogni ε si trova $v \in W$ talché

$$\xi + \varepsilon > d(x, v)$$

la tesi. Si ha perciò che

$$d(x, W) = \lim_{m\to\infty} d(x, V_m)$$

D'altra parte,

Lemma II.4 *Se $W \subset X$ spazio metrico si ha che*

(i) $d(x, W) = d(x, W^a)$;

(ii) *se W è chiuso, $x \in W$ se e solo se $d(x, W) = 0$.*

Dimostrazione $W \subset W^a$ perciò $d(x, W) \geq d(x, W^a)$. D'altra parte, per ogni $z \in W^a$ e $y \in W$

$$d(x, W) \leq d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$$

ma fissato $\varepsilon > 0$ esiste $y \in W$ tale che $d(y, z) < \varepsilon$, per cui, per ogni z

$$d(x, W) - \varepsilon < d(x, z)$$

per massimalità dell'inf

$$d(x, W) < d(x, W^a) + \varepsilon \Rightarrow d(x, W) \leq d(x, W^a).$$

Vediamo (ii). $x \in W$ se e solo se esiste $\{x_n\} \subset W$ con $x_n \to x$, siccome d è continua

$$\lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0$$

cioè per ogni ε esiste un punto $x_\nu \in W$ tale che

$$d(x, x_\nu) < \varepsilon$$

da cui

$$\inf_{w\in W} d(x, w) = 0.$$

(c.v.d.)

Per il lemma $x \in W^a$ se e solo se $d(x, W^a) = 0$ (essendo W^a chiuso), cioè se e solo se $d(x, W^a) = d(x, W) = \lim_{m\to\infty} d(x, V_m) = 0$, cioè se e solo se

$$\lim_{m\to\infty} \|x - p_m(x)\| = 0 \Leftrightarrow x = \lim_{m\to\infty} p_m(x)$$

cioè

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (u_k, x)\, u_k$$

Ancora, $x \in W^a$ se e solo se $\lim_{m\to\infty} d^2(x, V_m) = 0$, se e solo se

$$\lim_{m\to\infty} \|x - p_m(x)\|^2 = 0$$

ma $\|x - p_m(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_m(x)\|^2$, perciò, il tutto vale se e solo se

$$\|x\|^2 - \lim_{m\to\infty} \|p_m(x)\|^2 = 0$$

infine, essendo

$$\lim_{m\to\infty} \|p_m(x)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(u_k, x)|^2$$

$x \in W^a$ se e solo se

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(u_k, x)|^2$$

Abbiamo quindi dimostrato i seguenti

Teorema II.14 (diseguaglianza di Bessel) *Sia $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un sistema ortonormale nello spazio prehilbertiano H, allora vale la disuguaglianza di Bessel*

$$\|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} |(u_k, x)|^2$$

Teorema II.15 (identità di Parseval) *Sia $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un sistema ortonormale nello spazio prehilbertiano H. Vale l'identità di Parseval se e solo se x appartiene alla chiusura dello spazio generato dal sistema ortonormale:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(u_k, x)|^2 = \|x\|^2 \Leftrightarrow\ x \in \overline{\operatorname{Span}\langle u_k\rangle_{k\in\mathbb{N}}}$$

Inoltre

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (u_k, x)\, u_k \Leftrightarrow\ x \in \overline{\operatorname{Span}\langle u_k\rangle_{k\in\mathbb{N}}}$$

Chiudiamo ricordando che i numeri $\{(x, u_k)\}$sono chiamati **coefficienti di Fourier** di x relativi al s.o.n. $\{u_k\}$. La serie di cui nell'identità di Parseval,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x, u_k)\, u_k$$

è la serie di Fourier, e si ha che un elemento di H è sviluppabile in serie di Fourier del s.o.n. $\{u_k\}$ (i.e. la sua serie di Fourier converge a esso nella norma indotta dal prodotto scalare) se e solo se esso appartiene al sottospazio generato dal s.o.n. $\{u_k\}$.

II.2.6 Diseguaglianza di Bessel e identità di Parseval negli spazi di Hilbert

Torniamo a considerare le proprietà dei s.o.n. negli spazi di Hilbert. Vale il seguente

Teorema II.16 (diseguaglianza di Bessel)

Dato un s.o.n. $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *di* $\mathcal{H}$ *si ha*

$$\|x\|^2 \geq \sum_{k\in\mathbb{N}} |(u_k, x)|^2 , \ \forall x \in \mathcal{H}.$$

Dimostrazione Abbiamo che, usando anche il teorema di Pitagora (gli u_k sono ortonormali)

$$0 \leq \left\| x - \sum_{k=0}^{N} (u_k, x)\, u_k \right\|^2 = \|x\|^2 + \sum_{k=0}^{N} |(u_k, x)|^2 - 2\sum_{k=0}^{N} |(u_k, x)|^2$$

da cui la tesi, passando al limite per $N \to \infty$ (che esiste ed è reale essendo la successione delle somme parziali crescente e limitata superiormente). Siccome la serie è a termini positivi

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |(u_k, x)|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |(u_k, x)|^2 .$$

(c.v.d.)

Dalla diseguaglianza di Bessel si ricava che la successione dei coefficienti di Fourier di x appartiene a $\ell^2(\mathbb{C})$. Dimostriamo, infine, il seguente

Teorema II.17 (di Fischer-Riesz) *Dato uno spazio* $\mathcal{H}$ *di Hilbert, sia* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *un suo s.o.n. e sia* $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di scalari. Allora*

(i) *la serie*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} k_n u_n$$

converge se e solo se $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$;

(ii) *in caso di convergenza, posto*

$$x \equiv \sum_{n\in\mathbb{N}} k_n u_n$$

vale

$$k_n = (u_n, x)\,, \ \sum_{n\in\mathbb{N}} |k_n|^2 = \|x\|^2$$

Dimostrazione Se il s.o.n. ha cardinalità finita, la (i) è superflua e per la (ii)

$$(u_m, x) = \left(u_m, \sum_{n\in J_N} k_n u_n \right) = \sum_{n\in J_N} k_n\,(u_m, u_n) = k_m.$$

Sia ora il s.o.n. numerabile. Dimostriamo intanto la tesi per la serie ordinata come segue

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_n u_n$$

(l'ordinamento della serie dei moduli quadri di k_n è invece ininfluente, perché si tratta di una serie reale a termini positivi). Consideriamo la successione delle somme parziali s_n della serie di sopra. Il resto di Cauchy di s_n vale, se $m < n$

$$\|s_n - s_m\|^2 = \left\| \sum_{i=m+1}^{n} k_n u_n \right\|^2 = \sum_{i=m+1}^{n} |k_n|^2$$

la serie dei $|k_n|^2$ converge se e solo se è di Cauchy, se e solo se s_n è di Cauchy, se e solo se s_n converge (sia il campo scalare che $\mathcal{H}$ sono completi). In caso di convergenza, la (ii) discende dalla continuità del prodotto scalare

$$(u_m, x) = \left(u_m, \sum_{n=0}^{\infty} k_n u_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n\,(u_m, u_n) = k_m$$

Infine,

$$\|x\|^2 = \left(\sum_{m=0}^{\infty} k_m u_m, \sum_{n=0}^{\infty} k_n u_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} k_n \overline{k_m}\,(u_m, u_n) = \sum_{n=0}^{\infty} |k_n|^2\,.$$

Vogliamo ora vedere che per ogni biiezione $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_n u_n = \sum_{n=0}^{\infty} k_{\sigma(n)} u_{\sigma(n)}$$

Notiamo che ambedue convergono se ne converge una (poiché la serie dei $|k_n|^2$ è eguale a quella dei $\left|k_{\sigma(n)}\right|^2$). Sia x la somma della prima serie, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero ν_ε tale che, se $m \geq \nu_\varepsilon$, vale

$$\left\|x - \sum_{n=0}^{m} k_n u_n\right\| < \varepsilon$$

ma, allora,

$$\left\|x - \sum_{n=0}^{m} k_n u_n\right\|^2 = \left\|\sum_{n=m+1}^{\infty} k_n u_n\right\|^2 = \sum_{n=m+1}^{\infty} |k_n|^2 < \varepsilon^2$$

Se prendiamo $N \in \mathbb{N}$ per cui $\sigma(k) \geq \nu_\varepsilon$ se $k \geq N$ (gli indici minori ν_ε sono finiti) allora

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \left|k_{\sigma(n)}\right|^2 \leq \sum_{n=\nu_\varepsilon+1}^{\infty} |k_n|^2 < \varepsilon^2$$

visto che la prima serie contiene meno termini positivi della seconda e tutti quelli nella prima sono nella seconda. Allora siccome anche la serie degli $k_{\sigma(n)} u_{\sigma(n)}$ converge, si ha

$$\left\|x - \sum_{n=0}^{N} k_{\sigma(n)} u_{\sigma(n)}\right\| < \varepsilon$$

(c.v.d.) e perciò si ha la tesi.

L'identità di Parseval

Consideriamo ancora uno spazio di Hilbert e un suo s.o.n. $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Prendiamo ora $x \in \mathcal{H}$ e costruiamo la successione dei suoi coefficienti di Fourier $k_n = (u_n, x)$. Per la diseguaglianza di Bessel essa è ℓ^2, perciò, per il teorema di Fischer-Riesz esiste $y \in \mathcal{H}$ tale che

$$y = \sum_{n\in\mathbb{N}} (u_n, x)\, u_n$$

Sempre dal teorema di Fischer-Riesz abbiamo

$$(u_n, y) = (u_n, x)\ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

cioè

$$(u_n, y - x) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$$

da cui

$$y - x \in \{u_n\}^{\perp} = (\mathcal{V}\{u_n\})^{\perp} = \mathrm{Span}\,\langle u_n\rangle^{\perp}$$

Ora, $y \in \mathrm{Span}\,\langle u_n\rangle$ esistendo una successione a valori in $\mathcal{V}\{u_n\}$ che converge a y. Perciò se scegliamo $x \in \mathrm{Span}\,\langle u_n\rangle$, troviamo

$$y - x \in \mathrm{Span}\,\langle u_n\rangle^{\perp} \cap \mathrm{Span}\,\langle u_n\rangle = \{0\}$$

cioè $y = x$. Viceversa se

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} (u_n, x)\, u_n$$

allora $x \in \mathrm{Span}\,\langle u_n\rangle^{\perp}$. Abbiamo così dimostrato il seguente

Teorema II.18 (identità di Parseval)

Dato uno spazio $\mathcal{H}$ di Hilbert, sia $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un suo s.o.n. allora

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} (u_n, x)\, u_n \Leftrightarrow x \in \overline{\mathrm{Span}\,\langle u_n\rangle}$$

$$\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |(u_n, x)|^2 \Leftrightarrow x \in \overline{\mathrm{Span}\,\langle u_n\rangle}$$

II.2.7 Sistemi ortonormali completi

Riconsideriamo il teorema di Parseval, se $\overline{\mathrm{Span}\,\langle u_n\rangle} = \mathcal{H}$ allora per ogni $x \in \mathcal{H}$

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} (u_n, x)\, u_n$$

I s.o.n. che godono della proprietà di generare $\mathcal{H}$ si dicono **completi**. Tuttavia è preferibile introdurre i sistemi completi tramite la seguente

Definizione II.11 *Dato uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, un s.o.n. di $\mathcal{H}$ si dice completo se non è sottoinsieme proprio di alcun altro s.o.n. di $\mathcal{H}$.*

Vale allora il

Teorema II.19 *Dato uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, sia $\{u_n\}$ un suo s.o.n., allora i seguenti fatti sono equivalenti*

(i) *$\{u_n\}$ è completo;*

(ii) *$(u_n, x) = 0$ se e solo se $x = 0$;*

(iii) *$\overline{\mathrm{Span}\,\langle u_n\rangle} = \mathcal{H}$, i.e. lo spazio delle combinazioni lineari finite di vettori del s.o.n. è denso in $\mathcal{H}$;*

(iv) *per ogni $x \in \mathcal{H}$ vale*

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} (u_n, x)\, u_n;$$

(v) *per ogni $x, x' \in \mathcal{H}$ risulta*

$$(x, x') = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x, u_n)\, (u_n, x');$$

(vi) *per ogni $x \in \mathcal{H}$ vale l'identità di Parseval*

$$\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |(u_n, x)|^2 .$$

Dimostrazione Vediamo che (i) $\Rightarrow$ (ii). Per assurdo, se (ii) non fosse vera, esisterebbe $0 \neq x_0 \in \mathcal{H}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $(u_n, x_0) = 0$. Consideriamo allora $v_0 \equiv x_0/\|x_0\|$, l'insieme $\{v_0\} \cup \{u_n\}$ è un s.o.n. che contiene $\{u_n\}$ ed essendo $(u_n, v_0) \neq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'inclusione è propria: assurdo.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). La (ii) significa che $\{u_n\}^\perp = \overline{\mathrm{Span}\,\langle u_n\rangle}^\perp = \{0\}$, passando di nuovo all'ortogonale abbiamo $\overline{\mathrm{Span}\,\langle u_n\rangle} = \overline{\mathrm{Span}\,\langle u_n\rangle}^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = \mathcal{H}$.

Il fatto che (iii) $\Rightarrow$ (iv) discende dal teorema sull'identità di Parseval.

(iv) $\Rightarrow$ (v). Abbiamo

$$(x, x') = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} (u_n, x)\, u_n, \sum_{m\in\mathbb{N}} (u_m, x')\, u_m \right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{N}} (x, u_n)\, (u_m, x')\, \delta_{nm} = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x, u_n)\, (u_n, x')$$

(v) $\Rightarrow$ (vi) sostituendo a x', x.

(vi) $\Rightarrow$ (i), procediamo per assurdo. Esiste allora almeno un vettore v_0 di norma 1 ortogonale a tutti i vettori u_n, applichiamo a questo l'identità di Parseval

$$1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |(u_n, v_0)| = \sum_{n\in\mathbb{N}} 0 = 0$$

(c.v.d.) assurdo.

Separabilità e s.o.n.c. Adesso si pone il problema di mostrare (eventualmente sotto certe ipotesi) che i s.o.n.c. esistono. Un'altra questione sui s.o.n.c. è data dalla loro cardinalità.

Teorema II.20 *Uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ è separabile se e solo se ammette un s.o.n.c.$\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ In questo caso,*

(i) *la cardinalità del s.o.n.c. è finita se e solo se la dimensione di $\mathcal{H}$ è finita e vale*

$$\dim \mathcal{H} = \#\Lambda;$$

(ii) *se la dimensione di $\mathcal{H}$ non è finita, allora la cardinalità di ogni suo s.o.n.c. è eguale alla potenza del numerabile.*

Dimostrazione ($\Rightarrow$) Infatti, sia $\{u_n\}$ un s.o.n.c. in $\mathcal{H}$, l'insieme $\mathcal{V}\{u_n\}$ delle combinazioni lineari finite degli u_n è denso in $\mathcal{H}$, d'altra parte l'insieme F delle combinazioni lineari finite degli u_n a coefficienti razionali (con parte reale e immaginaria razionali) è denso in $\mathcal{V}\{u_n\}$ ed è numerabile. In definitiva $\mathcal{H}$ è separabile.

($\Leftarrow$) Sia $\mathcal{H}$ separabile, allora esiste A numerabile e denso in $\mathcal{H}$. Poniamo perciò $A = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Da A possiamo ottenere un sottoinsieme O (di cardinalità al più numerabile) formato da elementi ortonormali O si ottiene esaminando successivamente gli elementi $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ e selezionando quelli indipendenti e, quindi, ortonormalizzando alla Gram-Schmidt. Ne abbiamo che $\mathcal{V}O = \mathcal{V}A$, ma A è denso in $\mathcal{H}$, perciò Span $\langle A\rangle = (\mathcal{V}A)^a = \mathcal{H}$. Chiudendo, Span $\langle O\rangle =$ Span $\langle A\rangle = \mathcal{H}$.

Veniamo all'asserto sulla cardinalità del s.o.n.c. Come sappiamo essa è al più pari alla potenza del numerabile. Se $\dim\mathcal{H}$ è finita allora esistono al più $\dim\mathcal{H}$ vettori indipendenti e perciò $\#O$ è finita. Dal punto (iv) si ha poi che gli elementi di O generano $\mathcal{H}$ e perciò O è una base di $\mathcal{H}$ e dunque

$$\#O = \dim\mathcal{H}.$$

Se viceversa la cardinalità di O è finita anche la dimensione di O è finita, essendo O una base per $\mathcal{H}$. Sia ora $\dim\mathcal{H}$ non finita. La cardinalità di O non può superare la potenza del numerabile, ma non può neppure essere finita, altrimenti avremmo $\dim\mathcal{H}$ finita. Ne concludiamo che la cardinalità di O deve avere la potenza del numerabile. **(c.v.d.)**

In dimensione finita tutti gli spazi di Hilbert sono separabili.

S.o.n.c. e basi Nell'ambiente hilbertiano finito-dimensionale, cardinalità (comune a tutti) dei s.o.n.c. e dimensione coincidono. Nell'ambito infinito-dimensionale, si ha che la cardinalità (comune) dei s.o.n.c. diviene numerabile, mentre non è semplice capire cosa avviene della dimensione (cardinalità comune a tutte le **basi** dello spazio). Si potrebbe dimostrare che in queste condizioni la dimensione di $\mathcal{H}$ diviene almeno pari alla potenza del continuo, ma a noi il concetto di base non interesserà nel caso infinito-dimensionale. D'ora in poi parlando di dimensione conveniamo di riferirci sempre alla **dimensione ortogonale**, cioè alla cardinalità comune di tutti i s.o.n.c.

Prima di concludere un

Esempio II.8 Consideriamo nello spazio ℓ^2 l'insieme di vettori e_n tali che

$$e_n = \left\{e_j^{(n)}\right\}_{j\in\mathbb{N}_0}, \quad e_j^{(n)} \equiv \delta_{j,n}$$

Il set dato è evidentemente ortonormale. Vediamo se è completo. Sia allora $x \in \ell^2$ talché, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$0 = (e_n, x_0) = \sum_{j=1}^{\infty} e_j^{(n)} x_j = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{j,n} x_j = x_n$$

da cui $x = 0$. Il set standard $\{e_n\}$ è completo in ℓ^2. ▪

II.3 Serie di Fourier in L^2 sugli intervalli reali

In questa sezione facciamo una digressione per applicare quanto appreso allo spazio di Hilbert $L^2(I, \mathrm{m}) \equiv L^2(I)$, cioè lo spazio delle funzioni Lebesgue-L^2 definite su un intervallo reale limitato e chiuso, a valori in $\mathbb{C}$.. Vogliamo determinare un sistema completo di $L^2(I)$ e mostrare, dunque, che quest'ultimo è separabile.
A questo scopo ci occorrono alcuni risultati preliminari. Avvertiamo che la prenderemo un po' alla larga!

II.3.1 Il teorema di approssimazione polinomiale di Weierstraß

Cominciamo col dimostrare il seguente

Teorema II.21 (dell'approssimazione polinomiale) *Sia f una funzione a valori reali (o complessi) continua e definita sull'intervallo chiuso $[0, 1]$. Allora esiste una successione di polinomi P_n che converge uniformemente a f. Possiamo costruire P_n nel modo seguente*

$$P_n(t) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} f\left(\frac{p}{n}\right) x^p (1-x)^{n-p}$$

Dimostrazione Differenziando rispetto a x

$$(x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p y^{n-p}$$

e moltiplicando quanto si ottiene per x si ricava

$$nx(x+y)^{n-1} = \sum_{p=0}^{n} p \binom{n}{p} x^p y^{n-p},$$

analogamente differenziando due volte e moltiplicando per x^2 si ha

$$n(n-1)x^2(x+y)^{n-1} = \sum_{p=0}^{n} p(p-1) \binom{n}{p} x^p y^{n-p}.$$

Posto $y \equiv 1-x$ e

$$r_p(x) \equiv \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p},$$

abbiamo

$$\sum_{p=0}^{n} r_p(x) = 1, \quad \sum_{p=0}^{n} p r_p(x) = nx, \quad \sum_{p=0}^{n} p(p-1) r_p(x) = n(n-1)x^2,$$

Ne consegue che

$$\sum_{p=0}^{n} (p-nx)^2 r_p(x) = n^2x^2(1) - 2nx(nx) + \sum_{p=0}^{n} p^2 r_p(x)$$

ora,

$$\sum_{p=0}^{n} p^2 r_p(x) = \sum_{p=0}^{n} p(p-1) r_p(x) + \sum_{p=0}^{n} p r_p(x) = n(n-1)x^2 + nx$$

da cui

$$\sum_{p=0}^{n} (p-nx)^2 r_p(x) = nx(1-x).$$

Dal teorema di Weierstraß possiamo assumere $|f(x)| \leq M \in \mathbb{R}$. Dall'uniforme continuità di f, esiste, per ogni $\varepsilon > 0$, $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon, \text{ se } |x - x'| < \delta,\ x, x' \in [0,1]$$

Ora,

$$\begin{aligned}\left| f(x) - \sum_{p=0}^{n} f\left(\frac{p}{n}\right) r_p(x) \right| &= \left| \sum_{p=0}^{n} \left[f(x) - f\left(\frac{p}{n}\right) \right] r_p(x) \right| \leq \sum_{|p-nx|\leq\delta n} \left| f(x) - f\left(\frac{p}{n}\right) \right| r_p(x) \\ &+ \sum_{|p-nx|>\delta n} \left| f(x) - f\left(\frac{p}{n}\right) \right| r_p(x)\end{aligned}$$

per il primo addendo, siccome $r_p(x) \geq 0$

$$\sum_{|p-nx|\leq\delta n} \left| f(x) - f\left(\frac{p}{n}\right) \right| r_p(x) \leq \varepsilon \sum_{p=0}^{n} r_p(x) = \varepsilon$$

per il secondo

$$\sum_{|p-nx|>\delta n} \left| f(x) - f\left(\frac{p}{n}\right) \right| r_p(x) = 2M \sum_{|p-nx|>\delta n} r_p(x)$$

d'altra parte si deve sommare per $p \leq n$

$$|p - nx| > \delta n \Rightarrow \left(\frac{p - nx}{\delta n} \right)^2 > 1$$

per cui

$$2M \sum_{|p-nx|>\delta n} r_p(x) \leq \frac{2M}{(\delta n)^2} \sum_{p=0}^{n} (p-nx)^2 r_p(x) = \frac{2M}{(\delta n)^2} nx(1-x) \leq \frac{2M}{\delta^2} \frac{1}{n}$$

(c.v.d.) la tesi.

II.3.2 Il teorema di Stone-Weierstraß

Teorema II.22 *Sia X uno spazio compatto e consideriamo l'insieme delle funzioni continue reali definite in esso $\mathcal{C}(X)$. Sia B un sottoinsieme di X tale che*

(i) *se $f, g \in B$ allora fg e $\alpha f + \beta g$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, appartengono a B;*

(ii) *la funzione costante 1 appartiene a B;*

(iii) *il limite uniforme di successioni di funzioni a valori in B appartiene a B.*

Allora $B = \mathcal{C}(X)$ se e solo se B separa *i punti di X, cioè se e solo se per ogni coppia di punti (s_1, s_2) di punti distinti di X, esiste una funzione $x \in B$ per cui $x(s_1) \neq x(s_2)$.*

Dimostrazione Se $B = \mathcal{C}(X)$, allora, presi i punti s_1 e s_2 la funzione

$$x(s) \equiv \frac{d(x, s_1)}{d(x, s_1) + d(x, s_2)}$$

è continua (poiché $s_1 \neq s_2$) e vale 0 in s_1 e 1 in s_2 (si tratta della versione negli spazi metrici del lemma di Urysohn).

Passiamo a dimostrare che la condizione è sufficiente. Dal teorema dell'approssimazione polinomiale abbiamo che esiste la successione di polinomi $\{P_n\}$ talché

$$||t| - P_n(t)| < \frac{1}{n}, \; -n \leq t \leq n$$

sicché

$$||f(s)| - P_n(f(s))| < \frac{1}{n}, \; -n \leq f(s) \leq n$$

Ora, $P_n(f)$, per (i), appartiene a B. D'altra parte, dal teorema di Weierstraß, funzioni continue su un compatto sono limitate, perciò, preso $n > \max_X |f(s)|$ si ha, definitivamente,

$$||f(s)| - P_n(f(s))| < \frac{1}{n}, \; \forall s \in X$$

Questo prova, grazie a (iii), che $|f| \in B$ se $f \in B$. Ne consegue che anche $f_1 \wedge f_2$ e $f_1 \vee f_2$ appartengono a B se $f_1, f_2 \in B$.

Sia $h(x) \in \mathcal{C}(X)$. Siano s_1 e s_2 due punti arbitrari distinti di X. Esiste allora $f_{s_1 s_2} \in B$ talché

$$f_{s_1 s_2}(s_1) = h(s_1) \;\text{ e }\; f_{s_1 s_2}(s_2) = h(s_2).$$

Infatti, per ipotesi esiste in B la funzione g che separa s_1 e s_2, cioè per cui $g(s_1) \neq g(s_2)$. Prendiamo allora $f_{s_1 s_2}(s) = \alpha g(s) + \beta$ con α, β determinati dalle condizioni

$$\begin{aligned} \alpha g(s_1) + \beta &= h(s_1) \\ \alpha g(s_2) + \beta &= h(s_2) \end{aligned}$$

Dati $\varepsilon > 0$ e $t \in X$, per ogni $s \in X$ esiste un intorno $U(s)$ di s in cui $f_{st}(u) > h(u) - \varepsilon$ per $u \in U(s)$, poiché la funzione $f_{st} - h$ è continua e vale 0 in s. Sia poi $\{U(s_i), i \leq n\}$, un ricoprimento finito di X compatto, definiamo

$$f_t = f_{s_1} \vee \ldots \vee f_{s_n}$$

perciò $f_t \in B$ e $f_t(u) > h(u) - \varepsilon$ per ogni $u \in X$. Abbiamo poi $f_{s_j t}(t) = h(t)$, da cui $f_t(t) = h(t)$. Di conseguenza, esiste un intorno $V(t)$ di t tale che $f_t(u) < h(u) + \varepsilon$ per $u \in V(t)$. Estratto di nuovo un ricoprimento finito $\{V(t_i), i \leq k\}$ di X, definita la funzione

$$f = f_{t_1} \wedge \ldots \wedge f_{t_k},$$

troviamo che $f \in B$ e, siccome $f_{t_i}(u) > h(u) - \varepsilon$ per ogni $u \in X$, $f(u) > h(u) - \varepsilon$, per ogni $u \in X$. Inoltre, per $u \in X$ troviamo $j \in J_k$ per cui $u \in V(t_j)$, dunque $f(u) \leq f_{t_j}(u) < h(u) + \varepsilon$. In definitiva, per ogni $h \in \mathcal{C}(X)$ esiste $f \in B$

$$|h(u) - f(u)| < \varepsilon, \; \forall u \in X$$

ne deriva che, scelto $\varepsilon = 1/n$, h è il limite uniforme di una successione di funzioni in B e perciò
(c.v.d.) $h \in B$.

Il teorema può essere esteso ai complessi in modo ovvio se, data una funzione $f \in B$ ci è possibile estrarne parte reale e parte immaginaria in B. In questo caso, queste ultime soddisfano le ipotesi del teorema di sopra e perciò appartengono a $\mathcal{C}(X)$, la loro combinazione $\operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$ appartiene a $\mathcal{C}(X)$. Affinché $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$ appartengono a B è sufficiente richiedere la condizione

$$f \in B \Rightarrow \bar{f} \in B.$$

Corollario II.1 *Sia X un compatto e $\mathcal{C}(X)$ l'insieme delle funzioni continue a valori complessi definite in X. Sia B un sottoinsieme di X tale che*

(i) *se $f, g \in B$ allora fg e $\alpha f + \beta g$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, appartengono a B;*

(ii) *la funzione costante 1 appartiene a B;*

(iii) *il limite uniforme di successioni di funzioni a valori in B appartiene a B.*

Allora $B = \mathcal{C}(X)$ se e solo se B separa X e per ogni $f \in B$ si ha $\bar{f} \in B$.

II.3.3 Il teorema di approssimazione trigonometrica di Weierstraß

Consideriamo il circolo unitario di $\mathbb{R}^2$, denotiamolo con X. Tale spazio è compatto perciò in esso vale il teorema di Stone-Weierstraß per le funzioni complesse, cioè nell'enunciato del corollario precedente. Sia $f \in \mathcal{C}(X)$, parametrizzato X mediante la coordinata angolo $\theta \in [0, 2\pi]$, $\mathcal{C}(X)$ diviene l'insieme delle funzioni continue su $[0, 2\pi]$ alle quali va aggiunta la condizione $f(0) = f(2\pi)$, per garantire la continuità nel punto singolare della parametrizzazione, $(1, 0)$.
Consideriamo allora l'insieme seguente

$$\mathcal{F} \equiv \left\{ e^{in\theta}, \theta \in [0, 2\pi] \,| n \in \mathbb{Z} \right\}$$

che si definisce **base di Fourier**. Posto B l'insieme delle funzioni ottenute come combinazioni lineari degli elementi di $\mathcal{F}$ unito con l'insieme delle funzioni che sono limite uniforme di tali combinazioni, si ha che $B = \mathcal{C}(X)$. In altre parole, vale il seguente

Teorema II.23 (dell'approssimazione trigonometrica) *Ogni funzione continua a valori complessi definita in $[0, 2\pi]$ tale da assumere eguale valore agli estremi dell'intervallo di definizione è approssimabile uniformemente da una successione di polinomi trigonometrici del tipo*

$$\sum_n c_n e^{in\theta}.$$

Ovviamente il teorema risulta verificato per f continua e fissa agli estremi di un qualunque intervallo $[a, a+T]$, stavolta però gli elementi di $\mathcal{F}$ hanno la forma

$$\exp\left(in\frac{2\pi}{T}t\right)$$

e posto $\omega \equiv 2\pi/T$ si ha

$$\mathcal{F}_T \equiv \left\{ e^{in\omega t}, t \in [a, a+T] \,| n \in \mathbb{Z} \right\}$$

avendo effettuato la sostituzione

$$\theta = \omega t.$$

II.3.4 Completezza della base di Fourier

Ortonormalità della base di Fourier Consideriamo un intervallo reale di lunghezza T e la relativa base di Fourier che ridefiniamo nel seguente modo

$$\mathcal{F}_T \equiv \left\{ \mathbf{e}_n = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{in\omega t}, t \in [a, a+T] \middle| n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Denotato con I l'intervallo in questione abbiamo che $L^2(I)$ è uno spazio di Hilbert per il teorema di completezza. Vogliamo dimostrare che la base di Fourier è un set ortonormale completo. Cominciamo a vedere che il sistema è ortonormale

$$(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m) = \int_a^{a+T} \frac{1}{\sqrt{T}} e^{in\omega t} \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-im\omega t}\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T e^{i(n-m)\omega t}\, dt$$

dove abbiamo cambiato gli estremi di integrazione grazie alla periodicità di $e^{ik\omega t}$, $k \equiv n - m$. Abbiamo

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{ik\omega t}\, dt = 1, \text{ se } k = 0$$

altrimenti

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{ik\omega t}\, dt = \frac{1}{T}\frac{1}{ik\omega}\left[e^{ik\omega t}\right]_0^T = 0$$

da cui

$$(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m) = \delta_{n,m}.$$

Densità dei polinomi trigonometrici in L^2

Per mostrare la completezza della base di Fourier dobbiamo vedere che l'insieme delle sue combinazioni lineari è denso in $L^2(I)$. Grazie al secondo teorema di Weierstraß dimostrato, ogni funzione continua è approssimabile uniformemente tramite polinomi trigonometrici; siccome la convergenza uniforme implica quella L^2, troviamo che, **in norma** L^2, l'insieme delle combinazioni lineari finite degli elementi della base di Fourier, cioè l'insieme dei polinomi trigonometrici, è denso nelle funzioni continue sul circolo. Non è difficile vedere che queste ultime sono dense in $\mathcal{C}(I)$. Per quanto abbiamo visto nel capitolo I, abbiamo che le funzioni $\mathcal{C}(I)$ sono dense in $L^2(I)$ e questo completa la dimostrazione del teorema di Fourier. Nondimeno possiamo dimostrare il lemma di densità nel caso reale per la misura di Lebesgue in maniera autonoma (e lasciamo questa istruttiva alternativa al lettore che non si sia soffermato sul primo capitolo).

Teorema II.24 (completezza della base di Fourier)

In $L^2(I)$, il set dei caratteri

$$\mathbf{e}_n \equiv \frac{1}{\sqrt{T}} e^{in\omega t},\ t \in [a, a+T], \quad n \in \mathbb{Z}$$

è ortonormale completo.

Dimostrazione

L'abbiamo praticamente già fatta. L'insieme dei polinomi trigonometrici è denso sulle funzioni continue sul circolo. Queste però sono banalmente dense (in norma L^2) su $\mathcal{C}(I)$. Basta scegliere un valore eguale agli estremi e unire ripidamente, con un segmento, la funzione all'estremo fissato in modo da avere un errore piccolo in norma integrale. D'altra parte $\mathcal{C}(I)$, per il lemma di densità, è denso in $L^2(I)$. Allora l'insieme delle combinazioni lineari finite dei caratteri ortonormali $\mathbf{e}_n$ è denso in $L^2(I)$ e perciò $\{\mathbf{e}_n\}$ è un set ortonormale completo. **(c.v.d.)**

Siccome ogni funzione $L^2(I)$ può ora essere approssimata con la troncata della sua serie di Fourier che è somma finita di funzioni differenziabili quante volte si vuole troviamo il

Corollario II.2 *$\mathcal{C}^k(I)$, $k \leq \infty$, è denso in $L^2(I)$.*

Un altra conseguenza del lemma di densità è data dal seguente

Esempio II.9 L'insieme $\{1, t, t^2, \ldots\}$ è un insieme completo (non ortonormale) di $L^2(I)$. Dal teorema di Weierstraß sull'approssimazione polinomiale, ogni funzione è approssimabile in norma sup, e perciò L^2, con una successione di polinomi, ma $\mathcal{C}(I)$ è denso in $L^2(I)$, perciò il set è completo. ▪

II.3.5 Dimostrazione autonoma del lemma di densità

Vogliamo dimostrare che $\mathcal{C}(I)$ è denso in L^2. Quest'ultimo aspetto non è semplice e lo otterremo attraverso la dimostrazione dei seguenti risultati:

(i) le funzioni a scalino sono dense in L^1;

(ii) le funzioni L^2 possono essere approssimate (in norma L^2) con funzioni limitate;

(iii) le funzioni a scalino sono dense in L^2;

(iv) le funzioni a scalino possono essere approssimate (in norma L^2) con funzioni continue.

Ammettiamo di sapere i fatti (iii) e (iv), allora, data una funzione $f \in L^2(I)$ e fissato lo standard $\varepsilon > 0$, troviamo una funzione a scalino φ che dista da f per meno di $\varepsilon/2$ e una continua g che dista da φ per meno di $\varepsilon/2$, allora

$$\|f - g\| \leq \|f - \varphi\| + \|\varphi - g\| < \varepsilon$$

da cui conseguirebbe il seguente

Lemma II.5 (di densità) *L'insieme $\mathcal{C}(I)$ delle funzioni continue definite sul compatto I è denso su $L^2(I)$.*

Dimostrazione

La dimostrazione verrà fatta passo per passo nel corso della sottosezione, secondo il programma specificato nell'elenco di sopra. **(c.v.d.)**

Cominciamo dal risultato più complicato e teoricamente rilevante, la densità delle funzioni a scalino in $L^1(I)$. Per questo risultato dobbiamo sfruttare la definizione di misurabilità di un insieme e di integrale di Lebesgue.

Lemma II.6 *Per ogni $f \in L^1$ a dominio limitato in $\mathbb{R}^n$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione φ a scalino e a supporto compatto a valori in $\mathbb{C}$ tale che*

$$\|f - \varphi\|_{L^1} = \int |f - \varphi| \, d\mathbf{x} < \varepsilon$$

Dimostrazione Basta limitarsi a f positiva e reale, usando poi f^+, f^-, parte reale e parte immaginaria, determiniamo la tesi nel caso generale.

Se $f \geq 0$, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $0 \leq \phi \leq f$, $\phi = \sum_{k=1}^m c_k \chi_{E_k}$ con $c_k > 0$, semplice per cui

$$\int (f - \phi) \, d\mathbf{x} < \frac{\varepsilon}{2}$$

basta ora trovare φ a scalini per cui

$$\int |\varphi - \phi| \, d\mathbf{x} < \frac{\varepsilon}{2}$$

prendiamo per ciascun E_k un plurirettangolo $A_k \subset E_k$, tale che

$$\mathrm{m}\,(E_k \triangle A_k) \leq a\varepsilon$$

ove $a \equiv \min \{1/2mc_k \,|k \in J_m\}$, posto

$$\varphi = \sum_{k=1}^m c_k \chi_{A_k}$$

essa avrà supporto compatto e inoltre

$$\int (\phi - \varphi) \, d\mathbf{x} = \sum_{k=1}^m c_k \, \mathrm{m}\,(E_k \triangle A_k) \leq \sum_{k=1}^m c_k a\varepsilon \leq \sum_{k=1}^m \frac{\varepsilon}{2m} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

(c.v.d.)

Lemma II.7 *Le funzioni $L^2(S)$, S misurabile, possono essere approssimate in norma L^2 mediante funzioni limitate.*

Dimostrazione Consideriamo $f \in L^2(S)$ non limitata (altrimenti la tesi è ovvia) e positiva (se f non è positiva si ragiona prendendo parte positiva e negativa e usando poi la diseguaglianza triangolare), e sia f_N la troncata N-esima della funzione f, cioè valga

$$f_N(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \text{se } f(\mathbf{x}) \leq N \\ N, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Adesso consideriamo l'integrale

$$\int_S |f - f_N|^2 \, d\mathbf{x} = \int_S |f - N|^2 \chi_{R_N} \, d\mathbf{x}$$

dove χ_{R_N} è la funzione caratteristica dell'insieme R_N dei punti sui quali $f(\mathbf{x}) > N$. Abbiamo dunque una successione di funzioni definite in S,

$$F_N(\mathbf{x}) \equiv |f(\mathbf{x}) - N|^2 \chi_{R_N}(\mathbf{x})$$

la successione è certamente puntualmente decrescente perché gli insiemi R_N sono incapsulati e perché f è positiva. Ciasuna funzione F_N è sommabile come prodotto di sommabili (f è L^2 perciò è misurabile, tale è allora l'insieme R_N: la ua funzione caratteristica è allora sommabile). Inoltre,

$$|f(\mathbf{x}) - N| \leq |f(\mathbf{x})| + N$$

ma sugli insiemi R_N, si ha $N < |f(x)|$ da cui

$$|f(\mathbf{x}) - N|^2 \leq 4\,|f(\mathbf{x})|^2$$

e perciò vale il teorema di Beppo Levi

$$\lim_{N\to\infty} \int_S |f - f_N|^2 \, d\mathbf{x} = \int \lim_{N\to\infty} \left(|f - N|^2 \chi_{R_N} \right) d\mathbf{x}$$

Calcoliamo il limite (puntuale) entro integrale: sia $\mathbf{x} \in S$ se $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ allora $\mathbf{x} \in S \backslash R_N$, ne deriva che il limite per $N \to \infty$ di $F_N(\mathbf{x})$ è nullo. Si conclude perciò che l'insieme sul quale la funzione limite è certamente nulla è il complementare dell'insieme su cui f assume valore infinito. Ma tale insieme è a misura nulla. La funzione limite è dunque nulla su S tranne al più un insieme di misura nulla, essendo una funzione pari a 0 quasi ovunque essa avrà integrale 0:

$$\lim_{N\to\infty} \|f - f_N\|_{L^2} = 0$$

(c.v.d.) Fissato un ε esiste sempre un N tale che $\|f - f_N\|_{L^2} < \varepsilon$, la tesi.

Lemma II.8 *Per ogni $f \in L^2$ a dominio limitato in $\mathbb{R}^n$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione φ a scalino e a supporto compatto a valori in $\mathbb{C}$ tale che*

$$\|f - \varphi\|_{L^2} = \left(\int |f - \varphi|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Le funzioni a scalino sono dense in L^2.

Dimostrazione Data $f \in L^2$ e fissato $\varepsilon > 0$ troviamo una funzione limitata g tale che

$$\|f - g\|_{L^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

ma se g è limitata allora è sommabile, cioè L^1, perciò troviamo una funzione a scalino tale che

$$\|g - \varphi\|_{L^1} < \left(\frac{\varepsilon}{2M} \right)^2$$

D'altra parte $(g - \varphi)$ è una funzione limitata

$$\|g - \varphi\|_{L^2}^2 = \int_S |g - \varphi|^2 \, d\mathbf{x} \leq \sup|g - \varphi| \int_S |g - \varphi| \, d\mathbf{x} = \sup|g - \varphi| \, \|g - \varphi\|_{L^1}$$

posto $M \equiv (\sup|g - \varphi|)^{1/2}$ si ha

(c.v.d.)

$$\|f - \varphi\|_{L^2} < \|f - g\|_{L^2} + \|g - \varphi\|_{L^2} < \varepsilon$$

Concludiamo dunque che le funzioni a scalino sono dense in L^2 (in tutti gli spazi L^p). D'altra parte unendo i salti delle funzioni a scalino con segmenti obliqui abbastanza ripidi si approssimano le funzioni a scalino con funzioni continue, perciò si è dimostrato il lemma di densità, senza far uso di concetti generali di teoria della misura.

II.4 La somma diretta negli spazi di Hilbert

Somma diretta di due spazi di Hilbert Siano dati due spazi di Hilbert, $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$. Consideratane la somma diretta $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ vogliamo dotarla della struttura di spazio di Hilbert. Se $x_1, x_2 \in \mathcal{H}_1$ e $y_1, y_2 \in \mathcal{H}_2$ consideriamo $(x_1 \oplus y_1), (x_2 \oplus y_2) \in \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ e poniamo

$$(x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2) = (x_1, x_2)_1 + (y_1, y_2)_2$$

Il fatto che si tratti di un prodotto scalare è ovvio. Vediamo la completezza, si ha

$$\|x_n \oplus y_n - x_m \oplus y_m\|^2 = \|(x_n - x_m) \oplus (y_n - y_m)\|^2 = \|x_n - x_m\|_1^2 + \|y_n - y_m\|_2^2$$

da cui se la successione $x_n \oplus y_n$ è di Cauchy, tali sono le x_n e y_n inoltre

$$\lim_{n\to\infty} \|x \oplus y - x_n \oplus y_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|x - x_n\|_1^2 + \lim_{n\to\infty} \|y - y_n\|_2^2 = 0.$$

Analogamente si definisce la somma diretta di un numero finito di spazi di Hilbert.

Somma diretta numerabile

Per concludere vediamo come si effettua la costruzione della somma diretta di una infinità numerabile di spazi di Hilbert. Siano dati gli spazi di Hilbert $\{\mathcal{H}_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ e definiamo

$$\mathcal{H} \equiv \bigoplus_{p=0}^{\infty} \mathcal{H}_p$$

l'insieme dei vettori $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_n \in \mathcal{H}_n$ tali che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|_n^2 < \infty.$$

Su $\mathcal{H}$ definiamo il prodotto scalare (ovvio verificare che di prodotto scalare si tratta effettivamente)

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (x_n, y_n)_n$$

notiamo che la definizione è ben posta, valendo la diseguaglianza di Schwartz in $\bigoplus_{n=0}^{m} \mathcal{H}_n$

$$\left| \sum_{n=0}^{m} (x_n, y_n)_n \right|^2 \leq \sum_{n=0}^{m} |(x_n, x_n)_n|^2 \sum_{n=0}^{m} |(y_n, y_n)_n|^2 = \sum_{n=0}^{m} \|x_n\|_n^2 \sum_{n=0}^{m} \|y_n\|_n^2 < \infty$$

passando al limite per $m \to \infty$ si trova la finitezza del prodotto scalare definito.

Completezza della somma diretta

Vediamo la completezza, sia $\{\mathbf{x}_k\}$ di Cauchy, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste k_ε talché se $k, k' > k_\varepsilon$

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k'}\|^2 = \sum_{p=0}^{\infty} \|x_{k,p} - x_{k',p}\|_p^2 < \varepsilon^2$$

da cui, per ogni $p \in \mathbb{N}$ la successione $\{x_{k,p}\}_{k\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy e perciò converge a $x_p \in \mathcal{H}_p$. Consideriamo allora $\mathbf{x} \equiv \{x_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ e vediamo se appartiene a $\mathcal{H}$. A questo scopo abbiamo

$$\sum_{p=0}^{N} \|x_{k,p}\|_p^2 < \infty \; \forall N, k$$

passando al limite per $k \to \infty$, per continuità della norma

$$\sum_{p=0}^{N} \|x_p\|_p^2 < \infty \; \forall N$$

e di nuovo passando al limite per $N \to \infty$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \|x_p\|_p^2 < \infty$$

Non ci resta che mostrare la convergenza di $\mathbf{x}_k$ a $\mathbf{x}$, fissato $\varepsilon > 0$ abbiamo che se $k, k' > k_\varepsilon$

$$\forall N \; \sum_{p=0}^{N} \|x_{k,p} - x_{k',p}\|_p^2 = \sum_{p=0}^{\infty} \|x_{k,p} - x_{k',p}\|_p^2 < \varepsilon^2$$

passiamo al limite per $k' \to \infty$ abbiamo, se $k > k_\varepsilon$

$$\forall N \; \sum_{p=0}^{N} \|x_{k,p} - x_p\|_p^2 < \varepsilon^2$$

ora mandiamo $N \to \infty$,

$$\sum_{p=0}^{\infty} \|x_{k,p} - x_p\|_p^2 = \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\|^2 < \varepsilon^2.$$

Si sarà notato nel corso della dimostrazione l'analogia che si ha con il caso di $\ell^2(\mathbb{C})$ che risulta

$$\ell^2(\mathbb{C}) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \mathbb{C}.$$

II.5 Isomorfismi di spazi di Hilbert

II.5.1 Definizione di isomorfismo e relazione con la dimensione

Dati due spazi vettoriali, un'isomorfismo tra essi è un'applicazione lineare biunivoca, sugli spazi di Hilbert conviene richiedere anche l'isometria (cioè la preservazione del prodotto scalare).

Definizione II.12 *Dati due spazi di Hilbert $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$, si dice* isomorfismo *di $\mathcal{H}_1$ in $\mathcal{H}_2$ l'applicazione lineare*

$$U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$$

tale che

(i) *U sia suriettiva;*

(ii) *per ogni $x, x' \in \mathcal{H}_1$ risulta*

$$(x, x')_1 = (Ux, Ux')_2$$

Equivalentemente a (ii) si può richiedere che per ogni $x \in \mathcal{H}_1$ sia

$$\|x\|_1 = \|Ux\|_2$$

Inoltre, (i) e (ii) implicano che U sia biunivoca. (i) implica la suriettività, da (ii) si ha

$$Ux_1 = Ux_2 \Rightarrow 0 = \|Ux_1 - Ux_2\|_2 \Rightarrow 0 = \|U(x_1 - x_2)\|_2 = \|x_1 - x_2\|_1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Se U è un isomorfismo, allora esiste U^{-1} (U è infatti biunivoco) che è un isomorfismo tra $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_1$. Per vedere questo ci basta mostrare l'isometria

$$\left(U^{-1}y, U^{-1}y'\right)_1 = \left(UU^{-1}y, UU^{-1}y'\right)_2 = (y, y')_2 .$$

La nozione di isomorfismo allargata all'isometria comporta la seguente condizione necessaria e sufficiente

Teorema II.25 *Due spazi di Hilbert, $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$, sono isomorfi se e solo se hanno eguali dimensioni (ortogonali).*

Dimostrazione Siano $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ isomorfi secondo l'isomorfismo U. Sia dato un sistema ortonormale completo $\{u_n\}$ in $\mathcal{H}_1$ e sia $v_n = Uu_n \in \mathcal{H}_2$. L'insieme $\{v_n\}$ ha la stessa cardinalità dell'insieme $\{u_n\}$ essendo U biunivoca, vediamo che si tratta di un s.o.n.c. Per isometria è un s.o.n., sia ora $y \in \mathcal{H}_2$ tale che

$$(y, v_n) = 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$$

allora, sempre per ogni intero n, essendo U^{-1} un isomorfismo

$$0 = (y, Uu_n)_2 = \left(U^{-1}y, u_n\right)_1$$

da cui

$$U^{-1}y = 0$$

cioè $y \in \ker U^{-1}$, ma U^{-1} è iniettivo, perciò $y = 0$, da cui la completezza.

Ora, sia $\dim \mathcal{H}_1 = \dim \mathcal{H}_2$. Siano $\{u_n\}$ e $\{v_n\}$ due s.o.n.c. nei due spazi, rispettivamente. Essi hanno la stessa cardinalità, perciò sono correttamente indicizzati dal medesimo indice. Definiamo allora la mappa

$$x \mapsto Ux \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (u_n, x)_1 \, v_n$$

essa è ben definita, per il teorema di Fischer-Riesz, essendo $\{(u_n, x)\} \in \ell^2(\mathbb{C})$ per la diseguaglianza di Bessel. La linearità segue dalla linearità nella seconda variabile del prodotto scalare, dalla continuità della somma e della moltiplicazione scalare. Vediamo l'invertibilità, sia $y \in \mathcal{H}_2$, allora

$$U^{-1}y = \sum_{m=0}^{\infty} (v_m, y)_2 \, u_m$$

infatti, usando ortogonalità, completezza e continuità

$$U\left(U^{-1}y\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(u_n, \sum_{m=0}^{\infty} (v_m, y)_2 \, u_m\right)_1 v_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (v_m, y)_2 \, (u_n, u_m)_1 \, v_n = \sum_{n=0}^{\infty} (v_n, y)_2 \, v_n = y$$

Per l'isometria, usando ancora il teorema di Fischer-Riesz e l'identità di Parseval

$$\|Ux\|_2^2 = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} (u_n, x)_1 \, v_n \right\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |(u_n, x)_1|^2 = \|x\|_1^2 .$$

(c.v.d.)

II.5.2 Isomorfismi e s.o.n.c.

Spazi finito-dimensionali Dato uno spazio di Hilbert finito-dimensionale esso è isomorfo a $\mathbb{C}^{\dim \mathcal{H}}$ tramite l'isomorfismo citato nella dimostrazione

$$Tx \equiv \sum_{n=0}^{\dim \mathcal{H}} (u_n, x) \, \mathbf{e}_n$$

dove $\{\mathbf{e}_n\}_{n \in J_{\dim \mathcal{H}}}$ è la base canonica di $\mathbb{C}^{\dim \mathcal{H}}$.

Spazi infinito-dimensionali Per gli spazi a dimensione infinita, lo stesso isomorfismo si deve invece ambientare su $\ell^2(\mathbb{C})$, come consentito dalla diseguaglianza di Bessel e dal teorema di Fischer-Riesz

$$Tx \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (u_n, x) \, \mathbf{e}_n = \{(u_n, x)\}_{n \in \mathbb{N}} .$$

II.6 Il duale

II.6.1 Funzionali continui e norma operatoriale

In generale, sappiamo che il duale di uno spazio vettoriale V è l'insieme della mappe lineari

$$\alpha : V \to \mathbb{C}, \; x \mapsto \alpha(x) \equiv \langle \alpha, x \rangle$$

Sugli spazi lineari topologici appare naturale richiedere in aggiunta la continuità e noi faremo senz'altro così. Se V è normato abbiamo che α è continuo in x_0 se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ per cui

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |\langle \alpha, x \rangle - \langle \alpha, x_0 \rangle| < \varepsilon$$

La linearità di α consente di dire qualcosa in più, infatti

$$\begin{array}{lcl} \|x\| < \delta & \Rightarrow & |\langle \alpha, x \rangle| < \varepsilon \\ & \Updownarrow & \\ \|x - x_0\| < \delta & \Rightarrow & |\langle \alpha, x \rangle - \langle \alpha, x_0 \rangle| < \varepsilon \end{array}$$

questo perché $\langle \alpha, x \rangle - \langle \alpha, x_0 \rangle = \langle \alpha, x - x_0 \rangle$. Ne consegue la seguente

Proposizione II.7 *La continuità di α, funzionale lineare di V, nel punto 0 equivale alla continuità e alla uniforme continuità di α su V.*

La continuità nell'origine può essere vista anche come segue

Proposizione II.8 *Dato un funzionale lineare di V, α sono equivalenti i seguenti fatti*

(i) *α è continuo nell'origine;*

(ii) *esiste un reale positivo M, tale che $\langle \alpha, x\rangle \leq M\,\|x\|$ per ogni $x \in V$.*

Dimostrazione La (ii) implica banalmente la (i) (basta porre $\delta_\varepsilon = \varepsilon/M$). Vediamo che (i) implica (ii). Posto $\varepsilon = 1$ esiste δ_1 tale che

$$\|x\| \leq \delta_1 \Rightarrow |\langle \alpha, x\rangle| < 1$$

sia ora $x \in V$ con $x \neq 0$, allora

$$x = \frac{\|x\|}{\delta_1}\frac{\delta_1}{\|x\|}x$$

perciò

$$\left|\left\langle \alpha, \frac{\delta_1 x}{\|x\|}\right\rangle\right| < 1$$

da cui

$$|\langle \alpha, x\rangle| = \frac{\|x\|}{\delta_1}\left|\left\langle \alpha, \frac{\delta_1 x}{\|x\|}\right\rangle\right| < \frac{\|x\|}{\delta_1}$$

(c.v.d.) e basta porre $M \equiv 1/\delta_1$.

Definizione II.13 *Un funzionale lineare di V si dice limitato se trasforma sottoinsiemi limitati di V in sottoinsiemi limitati di $\mathbb{C}$.*

Sia α tale che $\langle \alpha, x\rangle \leq M\,\|x\|$ per ogni $x \in V$. Sia $A \subset V$ limitato, cioè esiste $a > 0$ per cui se $x \in A$ allora $\|x\| \leq a$, allora

$$\forall x \in A \;\; |\langle \alpha, x\rangle| \leq M\,\|x\| \leq Ma$$

cioè $\alpha\,(A)$ è limitato. Viceversa, α sia limitato, allora manda la palla $\mathcal{S}$ di centro l'origine e raggio 1 in un insieme limitato contenuto nella palla di centro l'origine e raggio M sulla retta reale, cioè

$$\|x\| = 1 \Rightarrow |\langle \alpha, x\rangle| \leq M$$

preso $x \in V$ qualsiasi si ha

$$|\langle \alpha, x\rangle| = \|x\|\left|\left\langle \alpha, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle\right| \leq M\,\|x\|\,.$$

Proprietà equivalenti alla continuità di α In definitiva sono equivalenti i seguenti fatti

(i) α è continuo su V;

(ii) α è uniformemente continuo su V;

(iii) α è continuo nell'origine;

(iv) α è limitato (i.e. manda limitati in limitati).

Norma di α Dunque, se α è continuo l'insieme

$$L_\alpha \equiv \left\{M \in \mathbb{R}^+ \,||\langle \alpha, x\rangle| \leq M\,\|x\|\,,\; \forall x \in V\right\}$$

è non vuoto e banalmente limitato inferiormente. Ne deriva che esiste

$$\|\alpha\| \equiv \inf L_\alpha$$

che chiameremo **norma** di α, tra poco capiremo il perché.

Proprietà della norma di α Per ogni $M \in L_\alpha$ e per ogni $0 \neq x \in V$ si ha

$$\frac{|\langle \alpha, x\rangle|}{\|x\|} \leq M$$

per massimalità dell'inf si ha

$$\frac{|\langle \alpha, x\rangle|}{\|x\|} \leq \|\alpha\| \Leftrightarrow |\langle \alpha, x\rangle| \leq \|\alpha\| \, \|x\| \;\; \forall x \in V$$

per cui l'inf è in realtà un minimo.
Consideriamo adesso la quantità

$$m \equiv \sup_{x \in V \setminus \{0\}} \frac{|\langle \alpha, x\rangle|}{\|x\|}$$

per definizione di sup si ha

$$L_\alpha \ni m = \min \left\{ M \in \mathbb{R}^+ \, | |\langle \alpha, x\rangle| \leq M \, \|x\| \, , \; \forall x \in V \right\} = \min L_\alpha$$

da cui

$$\sup_{x \in V \setminus \{0\}} \frac{|\langle \alpha, x\rangle|}{\|x\|} = \|\alpha\| \, .$$

Inoltre, se $x \in V$

$$\|\alpha\| = \sup_{x \in V \setminus \{0\}} \frac{|\langle \alpha, x\rangle|}{\|x\|} = \sup_{x \in V \setminus \{0\}} \left| \left\langle \alpha, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \right| = \sup_{\|x\|=1} |\langle \alpha, x\rangle|$$

siccome poi

$$|\langle \alpha, x\rangle| \leq \|\alpha\| \;\; \forall x : \|x\| < 1$$

abbiamo

$$\|\alpha\| = \sup_{x \in V \setminus \{0\}} \frac{|\langle \alpha, x\rangle|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |\langle \alpha, x\rangle| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle \alpha, x\rangle|$$

Completezza del duale

Teorema II.26 *Sia V uno spazio normato. L'insieme dei funzionali lineari su V continui, munito delle operazioni (definite puntualmente)*

$$\langle \alpha + \beta, x\rangle \equiv \langle \alpha, x\rangle + \langle \beta, x\rangle$$
$$\langle k\alpha, x\rangle \equiv \bar{k} \, \langle \alpha, x\rangle$$

è uno spazio lineare che normato con

$$\|\alpha\| \equiv \inf L_\alpha$$

è completo.

Dimostrazione Siano α e β due funzionali lineari e continui su V, per ogni x abbiamo

$$\langle \alpha + k\beta, x\rangle = \langle \alpha, x\rangle + \bar{k} \, \langle \beta, x\rangle$$

da cui

$$|\langle \alpha + k\beta, x\rangle| \leq |\langle \alpha, x\rangle| + |k| \, |\langle \beta, x\rangle| \leq (\|\alpha\| + |k| \, \|\beta\|) \, \|x\|$$

perciò $\alpha + k\beta$ è continuo ed appartiene ancora allo spazio considerato. Ne deriva la linearità di tale spazio. Incidentalemente abbiamo pure provato che

$$\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\| \, .$$

Inoltre,

$$\|k\alpha\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|\langle k\alpha, x\rangle|}{\|x\|} = |k| \sup_{x \neq 0} \frac{|\langle \alpha, x\rangle|}{\|x\|} = |k| \, \|\alpha\| \, .$$

Per provare che $\|\alpha\|$ è una norma resta da provare che si annulla solo in 0. Per questo si ha

$$\|\alpha\| = 0 \Leftrightarrow \forall x \in V \;\; |\langle \alpha, x\rangle| \leq 0 \Leftrightarrow \forall x \in V \;\; \langle \alpha, x\rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0.$$

Resta da vedere la completezza. Sia $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzionali lineari continui su V. Siccome

$$|\langle \alpha_n, x\rangle - \langle \alpha_m, x\rangle| \leq \|\alpha_n - \alpha_m\| \, \|x\|$$

da cui la successione numerica $\{\langle \alpha_n, x\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy. La completezza del campo scalare implica dunque che, per ogni x, esista il limite puntuale

$$\langle \alpha, x\rangle \equiv \lim_{n\to\infty} \langle \alpha_n, x\rangle \,.$$

Si ha subito che α è un funzionale lineare. La continuità di α si ottiene come segue: la successione $\{\alpha_n\}$ è di Cauchy perciò è limitata, dunque, esiste $k \in \mathbb{R}^+$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\|\alpha_n\| \leq k$$

sicché, per ogni n, $|\langle \alpha_n, x\rangle| \leq k \, \|x\|$

$$|\langle \alpha, x\rangle| = \left|\lim_{n\to\infty} \langle \alpha_n, x\rangle\right| = \lim_{n\to\infty} |\langle \alpha_n, x\rangle| \leq k \, \|x\|$$

Dunque, α è un funzionale lineare e continuo.

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un N_ε tale che

$$n, m > N_\varepsilon \Rightarrow \|\alpha_n - \alpha_m\| < \varepsilon$$

allora, per ogni $x \in V$

$$|\langle \alpha_n, x\rangle - \langle \alpha_m, x\rangle| \leq \varepsilon \, \|x\|$$

Passiamo al limite per $m \to \infty$, se $n > N_\varepsilon$

$$\lim_{m\to\infty} |\langle \alpha_n, x\rangle - \langle \alpha_m, x\rangle| = \left|\langle \alpha_n, x\rangle - \lim_{m\to\infty} \langle \alpha_m, x\rangle\right| = |\langle \alpha_n, x\rangle - \langle \alpha, x\rangle| \leq \varepsilon \, \|x\| \;\; \forall x \in V$$

da cui

$$\|\alpha_n - \alpha\| < \varepsilon$$

(c.v.d.) la tesi.

Definizione II.14 *Dato uno spazio normato V lo spazio di Banach dei suoi funzionali lineari continui si dice duale di tale spazio e si indica con V^*.*

II.6.2 Il teorema di Riesz

Recuperando la struttura di spazio di Hilbert, si trova il seguente

Teorema II.27 (di rappresentazione di Riesz) *Dato uno psazio $\mathcal{H}$ di Hilbert, sia $\mathcal{H}^*$ il suo duale. La mappa*

$$T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*, \; x \mapsto Tx : \langle Tx, x'\rangle \equiv (x, x')$$

è un isomorfismo lineare isometrico (i.e. un'applicazione biunivoca lineare che conserva le norme).

Dimostrazione Cominciamo a vedere che T è ben definito, cioè che $Tx \in \mathcal{H}^*$. La linearità è garantita dalla linearità nella seconda variabile del prodotto scalare. Per la continuità si ha, dalla diseguaglianza di Schwarz

$$|\langle Tx, x'\rangle| = |(x, x')| \leq \|x\| \, \|x'\| \,.$$

Ne abbiamo che $\|Tx\| \leq \|x\|$, d'altra parte posto $x' = x$, vale l'eguaglianza nella diseguaglianza di Schwarz, sicché

$$|\langle Tx, x'\rangle| = \|x\|^2$$

ne consegue che $\|Tx\| = \|x\|$ (e il sup è un massimo). D'altra parte, la relazione trovata vale per ogni $x \in \mathcal{H}$, perciò T è una isometria. Vediamo la linearità di T:

$$\langle T(x + ky), x'\rangle = (x + ky, x') = (x, x') + \bar{k}\,(y, x') = \langle Tx, x'\rangle + \bar{k}\,\langle Ty, x'\rangle$$

Isometria e linearità implicano l'iniettività. Resta da vedere allora la suriettività di T, c'è cioè da mostrare che per **ogni elemento** α **del duale** di $\mathcal{H}$ esiste un elemento $x \in \mathcal{H}$, tale che

$$\langle \alpha, x' \rangle = (x, x') .$$

Il nucleo di α è la controimmagine di un chiuso, perciò, essendo α continuo, è chiuso. D'altra parte il nucleo è una varietà lineare, infine, è un sottospazio. Se $\ker \alpha = \mathcal{H}$ allora $\alpha = 0$ e basta prendere $x = 0$. Sia invece $\ker \alpha \neq \mathcal{H}$, allora l'ortogonale al nucleo è non banale, $(\ker \alpha)^{\perp} \neq \{0\}$ e per il teorema della proiezione,

$$\mathcal{H} = \ker \alpha \oplus (\ker \alpha)^{\perp}$$

Detto questo, vogliamo vedere che l'ortogonale al nucleo ha dimensione unitaria: siano allora $x_1, y_1 \in (\ker \alpha)^{\perp}$ abbiamo

$$\begin{aligned} \alpha(x_1) &= a_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ \alpha(y_1) &= b_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

perciò

$$\alpha(b_1 x_1 - a_1 y_1) = b_1 a_1 - a_1 b_1 = 0$$

da cui

$$b_1 x_1 - a_1 y_1 \in \ker \alpha$$

ma come combinazione lineare di elementi di $(\ker \alpha)^{\perp}$ si ha

$$b_1 x_1 - a_1 y_1 \in (\ker \alpha)^{\perp}$$

da cui

$$b_1 x_1 - a_1 y_1 = 0$$

con b_1 e a_1 diversi da zero. Ne segue che ogni coppia di elementi dell'ortogonale al nucleo è linearmente dipendente, perciò esso ha dimensione pari a 1. Se $u_1 \in (\ker \alpha)^{\perp}$ e $\|u_1\| = 1$ allora

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \ker \alpha \oplus \operatorname{Span} \langle u_1 \rangle \\ x' &= z + \lambda u_1 \end{aligned}$$

perciò

$$\langle \alpha, x' \rangle = \langle \alpha, z + \lambda u_1 \rangle = \langle \alpha, z \rangle + \lambda \langle \alpha, u_1 \rangle = \lambda \langle \alpha, u_1 \rangle$$

ne deriva che l'azione di α su x' è una sorta di proiezione su u_1, proviamo allora a porre $x = \xi u_1$ ne abbiamo

$$(\xi u_1, x') = (\xi u_1, z + \lambda u_1) = \lambda \bar{\xi}$$

e basta porre

$$x = \overline{\langle \alpha, u_1 \rangle} u_1$$

(c.v.d.) per ottenere la tesi.

Un sottoprodotto della dimostrazione è il seguente: *un funzionale lineare su uno spazio di Hilbert è continuo se e solo se è esprimibile nella forma $\alpha(x') = (x, x')$ (e un tale x è unico).*

L'isomorfismo T tra $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}^*$ è naturale (**canonico**) e identifica $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}^*$ come spazi di Banach. D'altra parte, proprio usando T, si può dotare $\mathcal{H}^*$ di un prodotto scalare naturale

$$\alpha, \alpha' \in \mathcal{H}^* \Rightarrow (\alpha, a')_{\mathcal{H}^*} = \left(T^{-1}\alpha, T^{-1}\alpha'\right)_{\mathcal{H}}$$

dopodiché T è un isomorfismo tra $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}^*$ come **spazi di Hilbert**. Il teorema di rappresentazione attesta che *ogni spazio di Hilbert* è **autoduale**.

II.7 I teoremi di Hahn-Banach

II.7.1 Premessa: il lemma di Zorn

Per poter procedere alla dimostrazione del teorema di Hahn-Banach, ci occorrono alcuni risultati preliminari. Intanto, poniamo la seguente lista di definizioni.

Definizione II.15 *Sia P un insieme e si la relazione su P espressa da $\preceq$ che goda delle seguenti proprietà*

(i) *(riflessiva) per ogni $a \in P$, vale $a \preceq a$;*

(ii) *(antisimmetrica) se $a, b \in P$ sono tali che $a \preceq b$ e $b \preceq a$ allora $a = b$;*

(iii) *(transitiva) se $a, b, c \in P$ sono tali che $a \preceq b$ e $b \preceq c$ allora $a \preceq c$.*

Allora si dice che P è parzialmente ordinato dalla relazione $\preceq$.

Definizione II.16 *Si chiama confine superiore di $A \subset P$ un elemento $M \in P$ tale che per ogni $a \in A$ vale $a \preceq M$. Si chiama massimo di A un confine superiore di A che appartenga ad A. Analoghe definizioni per confine inferiore e minimo.*
Si chiama estremo superiore di A il minimo confine superiore di A (analogamente si definisce l'estremo inferiore).
Si chiama massimale di P un elemento m di P talché se $p \in P$ e $m \preceq p$ allora $m = p$.

La definizione di massimale si può riformulare tramite la contronominale, $m \in P$ è un massimale se

$$m \neq p \Rightarrow m \notin P \text{ oppure } m \npreceq p$$

Definizione II.17 *Un insieme parzialmente ordinato si dice totalmente ordinato se per ogni coppia (a, b) di elementi di P risulta necessariamente $a \preceq b$ o $b \preceq a$.*

Definizione II.18 *Un insieme P si dice induttivamente ordinato se ogni suo sottoinsieme totalmente ordinato ammette confine superiore.*

Si stabilisce, infine, il seguente assioma (si può dimostrare che è equivalente all'assioma della scelta)

Assioma II.1 (Lemma di Zorn) *Sia P un insieme induttivamente ordinato, allora P contiene almeno un elemento massimale.*

Adesso vedremo una applicazione del lemma di Zorn, in modo da renderne più familiare l'uso

Teorema II.28 (base di Hamel) *Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale non banale, allora esiste una base di V.*

Dimostrazione Sia S l'insieme formato dai sottoinsiemi linearmente indipendenti di V. Siccome V è non banale esiste $v \neq 0$ in V, di modo che $\{v\}$ è linearmente indipendente e perciò appartiene a S che risulta non vuoto.
Su S è definito l'ordinamento parziale indotto da $\mathcal{P}(V)$, $\subset$. Vediamo che S è induttivamente ordinato. Sia $T \subset S$ un sottoinsieme totalmente ordinato di S, mostriamo che allora

$$U \equiv \bigcup_{B \in T} B$$

è un confine superiore per T. Sicuramente, per ogni $B \in T$ risulta $B \subset U$. Dobbiamo vedere che $U \in S$. Sia $N \in \mathbb{N}$ un intero qualsiasi e prendiamo ad arbitrio i vettori $v_1, \ldots, v_N \in U$ vogliamo vedere che essi sono indipendenti. Siano $B_1, \ldots, B_n$ con $n \in \mathbb{N}$ gli elementi di T che contengono i vettori scelti. Siccome T è totalmente ordinato, abbiamo

$$\exists! j \in J_n : \bigcup_{i=1}^{n} B_i = B_j$$

come è facile vedere per induzione ($B_1 \cup B_2 = B_1$ o B_2), da cui

$$v_1, \ldots, v_N \in B_j$$

e perciò sono indipendenti.

Siccome S è induttivamente ordinato, vale il lemma di Zorn, perciò sia M un massimale di S. Sia ora $v \notin M$, consideriamo allora $\{v\} \cup M$. Per costruzione esso è diverso da M e contiene M, per definizione di massimale, non appartiene a S. Dunque $\{v\} \cup M$ è dipendente. Questo significa che esiste $N \in \mathbb{N}$ ed esistono N vettori in tale insieme aventi una combinazione lineare a coefficienti $\{a_i\}_{i \in J_N}$ non tutti nulli per cui

$$a_1 v_1 + \ldots + a_N v_N = 0$$

Tra tali vettori deve esserci v e con coefficiente non nullo, altrimenti M sarebbe dipendente, perciò possiamo porre $v_1 \equiv v$ e $a_1 \neq 0$. Ne consegue che

$$v = -\frac{1}{a}\left(a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n\right).$$

(c.v.d.) Questo comporta che $V = \mathcal{V}M$ e che M è indipendente. Ne deriva che M è una base di V.

II.7.2 Il teorema di Hahn-Banach negli spazi reali

Dobbiamo anzitutto introdurre la seguente

Definizione II.19 *Una seminorma su uno $\mathbb{R}$-spazio vettoriale X è una applicazione $p : X \to \mathbb{R}$ che goda delle seguenti proprietà*

(i) *per ogni $x, y \in X$ vale $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$;*

(ii) *per ogni $x \in X$ e $a > 0$ vale $p(ax) = ap(x)$.*

Teorema II.29 (di Hahn-Banach) *Se p è una seminorma su un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale X e f è un funzionale lineare definito su una varietà lineare $S \subset X$ tale che per ogni $s \in S$, $f(s) \leq p(s)$ allora esiste un funzionale lineare F definito su tutto lo spazio X per cui*

(i) *per ogni $x \in X$ vale $F(x) \leq p(x)$;*

(ii) *per ogni $s \in S$ vale $F(s) = p(s)$.*

Dimostrazione Sia $\mathcal{F}$ l'insieme dei funzionali lineari definiti su una varietà lineare di X contenente S, pari a f su S, e sul dominio minori o eguali alla seminorma. $\mathcal{F}$ è parzialmente ordinato dalla relazione

$$g \preceq g' \Leftrightarrow g' \text{ estende } g$$

Chiaramente $\mathcal{F}$ è non vuoto, dato che contiene f. Sia ora l'insieme $\{f_\alpha\}_\alpha$ un sottoinsieme totalmente ordinato di $\mathcal{F}$ (l'indicizzazione può essere effettuata sull'insieme stesso). Vogliamo determinare un confine superiore per tale sottoinsieme. Sia allora g la funzione definita su

$$\bigcup_\alpha D(f_\alpha)$$

tale che $g(x) = f_\alpha(x)$ se $x \in D(f_\alpha)$. L'ordinamento totale garantisce che g è ben definito. Ora, l'unione di una infinità di varietà lineari è, come sappiamo, una varietà lineare, inoltre, sul dominio g è dominato dalla seminorma e su S è pari a f. Infine, ogni elemento di $\{f_\alpha\}_\alpha$ è minore o eguale di g. Si ha perciò che $\{f_\alpha\}_\alpha$ ammette confine superiore, e che $\mathcal{F}$ è induttivamente ordinato.

Per il lemma di Zorn $\mathcal{F}$ ammette elemento massimale F. $F \in \mathcal{F}$ perciò se ha dominio su X dimostra il teorema. Resta cioè da mostrare che $L \equiv D(F) = X$.

Ragioniamo per assurdo. Esista $x \in X \backslash L$, certamente $x \neq 0$, essendo $0 \in S \subset L$. Dimostriamo allora che su $L_1 \equiv L \oplus x\mathbb{R}$ è possibile costruire un estensione F_1 di F appartenente a $\mathcal{F}$, ciò negherebbe la massimalità di F. Siccome $F_1 = F$ su L e ogni vettore di L_1 si scrive come $l + ax$ con $l \in L$ e $a \in \mathbb{R}$ ricaviamo

$$F_1(l + ax) = F_1(l) + aF_1(x)$$

ma $F_1(l) = F(l)$ perciò

$$F_1(l + ax) = F(l) + aF_1(x)$$

e resta da determinare $c \equiv F_1(x) \in \mathbb{R}$ in modo che $F_1 \in \mathcal{F}$, cioè che

$$F_1(y) \le p(y) \ \forall y \in L_1$$

La richiesta si traduce nel seguente modo

$$F(l) + ac \le p(l + ax) \ \forall l \in L, a \in \mathbb{R}$$

Sia $a > 0$ allora la richiesta diviene

$$F(l/a) + c \le p(l/a + x)$$

se, invece, $a < 0$, si ha

$$F(-l/a) - c \le p(-l/a - x)$$

cioè, deve essere

$$p(l' - x) + F(l') \le c \le p(l'' + x) - F(l'') \ \forall l', l'' \in L$$

la cosa è consistente essendo

$$F(l') + F(l'') \le p(l' + l'') = p(l' - x + x + l'') \le p(l' - x) + p(l'' + x)$$

da cui per ogni $l', l'' \in L$

$$p(l' - x) + F(l') \le p(l'' + x) - F(l'')$$

(c.v.d.) e basterà scegliere c tra il sup della prima quantità e l'inf della seconda che sono reali.

II.7.3 Il teorema di Hahn-Banach negli spazi complessi

Dimostriamo il teorema di Hahn-Banach per gli spazi complessi, usando il teorema valido negli spazi reali. Premettiamo la

Definizione II.20 *Sia X un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale. Una seminorma su X è una applicazione da $X \to \mathbb{R}$ tale che*

(i) *per ogni $x, y \in X$ vale $p(x + y) \le p(x) + p(y)$;*

(ii) *per ogni $x \in X$ e $a \in \mathbb{C}$ si ha $p(ax) = |a| p(x)$.*

Il seguente teorema è la versione complessa del teorema di Hahn-Banach

Teorema II.30 (di Bohnenblust-Sobczyk) *Se p è una seminorma sul $\mathbb{C}$-spazio vettoriale X e f è un funzionale lineare definito su una varietà lineare S contenuta in X dominato dalla seminorma, i.e. $|f(s)| \le p(s)$, se $s \in S$, allora esiste un funzionale lineare F definito su tutto X tale che*

(i) *per ogni $x \in X$ si ha $|F(x)| \le p(x)$;*

(ii) *per ogni $s \in S$ vale $F(s) = f(s)$.*

Dimostrazione X è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale sul quale semplicemente si ignora la moltiplicazione per scalari complessi (per esempio se ix non è il vettore x moltiplicato per i, ma un nuovo vettore di X). Anche $\mathbb{C}$ è un $\mathbb{R}$-spazio, per cui un funzionale lineare di X è un $\mathbb{R}$-omomorfismo lineare tra $\mathbb{R}$-spazi. Infatti, possiamo riscrivere

$$f(x) = \operatorname{Re} f(x) + i \operatorname{Im} f(x) \equiv g(x) + ih(x)$$

dove g, h sono banalmente funzionali lineari da $X \to \mathbb{R}$. Inoltre

$$g(x) = \operatorname{Re} f(x) \le |f(x)| \le p(x)$$

perciò g rispetta le ipotesi del teorema di Hahn-Banach reale. Esiste una estensione $G : X \to \mathbb{R}$ di g, lineare e tale che

$$G(x) \le p(x)$$

Ora, vediamo la relazione che corre tra g e h si ha

$$\begin{aligned} f(ix) &= if(x) \\ g(ix) + ih(ix) &= ig(x) - h(x) \end{aligned}$$

da cui, eguagliando le parti reali, si ottiene

$$h(x) = -g(ix).$$

Poniamo allora

$$F(x) \equiv G(x) - iG(ix)$$

abbiamo subito che F estende f. Vediamo che è $\mathbb{C}$-lineare. Siccome è $\mathbb{R}$-lineare, basta mostrare che $F(ix) = iF(x)$, abbiamo

$$F(ix) = G(ix) - iG\left(i^2 x\right) = G(ix) + iG(x) = i[-iG(ix) + G(x)] = iF(x).$$

Per ogni $x \in X$ esiste $z_x \in \mathbb{C}$ tale che $|z_x| = 1$ e $z_x F(x) = |F(x)|$, allora

$$|F(x)| = z_x F(x) = F(z_x x)$$

ma allora $F(z_x x)$ è reale perciò è eguale a $G(z_x x)$ essendo G a valori reali, sicché

$$|F(x)| = G(z_x x) \leq p(z_x x) = |z_x| p(x) = p(x).$$

(c.v.d.)

II.7.4 Il teorema di Hahn-Banach sugli spazi normati

Finora abbiamo dimostrato il teorema di Hahn-Banach su spazi dotati di una seminorma. Vediamo che accade sugli spazi normati

Teorema II.31 *Sia X uno spazio normato, S una varietà lineare in X e f un funzionale lineare continuo definito su S. Allora esiste un funzionale continuo F definito su X e tale che*

(i) *per ogni $s \in S$ vale $\langle F, s\rangle = \langle f, s\rangle$;*

(ii) *F e f hanno la stessa norma, $\|F\| = \|f\|$.*

Dimostrazione Sia $p(x) = \|f\| \|x\|$, allora p è una seminorma e $|f(x)| \leq \|f\| \|x\| = p(x)$. Siamo quindi nelle ipotesi del teorema di Hahn-Banach complesso. Esiste dunque un funzionale lineare F definito sull'intero spazio X, tale che

$$\langle F, s\rangle = \langle f, s\rangle$$

e, per ogni x,

$$|\langle F, x\rangle| \leq \|f\| \|x\|$$

Allora $\|F\| \leq \|f\|$, d'altra parte F è una estensione di f, perciò

$$\|F\| = \sup_{x \in X} \frac{|\langle F, x\rangle|}{\|x\|} \geq \sup_{x \in S} \frac{|\langle f, x\rangle|}{\|x\|} = \|f\|$$

(c.v.d.) da cui la tesi.

La versione del teorema di Hahn-Banach appena dimostrata, consente di dire qualcosa in più sul duale degli spazi normati, precisamente

Teorema II.32 *Sia X uno spazio normato e sia x un elemento di X diverso da 0. Allora esiste $\alpha_x \in X^*$ talché*

(i) *$\|\alpha_x\| = 1$;*

(ii) *$\langle \alpha_x, x\rangle = \|x\|$*

Dunque, X^*, duale di X, è separante per X, i.e. per ogni coppia distinta (x, x') di elementi di X esistono due funzionali lineari continui α, α' di X tali che $\langle \alpha, x\rangle \neq \langle \alpha', x'\rangle$.

Dimostrazione Consideriamo il sottospazio Span $\langle x\rangle$ generato da x. Per ogni $x' \in$ Span $\langle x\rangle$ esiste un unico $k_{x'} \in \mathbb{K}$ tale che $x' = k_{x'}x$. Risulta allora ben definita la mappa

$$\bar{\alpha}_x : \mathrm{Span}\,\langle x\rangle \to \mathbb{K},\ \bar{\alpha}_x(x') \equiv k_{x'}\|x\|$$

essa è chiaramente un funzionale lineare su Span $\langle x\rangle$, inoltre

$$|\bar{\alpha}_x(x')| = |k_{x'}|\,\|x\| = \|x'\|$$

(c.v.d.) sicché $\bar{\alpha}_x$ è continua e ha norma unitaria. Applicando il teorema precedente si ottiene la tesi.

II.7.5 Il biduale e la riflessività

Per terminare la lunga discussione sul duale (che ci ha costretti alla digressione sul teorema di Hahn-Banach, che è comunque un risultato fondamentale dell'analisi funzionale) dobbiamo accennare al biduale. Come è noto (dal corso di Geometria) se V è uno spazio vettoriale finito-dimensionale, il biduale V^{**} è canonicamente isomorfo a V tramite l'isomorfismo

$$\begin{array}{ccccc} \widehat{\ } & : & V & \to & V^{**} & x \mapsto \hat{x} \\ \hat{x} & : & V^* & \to & \mathbb{K} & \alpha \mapsto \langle \hat{x}, \alpha\rangle \equiv \langle \alpha, x\rangle^* \end{array}$$

Tutto quello che rimane per gli spazi normati in dimensione infinita è il seguente

Teorema II.33 *Sia X uno spazio normato e X^{**} il biduale di X. La mappa*

$$\begin{array}{ccccc} \widehat{\ } & : & V & \to & V^{**} & x \mapsto \hat{x} \\ \hat{x} & : & V^* & \to & \mathbb{K} & \alpha \mapsto \langle \hat{x}, \alpha\rangle \equiv \overline{\langle \alpha, x\rangle} \end{array}$$

è una iniezione lineare isometrica (cioè $\|\hat{x}\| = \|x\|$, per ogni $x \in X$)

Dimostrazione La mappa è ben definita essendo $\hat{x}$ (per ogni $x \in X$) un funzionale lineare e continuo su X^*, infatti

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}, \alpha + \beta\rangle &= \overline{\langle \alpha + \beta, x\rangle} = \overline{\langle \alpha, x\rangle} + \overline{\langle \beta, x\rangle} = \langle \hat{x}, \alpha\rangle + \langle \hat{x}, \beta\rangle \\ \langle \hat{x}, k\alpha\rangle &= \overline{\langle k\alpha, x\rangle} = k\overline{\langle \alpha, x\rangle} = k\,\langle \hat{x}, \alpha\rangle \\ |\langle \hat{x}, \alpha\rangle| &= \left|\overline{\langle \alpha, x\rangle}\right| = |\langle \alpha, x\rangle| \le \|x\|\,\|\alpha\| \end{aligned}$$

perciò $\|\hat{x}\| \le \|x\|$. Vediamo che la mappa $\widehat{\ }$:

$$\left\langle \widehat{x + ky}, \alpha\right\rangle = \overline{\langle \alpha, x + ky\rangle} = \overline{\langle \alpha, x\rangle} + \bar{k}\,\langle \alpha, y\rangle = \langle \hat{x}, \alpha\rangle + \langle k\hat{y}, \alpha\rangle$$

Vediamo che la mappa è isometrica. Come abbiamo già notato $\|\hat{x}\| \le \|x\|$, inoltre, se $x \neq 0$, allora, dal teorema precedente, esiste $\alpha_x \in E^*$ per cui $\|\alpha_x\| = 1$, con $\langle \alpha_x, x\rangle = \|x\|$, perciò

$$\|x\| = \langle \alpha_x, x\rangle = \left|\overline{\langle \alpha_x, x\rangle}\right| = |\langle \hat{x}, \alpha_x\rangle| \le \|\hat{x}\|$$

(c.v.d.) la tesi, visto che l'iniettività è implicata dall'isometria.

Consideriamo ora uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ siano T l'isomorfismo di Riesz tra $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}^*$ e T^* l'isomorfismo di Riesz tra $\mathcal{H}^*$ e $\mathcal{H}^{**}$. Come composizione di isomorfismi $T^* \circ T$ è un'isomorfismo, canonico, tra $\mathcal{H}$ e il suo duale, vediamo come opera:

$$x \mapsto \alpha_x \equiv (x, \cdot) \mapsto (\alpha_x, \cdot) = (T^{-1}\alpha_x, T^{-1}\cdot) = \left(x, T^{-1}\cdot\right)$$

Ora, sia $\alpha \in \mathcal{H}^*$ allora $\langle \alpha, x\rangle = \left(T^{-1}\alpha, x\right)$ dunque,

$$T^*Tx \in \mathcal{H}^{**} : \langle T^*Tx, \alpha\rangle = \left(x, T^{-1}\alpha\right) = \overline{(T^{-1}\alpha, x)} = \overline{\langle \alpha, x\rangle}\ \forall \alpha \in \mathcal{H}^*$$

allora

$$T^*T = \widehat{\ }$$

e per gli spazi di Hilbert come per gli spazi a dimensione finita, biduale e duale sono canonicamente isomorfi tramite $\widehat{\ }$. Gli spazi normati per cui $\widehat{\ }$ è un isomorfismo isometrico si dicono **riflessivi**. Condizione necessaria per la riflessività è la completezza (il biduale è sempre completo), la condizione non è però sufficiente come mostra l'esempio (nel quale non ci addentreremo di L^1).

Capitolo III

Teoria degli operatori lineari

In questo capitolo, si entra nel cuore della trattazione di questo quaderno. Lo studio degli operatori lineari viene effettuato negli spazi di Hilbert, ma non si rinuncia a una sua presentazione negli spazi di Banach (in particolare vengono dimostrati i tre principi di Banach: teorema della mappa aperta, del grafico chiuso e della uniforme limitatezza).

III.1 Operatori lineari

III.1.1 Operatori lineari

È ovvia la seguente

Definizione III.1 *Siano X e Y due spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbb{K}$. Una funzione $T : D \to Y$ definita su una varietà lineare $D \subset X$ si dice lineare (od operatore lineare o trasformazione lineare) se*

$$T(x_1 + \lambda x_2) = Tx_1 + \lambda Tx_2, \ \forall x_1, x_2 \in X \ \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

Dominio, range e kernel La varietà lineare D si chiama **dominio** di T e si indica con $D(T)$, l'immagine di D tramite T si indica con $R(T)$ (dall'inglese **range**), mentre il **nucleo** di T (l'insieme dei punti di $D(T)$ sui quali T si annulla) si indica con $\ker(T)$ (dall'inglese **kernel**).
Range e kernel sono varietà lineari. Siano y_1 e $y_2 \in R(T)$, allora esistono x_1 e $x_2 \in D(T)$ tali che

$$y_1 = Tx_1, \ y_2 = Tx_2 \Rightarrow y_1 + \lambda y_2 = Tx_1 + \lambda Tx_2 = T(x_1 + \lambda x_2)$$

siccome, per ipotesi, $x_1 + \lambda x_2 \in D(T)$ si ha che $y_1 + \lambda y_2 \in R(T)$. Per quello che riguarda il kernel, siano $x_1, x_2 \in \ker(T)$, allora

$$0 = Tx_1 + \lambda Tx_2 = T(x_1 + \lambda x_2)$$

da cui $x_1 + \lambda x_2 \in \ker(T)$.

Operatore inverso Se T è biunivoca, tra $D(T)$ e $R(T)$, allora esiste $T^{-1} : R(T) \to D(T)$, vediamo che T^{-1} è ancora lineare: siano y_1 e $y_2 \in R(T)$, allora esistono $x_1, x_2 \in D(T)$ per cui $y_1 = Tx_1$ e $y_2 = Tx_2$, da cui

$$T^{-1}(y_1 + \lambda y_2) = T^{-1}(Tx_1 + \lambda Tx_2) = T^{-1}T(x_1 + \lambda x_2) = \mathbb{I}(x_1 + \lambda x_2) = T^{-1}y_1 + \lambda T^{-1}y_2.$$

Kernel ed iniettività Ricordiamo, infine, che T è iniettiva se e solo se ha kernel banale. Infatti, sia T iniettiva, allora per ogni $x_1, x_2 \in D(T)$ si ha che $Tx_1 = Tx_2 \Rightarrow x_1 = x_2$, cioè, ponendo $x_2 = 0$ vale la seguente implicazione $T(x_1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, da cui $\ker T = \{0\}$. Viceversa, sia $\ker T$ banale, allora se $Tx_1 = Tx_2$, allora $x_1 - x_2 \in \ker T$, perciò $x_1 - x_2 = 0$.

III.1.2 Operatori lineari continui

Siano X, Y spazi normati e consideriamo l'insieme $\hom(X, Y)$ delle funzioni lineari da X in Y. Vogliamo considerarne il sottoinsieme $L(X, Y)$ costituito dalle funzioni lineari continue a dominio su X. Procederemo come già per il duale nel capitolo II.

Ricordiamo che T è continua se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ per cui

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$$

Proposizione III.1 *Sia T un operatore lineare tra gli spazi normati X e Y. T è continuo sul dominio $D(T)$ se e solo se è continuo nell'origine.*

Dimostrazione Una implicazione è ovvia. Sia ora T continuo nell'origine di X, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta(\varepsilon) > 0$ talché

$$\|x\| < \delta \Rightarrow \|Tx\| < \varepsilon$$

Sia ora $x_0 \in D(T)$ qualsiasi, fissato $\varepsilon > 0$, troviamo $\delta(\varepsilon) > 0$ per cui

$$\|z - x_0\| < \delta \Rightarrow \|T(z - x_0)\| = \|Tz - Tx_0\| < \varepsilon$$

(c.v.d.) da cui T è continuo in $x_0 \in D(T)$. La tesi segue dall'arbitrarietà di x_0.

Ne abbiamo subito, ripercorrendo la dimostrazione

Corollario III.1 *Sia T un operatore lineare tra gli spazi normati X e Y. T è uniformemente continuo sul dominio $D(T)$ se e solo se è continuo nell'origine.*

La continuità nell'origine equivale alla lipschitzianità

Proposizione III.2 *Sia T un operatore lineare tra gli spazi normati X e Y. T è continuo nell'origine se e solo se è ivi lipschitziano, cioè se e solo se esiste $M > 0$ tale che*

$$\|Tx\| \leq M\|x\|$$

Dimostrazione Se T è lipschitziano nell'origine è ivi continuo: basta porre $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/M$. Vediamo il viceversa. Posto $\varepsilon = 1$ esiste $\delta(1)$ tale che

$$\|x\| \leq \delta(1) \Rightarrow \|Tx\| < 1$$

sia ora $x \in D(T)$ con $x \neq 0$, allora

$$x = \frac{\|x\|}{\delta(1)} \frac{\delta(1)}{\|x\|} x$$

perciò

$$\left\| T \frac{\delta(1)\, x}{\|x\|} \right\| < 1$$

da cui

$$\|Tx\| = \frac{\|x\|}{\delta(1)} T\left(\frac{\delta(1)\, x}{\|x\|}\right) < \frac{\|x\|}{\delta(1)}$$

(c.v.d.) e basta porre $M \equiv 1/\delta(1)$.

Si noti come la lipschitzianità nell'origine è equivalente alla lipschitzianità di T sul suo intero dominio.

Definizione III.2 *Un operatore lineare da X in Y si dice limitato se trasforma sottoinsiemi limitati di X in sottoinsiemi limitati di Y.*

Proposizione III.3 *Un operatore lineare T, a dominio in X, da X in Y è lipschitziano nell'origine se e solo se è limitato.*

Dimostrazione Se T è limitato, allora manda il bordo della palla unitaria di X, $\mathcal{S}_X$, in un sottoinsieme limitato di Y, perciò esiste $M > 0$ tale che

$$\|x\| = 1 \Rightarrow \|Tx\| \leq M$$

preso ora $z \in D(T)$

$$\|Tz\| = \left\| T\left(\frac{z}{\|z\|}\|z\|\right)\right\| \leq M\|z\|.$$

Viceversa, sia $A \subset X$ limitato, allora esiste m tale che $x \in A \Rightarrow \|x\| \leq m$, allora

$$\|Tx\| \leq M\|x\| \leq Mm$$

(c.v.d.) perciò $T(A)$ è limitato.

Proprietà equivalenti alla continuità di α In definitiva sono equivalenti i seguenti fatti

(i) T è continuo su $D(T)$;

(ii) T è uniformemente continuo su $D(T)$;

(iii) T è continuo nell'origine;

(iv) T è lipschitziano (nell'origine);

(v) T è limitato (i.e. manda limitati in limitati).

III.1.3 Norma operatoriale

L'insieme degli operatori lineari (continui) è chiaramente uno spazio vettoriale. Vogliamo trasformare $L(X,Y)$ in uno spazio normato. Per far questo dobbiamo premettere la seguente

Proposizione III.4 *Siano X, Y spazi normati. $T \in \hom(X,Y)$, è continuo se e solo se esiste $\ell > 0$ talché*

$$\|Tx\| \leq \ell\|x\|, \ \forall x \in X$$

Esiste una minima costante $\ell > 0$ per cui questo accade (migliore costante di Lipschitz) ed è tale che

$$\ell = \sup\{\|Tx\| \,|x \in B_X(0,1] \cap D(T)\} = \sup\{\|Tx\| \,|x \in \mathcal{S}_X \cap D(T)\} =$$
$$= \sup\left\{\left.\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\right| x \in D(T) \setminus \{0\}\right\}$$

Dimostrazione La prima parte è già stata dimostrata. Vediamo la seconda. Banalmente si ha che tutte gli $l \in \mathbb{R}^+$ costanti di Lipschitz per T sono maggioranti della quantità definita su $D(T) \setminus \{0\}$

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

perciò, il loro inf (che esiste per l'assioma di continuità e apprtiene a $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$) è in realtà un minimo che per definizione vale

$$\ell = \sup\left\{\left.\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\right| x \in D(T) \setminus \{0\}\right\}$$

D'altra parte la condizione di Lipschitz deve valere in particolare su $B(0,1] \cap D(T)$ perciò, per ogni costante di Lipschitz di T

$$\|Tx\| \leq l, \ \forall B(0,1] \cap D(T)$$

ne consegue che

$$\ell' \equiv \sup\{\|Tx\| \,|x \in B_X(0,1] \cap D(T)\} \leq \ell$$

D'altra parte, ℓ' è una costante di Lipschitz, sicché $\ell \leq \ell'$. Infatti, se $z \in D(T) \setminus \{0\}$ si ha

$$\|Tx\| = \|x\| \left\| T\frac{x}{\|x\|}\right\| \leq \ell'\|x\|$$

Analogamente si procede sulla sfera unitaria di X (notiamo che se $D(T)$ non è banale l'intersezione di $D(T)$ con palla e sfera è non vuota, essendo $D(T)$ lineare).

(c.v.d.)

Osservazione III.1 Dalla proposizione discende che una funzione lineare è continua se e solo se è limitata sulla sfera unitaria. D'altra parte è limitata sulla sfera unitaria se e solo se è limitata sulla palla aperta di centro l'origine. Infatti, se per ogni versore $\|Tu\| \leq \ell$ si ha per ogni $x \in B(0,1)$, $\|Tx\| \leq \ell \|x\| < \ell$. D'altra parte se per ogni $x \in B(0,1)$ si ha $\|T\mathbf{x}\|_Y \leq \ell'$, si ha che, posto $u = x/\|x\|$, per ogni intero $n > 0$

$$\left\|T\left(u - \frac{1}{n}u\right)\right\| = \|Tu\|\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq \ell'$$

da cui, passando al limite per $n \to \infty$, $\|Tu\|_Y \leq \ell'$. ▪

Norma operatoriale Consideriamo $L(X,Y)$, lo spazio degli operatori continui a dominio su X. Vogliamo normare tale spazio con la migliore costante di Lipschitz, che certo esiste in forza della proposizione precedente. Verifichiamo che

$$\begin{aligned}\|T\| &= \inf\{l \geq 0 \,|l \text{ costante di Lipschitz di } T\} = \sup\{\|Tx\| \,|x \in B_X(0,1]\} = \\ &= \sup\{\|Tx\| \,|x \in \mathcal{S}_X\} = \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\middle| x \in X\setminus\{0\}\right\}\end{aligned}$$

è una norma su $L(X,Y)$:

$$\|T\| \geq 0 \; \forall T \in L(X,Y)$$

se $\|T\| = 0$ allora tutti i versori di X sono mandati in 0, perciò

$$T(x) = \frac{1}{\|x\|}T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = 0.$$

Se poi $T, S \in L(X,Y)$ abbiamo, sulla sfera

$$\|(T+S)x\| = \|Tx + Sx\| \leq \|Tx\| + \|Sy\| \leq (\|T\| + \|S\|)$$

da cui

$$\|T+S\| \leq \|T\| + \|S\|.$$

Infine, sempre sulla sfera unitaria

$$\|(kT)x\| = \|kTx\| = |k|\,\|Tx\|$$

da cui

$$\|kT\| = \sup\|(kT)x\| = \sup|k|\,\|Tx\| = |k|\sup\|Tx\| = |k|\,\|T\|.$$

La norma costruita si chiama **norma operatoriale**.

Esempio III.1 Consideriamo ora gli spazi normati a dimensione finita $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^m$ con le norme euclidee. Vediamo anzitutto che $L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m) = \hom(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$. Sia infatti $T \in \hom(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$, allora T è identificato da una matrice $T \in \mathcal{M}(m,n;\mathbb{C})$. Sia $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, per la disuguaglianza di Cauchy e Schwarz

$$\|Tx\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (T_i, x)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m \|T_i\|_n^2 \|x\|^2} \leq \|x\|^2 \sqrt{\sum_{i \in J_m, j \in J_n} T_{i,j}^2} = \sqrt{\sum_{i \in J_m, j \in J_n} T_{i,j}^2}$$

da cui la limitatezza.

Vogliamo adesso calcolare esattamente quanto vale la norma di T. Per far questo procediamo per gradi. Sia $T \in \mathcal{M}(n,n;\mathbb{C})$ diagonale, allora

$$\|Tx\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (T_i, x)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^m T_{ii}^2 x_i^2} \leq \max_{i \in J_n} T_{ii} \|x\|$$

preso poi $x = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ con l'unica componente non nulla nell'indice al quale si realizza il massimo degli autovalori di T, si trova che $\|T\|$ è il massimo degli autovalori di T. Sia ora T qualsiasi. Consideriamo la matrice quadrata T^+T dove T^+ è la trasposta coniugata di T, cioè $T^+ = T^{t*}$. Come è noto

$$(x, Tx') = x^{t*}Tx' = \left(T^+x\right)^{t*} x' = \left(T^+x, x'\right)$$

In quanto hermitiana essa è diagonalizzabile, perciò $\|T^+T\|$ è il massimo dei suoi autovalori. Tuttavia, preso $x \in \mathbb{S}^{n-1}$

$$\|Tx\|^2 = |(Tx, Tx)| = \left|(x, T^+Tx)\right| \leq \left\|T^+T\right\|$$

si trova

$$\|T\|^2 \leq \left\|T^+T\right\|$$

D'altronde, se $x, x' \in \mathbb{S}^{n-1}$ abbiamo

$$\left|(x, T^+Tx')\right| = |(Tx, Tx')| \leq \|T\|^2$$

da cui

$$\left\|T^+Tx\right\| \leq \|T\|^2$$

perciò $\|T\|^2 = \|T^+T\|$ e

$$\|T\| = \sqrt{\max\{|\lambda_i| \, | \lambda_i \text{ autovalore di } T^+T\}}$$

■

Osservazione III.2 Siano X, Y spazi normati con $T \in \hom(X, Y)$ iniettiva e perciò invertibile da $R(T)$ in X. Sia S l'inversa di T, essa è continua se e solo se vale

$$\inf\{\|Tx\| \, | x \in \mathcal{S}_X \cap D(T)\} = \alpha > 0$$

infatti, sia $y \in R(T)$, con $y \neq 0$, allora esiste ed è unico $x \neq 0$, tale che $y = Tx$, si ha

$$\|y\| = \|Tx\| \geq \alpha \|x\|$$

perciò

$$\|Sy\| \leq \frac{1}{\alpha} \|y\|$$

da cui la continuità di S.
Notiamo, in conclusione, che la condizione

$$\|Tx\| \geq \alpha \|x\|, \forall x \in D(T)$$

implica l'iniettività di T. Infatti, se $Tx = 0$, allora

$$0 \leq \alpha \|x\| \leq 0$$

■ da cui $\|x\| = 0$ cioè $x = 0$.

Completezza di $L(X, Y)$

Teorema III.1 *Siano X uno spazio normato e Y uno spazio di Banach, allora lo spazio normato $L(X, Y)$ è esso stesso di Banach.*

Dimostrazione Bisogna dimostrare la completezza di $L(X, Y)$. Sia $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di operatori lineari continui. Siccome

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\|$$

abbiamo che la successione $\{T_n x\}_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$ è di Cauchy per ogni $x \in X$. La completezza di Y implica dunque che, per ogni x, esiste il limite puntuale in Y

$$Tx \equiv \lim_{n \to \infty} T_n x.$$

Si ha subito che T è lineare. La continuità di T si ottiene come segue: la successione $\{T_n\}$ è di Cauchy perciò è limitata, dunque, esiste $k \in \mathbb{R}^+$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\|T_n\| \leq k$$

sicché, per ogni n, $\|T_n x\| \leq k \|x\|$

$$\|Tx\| = \left\|\lim_{n \to \infty} T_n x\right\| = \lim_{n \to \infty} \|T_n x\| \leq k \|x\|$$

Dunque, T è un operatore lineare e continuo.

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un N_ε tale che

$$n, m > N_\varepsilon \Rightarrow \|T_n - T_m\| < \varepsilon$$

allora, per ogni $x \in X$

$$\|T_n x - T_m x\| < \varepsilon \|x\|$$

Passiamo al limite per $m \to \infty$, se $n > N_\varepsilon$

$$\lim_{m\to\infty} \|T_n x - T_m x\| = \left\| T_n x - \lim_{m\to\infty} T_m x \right\| = \|T_n x - T x\| < \varepsilon \|x\| \ \forall x \in X$$

da cui

$$\|T_n - T\| < \varepsilon$$

(c.v.d.) la tesi.

Siano $X = Y \equiv E$ spazio di Banach, nell'insieme $L(E)$ possiamo introdurre la composizione: $A, B \in L(E)$ definiamo

$$AB \equiv A \circ B$$

allora

$$\|ABx\| \leq \|A\| \|Bx\| \leq \|A\| \|B\| \|x\|$$

da cui $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$. Le operazioni di addizione, moltiplicazione scalare e composizione fanno dello spazio di Banach $L(E)$ un'**algebra associativa** non commutativa (non appena $\dim L(E) > 1$). La composizione in $L(E)$ è un'operazione (come addizione, moltiplicazione e norma) continua da $L(E) \times L(E)$ in $L(E)$. Sia $(A, B) \in L(E) \times L(E)$ e siano $\{A_n\}$ e $\{B_n\}$ a valori in $L(E)$ tendenti ad A e B rispettivamente, allora

$$\|AB - A_n B_n\| = \|AB - A_n B + A_n B - A_n B_n\| \leq \|A - A_n\| \|B\| + \|A_n\| \|B - B_n\|$$

Siccome la successione A_n converge, essa è di Cauchy, perciò limitata e quindi $\|A_n\| \leq |k|$ perciò la successione $\{A_n B_n\}$ converge alla $\{AB\}$.

Infine, $L(E)$ è un'**algebra associativa di Banach con identità** essendo l'identità $id_E \equiv \mathbb{I}$.

III.1.4 Continuità delle applicazioni lineari in dimensione finita

Vogliamo indagare il comportamento delle funzioni lineari in dimensione finita, vedremo che esse sono sempre continue

Lemma III.1 *Siano X un $\mathbb{K}$-spazio normato e $T : \mathbb{K}^n \to X$ un'applicazione lineare. Normato $\mathbb{K}^n$ con la norma del massimo $\|v\|_\infty \equiv \max_{k\in J_n} \left\{ \left|v^k\right| \right\}$, si ha che T è continua.*

Dimostrazione Prendiamo $v \in \mathbb{K}^n$, sulla base standard $\{e_k\}$ di $\mathbb{K}^n$, si ha che T è univocamente determinata dalle $T(e_k) = w_k \in X,\ k \in J_n$

$$\|Tv\| = \left\| \sum_{k=1}^n v^k w_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n \left|v^k\right| \|w_k\| \leq L \|v\|_\infty$$

(c.v.d.) perciò T è continua.

Lemma III.2 *Siano X un $\mathbb{K}$-spazio normato di dimensione finita e $\omega : \mathbb{K}^n \to X$ un isomorfismo lineare. Normato $\mathbb{K}^n$ con la norma del massimo $\|v\|_\infty \equiv \max_{k\in J_n} \left\{ v^k \right\}$, si ha che ω è un omeomorfismo.*

Dimostrazione Per il lemma precedente ci basta vedere che ω^{-1} è continua. A tale scopo utilizziamo l'osservazione III.2. La sfera dei versori di $\mathbb{K}^n$ è ovviamente chiusa e limitata, perciò compatta. La funzione $\|\omega\|_X : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^+$ è continua (come composizione di funzioni continue) e perciò ammette minimo in un versore. D'altra parte tale minimo è certo diverso da 0 poiché ω è un

(c.v.d.) isomorfismo e si annulla solo sullo 0, se ne ricava che $\inf \{ \|\omega \mathbf{v}\|_X | \mathbf{v} \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} \} = \alpha > 0$.

Un esempio di applicazione dei due lemmi mostrati è il

Teorema III.2 (di Heine, Pincherle, Borel) *In uno spazio normato di dimensione finita, un sottoinsieme è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

Dimostrazione Sia X lo spazio normato, esso è, in ogni caso, un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, perciò è isomorfo secondo ω (isomorfismo di passaggio alle coordinate) a $\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^{\dim_{\mathbb{R}} X}$. ω è un omeomorfismo da $\mathbb{R}^n$ in X, perciò manda compatti in compatti e chiusi in chiusi; limitati in limitati per lipschitzianità, dal teorema di Heine, Pincherle e Borel nel caso reale (noto senz'altro dall'Analisi II) si perviene alla conclusione.

(c.v.d.)

Più importante, è però il seguente

Teorema III.3 (della continuità degli omomorfismi in dimensione finita) *Ogni funzione lineare tra spazi normati il cui dominio sia in dimensione finita è continua.*

Dimostrazione Sia X normato di dimensione finita e, preso Y normato, consideriamo $T \in \hom(X, Y)$. Prendiamo $\omega : \mathbb{K}^n \to X$ isomorfismo. Allora $T \circ \omega : \mathbb{K}^n \to Y$ è continua per il lemma III.1, ma per il lemma precedente $\omega^{-1} : X \to \mathbb{K}^n$ è continua, sicché risulta continua

$$T = (T \circ \omega) \circ \omega^{-1}$$

(c.v.d.)

III.1.5 Equivalenza delle norme in dimensione finita

Prima di proseguire, riteniamo utile una digressione sull'equivalenza delle norme in dimensione finita. La trattazione dell'argomento applica infatti quanto appreso nelle precedenti sottosezioni.

Norme più fini Consideriamo due norme definite sullo stesso spazio vettoriale X, $\|\cdot\|_\alpha, \|\cdot\|_\beta$. Ognuna genera una famiglia di aperti in X, la topologia indotta. Siano τ_α e τ_β le topologie generate da $\|\cdot\|_\alpha$ e $\|\cdot\|_\beta$ rispettivamente. Diciamo che τ_α è **più fine** di τ_β se ogni aperto di τ_β appartiene a τ_α (τ_α ha più aperti di τ_β), cioè se $\tau_\beta \subset \tau_\alpha$. Equivalentemente, per ogni punto $\xi \in X$, se U è un τ_β-intorno, allora esso è un τ_α-intorno, e questo è vero se e solo se ogni palla della norma β contiene una palla nella norma α (e per traslazione è sufficiente considerare palle centrate nell'origine). In termini intuitivi, la condizione di vicinanza e convergenza imposta dalla $\|\cdot\|_\alpha$ è più stringente di quella imposta dalla $\|\cdot\|_\beta$.
Un secondo modo equivalente per espirimere il fatto che la topologia indotta dalla α-norma è più fine di quella indotta dalla β-norma è il seguente

Proposizione III.5 *Date due norme $\|\cdot\|_\alpha, \|\cdot\|_\beta$ definite sullo spazio X, la topologia τ_α indotta dalla prima è più fine di quella indotta dalla seconda, τ_β, se e solo se*

(i) *l'applicazione identica*

$$I : (X, \|\cdot\|_\alpha) \to \left(X, \|\cdot\|_\beta\right)$$

è continua;

(ii) *esiste una costante $\ell > 0$ per cui, per ogni $\xi \in X$*

$$\|\xi\|_\beta \le \ell \|\xi\|_\alpha$$

Dimostrazione I è continua se e solo se $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : B_\alpha(0, \delta) \subseteq B_\beta(0, \varepsilon)$, la qual cosa equivale ad affermare che la topologia τ_α è più fine della τ_β.
D'altra parte la continuità di I, lineare, sussiste se e solo esiste la costante ℓ per cui

$$\|\xi\|_\beta \le \ell \|\xi\|_\alpha$$

(c.v.d.)

Norme equivalenti La nozione di convergenza sarà equivalente nelle due norme se le rispettive topologie saranno l'una più fine dell'altra, cioè se e solo se $\tau_\alpha = \tau_\beta$. Per quanto detto, l'equivalenza delle norme si ha se e solo se esistono due costanti $\lambda, \ell > 0$, per cui

$$\lambda \|\xi\|_\alpha \leq \|\xi\|_\beta \leq \ell \|\xi\|_\alpha$$

Infine, diremo che una norma è **strettamente più fine** di un'altra se l'applicazione identica da X normato con la più fine, in X normato dalla meno fine, è continua, ma la sua inversa non è continua.

Equivalenza delle norme in dimensione finita Il teorema della continuità degli omomorfismi in dimensione finita consente di concludere il seguente fondamentale

Teorema III.4 *Su uno spazio di dimensione finita tutte le norme sono equivalenti.*

Dimostrazione Infatti, per il teorema della continuità degli omomorfismi in dimensione finita, l'identità da X con una norma, in X con un'altra norma, come applicazione lineare, sarà continua nei due sensi.

(c.v.d.)

Consideriamo ancora uno spazio normato X di dimensione finita. Certamente esso è isomorfo a $\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^{\dim_{\mathbb{R}} X}$. Fissiamo una base $\mathcal{B}$ su X. Resta univocamente definito l'isomorfismo di passaggio alle coordinate $[\cdot]_{\mathcal{B}} : X \to \mathbb{R}^n$ e che a ogni elemento di X associa il vettore di $\mathbb{R}^n$ formato dalle sue componenti sulla base $\mathcal{B}$. Su X definiamo la norma (verificare che si tratta di una norma è immediato)

$$x \in X \mapsto \|x\|_n \equiv \|[x]_{\mathcal{B}}\|_\infty$$

Allora $[\cdot]_{\mathcal{B}}$ è un isomorfismo isometrico di spazi normati. Se ora $\{x_n\} \subset X$ è di Cauchy, la successione $\{[x_n]_{\mathcal{B}}\} \subset \mathbb{R}^n$ è essa stessa di Cauchy, perciò, per completezza di $\mathbb{R}^n$, converge. Dunque, $[x_n]_{\mathcal{B}} \to v \in \mathbb{R}^n$. Preso $x \equiv [v]_{\mathcal{B}}^{-1} \in X$ (che esiste ed è unico) si ha che

$$\|x - x_n\|_n = \|v - [x_n]_{\mathcal{B}}\|_\infty \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

Allora $(X, \|\cdot\|_n)$ è completo. Ma siccome tutte le norme sono equivalenti, X è completo quale che sia la norma scelta

Teorema III.5 *Uno spazio normato di dimensione finita è completo.*

III.2 I principi di Banach

In questa sezione ci occupiamo di tre teoremi fondamentali dovuti a Banach e che riguardano gli operatori lineari sugli spazi di Banach. Tutti i risultati che otterremo sono conseguenza di un teorema tipicamente topologico del quale ci occupiamo nella prima sottosezione: il teorema di Baire-Hausdorff

III.2.1 Il teorema di Baire-Hausdorff

Richiamiamo la seguente

Definizione III.3 *Sia X uno spazio topologico e sia $M \subset X$. M si dice non denso se la sua chiusura M^a non contiene aperti (non vuoti) di X. M si dice denso se $M^a = X$. Inoltre, M si dice della prima categoria se è unione numerabile di insiemi non densi, altrimenti, si dice della seconda categoria.*

È naturale chiedersi la relazione che sussiste tra la nozione di densità e quella di non densità. Ora, se M è non denso, allora M^c è denso. Infatti

$$X = M^c \cup M$$

perciò bisogna mostrare che $M \subset \mathcal{D}M^c$, cioè che i punti di M sono di accumulazione per il suo complementare. Infatti, sia $x \in M$ e sia U un qualsiasi aperto contenente x. Allora U non può essere contenuto in M e perciò interseca M^c, dunque $x \in \mathcal{D}M$:

Proposizione III.6 *Sia X uno spazio topologico e sia $M \subset X$ un sottoinsieme non denso. Allora M^c è denso in X.*

Ebbene, sussiste il seguente

Teorema III.6 (di Baire-Haussdorf) *Uno spazio metrico completo non vuoto è della seconda categoria.*

Dimostrazione Sia X uno spazio metrico completo. Sia $\{M_n\}$ una successione di chiusi la cui unione è X. Se assumiamo che nessun M_n contenga aperti (non vuoti) di X, dobbiamo derivarne un assurdo. Consideriamo l'insieme M_1. Allora M_1^c è un aperto e, per la proposizione precedente, è denso in X, cioè $(M_1^c)^a = X$. Ora, preso un qualsiasi punto $x_1 \in M_1^c$ esiste una sfera chiusa di centro x_1 tutta contenuta in M_1^c, $S_1 \equiv B\,(x_1, r_1]$. Notiamo che x_1 può essere scelto arbitrariamente vicino a un qualsiasi punto di X (per densità) e che è sempre possibile supporre (a meno di restrizione) che $r_1 < 1/2$. Proprio in forza di quanto detto, è possibile trovare una palla $S_2 \equiv B\,(x_2, r_2]$ tutta contenuta in M_2^c e in S_1 (infatti, anche M_2^c è denso in X, perciò possiamo prendere x_2 sufficientemente vicino a x_1) di raggio $r_2 < 1/4$. Procedendo per induzione, otteniamo una successione $\{S_n\}$ di palle chiuse di raggi $r_n < 1/2^n$, tali che $S_{n+1} \subset S_n$ e $S_n \cap M_n = \varnothing$. Ne deriva che la successione dei centri $\{x_n\} \subset X$ è di Cauchy: se $m > n$

$$d\,(x_n, x_m) < r_n < \frac{1}{2^n}$$

Ne deriva che esiste il limite $x_\infty \in X$ per $n \to \infty$ di x_n. D'altra parte

$$d\,(x_n, x_\infty) \le d\,(x_n, x_m) + d\,(x_m, x_\infty) < r_n + d\,(x_m, x_\infty) \stackrel{m\to\infty}{\to} r_n$$

Ne consegue che per ogni n $x_\infty \in S_n$, da cui per ogni n $x_\infty \notin M_n$ e, in definitiva, l'assurdo $x_\infty \notin X$. **(c.v.d.)**

III.2.2 Il teorema della mappa aperta

Prima di cominciare la trattazione del teorema della mappa aperta, vogliamo ricordare alcuni fatti fondamentali sulle serie negli spazi di Banach. Vogliamo dimostrare la semplice

Proposizione III.7 *In uno spazio di Banach ogni serie assolutamente convergente è convergente.*

Dimostrazione Sia

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

assolutamente convergente. Ne segue che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste K_ε tale che

$$n \ge m \ge K_\varepsilon \Rightarrow \sum_{i=m+1}^{n} \|u_i\| < \varepsilon$$

se s_n è la successione delle somme parziali della serie si ha

$$\|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{i=m+1}^{n} u_i \right\| \le \sum_{i=m+1}^{n} \|u_i\| < \varepsilon$$

perciò la serie è di cauchy ed essendo lo spazio completo converge a un elemento dello spazio. **(c.v.d.)**

Il primo principio di Banach che mostreremo è il teorema della mappa aperta. per la sua dimostrazione ci occorre ancora un

Lemma III.3 *Sia $A \in L\,(X, Y)$ un operatore lineare suriettivo tra gli spazi di Banach X e Y. Allora l'immagine tramite A della palla unitaria di X contiene una palla di centro l'origine di Y.*

Dimostrazione

Consideriamo la successione delle palle aperte
$$S_n \equiv B_X\left(0, 1/2^n\right)$$
Ora, certamente
$$X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} kS_1$$
allora
$$Y = \bigcup_{k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} kA\left(S_1\right)$$
Infatti, l'unione è banalmente contenuta in Y. Vediamo il viceversa. Sia $y \in Y$, siccome A è suriettivo, esiste un x talché $y = Ax$. Allora, scelto $k \in \mathbb{N}$ tale che (principio di Archimede)
$$k > 2\left\|x\right\|$$
si ha
$$y = kA\left(\frac{x}{k}\right)$$
dove
$$\left\|\frac{x}{k}\right\| < \frac{1}{2}.$$
Ora, Y è completo, perciò, per il teorema di Baire-Hausdorff, deve esistere almeno un $k_0 \in \mathbb{N}$ per cui l'insieme $\left[k_0 A\left(S_1\right)\right]^a$ deve contenere una palla. Esistono cioè $z \in Y$ e $r \in \mathbb{R}^+$ per cui
$$B_Y\left(z, r\right) \subset \left[k_0 A\left(S_1\right)\right]^a$$
ne consegue che per ogni $y : \left\|y - z\right\| < r$ esiste una successione $\{x_n\} \subset S_1$ tale che
$$y = \lim_{n\to\infty} k_0 A x_n$$
allora per ogni $y' : \left\|y' - z/k_0\right\| < r/k_0$ esiste una successione $\{x_n\} \subset S_1$ tale che
$$y' = \lim_{n\to\infty} A x_n$$
infatti $k_0 y' \in B_Y\left(z, r\right)$. Ne consegue che esiste una palla tutta contenuta in $A\left(S_1\right)^a$, chiamiamola prevemente $B_Y\left(z, \eta\right)$.

Questo comporta che
$$B_Y\left(0, \eta\right) \subset A\left(S_1\right)^a - z \subset A\left(S_0\right)^a$$
dimostriamo la seconda inclusione. Sia $y \in A\left(S_1\right)^a - z$, allora esistono $\{x_n\}, \{w_n\} \subset S_1$ tale che
$$y = \lim_{n\to\infty} Ax_n - \lim_{n\to\infty} Aw_n = \lim_{n\to\infty} A\left(x_n - w_n\right)$$
Ora
$$\left\|x_n - w_n\right\| \le \left\|x_n\right\| + \left\|w_n\right\| < 1.$$
Dunque $B_Y\left(0, \eta\right) \subset A\left(S_0\right)^a$. La linearità di A consente ancora di avere
$$B_Y\left(0, \frac{\eta}{2^n}\right) \subset A\left(S_n\right)^a$$
sia $y' \in B_Y\left(0, \eta/2^n\right)$ allora $y \equiv 2^n y' \in B_Y\left(0, \eta\right)$ Esiste allora una successione $\{x_m\} \subset S_0$ tale che
$$2^n y' = \lim_{m\to\infty} Ax_m \Rightarrow y' = \lim_{m\to\infty} A\left(\frac{x_m}{2^n}\right)$$
con $\{x_m/2^n\} \subset S_n$.

Prendiamo ora $y \in Y$ con $\left\|y\right\| < \eta/2$, allora $y \in A\left(S_1\right)^a$ e perciò esiste $x_1 \in S_1$ tale che
$$\left\|y - Ax_1\right\| < \frac{\eta}{4}$$

Ma allora $(y - Ax_1) \in A(S_2)^a$ perciò esiste x_2 tale che

$$\|y - Ax_1 - Ax_2\| < \frac{\eta}{8}$$

Per induzione si costruisce una successione $\{x_n\} \subset X$ con $\|x_n\| < 1/2^n$ tale che

$$\left\| y - \sum_{k=1}^{n} Ax_k \right\| < \frac{\eta}{2^{n+1}}$$

Ora, siccome A è continuo e la serie degli x_k converge assolutamente a un elemento v di S_0

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|x_k\| < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

si ha che $y = Av$ con $v \in B_X(0,1)$. Ne deriva che

$$B_Y\left(0, \frac{\eta}{2}\right) \subset A(B_X(0,1)).$$

(c.v.d.)

Siamo infine in grado di dimostrare il

Teorema III.7 (della mappa aperta) *Un operatore lineare continuo suriettivo tra gli spazi di Banach X e Y, mappa aperti di X in aperti di Y.*

Dimostrazione Sia S un aperto di X e sia $y \in A(S)$. Allora esiste $x \in S$ tale che $y = Ax$. Consieriamo la palla di centro x tutta contenuta in S, $B_X(x,r)$. Siccome $B_X(x,r) \subset S$, allora $A_X(B(x,r)) \subset A(S)$. Ora, dal lemma precedente, esiste una palla $B_Y(0,r')$ contenuta in $A(B_X(0,1))$, allora

$$\begin{aligned} B_Y(y,r') &\subset A(B_X(x,1)) \\ B_Y(y,rr') &\subset A(B_X(x,r)) \subset A(S) \end{aligned}$$

da cui $A(S)$ è aperto.

(c.v.d.)

III.2.3 Un'applicazione del teorema della mappa aperta: $GL(E)$

Inversa di un'applicazione lineare Dall'osservazione III.2 sappiamo che un applicazione lineare è invertibile sulla propria immagine con inversa continua se e solo se esiste $\mu > 0$ tale che

$$\|Ax\| \geq \mu \|x\|, \forall x \in D(A)$$

D'altra parte, se $D(A) = X$ e A è iniettivo e suriettivo, cioè biunivoco, per il teorema della mappa aperta A^{-1} è continuo. Infatti, la controimmagine tramite A^{-1} di un aperto S di X è $A(S)$ che è aperto.
Ne ricaviamo il seguente

Teorema III.8 (dell'inverso limitato) *Siano X e Y spazi di Banach e sia $A \in L(X,Y)$ invertibile. Se A è suriettivo allora ammette inverso continuo, cioè $A^{-1} \in L(Y,X)$.*

Da cui si ha subito il seguente

Corollario III.2 *Sia X uno spazio di Banach rispetto alle norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ ed esista una costante $\ell \in \mathbb{R}^+$ talché*

$$\|x\|_1 \leq \ell \|x\|_2 \;\; \forall x \in X$$

allora le due norme sono equivalenti, i.e. esiste $\ell' \in \mathbb{R}^+$ per cui

$$\|x\|_2 \leq \ell' \|x\|_1 \;\; \forall x \in X$$

Dimostrazione L'identità tra $(X, \|\cdot\|_1)$ e $(X, \|\cdot\|_2)$ è un applicazione invertibile e, per ipotesi, continua, perciò ammette inversa continua, da qui la tesi.

(c.v.d.)

Se ora poniamo $X = Y \equiv E$, abbiamo che il sottoinsieme di $L(E)$ formato dagli elementi **regolari** di $L(E)$, cioè continui e tali che l'inversa continui ad appartenere a $L(E)$, forma un gruppo rispetto alla composizione: grazie al teorema precedente tale gruppo è formato dagli operatori lineari continui e biunivoci. Il gruppo degli elementi regolari di $L(E)$ si indica con $GL(E)$ cioè **gruppo lineare generale** dello spazio di Banach E.

Prima di proseguire oltre, vogliamo dimostrare che $GL(E)$ è aperto in $L(E)$. Poniamo intanto la

Proposizione III.8 *Se E è uno spazio di Banach e $A \in L(E)$ allora sono equivalenti le seguenti affermazioni*

(i) $A \in GL(E)$;

(ii) $\exists B \in \text{end}(E) : BA = AB = \mathbb{I}$;

se un tale B esiste allora è unico.

Dimostrazione (i) implica (ii) per definizione, preso $B \equiv A^{-1}$. Si supponga vera (ii). A è invertibile: $BA = \mathbb{I}$ implica che $\ker(BA) = \{0\}$ da cui $\ker(A) = \{0\}$; $AB = \mathbb{I}$ implica $R(A) = E$. Dal teorema dell'inverso limitato, essendo A per ipotesi continuo, si deduce che A^{-1} è continuo.

Vediamo l'unicità di B. Sia B' tale che $B'A = AB' = \mathbb{I}$. Allora $A^{-1} = A^{-1}BA$ e $A^{-1} = A^{-1}AB'$ ne segue

$$\begin{aligned} B &= AA^{-1}A^{-1} = A^{-1} \\ B' &= AA^{-1}A^{-1} = A^{-1} \end{aligned}$$

(c.v.d.)

Teorema III.9 *Dato uno spazio di Banach E, sia $A \in L(E)$. Se $\|A\| < 1$ allora*

(i) *la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n$ è assolutamente convergente, perciò è convergente;*

(ii) $(\mathbb{I} - A) \in GL(E)$ *e* $(\mathbb{I} - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n$;

(iii) *infine,*

$$\left\|(\mathbb{I} - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Dimostrazione (i) Come sappiamo

$$\|A^n\| \leq \|A\|^n$$

perciò se $\|A\| < 1$ la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n$ è assolutamente convergente e perciò convergente: si ha inoltre

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|A^n\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1 - \|A\|}$$

(ii) Poniamo $B \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} A^n$ Abbiamo

$$AB = BA = \sum_{n=0}^{+\infty} A^{n+1}$$

Da ciò si ha

$$(\mathbb{I} - A) B = B (\mathbb{I} - A)$$

e

$$(\mathbb{I} - A) B = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n - \sum_{n=0}^{+\infty} A^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n - \sum_{n=1}^{+\infty} A^n = \mathbb{I}$$

Allora, per la proposizione di sopra, $B = (\mathbb{I} - A)$ e dunque

$$(\mathbb{I} - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n.$$

(iii) Si ha subito

$$\left\|(\mathbb{I} - A)^{-1}\right\| = \left\|\sum_{n=0}^{+\infty} A^n\right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1 - \|A\|}$$

(c.v.d.)

$GL(E)$ aperto in $L(E)$ Dimostriamo ora che $GL(E)$ è aperto. Prendiamo un qualsiasi $A \in GL(E)$. Fissata una costante ℓ si trova sempre T tale che $\|T\| \leq \ell$, basta scegliere per T l'operatore $\ell T/2\|T\|$. Allora esiste B in $L(E)$ tale che

$$\|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

allora

$$\left\|\mathbb{I} - A^{-1}B\right\| = \left\|A^{-1}A - A^{-1}B\right\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \|A - B\| \leq 1$$

dal teorema precedente applicato all'operatore $\mathbb{I} - A^{-1}B$, abbiamo che $A^{-1}B \in GL(E)$, allora $B = AA^{-1}B$ appartiene a $GL(E)$ cioè la palla $B\left(A, 1/\left\|A^{-1}\right\|\right)$ è tutta contenuta in $GL(E)$ che perciò è aperto.

III.2.4 Il teorema del grafico chiuso

Grafico di un operatore Sia A un operatore lineare sugli spazi normati X, Y, il suo grafico è l'insieme

$$\mathcal{G}(A) = \{x \oplus Ax \in X \times Y \,| x \in D(A)\}$$

L'insieme $X \times Y$ è uno spazio normato dalla norma

$$\|x \oplus y\|^2 = \|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2$$

ed è banale verificare (lo abbiamo già fatto nel capitolo II) che

$$x \oplus y = \lim_{n\to\infty} x_n \oplus y_n \Leftrightarrow x = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ e } y = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Operatori chiusi Ora, sia $\mathcal{G}(A)$ chiuso, questo equivale a suppore che ogni successione convergente a valori in $\mathcal{G}(A)$ converge a un punto di $\mathcal{G}(A)$, risulta cioè

$$\{x_n \oplus y_n\} \in \mathcal{G}(A) : x \oplus y = \lim_{n\to\infty} x_n \oplus y_n \Rightarrow y = Tx$$

perciò, $\mathcal{G}(A)$ è chiuso se e solo se per ogni successione $\{x_n\}$ a valori in $D(A)$ che converga a $x \in D(A)$ e tale che la successione $\{Ax_n\}$ converge a un valore $y \in Y$, si ha che $y = Tx$.
Un operatore per cui $\mathcal{G}(A)$ è chiuso si dice **chiuso**. Dunque, come detto

Proposizione III.9 *Un operatore A è chiuso se e solo se per ogni successione $\{x_n\}$ a valori in $D(A)$ che converga a un valore $x \in D(A)$ e tale che la successione $\{Ax_n\}$ converge a un valore y, risulta $y = Ax$.*

Il secondo principio di Banach si rivolge proprio agli operatori chiusi

Teorema III.10 (del grafico chiuso) *Sia $A : X \to Y$ un operatore lineare chiuso tra gli spazi di Banach X e Y, avente domino in X, allora A è continuo.*

Dimostrazione In X definiamo la norma

$$\|x\|_A \equiv \|x\| + \|Ax\|$$

Vediamo che si tratta effettivamente di una norma

$$\|x\|_A = 0 \Rightarrow \|x\| + \|Ax\| = 0$$

da cui, essendo la norma $\|\cdot\|$ positiva

$$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$$

La linearità garantisce che

$$\|kx\|_A = |k|\,\|x\| + \|kAx\| = |k|\,(\|x\| + \|Ax\|) = |k|\,\|x\|_A$$

Infine, ancora grazie alla linearità

$$\|x+y\|_A = \|x+y\| + \|Ax+Ay\| \le \|x\| + \|Ax\| + \|y\| + \|Ay\| \le \|x\|_A + \|y\|_A$$

Vediamo che $(X, \|\cdot\|_A)$ è completo. Sia $\{x_n\} \subset X$, una successione di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_A$, allora,

$$\|Ax_n - Ax_m\|\,, \|x_n - x_m\| \le \|x_n - x_m\|_A$$

perciò sono successioni di Cauchy anche $\{x_n\}$ rispetto alla norma usuale e $\{Ax_n\}$. Dunque, x_n converge a x e Ax_n converge a y. Siccome A è chiuso allora

$$y = Ax \Rightarrow \|Ax - Ax_n\| \to 0$$

allora

$$\|x - x_n\|_A = \|x - x_n\| + \|Ax - Ax_n\| \to 0.$$

Ora, siccome X è di Banach rispetto a $\|\cdot\|_A$ e a $\|\cdot\|$, e siccome

$$\|x\| \le \|x\|_A \;\; \forall x \in X$$

allora, per il corollario precedente, esiste $\ell' \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$\|x\|_A \le \ell' \, \|x\|$$

cioè

$$\|Ax\| \le (\ell' - 1)\,\|x\|$$

(c.v.d.) da cui A è continuo.

III.2.5 Il teorema di uniforme limitatezza o di Banach-Steinhaus

Anche il terzo principio di Banach deriva dal teorema di Baire-Hausdorff, e in particolare dal seguente

Lemma III.4 *Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni continue, reali, definite su uno spazio metrico completo X, tali che per ogni $x \in X$ esista una costante positiva M_x per cui*

$$\forall f \in \mathcal{F} \; |f(x)| \le M_x.$$

Allora esistono un aperto non vuoto $S \subset X$ e una costante positiva M per cui

$$\forall f \in \mathcal{F}, \forall s \in S \; |f(s)| \le M.$$

Dimostrazione Per ogni $m \in \mathbb{N}$ definiamo l'insieme

$$E_f^m \equiv \{x \in X \, | |f(x)| \le m\}$$

e definiamo poi

$$E^m \equiv \bigcap_{f \in \mathcal{F}} E_f^m.$$

Ora, E_f^m è chiuso, essendo $|f|$ continua, perciò anche E^m è chiuso. Vediamo che

$$X = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} E^m$$

infatti, sia $x \in X$, allora $|f(x)| \le M_x$ per ogni $f \in \mathcal{F}$, preso $N > M_x$ con $N \in \mathbb{N}$, abbiamo che $x \in E^N$.

Siccome X è completo, per il teorema di Baire-Hausdorff, esiste un indice m per cui E^m contiene un aperto S su tale aperto

$$\forall f \in \mathcal{F}, \forall s \in S \; |f(s)| \le m$$

(c.v.d.)

Siamo così all'ultimo principio di Banach, dovuto a Banach-Steinhaus

Teorema III.11 (di uniforme limitatezza) *Sia X uno spazio di Banach e sia Y uno spazo normato. Sia $\mathcal{F} \subset L(X, Y)$ una famiglia di operatori lineari limitati da X in Y per cui, per ogni $x \in X$ esiste $M_x > 0$ tale che*

$$\forall A \in \mathcal{F} \; \|Ax\| \leq M_x$$

allora esiste una costante M tale che

$$\forall A \in \mathcal{F} \; \|A\| \leq M$$

Dimostrazione Consideriamo la famiglia $\mathcal{F}'$ di applicazioni continue da X sulla retta reale definite da

$$f(x) \equiv \|Ax\|, \; x \in X$$

Per il lemma esistono un aperto $S \subset X$ e una costante $M > 0$ per cui

$$\forall A \in \mathcal{F}, \forall s \in S \; \|As\| \leq M$$

Sia ora $y \in S$ e sia $B(y, \delta) \subset S$. Se $\|z\| < \delta$ allora $Az = A(z+y) - Az$, abbiamo $z + y \in B(y, \delta)$ allora

$$\|Az\| \leq \|A(z+y)\| + \|Ay\| \leq M + M_y \; \forall A \in \mathcal{F}, \forall z \in B(0, \delta)$$

Sia ora $x \in X$ allora

$$\|Ax\| = \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\frac{\delta}{2}\right)\right\| \frac{2\|x\|}{\delta} \leq \frac{2}{\delta}(M + M_y)\|x\|$$

da cui, per ogni $A \in \mathcal{F}$

$$\|A\| \leq \frac{2}{\delta}(M + M_y).$$

(c.v.d.)

III.3 L'aggiunzione

III.3.1 Trasposizione negli spazi di Banach

Consideriamo uno spazio lineare X e un applicazione lineare A definita da X in Y, anch'essa lineare. Ora, ad A possiamo associare il suo **trasposto** A^t che è un operatore lineare tra Y^* e X^* definito da

$$\left\langle A^t \alpha, x \right\rangle \equiv \langle \alpha, Ax \rangle, \; \forall \alpha \in Y^*, \forall x \in X$$

Verifichiamo che $A^t \in \hom(Y^*, X^*)$, dobbiamo cioè vedere che si tratta effettivamente di un'applicazione lineare

$$\begin{aligned} \left\langle A^t(\alpha + k\beta), x \right\rangle &= \langle \alpha + k\beta, Ax \rangle = \langle \alpha, Ax \rangle + \bar{k}\langle \beta, Ax \rangle = \left\langle A^t \alpha, Ax \right\rangle + \bar{k}\left\langle A^t \beta, x \right\rangle = \\ &= \left\langle A^t \alpha, Ax \right\rangle + \left\langle k A^t \beta, x \right\rangle = \left\langle A^t \alpha + k A^t \beta, x \right\rangle \end{aligned}$$

Abbiamo allora una applicazione

$$\begin{array}{cccc} {}^t: & \hom(X, Y) & \to & \hom(Y^*, X^*) \\ & A & \mapsto & A^t \end{array}$$

$$A^t \alpha \equiv \alpha \circ A, \forall \alpha \in Y^*$$

Ci chiediamo come vada interpretata la definizione se ipotizziamo che X e Y siano spazi di Banach. Infatti, appare naturale sostituire al duale algebrico quello topologico e agli spazi hom semplicemente i relativi sottoinsiemi L. Per poter conservare la vecchia definizione dobbiamo allora dimostrare che A^t e $A^t \alpha$ sono continui, cioè $A^t \in L(Y^*, X^*)$ e $A^t \alpha \in X^*$. Si ha subito

$$\begin{aligned} \left|\left\langle A^t \alpha, x \right\rangle\right| &= |\langle \alpha, Ax \rangle| \leq \|\alpha\| \|A\| \|x\| \\ \left\|A^t \alpha\right\| &\leq \|A\| \|\alpha\| \end{aligned}$$

perciò $\|A^t\| \leq \|A\|$ e si ha allora ben definita l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} {}^t: & L(X,Y) & \to & L(Y^*,X^*) \\ & A & \mapsto & A^t \end{array}$$

$$A^t\alpha \equiv \alpha \circ A, \forall \alpha \in Y^*$$

Dobbiamo adesso mostrare la seguente

Proposizione III.10 *Siano X e Y spazi di Banach, allora, per ogni $A, B \in L(X,Y)$ $k \in \mathbb{C}$ si hanno le seguenti relazioni*

(i) $(A+B)^t = A^t + B^t$;

(ii) $(kA)^t = \bar{k}A^t$;

(iii) $\|A^t\| = \|A\|$.

Se poi $X = Y \equiv E$, allora se $A, B \in L(E)$ si ha $(BA)^t = A^tB^t$. Infine, se $A \in GL(E)$ allora $A^t \in GL(E^*)$ e $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Dimostrazione La linearità di ^{t} dimostra (i) e (ii). Veniamo a (iii), sappiamo già che $\|A^t\| \leq \|A\|$. Ora, applichiamo il teorema di separazione di Y tramite Y^* di cui al capitolo II. Sia $x \in X$ con $Ax \neq 0$, esiste allora $\alpha_x \in Y^*$ tale che

$$\|\alpha_x\| = 1 \text{ e } \langle \alpha_x, Ax \rangle = \|Ax\|$$

perciò

$$\|Ax\| = \langle \alpha_x, Ax \rangle = \left|\left\langle A^t\alpha_x, x \right\rangle\right| \leq \left\|A^t\alpha\right\| \|x\| \leq \left\|A^t\right\| \|x\|$$

cioè

$$\|Ax\| \leq \left\|A^t\right\| \|x\|$$

questa vale per ogni x per l'arbitrarietà di x, perciò

$$\|A\| \leq \left\|A^t\right\|.$$

Sia ora $X = Y \equiv E$. Se $\alpha \in Y^*$ allora

$$\left\langle (BA)^t \alpha, x \right\rangle = \langle \alpha, BAx \rangle = \left\langle B^t\alpha, Ax \right\rangle = \left\langle A^tB^t\alpha, x \right\rangle$$

Ora, sia $A \in GL(E)$ allora anche $A^{-1} \in GL(E)$

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{I}$$

perciò, passando alla trasposta

$$\left(A^{-1}\right)^t A^t = A^t \left(A^{-1}\right)^t = \mathbb{I}$$

essendo $\mathbb{I}^t = \mathbb{I}$. Ma allora per la proposizione III.8 si ha che $A^t \in GL(E^*)$ e che

$$\left(A^{-1}\right)^t = \left(A^t\right)^{-1}.$$

(c.v.d.)

III.3.2 Aggiunzione negli spazi di Hilbert

L'associazione di A^t ad $A \in L(E)$ diviene particolarmente significativa nel caso in cui lo spazio E sia uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Infatti, ogni spazio di Hilbert può essere identificato con il suo duale via l'isomorfismo di Riesz. In questo modo l'applicazione A^t viene essa stessa identificata con una applicazione che apprtiene a $L(E)$.
Sia $\alpha \in E^*$ allora esiste $x \in \mathcal{H}$ tale che $\langle \alpha, \cdot \rangle = (x, \cdot)$ e si pone $\alpha = Tx$

$$\left\langle A^t\alpha, x' \right\rangle = \langle \alpha, Ax' \rangle = (x, Ax')$$

ma il primo membro

$$\left\langle A^t\alpha, x' \right\rangle = \left(T^{-1}\left(A^t\alpha\right), x'\right)$$

se definiamo $A^* \equiv T^{-1}A^tT$ abbiamo

$$(A^*x, x') = (x, Ax') \ \ \forall x, x' \in \mathcal{H}.$$

Siccome T è un isomorfismo bicontinuo si ha che $A^* \in L(\mathcal{H})$. L'operatore A^* si dice **aggiunto** e l'applicazione, chiaramente continua $^* : L(\mathcal{H}) \to L(\mathcal{H})$ si chiama **aggiunzione**.

Proposizione III.11 *Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e siano $A, B \in L(\mathcal{H})$ e $k \in \mathbb{C}$ allora valgono le seguenti proprietà*

(i) $(A+B)^* = A^* + B^*$;

(ii) $(kA)^* = \bar{k}A^*$;

(iii) $(BA)^* = A^*B^*$;

(iv) $(A^*)^* \equiv A^{**} = A$;

(v) $\|A^*A\| = \|A\|^2$;

(vi) $\|A\| = \|A^*\|$.

Dimostrazione Siccome $A^* = T^{-1}A^tT$ si hanno subito, dalla proposizione precedente, i punti (i), (ii) e (iii). Veniamo a (iv). Per ogni $x, x' \in \mathcal{H}$ abbiamo

$$(A^{**}x, x') = (x, A^*x') = (A^*x', x)^* = (x', Ax)^* = (Ax, x')$$

da cui

$$((A^{**} - A)\,x, x') = 0$$

cioè

$$(A^{**} - A)\,x = 0 \Rightarrow A^{**} = A.$$

Abbiamo per definizione che $(A^*x, x') = (x, Ax')$, sicché

$$(A^{**}x, x') = (x, A^*x')$$

ma siccome $A^{**} = A$ si conclude che vale anche

$$(x, A^*x') = (Ax, x')\,.$$

(v) Per ogni $x \in \mathcal{H}$, abbiamo

$$\|Ax\|^2 = |(Ax, Ax)| = |(x, A^*Ax)| \le \|A^*A\|\,\|x\|^2$$

se scegliamo $\|x\| = 1$ abbiamo

$$\|Ax\| \le \|A^*A\|^{1/2} \Rightarrow \|A\|^2 \le \|A^*A\|$$

D'altra parte, se $\|x\| = \|x'\| = 1$

$$|(x, A^*Ax')| = |(Ax, Ax')| \le \|A\|^2$$

perciò

$$\|A^*Ay\| = \left|\left(\frac{A^*Ay}{\|A^*Ay\|}, \frac{A^*Ay}{\|y\|}\right)\right| \|y\| \le \|A\|^2\,\|y\|$$

da cui

$$\|A\|^2 \ge \|A^*A\|$$

la tesi.

(vi) Abbiamo visto sopra che

$$\|A\|^2 \le \|A^*A\| \le \|A\|\,\|A^*\|$$

perciò

$$\|A\| \le \|A^*\| \le \|A^{**}\| = \|A\|\,.$$

(c.v.d.)

Dalla (vi) si ha pure che l'aggiunzione (che è lineare) è una funzione **continua** da $L(\mathcal{H})$ in

$L(\mathcal{H})$.

III.3.3 C^*-Algebre

A suo tempo abbiamo accentao al fatto che se E uno spazio di Banach, l'insieme $L(E)$ è un'algebra di Banach. In questa sottosezione vogliamo brevemente specificarfe il significato di questa affermazione.
Cominciamo col porre la seguente

Definizione III.4 *Un'algebra $\mathcal{A}$ è uno spazio vettoriale sul quale è definita la mappa $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ prodotto che gode delle seguenti proprietà*

$$a(b_1 + b_2) = ab_1 + ab_2; \; a(bc) = (ab)c; \; a(\alpha b) = \alpha ab$$

se $a, b \in \mathcal{A}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. L'algebra è dotata di una identità $\mathbb{I}$ se

$$a\mathbb{I} = \mathbb{I}a, \; \forall a \in \mathcal{A};$$

se vale la proprietà commutativa rispetto al prodotto $\mathcal{A}$ si dice commutativa o abeliana.

Lavorando sui complessi vi è un'altra operazione da assiomatizzare

Definizione III.5 *Una *-algebra è un'algebra sulla quale sia definita la mappa $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ tale che*

$$(ab)^* = b^* a^*; \; (a+b)^* = a^* + b^*; \; (\alpha a)^* = \bar{\alpha} a^*; \; a^{**} = a$$

per ogni $a, b \in \mathcal{A}$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

Definizione III.6 *Una C^*-algebra è una *-algebra che sia uno spazio di Banach la cui norma sia tale che*

(i) $\|ab\| \le \|a\| \, \|b\|$;

(ii) $\|a^*\| = \|a\|$;

(iii) $\|aa^*\| = \|a\| \, \|a^*\|$;

(iv) $\|\mathbb{I}\| = 1$.

L'operazione di aggiunzione rende l'algebra di Banach $L(\mathcal{H})$ una **C^*-algebra**.

III.3.4 Autoaggiunzione su $L(\mathcal{H})$

Operatori autoaggiunti in $L(\mathcal{H})$ Un'elemento $A \in L(\mathcal{H})$ si dice **autoaggiunto** se $A^* = A$, ossia se

$$(Ax, x') = (x, Ax') \; \forall x, x' \in \mathcal{H}.$$

Se a ogni operatore $A \in L(\mathcal{H})$ associamo la forma sesquilineare

$$\phi_A(x, x') \equiv (x, Ax')$$

abbiamo che A è autoaggiunto se e solo se ϕ è hermitiana. Se A è autoaggiunto si ha

$$\phi_A(x', x) = (x', Ax) = (Ax', x) = (x, Ax')^* = \phi_A(x, x')^*$$

viceversa

$$(x', Ax) = \phi_A(x', x) = \phi_A(x, x')^* = (x, Ax')^* = (Ax', x).$$

Se associamo a ϕ sesquilineare la forma quadratica

$$\hat{\phi}(x) = \phi(x, x)$$

abbiamo che $\hat{\phi}$ è reale se e solo se ϕ è hermitiana. Se ϕ è hermitiana si ha subito

$$\hat{\phi}(x) = \phi(x, x) = \phi(x, x)^* = \hat{\phi}(x)^*$$

Vediamo il viceversa. Intanto si deve ricordare la semplice **formula di polarizzazione**

$$\phi(x, x') = \sum_{r=1}^{4} \frac{1}{4\omega_r} \hat{\phi}(x + \omega_r x')$$

dove $\omega_r = 1, -1, i, -i$ (radice dell'unità). Inoltre si deve semplicemente notare che

$$\hat{\phi}(x + \omega_r x') = \hat{\phi}(x + \omega_r^* x')$$

allora, se $\hat{\phi}$ è reale,

$$\phi(x', x)^* = \sum_{r=1}^4 \frac{1}{4\omega_r^*} \hat{\phi}(x + \omega_r x') = \sum_{r=1}^4 \frac{1}{4\omega_r^*} \hat{\phi}(x + \omega_r^* x') = \sum_{r=1}^4 \frac{1}{4\omega_r} \hat{\phi}(x + \omega_r x') = \phi(x, x')$$

Riassumendo

Proposizione III.12 (polarizzazione) *Se ϕ è una forma sesquilineare allora la sua forma quadratica associata è tale che*

$$\phi(x, x') = \sum_{r=1}^4 \frac{1}{4\omega_r} \hat{\phi}(x + \omega_r x')$$

dove $\omega_r = 1, -1, i, -i$ (radice dell'unità).

Proposizione III.13 *Una forma sesquilineare è hermitiana se e solo se la sua forma quadratica associata è reale.*

In definitiva quindi A è autoaggiunto se e solo se ϕ_A è hermitiano, se e solo se, per ogni $x \in \mathcal{H}$ $(x, Ax) \in \mathbb{R}$ cioè

Proposizione III.14 *$A \in L(\mathcal{H})$ è autoaggiunto se e solo se $(x, Ax) \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in \mathcal{H}$.*

Abbiamo anche la seguente

Proposizione III.15 *Sia $A \in L(\mathcal{H})$ un operatore autoaggiunto. Allora*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \{|(x, Ax)|\}$$

Dimostrazione È subito evidente (dalla diseguaglianza di Schwarz) che, denotato con s_A il sup di cui nell'enunciato, vale

$$s_A \leq \|A\|.$$

La diseguaglianza opposta è un po' più complicata. Siano $x, x' \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} 4 \operatorname{Re}(x, Ax') &= 2[(x, Ax') + (x', Ax)] = [(x + x', A(x + x')) - (x - x', A(x - x'))] \leq \\ &\leq |(x + x', A(x + x'))| + |(x - x', A(x - x'))| \leq s_A \left(\|x + x'\|^2 + \|x - x'\|^2 \right) = \\ &= 2 s_A \left(\|x\|^2 + \|x'\|^2 \right) \end{aligned}$$

cioè

$$\operatorname{Re}(x, Ax') \leq \frac{s_A}{2} \left(\|x\|^2 + \|x'\|^2 \right)$$

Ora esiste una fase z tale che

$$|(x, Ax')| = z(x, Ax') = (zx, Ax') = \operatorname{Re}(zx, Ax') \leq \frac{s_A}{2} \left(\|x\|^2 + \|x'\|^2 \right)$$

prendiamo

$$x = \frac{\|x'\|}{\|Ax'\|} Ax'$$

da cui

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{\|x'\|}{\|Ax'\|} Ax', Ax' \right) \right| &\leq s_A \|x'\|^2 \\ \frac{\|x'\|}{\|Ax'\|} \|Ax'\|^2 &\leq s_A \|x'\|^2 \end{aligned}$$

cioè

$$\|Ax'\| \leq s_A \|x'\|$$

sicché

(c.v.d.)
$$\|A\| \leq s_A.$$

Se A e B sono autoaggiunti, anche $A+B$ è autoaggiunto

$$(A+B)^* = A^* + B^* = A + B$$

mentre, se $k \in \mathbb{C}$

$$(kA)^* = \bar{k}A^* = \bar{k}A$$

cioè kA è autoaggiunto se e solo se $k \in \mathbb{R}$.
Se A, B sono autoaggiunti, si ha

$$(AB)^* = B^*A^* = BA$$

perciò AB è autoaggiunto se e solo se $[A,B] \equiv AB - BA = 0$.

Operatori positivi

Infine, per ogni $A \in L(\mathcal{H})$ vale

$$(A^*A)^* = A^*A$$

cioè per ogni $A \in L(\mathcal{H})$ l'operatore A^*A è **autoaggiunto**. Dunque, preso $A \in L(\mathcal{H})$ e posto $B \equiv A^*A$

$$(x, Bx) \in \mathbb{R}^+$$

infatti, $(x, Bx) \in \mathbb{R}$ e $(x, Bx) = (x, A^*Ax) = (Ax, Ax) = \|Ax\|^2 \in \mathbb{R}^+$. Inoltre, sia B tale che

$$(x, Bx) \in \mathbb{R}^+$$

allora B è autoaggiunto. Ci si può chiedere se esiste un operatore continuo A per cui $B = A^*A$. In dimensione finita, se $B = B^*$ allora è diagonalizzabile (teorema di decomposizione polare); per ipotesi i suoi autovalori dovranno essere positivi, sicché esiste U tale che $UU^* = U^*U = \mathbb{I}$ per cui

$$UBU^* = (\lambda_i)$$

per ogni λ_i si ha $\lambda_i = z_i z_i^*$ e allora

$$UBU^* = (\lambda_i) = (z_i)(z_i^*) = U[U^*(z_i)U][U^*(z_i^*)U]U^*$$

allora

$$B = [U^*(z_i)U][U^*(z_i^*)U] = A^*A.$$

Come nel caso in dimensione finita si è dovuto usare una decomposizione spettrale per pervenire alla tesi, così dovremo utilizzare risultati di teoria spettrale nel caso generale. Ad ogni modo un operatore per cui $B = A^*A$ si dice **positivo**.

Relazioni tra $L(\mathcal{H})$ e forme sesquilineari limitate

Una forma sesquilineare si dice limitata se esiste una costante positiva m per cui $|\phi(x,y)| \leq m\|x\|\|y\|$. Normato lo spazio delle forme sesquilineari con l'inf delle m si dimostra il seguente

Teorema III.12 *Sia $\phi : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineare su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Allora*

(i) *sono equivalenti le affermazioni*

(a) *ϕ è limitata;*
(b) *esiste un operatore $A \in L(\mathcal{H})$ tale che $\phi(x,y) = (Ax, y)$ per ogni $x, y \in \mathcal{H}$;*

(ii) *se è verificata una delle condizioni* (a) *o* (b) *allora l'operatore A è unico e vale $\|A\| = \|\phi\|$.*

Dimostrazione Ovviamente (b) implica (a). Vediamo il viceversa. Ad ogni $x \in \mathcal{H}$ facciamo corrispondere il funzionale lineare

$$\alpha_x(y) \equiv \phi(x,y), \; y \in \mathcal{H}$$

Si tratta di un funzionale continuo, $|\alpha_x(y)| \leq (\|\phi\| \|x\|) \|y\|$, dunque, considerando l'isomorfismo di Riesz T abbiamo

$$\phi(x,y) = \alpha_x(y) = \left(T^{-1}\alpha_x, y\right)$$

poniamo allora

$$Ax \equiv T^{-1}\alpha_x, \ x \in \mathcal{H}$$

Vediamo che si tratta di un operatore lineare

$$\begin{aligned} T^{-1}\alpha_{x+\lambda x'} &= T^{-1}\left(\phi(x,\cdot) + \bar{\lambda}\phi(x',\cdot)\right) = T^{-1}\left(\alpha_x + \bar{\lambda}\alpha_{x'}\right) = T^{-1}(\alpha_x) + T^{-1}\left(\bar{\lambda}\alpha_{x'}\right) = \\ &= T^{-1}(\alpha_x) + \lambda T^{-1}(\alpha_{x'}). \end{aligned}$$

Si ha inoltre che A è limitato:

$$\begin{aligned} \phi(x,y) &= (Ax,y) \\ \|Ax\|^2 &= \phi(x,Ax) \leq \|\phi\| \|x\| \|Ax\| \end{aligned}$$

cioè $\|Ax\| \leq \|\phi\| \|x\|$. Ne deriva che $A \in L(\mathcal{H})$ e che $\|A\| \leq \|\phi\|$. La diseguaglianza opposta si ottiene dalla diseguaglianza di Schwarz

$$|\phi(x,y)| = |(Ax,y)| \leq \|A\| \|x\| \|y\|.$$

Per l'unicità, sia $B \in L(\mathcal{H})$ per cui $\phi(x,y) = (Bx,y)$ allora

$$(Bx,y) = (Ax,y)$$

(c.v.d.) dalla non degenerazione si ottiene $Ax - Bx = 0$ e $A = B$.

III.4 Operatori unitari

In questa e nella prossima proposizione studieremo due particolari tipi di operatori lineari continui: gli operatori unitari e i proiettori. I primi sono gli **automorfismi** di $\mathcal{H}$ mentre i secondi riflettono la proprietà geometrica fondamentale degli spazi di hilbert, il **teorema della proiezione**.
Cominciamo dagli operatori unitari

Definizione III.7 *Dato uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ un operatore unitario U di $\mathcal{H}$ è un operatore lineare su $\mathcal{H}$, $U \in \hom(\mathcal{H},\mathcal{H})$, tale che*

(i) *U è suriettivo, $R(U) = \mathcal{H}$;*

(ii) *U preserva il prodotto scalare*

$$(Ux, Ux') = (x, x') \ \forall x, x' \in \mathcal{H}.$$

Osservazione III.3 Per la formula di polarizzazione la (ii) è equivalente ad attestare l'isometria di U:

$$\|Ux\| = \|x\| \ \forall x \in \mathcal{H}.$$

Siccome U è isometrico, è iniettivo, perciò, per (i), biunivoco e invertibile su $\mathcal{H}$. L'isometria implica la continuità di U e il fatto che

$$\|U\| = 1$$

Esempio III.2 In dimensione finita (ii) implica (i). Infatti, valendo (ii) l'applicazione è isometrica e perciò iniettiva, inoltre, se $n \equiv \dim\mathcal{H}$, vale

$$n = \dim R(U) + \dim\ker(U) = \dim R(U)$$

da cui $R(U) = \mathcal{H}$.
In dimensione infinita questo non è vero. Consideriamo, in uno spazio di Hilbert, l'operatore T tale che, fissato un s.o.n.c. $\{u_n\}$ in $\mathcal{H}$,

$$Tx \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (u_n, x)\, u_{n+1}$$

Allora, T è lineare e ben definito (teorema di Riesz-Fischer, capitolo II), inoltre

$$(Tx, Tx') = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (u_n, x)\, u_{n+1}, \sum_{m=0}^{\infty} (u_m, x')\, u_{m+1}\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} (x, u_n)\,(u_m, x')\,\delta_{n+1,m+1} =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} (x, u_m)\,(u_m, x') = (x, x')$$

D'altra parte $R(T) = \{u_0\}^{\perp}$, perciò T non è suriettivo.

Dimostriamo la seguente semplice

Proposizione III.16 *Sia $A \in L(\mathcal{H})$. Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni*

(i) A *è unitario;*

(ii) A *è regolare e* $A^{-1} = A^*$*;*

(iii) $AA^* = A^*A = \mathbb{I}$*;*

(iv) A^* *è unitario.*

Dimostrazione (i) $\Rightarrow$ (ii) A è unitario, allora è continuo e biunivoco, perciò ammette inversa continua (per il teorema dell'inverso limitato), dunque A è regolare. Inoltre, per ogni x, x'

$$(x, x') = (Ax, Ax') = (x, A^*Ax')$$

per non degenerazione allora $A^*A = \mathbb{I}$. D'altra parte, moltiplicando ambo i membri per $A^{-1} \in L(\mathcal{H})$

$$A^* = A^{-1}.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Se A è regolare e $A^{-1} = A^*$ allora moltiplichiamo ambo i membri per A e troviamo $\mathbb{I} = AA^*$. $A^{-1} = A^*$ moltiplicando adesso a destra per A si ottiene $\mathbb{I} = A^*A$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Sia A un operatore continuo per cui $AA^* = A^*A = \mathbb{I}$ allora

$$(A^*x, A^*x') = (x, AA^*x') = (x, x')$$

d'altra parte, siccome $A^*A = \mathbb{I}$ si ha che A^* deve essere suriettivo.

(c.v.d.) (iv) $\Rightarrow$ (i) Siccome (i) $\Rightarrow$ (iv) si ha che A^{**} è unitario, ma $A^{**} = A$ perciò A è unitario.

Gruppo unitario L'insieme $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ degli operatori unitari di $\mathcal{H}$ è un sottoinsieme dell'algebra $L(\mathcal{H})$ stabile rispetto al prodotto e all'inversione. Infatti, siano $A, B \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ allora $AB \in GL(\mathcal{H})$ e

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^*A^* = (AB)^*,$$

inoltre, se $A \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ allora $A \in GL(\mathcal{H})$ e $A^{-1} = A^*$, ma A^* è unitario, perciò $A^{-1} \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$. Se ne conclude che $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ è un gruppo (**gruppo unitario di $\mathcal{H}$**).

Riferimenti e gruppo unitario Ricordiamo che un **riferimento ortogonale** (come dovrebbe essere noto dal corso di Geometria) è un s.o.n.c. nel quale però sia stato specificato una volta per tutte un'ordinamento (i.e. è una successione che include tutti gli elementi del s.o.n.c.) degli elementi. Indichiamo con $\mathcal{ROH}$ l'insieme dei **riferimenti ortogonali di $\mathcal{H}$**, allora vale il seguente

Teorema III.13 *Dato uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, sia $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un riferimento ortogonale di $\mathcal{H}$ e sia $A \in L(\mathcal{H})$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni*

(i) $A \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$*;*

(ii) $\{u'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *dove* $u'_n \equiv Au_n$ *è un riferimento ortogonale di* $\mathcal{H}$.

Dimostrazione (i) $\Rightarrow$ (ii) L'insieme$\{u'_n\}$ è certamente un s.o.n.

$$\delta_{nm} = (u_n, u_m) = (Au_n, Au_m) = (u'_n, u'_m)$$

Sia poi dato un vettore $x \in \mathcal{H}$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulti

$$0 = (x, u_n') = \left(A^{-1}x, A^{-1}u_n'\right) = \left(A^{-1}x, u_n\right)$$

allora $A^{-1}x = 0$, ma A^{-1} è iniettiva sicché $x = 0$ (la tesi discende dal fatto che A unitaria è regolare e $A^{-1} = A^*$ unitario).

(ii) $\Rightarrow$ (i) $A \in L(\mathcal{H})$ perciò

$$\begin{aligned} Ax &= \sum_{n=0}^{\infty} (u_n', Ax)\, u_n' \\ Ax &= \sum_{n=0}^{\infty} (u_n, x)\, u_n' \end{aligned}$$

se ne ricava

$$(Au_n, Ax) = (u_n', Ax) = (u_n, x)\,, \ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathcal{H}$$

perciò

$$\begin{aligned} (Ax', Ax) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (u_n, x')\, Au_n, Ax\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (x', u_n)\,(Au_n, Ax) = \sum_{n=0}^{\infty} (x', u_n)\,(Au_n, Ax) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (x', u_n)\,(u_n, x) = (x', x) \end{aligned}$$

Infine, A è suriettivo: per ogni $x \in \mathcal{H}$ si ha

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} (u_n', x)\, u_n' = \sum_{n=0}^{\infty} (u_n', x)\, Au_n = A \sum_{n=0}^{\infty} (u_n', x)\, u_n = Ax'$$

(c.v.d.) dove $x' \in \mathcal{H}$ per il teorema di Fischer-Riesz.

Possiamo allora introdurre un'**azione** del gruppo $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ sull'insieme $\mathcal{ROH}$. Se indichiamo brevemente con $\mathbf{u} \equiv \{u_n\} \in \mathcal{ROH}$ possiamo porre

$$\begin{array}{rccl} \tau: & \mathcal{U}(\mathcal{H}) \times \mathcal{ROH} & \to & \mathcal{ROH} \\ & (U, \mathbf{u}) & \mapsto & \tau(U; \mathbf{u}) \equiv U\mathbf{u} = \{Uu_n\} \end{array}$$

Si ha poi che l'azione è **transitiva** e **libera**, cioè per ogni coppia $\mathbf{u}, \mathbf{u}'$ esiste uno e un solo U tale che $\mathbf{u}' = U\mathbf{u}$; infatti

$$U : Ux \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (u_n, x)\, u_n'.$$

Operatori antiunitari In meccanica quantistica si ha bisogno anche degli operatori **antinuitari** di $\mathcal{H}$. Essi sono operatori **antilineari**, suriettivi e tali che

$$(Vx, Vx') = (x, x')^*\,, \ \forall x, x' \in \mathcal{H}.$$

III.5 Operatori di proiezione

Consideriamo un sottospazio $W \subset \mathcal{H}$, allora per il teorema della proiezione si ha che $\mathcal{H} = W \oplus W^{\perp}$. L'unicità della decomposizione comporta la possibilità di associare a ogni sottospazio W la mappa

$$\text{se } x = w + w',\ w \in W,\ w' \in W^{\perp} \Rightarrow \begin{array}{rccc} P_W: & \mathcal{H} & \to & \mathcal{H} \\ & x & \mapsto & w \end{array}$$

Nel corso del capitolo II abbiamo dimostrato che

(i) P_W *è lineare (e prende il nome* di operatore di proiezione ortogonale - *o proiettore* - *su* W*)*

(ii) $R(P_W) = W$ *e* $P_W|_W = \mathbb{I}_W$*;* $\ker(P_W) = W^{\perp}$;

(iii) $P_W^2 = P_W$.

Veniamo alla norma di P_W. Abbiamo immediatamente che $\|P_W x\| = \|w\| \leq \left(\|w\|^2 + \|w'\|^2\right)^{1/2} = \|x\|$. Ne abbiamo che $\|P_W\| \leq 1$ ma basta prendere $x \in W$ per constatare che $\|P_W x\| = \|x\|$ da cui $\|P_W\| = 1$, se W è non banale (altrimenti $P_W = 0$ e la sua norma è nulla).
Come nel caso degli operatori unitari vogliamo stabilire una proposizione che dia una caratterizzazione algebrica dei proiettori:

Proposizione III.17 *Sia $A \in L(\mathcal{H})$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni*

(i) *A è un proiettore;*

(ii) *$A^*A = A$;*

(iii) *$A^*A = A^*$;*

(iv) *$A^* = A$ e $A^2 = A$, cioè A è idempotente e autoaggiunto.*

Dimostrazione (i) $\Rightarrow$ (ii) A sia un proiettore sul sottospazio W. Per il teorema della proiezione

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= W \oplus W^{\perp} \\ x &= w + w' \end{aligned}$$

Presi due vettori $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$ abbiamo

$$\begin{aligned} (x_1, A^*Ax_2) &= (Ax_1, Ax_2) = (w_1, w_2) \\ (x_1, Ax_2) &= (x_1, w_2) = (w_1, w_2) \end{aligned}$$

da cui $A^*A = A$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Aggiuntando la precedente $A^*A = A^*$.
(iii) $\Rightarrow$ (iv) $A^*A = A^*$ e $A^*A = A$ allora $A^* = A$. Ora, $A = A^* = A^*A = AA = A^2$.
(iv) $\Rightarrow$ (i) Sia $W = R(A)$, mostriamo che si tratta di un insieme chiuso. Sia $\{x_n\} \subset W$ convergente a $x_0 \in \mathcal{H}$, esiste allora la successione $\{y_n\} \in \mathcal{H}$ tale che

$$x_n = Ay_n \to x_0$$

Per la continuità di A si ha

$$Ay_n = A^2 y_n \to Ax_0$$

ne ricaviamo che $Ay_n \to x_0$ e $Ay_n \to Ax_0$, sicché, per unicità del limite, vale

$$x_0 = Ax_0$$

e perciò $x_0 \in R(A) = W$. L'immagine W di A è dunque un sottospazio di $\mathcal{H}$, per il teorema di proiezione, ogni elemento si decompone in modo unico come somma di un vettore di W e di un vettore appartenente all'ortogonale di W. Abbiamo

$$x = Ax + (x - Ax)$$

infatti, $Ax \in W$, mentre, per ogni $y \in \mathcal{H}$

$$(Ay, x - Ax) = (y, A^*x - A^*Ax) = \left(y, Ax - A^2x\right) = (y, 0) = 0$$

da cui $x - Ax \in W^{\perp}$. Abbiamo allora che, per ogni x,

$$Ax = P_W x$$

(c.v.d.) perciò $A = P_W$.

Nelle prossime tre proposizioni stabiliremo le condizione alle quali devono sottostare i proiettori affinché loro combinazioni siano ancora proiettori.

Proposizione III.18 *Siano P_R e P_S due proiettori, rispettivamente sui sottospazi R e S.*

(i) *Sono equivalenti le seguenti affermazioni*

(a) $P_R + P_S$ *è un proiettore;*
(b) $P_R P_S = 0$*;*
(c) $P_S P_R = 0$*;*
(d) $P_R(S) = \{0\}$*;*
(e) $P_S(R) = \{0\}$*;*
(f) R *ed* S *sono ortogonali.*

(ii) *Se* $P_R + P_S$ *è un proiettore, allora è associato al sottospazio* $R \oplus S$*, cioè* $P_R + P_S = P_{R\oplus S}$.

Dimostrazione Cominciamo col vedere che (a) $\Rightarrow$ (b) o (c). Mostreremo che se $P_R + P_S$ è un proiettore, allora il commutatore di P_R e P_S è nullo ed è pure nullo $P_R P_S + P_S P_R$, da cui la tesi. Abbiamo

$$P_R + P_S = (P_R + P_S)^2 = P_R^2 + P_S^2 + P_R P_S + P_S P_R = P_R + P_S + P_R P_S + P_S P_R$$

dunque

$$P_R P_S + P_S P_R = 0;$$

moltiplichiamo prima a destra e poi a sinistra per P_S abbiamo

$$\begin{aligned} P_S P_R P_S + P_S P_R &= 0 \\ P_R P_S + P_S P_R P_S &= 0 \end{aligned}$$

sottraendo membro a membro

$$P_R P_S - P_S P_R = 0$$

Vediamo come (b) $\Rightarrow$ (d). Abbiamo

$$P_R P_S = 0$$

ma P_S ristretto a S dà l'identità di S, perciò deve essere $P_R(S) = \{0\}$.

Analogamente (c) $\Rightarrow$ (e).

(e) $\Rightarrow$ (f). $P_S(R) = \{0\}$ allora $R \subset \ker S = S^\perp$, perciò tutti gli elementi di R sono ortogonali a tutti gli elementi di S.

(f) $\Rightarrow$ (a) Siccome R e S sono ortogonali (sono sottospazi e perciò sono spazi di Hilbert), consideriamo l'insieme $R \oplus S$. Esso è chiuso: come somma diretta di spazi di Hilbert è uno spazio di Hilbert, perciò è completo, ne consegue che è chiuso come sottoinsieme di $\mathcal{H}$. Allora possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= (R \oplus S) \oplus (R \oplus S)^\perp \\ x &= x' + x'' \end{aligned}$$

con $x' \in R \oplus S$ e $x'' \in (R \oplus S)^\perp$. D'altra parte $x'' \in R^\perp$ e $x'' \in S^\perp$, mentre per x' si ottiene una unica decomposizione $x' = r + s$ con $P_R x'' = P_S x'' = 0$. Dunque, per ogni $x = r + s + x''$, con $r \in R$ e $s \in S$ e $x'' \in (R \oplus S)^\perp$. Vale allora

$$P_{R+S} x = x' = r + s = P_R x + P_S x$$

(c.v.d.) Allora $P_R + P_S$ è un proiettore e vale la (ii).

Proposizione III.19 *Siano* P_R, P_S *i proiettori associati a* R *e* S *sottospazi di* $\mathcal{H}$.

(i) *Sono fatti equivalenti*

(a) $P_R P_S$ *è un proiettore;*
(b) $P_S P_R$ *è un proiettore;*
(c) $[P_R, P_S] = 0$*;*
(d) $R = (R \cap S) \oplus (R \cap S^\perp)$*;*
(e) $S = (S \cap R) \oplus (S \cap R^\perp)$*;*

(ii) *Se* $P_R P_S$ *è un proiettore allora esso è associato allo spazio* $R \cap S$*, cioè* $P_R P_S = P_{R\cap S}$.

Dimostrazione (a) $\Leftrightarrow$ (c) In ogni caso, abbiamo

$$(P_R P_S)^* (P_R P_S) = P_S P_R P_S$$

Se $P_R P_S$ è un proiettore, allora

$$(P_R P_S)^* (P_R P_S) = P_R P_S$$

cioè

$$P_S P_R P_S = P_R P_S$$

aggiuntando

$$P_S P_R P_S = P_S P_R$$

da cui il commutatore è nullo.

D'altra parte se

$$P_S P_R = P_R P_S$$

moltiplicando per P_S a destra

$$P_S P_R P_S = P_R P_S$$

sicché

$$(P_R P_S)^* (P_R P_S) = P_R P_S$$

e dunque $P_R P_S$, da cui $P_R P_S$ è un proiettore.

(b) $\Leftrightarrow$ (c) caso precedente scambiando le lettere.

(c) $\Rightarrow$ (d) Sia $x \in \mathcal{H}$ allora

$$P_R x = P_S P_R x + (\mathbb{I} - P_S) P_R x = P_S P_R x + P_{S^\perp} P_R x$$

perciò x si decompone in due vettori ortogonali.

Ora, $P_S P_R x \in R(P_S) = S$, ma $P_S P_R x = P_R P_S x \in R(P_R) = R$ perciò $P_R P_S x \in R \cap S$. In modo analogo si ha che $(\mathbb{I} - P_S) P_R x = P_{S^\perp} P_R \in R \cap S^\perp$. Se ne ricava che

$$R = R(P_R) \subset (R \cap S) \oplus \left(R \cap S^\perp\right)$$

d'altra parte

$$(R \cap S) \oplus \left(R \cap S^\perp\right) \subset R$$

(c) $\Rightarrow$ (e) in maniera analoga

(c) $\Rightarrow$ (a). Sia $x \in \mathcal{H}$ allora

$$x = x' + x'',\ x' \in S,\ x'' \in S^\perp$$

Da (e) abbiamo la decomposizione ortogonale di x' relativa a R:

$$x' = x_1' + x_2',\ x_1' \in S \cap R,\ x_2' \in S \cap R^\perp$$

Allora

$$x = x_1' + (x_2' + x'')$$

fornisce la decomposizione ortogonale relativa a $S \cap R$. Infatti $x_2' + x'' \in (S \cap R)^\perp$ essendo

$$\begin{aligned} x_2' &\in R^\perp \subset (R \cap S)^\perp \\ x'' &\in S^\perp \subset (R \cap S)^\perp \end{aligned}$$

Allora

$$P_{R \cap S} x = x_1' = P_R P_S x.$$

(c.v.d.) (d) $\Rightarrow$ (b) analogo.

Proposizione III.20 *Siano P_R, P_S proiettori associati ai sottospazi R e S, rispettivamente.*

(i) *Sono equivalenti le affermazioni*

(a) $P_R - P_S$ *è un proiettore;*
(b) $P_R P_S = P_S P_R = P_S$*;*
(c) $S \subset R$.

(ii) *Se* $P_R - P_S$ *è un proiettore, esso è associato al sottospazio* $R \cap S^\perp$*, cioè* $P_R - P_S = P_{R\cap S^\perp}$.

Dimostrazione (a) $\Rightarrow$ (b) Da $(P_R - P_S)^* (P_R - P_S) = P_R - P_S$ abbiamo

$$P_R + P_S - (P_R P_S + P_S P_R) = P_R - P_S$$

da cui

$$P_R P_S + P_S P_R = 2P_S$$

moltiplicando a sinistra per P_S,

$$P_S P_R P_S + P_S P_R = 2P_S$$

moltiplicando a destra per P_S,

$$P_R P_S + P_S P_R P_S = 2P_S$$

perciò

$$P_R P_S = P_S P_R = P_S.$$

(b) $\Rightarrow$ (c) Sia $x \in S$, abbiamo $x = P_S x$; ma $P_S = P_R P_S$ perciò

$$x = P_R P_S x$$

da cui $x \in R(P_R) = R$, perciò $S \subset R$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Sia $x \in \mathcal{H}$ allora $x = x' + x''$ $x' \in R$ e $x'' \in R^\perp$, ora siccome $S \subset R$,

$$x' = x_1' + x_2',\ x_1' \in S,\ x_2' \in R \cap S^\perp$$

allora

$$x = x_1' + (x_2' + x'')$$

e

$$x = x_2' + (x_1' + x'')$$

forniscono la decomposizione ortogonale di x rispettivamente sui sottospazi S e $R \cap S^\perp$, infatti $x'' + x_2' \in S^\perp$

$$\begin{aligned} x'' &\in R^\perp \subset S^\perp \\ x_2' &\in R \cap S^\perp \subset S^\perp \end{aligned}$$

e $x'' + x_1' \in \left(R \cap S^\perp\right)^\perp$, poiché

$$\begin{aligned} x'' &\in R^\perp \subset \left(R \cap S^\perp\right)^\perp \\ x_1' &\in S \subset \left(R \cap S^\perp\right)^\perp \end{aligned}$$

Abbiamo allora

$$P_{R\cap S^\perp} x = x_2' = x' - x_1' = P_R x - P_S x = (P_R - P_S)\, x$$

(c.v.d.) che mostra tesi e (ii).

Finita la dimostrazione di queste noiosissime proposizioni, concludiamo con un

Teorema III.14 *Sia* $A \in L(\mathcal{H})$ *diverso dall'applicazione nulla.*

(i) *Sono fatti euqivalenti*

(a) A *è un proiettore;*

(b) *esiste un s.o.n.* $\{u_n\} \subset \mathcal{H}$ *tale che*

$$Ax = \sum_{n \in \mathbb{N}} (u_n, x)\, u_n, \ \forall x \in \mathcal{H}$$

(ii) *Se* (b) *è vera,* A *è il proiettore associato al sottospazio* $\operatorname{Span}\langle u_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$.

Dimostrazione Cominciamo a dimostrare che (a) implica (b). $R(A)$ è un sottospazio di $\mathcal{H}$ per definizione di proiettore. $R(A)$ è uno spazio di Hilbert, perciò ammette un suo s.o.n.c. $\{u_n\}$ allora

$$y = \sum_{n\in\mathbb{N}} (u_n, y)\, u_n \ \forall y \in R(A)$$

allora, per ogni $x \in \mathcal{H}$

$$Ax = \sum_{n\in\mathbb{N}} (u_n, Ax)\, u_n$$

ma A è autoaggiunto perciò

$$(u_n, Ax) = (Au_n, x)$$

ma $u_n \in R(A)$, perciò $Au_n = u_n$ e dunque

$$Ax = \sum_{n\in\mathbb{N}} (u_n, x)\, u_n.$$

Veniamo al viceversa.

$$\begin{aligned}(x, A^*Ax') &= (Ax, Ax') = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x, u_n)(u_n, x') \\ (x, Ax') &= \sum_{n\in\mathbb{N}} (x, u_n)(u_n, x')\end{aligned}$$

da cui, per non degenerazione, $A = A^*A$ cioè A è un proiettore.

Veniamo a (ii). Si ha subito che $R(A) \subset \operatorname{Span}\langle u_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$. D'altra parte se vale (b) allora vale (a) e A è un proiettore. Perciò $\ker A = R(A)^\perp$. Ma ancora da (b) si ha che $\ker A \subset \operatorname{Span}\langle u_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}^\perp$, perciò

$$\operatorname{Span}\langle u_n \rangle_{n\in\mathbb{N}} \subset (\ker A)^\perp = R(A)$$

(c.v.d.) la tesi.

III.6 Convergenza forte e convergenza debole

Esempio III.3 Consideriamo uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, di dimensione infinita. Fissiamo un riferimento ortogonale $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e, per ogni $n \in \mathbb{N}$, definiamo l'operatore A_n tale che

$$A_n x \equiv \sum_{i=1}^{n} (u_n, x)\, u_n$$

Per l'ultimo teorema dimostrato nella sezione precedente, ogni A_n è un proiettore sul sottospazio $W_n = \operatorname{Span}\langle u_i \rangle_{i\in J_n}$.

Si può pensare che la successione di operatori $\{A_n\}$ converga a $\mathbb{I}$. D'altra parte, siccome $W_n \subset W_m$ se $n < m$, abbiamo che l'operatore $A_m - A_n$ è il proiettore sul sottospazio $\operatorname{Span}\langle u_{n+1}, \ldots, u_m \rangle$, sicché

$$\|A_m - A_n\| = 1$$

dunque, la successione A_n non è di Cauchy e perciò non converge.

D'altra parte, per ogni $x \in \mathcal{H}$, la successione $\{A_n x\}$ converge a x essendo $\{u_n\}$ un s.o.n.c.

L'esempio giustifica il fatto che si debbano prendere in considerazione due diversi tipi di topologie.

Definizione III.8 *Sia E uno spazio di Banach e sia E^* il suo duale topologico, si dice che $\{x_n\}$ converge debolmente a x, e si scrive*

$$x_n \xrightarrow{w} x \text{ o } w - \lim_{n\to\infty} x_n = x$$

se

$$\langle \alpha, x_n \rangle \to \langle \alpha, x \rangle \, , \; \forall \alpha \in E^*$$

x si dice limite debole della successione.

La usuale convergenza in norma, si dice allora convergenza forte e si pone

$$\text{s-} \lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0.$$

A proposito della convergenza debole, nel caso in cui si consideri uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, grazie al teorema di rappresentazione, vale

$$\text{w-} \lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (y, x_n) = (y, x) \, , \; \forall y \in \mathcal{H}.$$

Esempio III.4 Sia $\{u_n\} \subset \mathcal{H}$ una successione di elementi appartenenti a un s.o.n., allora

$$\|u_n - u_m\|^2 = \|u_n\|^2 + \|u_m\|^2 = 2$$

perciò la successione non converge in norma. D'altra parte, la successione converge debolmente a 0, per ogni $y \in \mathcal{H}$

$$\sum |(y, u_n)|^2 < \infty$$

allora $(y, u_n) \to 0$.

Nell'algebra $L(\mathcal{H})$ le nozioni di convergenza che si possono assegnare sono in realtà tre: la convergenza uniforme viene infatti ad affiancarsi a convergenza forte e debole.
La successione $\{A_n\}$ **converge uniformemente** a A, $A_n \xrightarrow{u} A$, se $\|A - A_n\| \to 0$. La convergenza è **forte**, se $A_n x \xrightarrow{s} Ax$, ed è debole se $A_n x \xrightarrow{w} Ax$, per ogni $x \in \mathcal{H}$.

Proposizione III.21 *La convergenza uniforme implica la convergenza forte, la quale a sua volta implica quella debole.*

Dimostrazione A_n converga uniformemente a A e sia $x \in \mathcal{H}$, allora

$$\|Ax - A_n x\| \le \|A - A_n\| \, \|x\| \to 0$$

A_n converga fortemente a A e siano $x, y \in \mathcal{H}$, allora

$$|(y, Ax) - (y, A_n x)| = |(y, (A - A_n)\, x)| \le \|y\| \, \|Ax - A_n x\| \to 0.$$

(c.v.d.)

Controesempi Se le tre nozioni coincidono in dimensione finita, così non è in dimensione infinita. Consideriamo infatti un s.o.n. $\{u_n\} \subset \mathcal{H}$ e la successione di operatori $A_n x \equiv (u_n, x)\, u_0$. Essa converge fortemente a 0, ma $\|A_n\| = 1$, perciò la convergenza non può essere uniforme. Consideriamo ora la successione A^*, abbiamo

$$(y, A_n x) = (y, (u_n, x)\, u_0) = (u_n, x)\,(y, u_0) = ((u_0, y)\, u_n, x)$$

perciò $A^* x = (u_0, x)\, u_n$. Essa converge debolmente a zero essendo

$$(y, A^* x) = (y, u_n)\,(u_0, x) \to 0$$

ma

$$\begin{aligned} \|A^* x\| &= |(u_0, x)| \\ \|A^*\| &= 1 \end{aligned}$$

Conseguenze del teorema di Banach-Steinhaus Ci occorre adesso il teorema di Banach-Steinhaus, o della uniforme limitatezza, che abbiamo dimostrato precedentemente. Esso asserisce che preso un sottoinsieme $\mathcal{F}$ di $L(E,F)$ con E,F spazi di Banach, tale che per ogni $x \in E$ esista $M_x > 0$ per cui $\|Ax\| \leq M_x$ per ogni $A \in \mathcal{F}$, si trova una costante M talché

$$\|A\| \leq M, \ \forall A \in \mathcal{F}.$$

Ne deriva la seguente proposizione

Proposizione III.22 *Sussistono i seguenti fatti*

(i) *se* $\{x_n\} \subset \mathcal{H}$ *è debolmente convergente, allora è limitata;*

(ii) *se* $\{A_n\} \subset L(\mathcal{H})$ *è debolmente convergente, allora è limitata.*

Dimostrazione (i) Identifichiamo la successione $\{x_n\} \subset \mathcal{H}$ con la $\{Tx_n\} \subset \mathcal{H}^*$, immagine della successione di partenza tramite l'isomorfismo di Riesz. Per ogni $y \in \mathcal{H}$, la successione

$$\langle Tx_n, y\rangle = (x_n, y)$$

è convergente perciò limitata. Dunque, posto $E = \mathcal{H}$, $F = \mathbb{C}$ e $\mathcal{F} = \{Tx_n\}$, abbiamo

$$|\langle Tx_n, y\rangle| \leq M_y, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Possiamo perciò applicare il teorema di Banach-Steinhaus. Ricaviamo che la successione $\{Tx_n\}$ è limitata. Siccome però T è una isometria, $\{x_n\}$ è limitata.

(ii) Sia $\mathcal{F} = \{A_n\}$. Per ogni x la successione $\{A_n x\}$ è debolmente convergente, per (i) è limitata, e si può allora applicare il teorema di Banach-Steinhaus e ottenere la tesi. **(c.v.d.)**

Risulta evidente poi che, se $\{A_n\} \subset L(\mathcal{H})$ e $A \in L(\mathcal{H})$, vale

$$A_n \xrightarrow{w} A \Leftrightarrow A^* \xrightarrow{w} A^*$$

D'altra parte, non è invece vero che la convergenza forte di A_n ad A implica, la convergenza forte (solo debole evidentemente) di A^* ad A^*. Consideriamo, infatti, la successione $A_n x = (u_n, x)\, u_0$ definita sopra. Essa converge fortemente a 0; però $A^* x = (u_0, x)\, u_n$, non converge fortemente.

III.7 Operatori definiti su una varietà lineare

III.7.1 Richiami alle definizioni e teorema di estensione per gli operatori continui

Operatori definiti su varietà lineari Fino ad ora, fatta esclusione per la prima sezione, abbiamo considerato operatori che fossero definiti sull'intero spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Da questo momento in poi ci occuperemo invece di operatori lineari qualsiasi, definiti cioè su una generica varietà lineare.

Grafico degli operatori lineari Denoteremo con il simbolo $\mathcal{O}(X,Y) \equiv \hom(X,Y)$ l'insieme degli operatori lineari da X a Y. Sappiamo che il grafico di un operatore lineare A, $\mathcal{G}(A)$, è una varietà lineare in $X+Y$, e che

$$(0,y) \in \mathcal{G}(A) \Rightarrow y = 0$$

Infatti, siano $x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2 \in \mathcal{G}(A)$, allora $y_1 = Ax_1$ e $y_2 = Ax_2$ per cui

$$x_1 \oplus y_1 + \lambda(x_2 \oplus y_2) = (x_1 + \lambda x_2) \oplus (y_1 + \lambda y_2) \in \mathcal{G}(A)$$

essendo

$$y_1 + \lambda y_2 = A(x_1 + \lambda x_2).$$

Inoltre, se $(0,y) \in \mathcal{G}(A)$, allora $y = A0 = 0$.
Vale anche il viceversa. Cioè se $V \subset X+Y$ è una varietà lineare per cui $(0,y) \in V \Rightarrow y = 0$, allora è il grafico di un operatore lineare. Sia A l'operatore definito su $D(A) \equiv P_X(V) \subset X$ tale che

$$Ax \equiv P_Y(x \oplus y), \ (x \oplus y) \in V$$

allora $A \in \mathcal{O}(X,Y)$ e $\mathcal{G}(A) = V$. Si noti come la definizione sia ben posta: per ogni x esiste uno e un solo $y \in Y$ tale che $(x \oplus y) \in V$. Infatti, se $x \oplus y_1$ e $x \oplus y_2$ appartengono a V, allora anche $0 \oplus (y_2 - y_1) \in V$ come differenza dei due vettori considerati. Ma questo implica $y_2 - y_1 = 0$ e $y_1 = y_2$.

Eguaglianza, somma e composizione

Come è ovvio in $\mathcal{O}(X,Y)$ due operatori lineari sono eguali se hanno domini eguali e se su tali domini risultano eguali. La somma di operatori lineari si definisce poi sul dominio intersezione dei domini degli addendi. Analogamente, se $A \in \mathcal{O}(X,Y)$ e $B \in \mathcal{O}(Y,Z)$ l'operatore BA è definito sul dominio

$$D(BA) = \{x \in X \,| x \in D(A)\,, \, Ax \in D(B)\}\,.$$

Come ovvio, il problema dei domini interviene sull'esistenza degli elementi inversi, così $\mathcal{O}(X,Y)$ non è uno spazio lineare e $\mathcal{O}(X)$ non è un'algebra con unità rispetto alla composizione (gli elementi neutri 0 e $\mathbb{I}$ hanno dominio su X).
Abbiamo già definito il concetto di estensione di un operatore (usando il simbolo $\preceq$) d'ora in poi diremo che A estende B se $D(B) \subset D(A)$ e $A|_{D(B)} = B$ e scriveremo $B \subset A$.
Nella prima sezione, occupandoci della continuità, abbiamo lavorato supponendo i domini varietà lineari nello spazio vettoriale X, perciò la presentazione della continuità deve considerarsi esaurita, fatta eccezione per il seguente

Teorema III.15 (di estensione)

Siano X e Y spazi di Banach e sia $A \in \mathcal{O}(X,Y)$ con $D(A) \neq X$. Se A è continuo sul dominio, allora esiste uno e un solo operatore $\bar{A} \in \mathcal{O}(X,Y)$ tale che

(i) $D(A) = [D(A)]^a$;

(ii) $A \subset \bar{A}$;

(iii) $\bar{A}$ *è continuo.*

Vale, infine, $\|\bar{A}\| = \|A\|$.

Dimostrazione

Definiamo $\bar{A}$ su $D(A)^a$ come segue

$$\bar{A}x = \lim_{n\to\infty} Ax_n$$

dove $x_n \to x$ è una successione in $D(A)$, che esiste certamente essendo $x \in D(A)$. Vediamo che la definizione è ben posta. In primo luogo mostriamo che il limite esiste sempre: la successione $\{Ax_n\} \subset Y$ è di Cauchy e perciò, Y è di Banach, converge. Infatti,

$$\|Ax_n - Ax_m\| \leq \|A\| \, \|x_n - x_m\|$$

e x_n, essendo convergente, è di Cauchy.
Vediamo adesso che se $x_n \to x$ e $y_n \to x$, ambedue le successioni a valori in $D(A)$, allora

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} Ay_n$$

A questo scopo basta notare che $x_n - y_n \to 0$, perciò

$$\|Ax_n - Ay_n\| \leq \|A\| \, \|x_n - y_n\| \to 0$$

Banalmente vale (ii). Che $\bar{A}$ sia un operatore lineare è abbastanza evidente. Anzitutto il suo dominio, come chiusura di una varietà lineare è un sottospazio (e quindi una varietà lineare chiusa). Si ha poi, se $x_n \to x$ e $y_n \to y$,

$$\bar{A}(x + \lambda y) = \lim_{n\to\infty} A(x_n + \lambda y_n) = \lim_{n\to\infty} Ax_n + \lambda \lim_{n\to\infty} Ay_n = \bar{A}x + \lambda \bar{A}y$$

Vediamo la continuità di $\bar{A}$: abbiamo, se $x \in D(A)^a$

$$\|\bar{A}x\| = \left\|\lim_{n\to\infty} Ax_n\right\| = \lim_{n\to\infty} \|Ax_n\| \leq \|A\| \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|A\| \, \|x\|$$

cioè $\|\bar{A}\| \leq \|A\|$. Questo prova la continuità di $\bar{A}$. D'altra parte siccome $\bar{A}$ è l'estensione di A, si ha $\|\bar{A}\| \geq \|A\|$ da cui $\|\bar{A}\| = \|A\|$.
L'unicità dell'operatore $\bar{A}$, deriva dalla (iii) e dal fatto che $D(\bar{A}) = D(A)^a$. Infatti, se B è un operatore per il quale valgono le tre proprietà richieste e $x \in D(A)^a$, allora esiste una

successione a valori in $D(A)$ tale che $x_n \to x$. Ne consegue che, per (iii)

(c.v.d.)
$$Bx = \lim_{n\to\infty} Bx_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \bar{A}x.$$

III.7.2 Operatori lineari chiudibili e chiusi

Richiami sugli operatori chiusi Nel corso della dimostrazione dei principi di Banach, abbiamo introdotto sommariamente la nozione di operatore chiuso. Conferita allo spazio $X \oplus Y$ la struttura di spazio di Banach nella norma

$$\|x \oplus y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

(che, se X e Y sono H-spazi, è indotta dal prodotto scalare dato dalla somma dei prodotti scalari su X e Y), e considerato un operatore $A \in \mathcal{O}(X,Y)$, abbiamo detto che A si dice chiuso se $\mathcal{G}(A) \subset X \oplus Y$ è un sottoinsieme chiuso. Abbiamo poi visto che A chiuso ma definito su tutto X è continuo (**teorema del grafico chiuso**). Nel corso della presente sottosezione adotteremo un punto di vista leggermente più generale.

Operatori continui e chiusura del grafico Riprendiamo in esame il teorema di estensione. Dato l'operatore A continuo, abbiamo definito $\bar{A}$ che estende A sul dominio $D(A)^a$. Adesso è facile rendersi conto che

$$\mathcal{G}(\bar{A}) = \mathcal{G}(A)^a$$

Avendo a che fare solo con spazi metrici continuiamo a sfruttare l'equivalenza di chiusura e sequenziale chiusura. Sia dunque $x \oplus \bar{A}x \in \mathcal{G}(\bar{A})$, allora esiste $\{x_n\} \in D(A)$ per cui $x_n \to x$ e $\bar{A}x_n = Ax_n \to \bar{A}x$, perciò esiste $\{x_n \oplus Ax_n\} \subset \mathcal{G}(A)$ talché $x_n \oplus Ax_n \to x \oplus \bar{A}x$, cioè $x \oplus \bar{A}x \in \mathcal{G}(A)^a$. Viceversa, sia $x \oplus y \in \mathcal{G}(A)^a$, allora esiste una successione $\{x_n \oplus y_n\} \subset \mathcal{G}(A)$ tale che $x_n \oplus y_n \to x \oplus y$. Ma $y_n = Ax_n$ sicché $y = \bar{A}x$.
Dunque, gli operatori continui sul loro dominio hanno la proprietà notevole che la chiusura del loro grafico è grafico di un operatore (cioè è una varietà lineare tale che se contiene $(0,y)$ allora $y = 0$).

Operatori chiudibili e chiusi Come abbiamo detto ampliamo il punto di vista sugli operatori chiusi e lo facciamo introducendo la seguente definizione

Definizione III.9 *Dati gli spazi di Banach X e Y, sia $A \in \mathcal{O}(X,Y)$. L'operatore A si dice chiudibile se la chiusura del suo grafico $\mathcal{G}(A)^a$ è grafico di un operatore lineare. Se A è chiudibile l'operatore avente come grafico $\mathcal{G}(A)^a$ si dice chiusura di A e è indicato con $\bar{A}$. L'operatore A si dice chiuso se ha grafico chiuso.*

Osservazione III.4 Tutti gli operatori continui sono chiudibili e la loro chiusura è un operatore continuo.

Come abbiamo già dimostrato a suo tempo, *A è chiuso se e solo se per ogni successione $\{x_n\} \subset D(A)$ convergente a un punto x, tale che la successione $\{Ax_n\}$ ammette come limite y, vale $y = Ax$.*
Mostriamo adesso la

Proposizione III.23 *A è chiudibile se e solo se, per ogni successione $\{x_n\} \subset A$ che converga a 0, tale che $Ax_n \to y$, si ha $y = 0$.*

Dimostrazione Sia A chiudibile, perciò se $0 \oplus y \in \mathcal{G}(A)^a$ allora $y = 0$. Sia $\{x_n\} \subset A$ che converga a 0, tale che $Ax_n \to y$, allora $\{x_n \oplus Ax_n\} \in \mathcal{G}(A)$ perciò $\{0 \oplus \lim_{n\to\infty} Ax_n\} \in \mathcal{G}(A)^a$, dunque

$$y = \lim_{n\to\infty} Ax_n = 0.$$

Valga ora che per ogni successione $\{x_n\} \subset A$ che converga a 0, tale che $Ax_n \to y$, si ha $y = 0$. Sappiamo che $\mathcal{G}(A)$ è una varietà lineare, perciò anche $\mathcal{G}(A)^a$ è una varietà lineare (in più è chiusa). Vediamo che se $0 \oplus y \in \mathcal{G}(A)^a$ allora $y = 0$. Sia $0 \oplus y \in \mathcal{G}(A)^a$ allora esiste $\{x_n \oplus Ax_n\}$ che converge a $0 \oplus y$, ma $y = \lim_{n\to\infty} Ax_n = 0$.

(c.v.d.)

Anche la chiusura di A chiudibile si esprime mediante successioni:

$$\bar{A}x = \lim_{n\to\infty} Ax_n$$

con

$$D\left(\bar{A}\right) = \left\{x \in X \,\middle|\, \exists \{x_n\} \subset D(A),\, x_n \to x \text{ e } \exists \lim_{n\to\infty} Ax_n\right\}$$

$\bar{A}$ è ben definito, perché se x_n e y_n convergono a x, allora $x_n - y_n \to 0$ e perciò

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n - \lim_{n\to\infty} Ay_n = \lim_{n\to\infty} A(x_n - y_n) = 0.$$

Teorema III.16 *Sia $A \in \mathcal{O}(X,Y)$ e si considerino le seguenti tre affermazioni*

(i) $D(A)$ *è chiuso;*

(ii) A *è continuo;*

(iii) A *è chiuso.*

Se per A valgono due delle affermazioni precedenti, allora vale la terza.

Dimostrazione (i) e (ii) implicano (iii) A è continuo perciò chiudibile. Allora la sua chiusura $\bar{A}$ è tale che $D\left(\bar{A}\right) = D(A)^a = D(A)$. Allora $A = \bar{A}$, perciò A è chiuso.

(ii) e (iii) implicano (i) $\bar{A} = A$, perciò $D(A) = D\left(\bar{A}\right)$. Ma A è continuo, perciò $D\left(\bar{A}\right) = D(A)^a$ sicché $D(A)$ è eguale alla sua chiusura, cioè è chiuso.

(i) e (iii) implicano (i) $D(A)$ è chiuso perciò è uno spazio completo. Dunque, $A \in \mathcal{O}(D(A), Y)$ con $D(A)$ e Y spazi completi e A chiuso. Allora, per il teorema del grafico chiuso, A è continuo. **(c.v.d.)**

Vediamo adesso due importanti fatti sugli operatori chiusi.

Teorema III.17 *Valgono i seguenti asserti*

(i) *sia $A \in \mathcal{O}(X,Y)$ chiuso,*

(a) $\ker A$ *è chiuso in X;*

(b) *se* $\ker A = \{0\}$, *cioè se A è invertibile, allora A^{-1} è chiuso.*

(ii) *sia $A \in \mathcal{O}(X,Y)$ chiudibile: se* $\ker A = \{0\}$, *A^{-1} è chiudibile se e solo se $\bar{A}$ è invertibile e vale*

$$\overline{A^{-1}} = \bar{A}^{-1}.$$

Dimostrazione (i) Vediamo (a). Sia $\{x_n\} \subset \ker A$ tale che $x_n \to x$. Vogliamo vedere che $x \in \ker A$. Ora, siccome $\lim_{n\to\infty} Ax_n = 0$, si ha che $x \in D(A)$ e $Ax = \lim_{n\to\infty} Ax_n = 0$, cioè $x \in \ker A$.

Vediamo (b). Dall'ipotesi si ha che A è invertibile, con $D\left(A^{-1}\right) = R(A)$. Consideriamo allora l'operatore

$$\begin{array}{rccc} T: & X \oplus Y & \to & Y \oplus X \\ & x \oplus y & \mapsto & y \oplus x \end{array}$$

Esso è un isomorfismo isometrico (dunque è un omeomorfismo), inoltre

$$\mathcal{G}\left(A^{-1}\right) = T\mathcal{G}(A)$$

perciò, se A è chiuso, A^{-1} è chiuso.

(ii) Sia A^{-1} chiudibile. Tenendo conto del fatto che T è un omeomorfismo

$$\mathcal{G}\left(\overline{A^{-1}}\right) = \left[\mathcal{G}\left(A^{-1}\right)\right]^a = \left[T\mathcal{G}(A)\right]^a = T\left[\mathcal{G}(A)\right]^a = T\mathcal{G}\left(\bar{A}\right)$$

Notiamo che, per ogni $B \in \mathcal{O}(X,Y)$, B è invertibile se e solo se $T\mathcal{G}(B)$ è un grafico lineare (e in tal caso, $\mathcal{G}\left(B^{-1}\right) = T\mathcal{G}(B)$). Infatti, se B è invertibile, allora $T\mathcal{G}(B) = \mathcal{G}\left(B^{-1}\right)$. Viceversa,

$T\mathcal{G}(B)$ sia un grafico lineare, allora $(0,x) \in T\mathcal{G}(B) \Rightarrow x = 0$, dunque $(x,0) \in \mathcal{G}(B) \Rightarrow x = 0$, cioè

$$Bx = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

sicché il kernel di B è banale. In base a questa osservazione, visto che $T\mathcal{G}\left(\bar{A}\right)$ è un grafico lineare, si ha che $\bar{A}$ è invertibile.

Viceversa, sia $\bar{A}$ invertibile, allora

$$\mathcal{G}\left(\bar{A}^{-1}\right) = T\mathcal{G}\left(\overline{A}\right) = T\left[\mathcal{G}(A)\right]^a = \left[T\mathcal{G}(A)\right]^a = \left[\mathcal{G}\left(A^{-1}\right)\right]^a$$

Perciò la chiusura del grafico di $\mathcal{G}\left(A^{-1}\right)$ è un grafico lineare, dunque, A^{-1} è chiudibile e

$$\left[\mathcal{G}\left(A^{-1}\right)\right]^a = \mathcal{G}\left(\overline{A^{-1}}\right)$$

perciò

$$\bar{A}^{-1} = \overline{A^{-1}}.$$

(c.v.d.)

Un ultimo risultato di carattere generale

Teorema III.18 *Siano $A \in L(X,Y)$ e $B \in \mathcal{O}(X,Y)$ allora*

(i) *se B è chiuso, anche $A+B$ è chiuso;*

(ii) *se B è chiudibile, anche $A+B$ è chiudibile.*

Dimostrazione (i) Sia $\{x_n\} \subset D(A+B) = X \cap D(B) = D(B)$ tale che $x_n \to x$ e $(A+B)x_n \to y$, allora, siccome $Ax_n \to Ax$, Bx_n è convergente e, visto che B è chiuso, $Bx_n \to Bx$, ne viene che

$$y = (A+B)x$$

perciò $A+B$ è chiuso.

(ii) Sia $\{x_n\} \subset D(A+B) = X \cap D(B) = D(B)$ tale che $x_n \to 0$ e $(A+B)x_n \to y$, allora, siccome $Ax_n \to 0$, Bx_n è convergente e, visto che B è chiudibile, $Bx_n \to 0$, ne viene che

$$y = 0$$

(c.v.d.) perciò $A+B$ è chiudibile.

III.7.3 Operatori lineari aggiuntabili

Aggiunzione Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert. Consideriamo $A \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$, vogliamo definirne l'aggiunto. A questo scopo, consideriamo l'operatore seguente

$$\begin{array}{rccc} V: & \mathcal{H}\oplus\mathcal{H} & \to & \mathcal{H}\oplus\mathcal{H} \\ & x\oplus y & \mapsto & -y\oplus x \end{array}$$

V è unitario. Infatti, è banalmente suriettivo. Inoltre è isometrico,

$$(x\oplus y, x\oplus y) = (x,x) + (y,y) = (-y,-y) + (x,x) = (-y\oplus x, -y\oplus x).$$

Per motivare la definizione che daremo, prendiamo preliminarmente $A \in L(\mathcal{H})$. A è continuo, dunque chiuso, perciò $\mathcal{G}(A)$ è chiuso. Siccome V è unitario, dunque continuo (si tratta, invero, di un omeomorfismo), $V\mathcal{G}(A)$ è chiuso, perciò è un sottospazio. Risulta univocamente definito $G \equiv \left[V\mathcal{G}(A)\right]^{\perp}$. Ci chiediamo se G è un grafico lineare. Certo è una varietà lineare (per di più chiusa), inoltre,

$$0\oplus y \in G \Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{H}\, 0 = (0\oplus y, -Ax\oplus x) = (y,x) \Leftrightarrow y = 0$$

G è grafico di un operatore lineare che affermiamo essere A^*. Infatti,

$$\begin{aligned} (x,y) \in G \quad &\Leftrightarrow \quad \forall z \in \mathcal{H}\, 0 = (x\oplus y, -Az\oplus z) = -(x,Az) + (y,z) = (y - A^*x, z) \\ &\Leftrightarrow \quad y = A^*x \end{aligned}$$

È ragionevole, allora, porre

Definizione III.10 *L'operatore $A \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$ si dice aggiuntabile se $[V\mathcal{G}(A)]^{\perp}$ è grafico di un operatore lineare. In questo caso, di definisce aggiunto A^* di A l'operatore il cui grafico è $[V\mathcal{G}(A)]^{\perp}$.*

La definizione di aggiuntabilità può essere tradotta in modo molto semplice grazie al seguente

Teorema III.19 *$A \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$ è aggiuntabile se e solo se $D(A)$ è denso in $\mathcal{H}$ (cioè A è densamente definito).*

Dimostrazione A è aggiuntabile se e solo se $[V\mathcal{G}(A)]^{\perp}$ è un grafico, ma $[V\mathcal{G}(A)]^{\perp}$ è una varietà lineare (chiusa), perciò A è aggiuntabile se e solo se

$$0 \oplus y \in [V\mathcal{G}(A)]^{\perp} \Rightarrow y = 0$$

ma

$$0 \oplus y \in [V\mathcal{G}(A)]^{\perp} \Rightarrow \forall x \in D(A)\ 0 = (0 \oplus y, -Ax \oplus x) = (y, x) \Rightarrow y \in [D(A)]^{\perp}$$

sicché se A è aggiuntabile allora

$$[D(A)]^{\perp} = [D(A)^a]^{\perp} = \{0\} \Leftrightarrow D(A)^a = \mathcal{H}$$

(c.v.d.) e perciò $D(A)$ è denso; viceversa, se $D(A)$ è denso, allora A è aggiuntabile.

D'altra parte, nella fisica matematica, si ha solitamente a che fare con operatori densamente definiti, perciò la condizione di aggiuntabilità non è molto forte.
Veniamo adesso a stabilire le proprietà di A^* per A aggiuntabile

Teorema III.20 *Sia $A \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$ aggiuntabile, allora*

(i) *A^* è chiuso;*

(ii) *A^* è aggiuntabile se e solo se A è chiudibile e, in tal caso, $A^{**} = \bar{A}$;*

(iii) *se A è chiudibile, anche $\bar{A}$ è aggiuntabile e si ha $\left(\bar{A}\right)^* = A^*$;*

(iv) *se A è invertibile, A^* è invertibile se e solo se A^{-1} è aggiuntabile e, in tal caso,*

$$(A^*)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^*;$$

(v) *per il dominio dell'aggiunto, si ha*

$$\begin{aligned} D(A^*) &= \{y \in \mathcal{H}\,|\exists y' \in \mathcal{H} : (y, Ax) = (y', x), \forall x \in D(A)\} = \\ &= \{y \in \mathcal{H}\,|\alpha_y : D(A) \to \mathbb{C},\ x \mapsto (y, Ax) \text{ è continuo}\} \end{aligned}$$

inoltre,

$$\begin{array}{cccc} A^* : & D(A^*) & \to & \mathcal{H} \\ & y & \mapsto & A^*y \equiv y' \end{array}$$

dove y' è tale che $(y, Ax) = (y', x)$;

(vi) $\ker A^* = R(A)^{\perp}$.

Dimostrazione (i) Siccome $\mathcal{G}(A^*) = [V\mathcal{G}(A)]^{\perp}$ si ha che il grafico di A^* è chiuso, perciò A^* è chiuso.
(ii) Tenendo conto del fatto che V è unitario e che $V^2 = -\mathbb{I}$, abbiamo

$$[V\mathcal{G}(A^*)]^{\perp} = \left[V[V\mathcal{G}(A)]^{\perp}\right]^{\perp} = \left[VV[\mathcal{G}(A)]^{\perp}\right]^{\perp} = [\mathcal{G}(A)]^{\perp\perp} = \mathcal{G}(A)^a$$

perciò $[V\mathcal{G}(A^*)]^{\perp}$ è un grafico lineare, se e solo se $\mathcal{G}(A)^a$ è un grafico lineare, se e solo se A è chiudibile, in tal caso

$$A^{**} = \bar{A}$$

(iii) se A è chiudibile, abbiamo $\bar{A} \supset A$ da cui è chiaro che $\bar{A}$ è densamente definito, dunque aggiuntabile. Siccome poi V è unitario

$$\mathcal{G}\left(\bar{A}^*\right) = [V(\mathcal{G}(A))^a]^{\perp} = [(V\mathcal{G}(A))^a]^{\perp} = [V\mathcal{G}(A)]^{\perp} = \mathcal{G}(A^*)$$

sicché $\bar{A}^* = A^*$.

(iv) Reintrodotto l'operatore unitario U talché $U(x \oplus y) = y \oplus x$ si ha
$$UV = -VU$$
e $\mathcal{G}(A^{-1}) = U\mathcal{G}(A)$. A^* è invertibile se e solo se $U\mathcal{G}(A^*)$ è un grafico lineare,
$$U\mathcal{G}(A^*) = U[V\mathcal{G}(A)]^\perp = [UV\mathcal{G}(A)]^\perp = [VU\mathcal{G}(A)]^\perp = \left[V\mathcal{G}\left(A^{-1}\right)\right]^\perp$$
se e solo se
$$\left[V\mathcal{G}\left(A^{-1}\right)\right]^\perp$$
è un grafico lineare, se e solo se A^{-1} è aggiuntabile. In tal caso
$$\left(A^{-1}\right)^* = (A^*)^{-1}.$$

(v) Siccome per definizione $\mathcal{G}(A^*) = [V\mathcal{G}(A)]^\perp$, abbiamo
$$D(A^*) = \left\{y \in \mathcal{H} \middle| \exists y' \in \mathcal{H} : y \oplus y' \in [V\mathcal{G}(A)]^\perp\right\}$$
ora,
$$y \oplus y' \in [V\mathcal{G}(A)]^\perp \Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{H} - (y, Ax) + (y', x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{H}\ (y, Ax) = (y', x)$$
cioè
$$D(A^*) = \{y \in \mathcal{H} \,|\, \exists y' \in \mathcal{H} : (y, Ax) = (y', x), \forall x \in D(A)\}$$
e $y' = A^* x$. Se $y \in D(A^*)$ allora
$$|\alpha_y(x)| = |(y, Ax)| = |(y', x)| \leq \|y'\| \|x\|$$
perciò α_y è continuo. Viceversa, se α_y è continuo, esso ha dominio denso, applicandogli il teorema di estensione, si ottiene $\bar{\alpha}_y$, continuo e a dominio in $\mathcal{H}$, perciò $\bar{\alpha}_y \in \mathcal{H}^*$ e per il teorema di Riesz, si ha l'esistenza di y' tale che
$$\bar{\alpha}_y(x) = (y', x)$$
Perciò, per ogni $x \in D(A)$ si ha
$$\alpha_y(x) = (y', x) = (y, Ax)$$
sicché $y \in D(A^*)$.

(vi) Prendiamo $y \in \ker A$, allora
$$y \in D(A^*),\ A^* y = 0$$
sicché
$$\forall x \in D(A),\ (y, Ax) = 0$$
(c.v.d.) dunque $y \in R(A)^\perp$.

Osservazione III.5 Sia $A \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$ aggiuntabile e chiudibile allora $A^{**} = \bar{A}$, riaggiuntando
$$A^{***} = A^*$$
■

Infine, il seguente

Teorema III.21 *Valgono i seguenti asserti, presi $A, B \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$*

(i) *sia A aggiuntabile e sia $B \supset A$, allora $B^* \subset A^*$;*

(ii) *siano A, B e $A + B$ aggiuntabili, allora*
$$(A + B)^* \supset A^* + B^*,$$
se poi uno tra A e B appartiene a $L(\mathcal{H})$, vale l'eguaglianza;

(iii) *sia A aggiuntabile, allora, se $k \neq 0$,*
$$(kA)^* = \bar{k} A^*;$$

(iv) *siano A, B e AB aggiuntabili, allora*

$$(AB)^* \supset B^* A^*,$$

se poi $A \in L(\mathcal{H})$, allora vale l'eguaglianza.

Dimostrazione (i) $\mathcal{G}(A) \subset \mathcal{G}(B)$, perciò $V\mathcal{G}(A) \subset V\mathcal{G}(B)$, dunque, $[V\mathcal{G}(B)]^\perp \subset [V\mathcal{G}(A)]^\perp$, cioè $B^* \subset A^*$. L'aggiuntabilità di B deriva dal fatto che, estendendo A, esso è densamente definito.

(ii) se $y \in D(A^* + B^*) = D(A^*) \cap D(B^*)$ allora

$$\begin{aligned}(y, Ax) + (y, Bx) &= (A^* y, x) + (B^* y, x), \forall x \in D(A) \cap D(B) \\ (y, (A + B)x) &= ((A^* + B^*) y, x), \forall x \in D(A) \cap D(B)\end{aligned}$$

perciò $y \in D(A+B)^*$ e $(A+B)^* y = (A^* + B^*) y$ dunque

$$(A+B)^* \supset A^* + B^*$$

Supponiamo $B \in L(\mathcal{H})$, se $y \in D(A+B)^*$ allora $(y, (A+B)x) = \left((A+B)^* y, x\right)$, per ogni $x \in D(A+B) = D(A)$, ne viene che

$$(y, Ax) = \left((A+B)^* y, x\right) - (B^* y, x), \forall x \in D(A)$$

da cui, $y \in D(A^*)$ e

$$\begin{aligned}A^* y &= (A+B)^* y - B^* y \\ (A^* + B^*) y &= (A+B)^* y\end{aligned}$$

Infine, per ogni $y \in D(A+B)^*$ vale

$$(A^* + B^*) y = (A+B)^* y,$$

cioè

$$(A+B)^* \subset A^* + B^*$$

(iii) $y \in D\left(\bar{k} A^*\right)$ se e solo se $y \in D(A^*)$, se e solo se esiste $y' \in \mathcal{H}$ tale che

$$(y, Ax) = (y', x), \forall x \in D(A)$$

se e solo se esiste $y' \in \mathcal{H}$ tale che

$$(y, kAx) = \left(\bar{k} y', x\right), \forall x \in D(A)$$

se e solo se $y \in D(kA)^*$ e, inoltre,

$$(kA)^* y = \bar{k} A^* y$$

(iv) $y \in D(B^* A^*)$ implica $y \in D(A^*)$ e $A^* y \in D(B^*)$, dunque $y \in D(A^*)$ e

$$(A^* y, Bx) = (B^* (A^* y), x), \forall x \in D(B)$$

dunque,

$$(y, ABx) = (B^* A^* y, x), \forall x \in D(AB)$$

ne viene allora che $y \in D(AB)^*$ e che $(AB)^* y = B^* A^* y$, ossia

$$(AB)^* \supset B^* A^*$$

Supposto $A \in L(\mathcal{H})$, allora abbiamo anche

$$\begin{aligned}y &\in D(AB)^* \Rightarrow (y, ABx) = \left((AB)^* y, x\right), \forall x \in D(AB) = D(B) \Rightarrow \\ (A^* y, Bx) &= \left((AB)^* y, x\right), \forall x \in D(B) \Rightarrow A^* y \in D(B^*)\ B^* A^* y = (AB)^* y\end{aligned}$$

sicché, $y \in D(B^* A^*)$ e $B^* A^* y = (AB)^* y$ per cui

$$(AB)^* \subset B^* A^*.$$

(c.v.d.)

III.7.4 Autoaggiunzione

Come prima vogliamo fornire una ragionevole definizione di operatore lineare autoaggiunto nel contesto più ampio che stiamo sviluppando in questa sezione. Torniamo a considerare per un attimo $A \in L(\mathcal{H})$, abbiamo detto che esso è autoaggiunto se e solo se

$$\forall x, x' \in \mathcal{H}\ (x, Ax') = (x, Ax')$$

Una modifica possibile a questa definizione, in modo da estenderla al caso $A \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$, è la seguente

$$\begin{cases} D(A)^a = & \mathcal{H} \\ (Ax', x) = & (x', Ax),\ \forall x, x' \in D(A) \end{cases} \tag{III.1}$$

D'altronde (III.1) è equivalente a

$$\begin{cases} D(A)^a = & \mathcal{H} \\ A \subset & A^* \end{cases} \tag{III.2}$$

(III.1) implica (III.2) A è aggiuntabile, $x' \in D(A) \Rightarrow (Ax', x) = (x', Ax)$ per ogni $x \in D(A)$, dunque $x' \in D(A^*)$ e $A^*x' = Ax$, cioè A^* estende A.
(III.2) implica (III.1) A è aggiuntabile, perciò $(A^*x', x) = (x', Ax)$ per ogni $x' \in D(A^*)$ e $x \in D(A)$, da cui, essendo $A \subset A^*$ si ha

$$(Ax', x) = (x', Ax),\ \forall x, x' \in D(A).$$

Sia (III.1) che (III.2), dunque, non sono buone definizioni di autoaggiunzione, visto che vorremo $A^* = A$. Operatori che soddifino (III.1) o (III.2) si dicono **operatori simmetrici** (o **hermitiani**). Siamo pronti a stabilire la seguente

Definizione III.11 *Sia $A \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$, allora A si dice simmetrico se*

$$\begin{cases} D(A)^a = & \mathcal{H} \\ A \subset & A^* \end{cases}$$

A si dice autoaggiunto se

$$\begin{cases} D(A)^a = & \mathcal{H} \\ A = & A^* \end{cases}$$

Ovviamente, l'autoaggiunzione implica la simmetria, ma non il viceversa. Consideriamo un operatore simmetrico, esso ha aggiunto densamente definito, perciò aggiuntabile, ne viene che A è chiudibile e che

$$\bar{A} = A^{**}$$

perciò

$$A \subset A^{**}$$

inoltre, dalla $A \subset A^*$ risulta $A^{**} \subset A^*$, quindi, se A è simmetrico

$$A \subset A^{**} \subset A^*$$

Questo, peraltro, implica che la chiusura di un operatore simmetrico, $\bar{A}$, è simmetrica

$$\bar{A} \subset A^* = \left(\bar{A}\right)^*$$

dove l'ultima eguaglianza, valida per A chiudibile, l'abbiamo dimostrata in precedenza.

Proposizione III.24 *Sia $A \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$ simmetrico, allora A è chiudibile, e vale*

$$A \subset A^{**} \subset A^*$$

e, infine, la chiusura di A è simmetrica

$$\bar{A} \subset A^* = \left(\bar{A}\right)^*.$$

Il caso in cui

$$A = A^{**} = A^*$$

si verifica per A autoaggiunto; il caso

$$A = A^{**} \subset A^*$$

si ha per A simmetrico e chiuso. Esiste poi un quarto caso

$$A \subset A^{**} = A^*$$

in cui A ha **chiusura autoaggiunta**. Operatori di questo tipo, simmetrici a chiusura autoaggiunta, si dicono **essenzialmente autoaggiunti**.

Proposizione III.25 *Un operatore $A \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$ è essenzialmente autoaggiunto se e solo se è chiudibile ed ha chiusura autoaggiunta.*

Dimostrazione Infatti, la simmetria implica la chiudibilità. Vediamo il viceversa. A è chiudibile, dunque

$$D\left(\bar{A}\right) \subset D(A)^a$$

perciò, A è densamente definito, sicché aggiuntabile. Allora

$$\bar{A} = \left(\bar{A}\right)^* = A^*$$

sicché

$$A \subset A^*$$

(c.v.d.) perciò A è simmetrico e $A^{**} = A^*$.

In chiusura di trattazione, riportiamo dei criteri per stabilire se un operatore è autoaggiunto o essenzialmente autoaggiunto, nel caso in cui esso sia simmetrico.

Teorema III.22 *Sia $A \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$ un operatore simmetrico.*

(i) *Sono equivalenti le seguenti affermazioni*

(a) *A è autoaggiunto;*
(b) *$D(A^*) \subset D(A)$;*
(c) *A è chiuso e $\ker(A^* \pm i\mathbb{I}) = \{0\}$;*
(d) *$R(A \pm i\mathbb{I}) = \mathcal{H}$.*

(ii) *Sono equivalenti le seguenti affermazioni*

(a) *A è essenzialmente autoaggiunto;*
(b) *$D(A^*) \subset D\left(\bar{A}\right)$;*
(c) *$\ker(A^* \pm i\mathbb{I}) = \{0\}$;*
(d) *$R(A \pm i\mathbb{I})$ è denso in $\mathcal{H}$.*

Dimostrazione Dimostriamo (i). <u>(a) equivale a (b)</u> (a) implica banalmente (b). Vediamo il viceversa, essendo $A \subset A^*$ si ha che $D(A^*) \subset D(A)$ dà immediatamente $A^* = A$.
<u>(a) implica (c)</u> Poiché $A^* = A$ si ha subito che A è chiuso (l'aggiunto è sempre chiuso). Siano poi

$$\begin{aligned} x_+ &\in \ker(A^* + i\mathbb{I}) \\ x_- &\in \ker(A^* - i\mathbb{I}) \end{aligned}$$

allora

$$A^* x_\pm = \mp i x_\pm$$

sicché

$$\begin{aligned} (x_\pm, A^* x_\pm) &= (x_\pm, \mp i x_\pm) = \mp i \|x_\pm\|^2 \\ (A^* x_\pm, x_\pm) &= (\mp i x_\pm, x_\pm) = \pm i \|x_\pm\|^2 \end{aligned}$$

quindi, essendo A autoaggiunto,

$$\|x_\pm\|^2 = -\|x_\pm\|^2 \Leftrightarrow x_\pm = 0$$

(c) implica (d) Vediamo anzitutto che, essendo A chiuso, $R(A \pm i\mathbb{I})$ è chiuso. Siano $\{x_{\pm n}\} \subset D(A \pm i\mathbb{I})$ tali che $(A \pm i\mathbb{I})\, x_{\pm n} \to y_{\pm}$. Le $\{x_{\pm n}\}$ sono di Cauchy: infatti, sia $z \in D(A) = D(A \pm i\mathbb{I})$ allora

$$\|z\| \leq \|(A \pm i\mathbb{I})\, z\|$$

visto che

$$\begin{aligned} \|(A \pm i\mathbb{I})\, z\|^2 &= ((A \pm i\mathbb{I})\, z, (A \pm i\mathbb{I})\, z) = \|Az\|^2 + \|z\|^2 \pm i\,(Az, z) \mp i\,(z, Az) = \\ &= \|Az\|^2 + \|z\|^2 \end{aligned}$$

Sicché

$$\|x_{\pm n} - x_{\pm m}\| \leq \|(A \pm i\mathbb{I})\,(x_{\pm n} - x_{\pm m})\| = \|(A \pm i\mathbb{I})\, x_{\pm n} - (A \pm i\mathbb{I})\, x_{\pm m}\|$$

siccome la successione a destra è di Cauchy, così è $\{x_{\pm n}\}$. Siano allora

$$x_{\pm} = \lim_{n \to \infty} x_{\pm n}$$

Dunque, siccome A è chiuso, $A \pm i\mathbb{I}$ è chiuso e dunque $x_{\pm} \in D(A \pm i\mathbb{I})$ e

$$(A \pm i\mathbb{I})\, x_{\pm} = y_{\pm}$$

perciò $y_{\pm} \in R(A \pm i\mathbb{I})$ e $R(A \pm i\mathbb{I})$ è chiuso. Ora,

$$\{0\} = \ker(A^* \pm i\mathbb{I}) = R(A \mp i\mathbb{I})^{\perp}$$

sicché, essendo $R(A \pm i\mathbb{I})$ chiuso, si conclude

$$R(A \mp i\mathbb{I}) = \mathcal{H}$$

(d) implica (b) Sia $y \in D(A^*)$. Poiché $R(A \pm i\mathbb{I}) = \mathcal{H}$ esiste $x_{\pm} \in D(A \pm i\mathbb{I})$ tale che

$$(A \pm i\mathbb{I})\, x_{\pm} = (A^* \pm i\mathbb{I})\, y$$

Ma $D(A \pm i\mathbb{I}) = D(A)$ e su tale dominio $A = A^*$ perciò

$$(A^* \pm i\mathbb{I})\,(y - x_{\pm}) = 0$$

d'altra parte

$$\ker(A^* \pm i\mathbb{I}) = R(A \mp i\mathbb{I})^{\perp} = \{0\}$$

sicché $y = x_{\pm}$ e perciò $y \in D(A)$.

Dimostriamo (ii). (a) equivale a (b) Se A è essenzialmente autoaggiunto, allora

$$A^* = \bar{A}$$

perciò $D(A^*) \subset D(\bar{A})$. Viceversa, $D(A^*) \subset D(\bar{A})$, ma siccome A è simmetrico,

$$\bar{A} \subset A^*$$

da cui $\bar{A} = A^*$.

(a) implica (c) Se A è essenzialmente autoaggiunto, allora A^* è autoaggiunto, perciò

$$\ker(A^{**} \pm i\mathbb{I}) = \{0\}$$

ma $A^{**} = A^*$, sicché si ha la tesi.

(c) implica (d) Da $\ker(A^* \pm i\mathbb{I}) = \{0\}$ si ha

$$R(A \mp i\mathbb{I})^{\perp} = \mathcal{H}$$

perciò $R(A \mp i\mathbb{I})$ è denso in $\mathcal{H}$.

(d) implica (b) Sia $y \in D(A^*)$. Poiché $R(A \pm i\mathbb{I})^a = \mathcal{H}$ esiste in $D(A \pm i\mathbb{I})$ una successione $\{x_{\pm n}\}$ talché

$$(A \pm i\mathbb{I})\, x_{\pm n} \to (A^* \pm i\mathbb{I})\, y$$

La $\{x_{\pm n}\}$ è di Cauchy (come di mostrato in (i), usando il fatto che A è simmetrico). Sia allora

$$x_{\pm} = \lim_{n \to \infty} x_{n\pm}$$

Siccome A è chiudibile, $A \pm i\mathbb{I}$ è chiudibile ed ha chiusura $\bar{A} \pm i\mathbb{I}$, perciò $x_\pm \in D\left(\bar{A}\right)$ e

$$\left(\bar{A} \pm i\mathbb{I}\right) x_\pm = \left(A^* \pm i\mathbb{I}\right) y$$

Ora, in $D\left(\bar{A}\right)$ $\bar{A} = A^{**}$ coincide con A^* (per simmetria) sicché

$$\left(A^* \pm i\mathbb{I}\right)\left(y - x_\pm\right) = 0$$

ma

$$\ker\left(A^* \pm i\mathbb{I}\right) = R\left(A \mp i\mathbb{I}\right)^\perp = R\left(A \mp i\mathbb{I}\right)^{a\perp} = \mathcal{H}^\perp = \{0\}$$

(c.v.d.) sicché $y = x_\pm$ e $y \in D\left(\bar{A}\right)$.

III.7.5 Valori medi di un operatore

Come sarà di certo noto al lettore, il concetto di valor medio di un operatore riveste un'importanza capitale nel contesto della Meccanica Quantistica, perciò ci apprestiamo a introdurlo. Ancora, $\mathcal{H}$ è un $\mathbb{C}$-spazio di Hilbert.

Definizione III.12 *Sia $A \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$. Per ogni $x \in D(A)$, il valor medio di A riferito a x è il numero complesso dato da*

$$\langle A\rangle_x = \begin{cases} (x, Ax) / \|x\|^2, & x \in D(A) \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

l'insieme

$$\Theta(A) \equiv \left\{\langle A\rangle_x \,|x \in D(A) \setminus \{0\}\right\}$$

si chiama range numerico di A.

Teorema III.23 *Sia $A \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

(i) *A è simmetrico;*

(ii) *A è densamente definito e $\langle A\rangle_x \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in D(A)$.*

Dimostrazione (i) implica (ii) Se A è simmetrico, allora A è densamente definito per definizione di simmetria. Inoltre

$$(x, Ax) = (Ax, x),\ \forall x \in D(A)$$

perciò

$$\langle A\rangle_x = \frac{(x, Ax)}{\|x\|^2} = \frac{(Ax, x)^*}{\|x\|^2} = \frac{(x, Ax)^*}{\|x\|^2} = \langle A\rangle_x^*.$$

(ii) implica (i) La realtà dei valori medi implica, se $x \in D(A)$

$$\begin{aligned} (x, Ax)^* &= (x, Ax) = (Ax, x)^* \\ (x, Ax) &= (Ax, x) \end{aligned}$$

Siano $x, x' \in D(A)$ abbiamo

$$\left(x + \beta x', A\left(x + \beta x'\right)\right) = \left(A\left(x + \beta x'\right), x + \beta x'\right)$$

sviluppiamo i due membri

$$\begin{aligned} \left(x + \beta x', A\left(x + \beta x'\right)\right) &= (x, Ax) + \beta\left(x, Ax'\right) + \beta^*\left(x', Ax\right) + |\beta|^2\left(x', Ax'\right) \\ \left(A\left(x + \beta x'\right), x + \beta x'\right) &= (Ax, x) + \beta\left(Ax, x'\right) + \beta^*\left(Ax', x\right) + |\beta|^2\left(x', Ax'\right) \end{aligned}$$

da cui

$$\beta\left(x, Ax'\right) + \beta^*\left(x', Ax\right) = \beta\left(Ax, x'\right) + \beta^*\left(Ax', x\right)$$

posto $\beta = 1$ e poi $\beta = i$ abbiamo

$$\left(x, Ax'\right) + \left(x', Ax\right) = \left(Ax, x'\right) + \left(Ax', x\right)$$

$$(x, Ax') - (x', Ax) \quad = \quad (Ax, x') - (Ax', x)$$

da cui, per ogni $x, x' \in D(A)$

$$(x, Ax') = (Ax, x')$$

(c.v.d.) perciò A è simmetrico.

Abbiamo ancora il seguente

Teorema III.24 *Sia $A \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$ simmetrico:*

(i) *A è limitato se e solo se*

$$\sup_{x \in D(A)} \{|\langle A \rangle_x|\} = \sup_{x \in D(A),\, \|x\|=1} \{|\langle A \rangle_x|\} < \infty;$$

(ii) *se A è limitato allora*

$$\|A\| = \sup_{x \in D(A)} \{|\langle A \rangle_x|\}.$$

Dimostrazione L'eguaglianza tra i due sup è ovvia. Dimostriamo l'enunciato per il secondo sup. Sia A illimitato, allora per ogni M esiste un versore $x \in D(A)$ tale che

$$|(x, Ax)| > M$$

perciò il sup è infinito. Il viceversa è del tutto ovvio.

Se A è limitato, allora è subito evidente (dalla diseguaglianza di Schwarz) che, denotato con s_A il sup di cui nell'enunciato, vale

$$s_A \leq \|A\|.$$

La diseguaglianza opposta è un po' più complicata. Siano $x, x' \in D(A)$

$$\begin{aligned} 4\,\mathrm{Re}\,(x, Ax') &= 2\left[(x, Ax') + (x', Ax)\right] = \left[(x + x', A(x + x')) - (x - x', A(x - x'))\right] \leq \\ &\leq |(x + x', A(x + x'))| + |(x - x', A(x - x'))| \leq s_A \left(\|x + x'\|^2 + \|x - x'\|^2\right) = \\ &= 2 s_A \left(\|x\|^2 + \|x'\|^2\right) \end{aligned}$$

cioè

$$\mathrm{Re}\,(x, Ax') \leq \frac{s_A}{2} \left(\|x\|^2 + \|x'\|^2\right)$$

Ora esiste una fase z tale che

$$|(x, Ax')| = z(x, Ax') = (zx, Ax') = \mathrm{Re}\,(zx, Ax') \leq \frac{s_A}{2} \left(\|x\|^2 + \|x'\|^2\right)$$

prendiamo

$$x = \frac{\|x'\|}{\|Ax'\|} Ax'$$

da cui

$$\begin{aligned} \left|\left(\frac{\|x'\|}{\|Ax'\|} Ax', Ax'\right)\right| &\leq s_A \|x'\|^2 \\ \frac{\|x'\|}{\|Ax'\|} \|Ax'\|^2 &\leq s_A \|x'\|^2 \end{aligned}$$

cioè

$$\|Ax'\| \leq s_A \|x'\|$$

sicché

$$\|A\| \leq s_A.$$

(c.v.d.)

Come è noto, nella Meccanica Quantistica, accanto ai valori medi si considerino le dispersioni:

Definizione III.13 *Sia $A \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$ un operatore simmetrico e sia $x \in D\left(A^2\right)$, la dispersione di A relativa a x è il reale non negativo $\Delta_x A$ dato da*

$$\Delta_x A \equiv \sqrt{\left\langle \left(A - \langle A\rangle_x \mathbb{I}\right)^2 \right\rangle_x}$$

Si noti come

$$\begin{aligned} D\left(A - \langle A\rangle_x \mathbb{I}\right)^2 &= D\left(A^2\right) \\ D\left(A^2\right) &\subset D\left(A - \langle A\rangle_x \mathbb{I}\right) = D(A) \end{aligned}$$

Siccome $\langle A\rangle_x$ è reale, allora $A - \langle A\rangle_x \mathbb{I}$ è simmetrico, perciò la definizione è ben posta e coincide con la

$$\Delta_x A = \frac{\left\| Ax - \langle A\rangle_x x\right\|}{\|x\|},\ x \in D\left(A^2\right) \setminus \{0\}$$

Teorema III.25 (di indeterminazione) *Dati $A, B \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$ simmetrici, sia $x \in D\left(A^2\right) \cap D\left(B^2\right) \cap D([A, B])$. Vale allora la relazione di indeterminazione*

$$(\Delta_x A)(\Delta_x B) \geq \frac{1}{2}\left|\langle [A, B]\rangle_x\right|$$

Capitolo IV

Analisi complessa

In questo capitolo presentiamo brevemente alcuni apetti sulle funzioni olomorfe che risultano fondamentali di per sé, ma, soprattutto, trovano applicazione nei capitoli che seguono (che hanno come oggetto la trasformata di Fourier e la teoria spettrale). Un prerequisito importante per la lettura del materiale esposto è costituito dalle forme differenziali. Per completezza, abbiamo aggiunto una sezione introduttiva sull'argomento che non ha, comunque, alcuna pretesa di completezza. Tutti i teoremi enunciati (compresi quelli sulle forme) sono debitamente dimostrati, fatta eccezione per il teorema di Picard sulle singolarità essenziali (che non hanno, per noi, alcun interesse) e il fatto che un circuito semplice è omotopo a ogni circonferenza contenuta nel circuito stesso (è un fatto generale che non ci serve: si adoperano circuiti fatti con archi di circonferenza o rettangoli per i quali la dimostrazione è banale).

IV.1 Cenni sulle forme differenziali di grado uno

IV.1.1 Definizione di forma differenziale di grado uno

Introduzione: il differenziale

Se si ha una funzione $f : D \to \mathbb{R}$, di classe $\mathcal{C}^1$ sull'aperto D di $\mathbb{R}^n$, il suo differenziale df è una funzione continua

$$df : D \to \mathbb{R}^{n*}$$

dove con $\mathbb{R}^{n*}$ si è indicato il duale di $\mathbb{R}^n$. Fissata una base in $\mathbb{R}^n$, tipicamente la base canonica $\mathbf{e}_i$, $i \in J_n$, abbiamo subito definita la base duale di $\mathbb{R}^{n*}$, data dai funzionali x_i che a ciascun vettore associano la coordinata i-esima. Ora, essendo x_i lineare, definita su D e a valori in $\mathbb{R}$, il suo differenziale è ancora x_i, perciò abbiamo che $\{dx_i\}_{i\in J_n}$ è una base in $\mathbb{R}^{n*}$ e, inoltre, risulta

$$df\,(x) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f\,(x)\, dx_i$$

dove

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

In questo modo, per ogni $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$

$$df\,(x)\,\mathbf{h} = \langle df\,(x)\,, \mathbf{h}\rangle = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f\,(x)\, dx_i \mathbf{h} = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f\,(x)\, h_i$$

Così motivati, poniamo la seguente

Definizione IV.1 *Sia D un aperto di $\mathbb{R}^n$. Una forma differenziale di grado 1, o campo di covettori su D, è una funzione $\omega : D \to \mathbb{R}^{n*}$ definita su D a valori nel duale di $\mathbb{R}^{n*}$.*

Una forma ω si dice di classe $\mathcal{C}^\ell$ se ω è una funzione di classe $\mathcal{C}^\ell$. Rispetto alla base duale canonica, ω assume la forma

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i dx_i$$

Definizione IV.2 *Una forma $\omega : D \to \mathbb{R}^{n*}$ si dice esatta su D se esiste $f : D \to \mathbb{R}$ talché, per ogni $x \in D$*

$$\omega(x) = df(x)$$

Ogni tale f si dice primitiva o integrale di ω.

Proposizione IV.1 *Se D è aperto in $\mathbb{R}^n$, due primitive della stessa forma ω differiscono per una funzione localmente costante, e perciò costante se D è connesso.*

Dimostrazione Se f, g sono primitive di ω, si ha $d(f-g) = df - dg = 0$; le funzioni con differenziale nullo sono quelle localmente costanti. Sui connessi esse sono costanti (corso di Analisi II).

(c.v.d.)

IV.1.2 Forme chiuse e forme esatte

Definizione IV.3 *Una forma differenziale $\omega : D \to \mathbb{R}^{n*}$ di classe $\mathcal{C}^1$ si dice chiusa in D se, scritta in coordinate*

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x)\, dx_i$$

si ha

$$\partial_k \omega_j(x) = \partial_j \omega_k(x)\,,\ \forall j, k \in J_n,\ \forall x \in D$$

Definizione IV.4 *Una forma differenziale si dice localmente esatta su D se per ogni $x \in D$ esiste un intorno di x, contenuto in D, nel quale la forma risulti esatta.*

Proposizione IV.2 *Sia D aperto in $\mathbb{R}^n$ e sia ω una 1-forma differenziale esatta, allora ω è chiusa.*

Dimostrazione Sia f una primitiva di ω, allora

$$\omega_i = \partial_i f$$

ne viene che $f \in \mathcal{C}^2$ e che, per il teorema di Schwarz,

$$\partial_k \omega_j = \partial_k \partial_j f = \partial_j \partial_k f = \partial_j \omega_k.$$

(c.v.d.)

Proposizione IV.3 *Siano I e J intervalli reali e sia $\omega : I \times J \to \mathbb{R}^{2*}$, $\omega(x,y) = \omega_1(x,y)\, dx + \omega_2(x,y)\, dy$, una forma chiusa di classe $\mathcal{C}^1$ sul rettangolo aperto $I \times J$. Allora ω è esatta e, fissato $(a,b) \in I \times J$, si ha che tutte e sole le primitive di ω sono della forma*

$$F(x,y) = k + \int_a^x \omega_1(\xi, b)\ d\xi + \int_b^y \omega_2(x, \eta)\ d\eta$$

Dimostrazione Siccome $I \times J$ è convesso nella direzione di y (vedi **Analisi II per Fisici**, II.1) allora l'insieme delle funzioni $F : I \times J \to \mathbb{R}$ tali che $\partial_2 F(x,y) = \omega_2(x,y)$ è dato dalla formula

$$F(x,y) = \int_b^y \omega_2(x,\eta)\ d\eta + \alpha(x)$$

con $\alpha \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$. Infatti, l'equazione scritta è certamente soluzione della $\partial_2 F(x,y) = \omega_2(x,y)$, d'altra parte, se $G(x,y)$ è un'altra soluzione, si ha $\partial_2(F-G) = 0$, quindi, essendo il rettangolo convesso nella direzione di y, $(F-G)(x,y) = \alpha(x)$, come volevamo dimostrare.

Imponiamo adesso

$$\begin{aligned}\partial_1 F(x,y) &= \omega_1(x,y) = \partial_1 \int_b^y \omega_2(x,\eta)\, d\eta + \alpha'(x) = \\ &= \int_b^y \partial_1\omega_2(x,\eta)\, d\eta + \alpha'(x) = \\ &= \int_b^y \partial_2\omega_1(x,\eta)\, d\eta + \alpha'(x) = \omega_1(x,y) - \omega_1(x,b) + \alpha'(x)\end{aligned}$$

(dove si deriva sotto segno perché $\omega_2 \in \mathcal{C}^1$ ed è definita su un compatto, perciò è limitata e ha derivata limitata su un insieme di misura finita) sicché

$$\alpha(x) = k + \int_a^x \omega_1(\xi, b)\, d\xi$$

(c.v.d.) la tesi.

Vediamo adesso il legame tra forme chiuse e forme localmente esatte:

Teorema IV.1 *Una forma differenziale di classe $\mathcal{C}^1$ è chiusa se e solo se è localmente esatta.*

Dimostrazione Se ω è di classe $\mathcal{C}^1$ e localmente esatta allora è chiusa: infatti, sia $p \in D$ e sia U l'intorno in cui ω è esatta. Allora in U, ω è chiusa per la proposizione precedente, dunque, ω è chiusa. Siccome nel seguito ci occorreranno solo risultati in dimensione $n = 2$ limitiamoci a questo caso. Per ogni $p \in D$ selezioniamo la palla centrata in p e tutta contenuta in D. In essa prendiamo un rettangolo. All'interno del rettangolo ω chiusa è esatta. La tesi. **(c.v.d.)**

IV.1.3 Integrazione su cammini e primitive

Sia D aperto in $\mathbb{R}^n$. Un **cammino** in D è una funzione $\alpha : [a,b] \to D$ continua e $\mathcal{C}^1$ a tratti. $\alpha(a)$ di dice **origine** del cammino e $\alpha(b)$ si dice **estremo** del cammmino. Un cammino è un **circuito** se $\alpha(a) = \alpha(b)$. Un **cammino costante** è una funzione costante, perciò un **punto**. Se $\omega : D \to \mathbb{R}^{n*}$ è una forma differenziale continua ed esatta su D, $\alpha : [a,b] \to D$ è un cammino in D, e f una primitiva di ω, considerata la funzione $g(t) = f(\alpha(t))$, $t \in [a,b]$ si ha, dal teorema fondamentale del calcolo,

$$g(b) - g(a) = \int_a^b g'(t)\, dt$$

Ora,

$$g'(t) = \langle df(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle = \langle \omega(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle$$

sicché

$$f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)) = \int_a^b \langle \omega(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle\, dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n \omega_i(\alpha(t))\, \alpha_i'(t)\, dt$$

Siamo ora motivati a porre

Definizione IV.5 *Se $\alpha : [a,b] \to D$ è un cammino nell'aperto D di $\mathbb{R}^n$, e ω è una forma differenziale continua su D, si dice integrale (di linea) di ω esteso al cammino α il numero reale*

$$\int_\alpha \omega \equiv \int_a^b \langle \omega(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle\, dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n \omega_i(\alpha(t))\, \alpha_i'(t)\, dt$$

Dunque, abbiamo prima dimostrato il

Teorema IV.2 (fondamentale del calcolo) *Se $f : D \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^1(D)$ con D aperto di $\mathbb{R}^n$ e $p, q \in D$, si ha, per ogni cammino α di D avente origine in p ed estremo in q,*

$$f(q) - f(p) = \int_\alpha df.$$

In particolare, $\int_\gamma df = 0$ *per ogni circuito* γ *di* D.

Il teorema fondamentale del calcolo caratterizza le forme esatte come affermato dal seguente

Teorema IV.3 (caratterizzazione integrale delle forme esatte) *Sia* D *un aperto di* $\mathbb{R}^n$ *e sia* $\omega : D \to \mathbb{R}^{n*}$ *una forma differenziale continua. Sono affermazioni equivalenti*

(i) ω *è esatta in* D*;*

(ii) *se* α *e* β *sono cammini in* D *aventi origine ed estremo in comune, allora*

$$\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega;$$

(iii) *per ogni circuito* γ *di* D *si ha*

$$\int_\gamma \omega = 0.$$

Dimostrazione (i) implica (ii) in virtù del teorema fondamentale del calcolo.

(ii) equivale a (iii) in modo banale (si spezza il circuito in due cammini, o si uniscono due cammini a ottenere un circuito).

(ii) implica (i) Non è restrittivo considerare D connesso, dato che si può ripetere lo stesso ragionamento a ogni componente connessa di D. Ora D è un aperto connesso di uno spazio normato, perciò è connesso per archi. Fissato $c \in D$, definiamo $f : D \to \mathbb{R}$ ponendo $f(x) = \int_\alpha \omega$, dove α è un cammino in D che congiunge c con x; per (ii) la funzione è ben definita e per ogni $x \in D$ si ha $df(x) = \omega(x)$. Infatti, esiste $\delta > 0$ tale che sia $B(x,\delta) \subset D$; se $|h| < \delta$, $x + h \in B(x,\delta)$, ed essendo la palla un insieme convesso, il segmento $[x, x+h]$ è tutto contenuto in $B(x,\delta)$; ne segue che $f(x+h)$ è l'integrale di ω sul cammino ottenuto attaccando a α il segmento detto: se chiamiamo tale cammino $\tilde{\alpha}$, abbiamo

$$f(x+h) = \int_{\tilde{\alpha}} \omega = \int_\alpha \omega + \int_{[x,x+h]} \omega = f(x) + \int_{[x,x+h]} \omega$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$, dobbiamo mostrare che esiste $\delta' > 0$ per cui se $|h| < \delta'$, allora

$$|f(x+h) - f(x) - \langle \omega(x), h \rangle| \le \varepsilon |h|$$

Ma

$$|f(x+h) - f(x) - \langle \omega(x), h \rangle| = \left| \int_{[x,x+h]} \omega - \langle \omega(x), h \rangle \right| \le \int_0^1 |\langle \omega(x+th) - \omega(x), h \rangle| \, dt$$

Siccome ω è continua in x, esiste δ' talché

$$\|\omega(x+th) - \omega(x)\| < \varepsilon$$

per $h < \delta'$, infine,

$$|f(x+h) - f(x) - \langle \omega(x), h \rangle| \le \int_0^1 |\langle \omega(x+th) - \omega(x), h \rangle| \, dt \le \varepsilon |h|$$

(c.v.d.)

IV.1.4 Omotopia tra circuiti e invarianza per omotopia

La nozione di omotopia rende rigoroso il concetto di deformazione continua di un circuito:

Definizione IV.6 *Siano* $\alpha, \beta : [a,b] \to D$ *circuiti. Un'omotopia da* α *a* β *è una funzione continua* $h : [a,b] \times [0,1] \to D$ *tale che*

(i) $h(t,0) = \alpha(t)$ *e* $h(t,1) = \beta(t)$ *per ogni* $t \in [a,b]$*;*

(ii) $h(a,\lambda) = h(b,\lambda)$ *per ogni* $\lambda \in [0,1]$.

Posto $\alpha_\lambda(t) = h(t,\lambda)$ si ha che $\alpha_\lambda : [a,b] \to D$ è un circuito (di classe $\mathcal{C}^0$ soltanto) per la (ii). Ne viene che al variare di λ, α_λ è una famiglia a un parametro di circuiti. Il primo, per $\lambda = 0$ è α, l'ultimo, per $\lambda = 1$ è β.
Si verifica facilmente che nell'insieme dei circuiti in D l'omotopia è una relazione di equivalenza.

Teorema IV.4 (di invarianza per omotopia) *Se ω è una forma continua e localmente esatta in D e α e β sono circuiti omotopi in D, allora*

$$\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega.$$

Dimostrazione Sia $h : [a,b] \times [0,1] \to D$ l'omotopia tra α e β. Per ogni $x \in D$ si scelga una palla aperta U_x contenuta in D tale che $\omega|_{U_x}$ sia esatta. Allora i $V_x = h^{-1}(U_x)$ al variare di $x \in D$ costituiscono un ricoprimento aperto del compatto $[a,b]\times[0,1]$. Ne esiste allora un sottoricoprimento finito, dato da $V_{x_1}, \ldots, V_{x_n}$. Se $y \in [a,b]\times[0,1]$ definiamo la funzione

$$f(y) = \max_{i \in J_n} d\left(y, V_{x_i}^c\right)$$

essa fornisce, per ogni punto, il raggio massimo di una palla centrata in y tutta contenuta in uno degli V_{x_i}. Siccome $d(\cdot, V_{x_i})$ è una funzione continua e max è continua (si scrive in termini del valore assoluto ecc.) si ha che, per il teorema di Weierstraß, f ammette minimo, δ. Per ogni punto $y \in [a,b]\times[0,1]$ si ha che $B(y,\delta)$ è tutta contenuta in V_{x_i} per qualche i. Suddividiamo allora $[a,b]\times[0,1]$ in mq rettangoli compatti $Q_{k\ell} \equiv [t_{k-1}, t_k] \times [\lambda_{\ell-1}, \lambda_\ell]$ con i punti $a = t_0 < \ldots < t_m = b$ e $0 = \lambda_0 < \ldots < \lambda_q = 1$, di modo che il diametro di ciascun $Q_{k\ell}$ sia minore di δ. In questo modo, per ogni (k,ℓ) esiste $x(k,\ell) \in D$ sicché $h(Q_{k\ell}) \subset U_{x(k,\ell)}$. Il circuito $\alpha = \alpha_0$ può essere pensato come giustapposizione dei cammini $\alpha_0|_{[t_{k-1},t_k]} \equiv \alpha_{k0}$ cioè

$$\alpha_0 = \alpha_{10} \ldots \alpha_{m0}$$

Analogamente per $\beta = \alpha_q = \alpha_{1q} \ldots \alpha_{mq}$. Per $\ell = 1, \ldots, q-1$ possiamo ammettere che α_{λ_ℓ} sia la poligonale chiusa di vertici successivi $h(t_0,\lambda_\ell), h(t_1,\lambda_\ell), \ldots, h(t_m,\lambda_\ell) = h(t_0,\lambda_\ell)$, infatti tale poligonale ha sostegno in D, visto che due suoi vertici successivi $h(t_{k-1},\lambda_\ell)$ e $h(t_k,\lambda_\ell)$ sono contenuti in $U_{x(k,\ell)}$ che è convesso (essendo una palla). Mostriamo che

$$\int_{\alpha_\ell} \omega = \int_{\alpha_{\ell+1}} \omega,\ \ell = 0, \ldots, q-1$$

da cui si ha la tesi. Basta mostrare che

$$\int_{\alpha_0} \omega = \int_{\alpha_1} \omega$$

gli altri sono analoghi. Si ha

$$\begin{aligned}\int_{\alpha_0} \omega &= \sum_{k=1}^m \int_{\alpha_{k0}} \omega\\ \int_{\alpha_1} \omega &= \sum_{k=1}^m \int_{(q_{k-1},q_k)} \omega\end{aligned}$$

dove $q_k = h(t_k,\lambda_1)$, $k = 0, \ldots, m$. Dunque,

$$\int_{\alpha_0} \omega - \int_{\alpha_1} \omega = \sum_{k=1}^m \left(\int_{\alpha_{k0}} \omega - \int_{(q_{k-1},q_k)} \omega \right)$$

Posto $p_k = h(t_k, 0)$, $k = 0, \ldots, m$, allora

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^m \left(\int_{\alpha_{k0}} \omega - \int_{(q_{k-1},q_k)} \omega \right) + \sum_{k=0}^m \left(\int_{(p_k,q_k)} \omega + \int_{(q_k,p_k)} \omega \right)\\ \sum_{k=1}^m \left(\int_{\alpha_{k0}} \omega + \int_{(p_k,q_k)} \omega + \int_{(q_k,q_{k-1})} \omega + \int_{(q_{k-1},p_{k-1})} \omega \right)\end{gathered}$$

(poiché invertendo i cammini l'integrale cambia segno e perché $p_0 = p_m$ e $q_0 = q_m$). La somma entro parentesi è l'integrale sul circuito α_{k0}, (p_k, q_k), (q_k, q_{k-1}), (q_{k-1}, p_{k-1}) che ha sostegno in $U_{x(k,1)}$ dove ω è esatta. Ciascun addendo della sommatoria è nullo: la tesi.

Vediamo perché è lecito usare delle poligonali. Consideriamo α_{λ_ℓ} i punti tra due punti $\alpha_{\lambda_\ell}(t_k)$ successivi appartengono a $U_{x(k,\ell)}$ perché immagini di punti di $[a, b]\times[0, 1]$ appartenenti allo stesso rettangolo (k, ℓ); ivi la forma è esatta, dunque, si possono unire i punti $\alpha_{\lambda_\ell}(t_k)$ successivi con un percorso qualsiasi ai fini dell'integrazione. **(c.v.d.)**

Un circuito **nullomotopo** è un circuito omotopo a un circuito costante. Inoltre si ha la seguente

Definizione IV.7 *Uno spazio topologico si dice semplicemente connesso se è connesso per archi ed ogni circuito nello spazio è nullomotopo.*

Si ha allora il seguente

Corollario IV.1 *Se D è un aperto semplicemente connesso di $\mathbb{R}^n$ e ω è una forma differenziale su D continua localmente esatta, allora ω è esatta.*

Dimostrazione Ogni circuito γ è omotopo al circuito costante. Su di esso l'integrale di linea di ω è nullo. Per il teorema precedente, sul circuito γ l'integrale è nullo. Per il teorema di caratterizzazione integrale delle forme esatte, si ha che ω è esatta. **(c.v.d.)**

Teorema IV.5 *Se D è un aperto semplicemente connesso di $\mathbb{R}^n$ e ω è una forma differenziale su D chiusa, allora ω è esatta.*

Dimostrazione Come abbiamo dimostrato (esplicitamente solo nel caso che ci occorrerà nel seguito, cioè $n = 2$) ogni forma chiusa è localmente esatta, perciò, dal corollario precedente e dal teorema di caratterizzazione integrale delle forme esatte, si ha che ω è una forma esatta. **(c.v.d.)**

IV.2 Funzioni olomorfe

Avvertenza In questo capitolo considereremo funzioni $f : \mathbb{C} \supset D \to \mathbb{C}$, perciò, salvo avviso contrario, useremo la parola funzione come abbreviazione di **funzione complessa di una variabile complessa**.

Limiti e continuità In campo complesso si riprendono tutte le nozioni di limiti e continuità tipiche degli spazi topologici. $\mathbb{C}$ viene infatti riguardato come uno spazio normato (normato dal modulo $|\cdot|$), in realtà è uno spazio di Banach, anzi di Hilbert.

Esempio IV.1 La funzione $z \mapsto \bar{z}$ è continua. Infatti, sia $z_n \to z$, allora

$$\lim_{n\to\infty} |\bar{z}_n - \bar{z}| = \lim_{n\to\infty} |\overline{z_n - z}| = \lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0.$$

▪ Anche la funzione modulo è continua, essendo la norma di $\mathbb{C}$.

IV.2.1 Derivazione complessa

Definizione IV.8 *Sia $f : \mathbb{C} \supset D \to \mathbb{C}$ con D aperto. Si dice che f è derivabile in senso complesso nel punto $z \in D$ se esiste in $\mathbb{C}$ il limite*

$$\lim_{w\to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

Se tale limite esiste, si dice derivata complessa di f in z e si indica con $f'(z)$ o $df/dz(z)$.

Osservazione IV.1 La definizione di derivata data, per quanto assai naturale, risulta molto restrittiva e, vedremo, sarà la chiave di tutta la teoria che andremo a stabilire.

Il fatto che la richiesta di derivabilità sia molto forte, deriva dal fatto che il limite del rapporto incrementale deve esistere indipendentemente dal percorso che si segue per raggiungere il punto z. Su questo avremo modo di tornare abbondantemente nel seguito. ▪

In modo immediato si dimostrano le solite regole di derivazione valide nel caso reale: derivazione della somma, del prodotto, della funzione composta. . .Dunque, la funzione identica è derivabile con derivata nulla, così come i polinomi sono derivabili e hanno derivata polinomiale.

Esempio IV.2 Cominciamo a vedere quanto forte sia la richiesta di derivabilità. Funzioni molto semplici, come il coniugio, non sono derivabili: consideriamo $z \mapsto \bar{z}$ si ha

$$\frac{\overline{w-z}}{w-z} = \frac{\bar{h}}{h} = e^{-2i\theta}$$

se $h \equiv w - z = |h| e^{i\theta}$. Come si vede, $e^{-2i\theta}$ assume tutti i valori possibili di modulo 1 al variare di h in un qualsiasi intorno dell'origine. Perciò $z \mapsto |z|^2 = z\bar{z}$ è derivabile solo nell'origine. Si noti che, pensando $\mathbb{C}$ come $\mathbb{R}^2$, la funzione $|z|^2 = x^2 + y^2$ è un polinomio, perciò è $\mathcal{C}^\infty$. ▪

Vogliamo adesso chiarire i legami tra differenziabilità reale e complessa. Scriviamo allora $f(z)$ come $f(x+iy)$ e siano

$$\begin{aligned} u(x,y) &\equiv \operatorname{Re} f(x+iy) \\ v(x,y) &\equiv \operatorname{Im} f(x+iy) \end{aligned}$$

di modo che $u + iv = f$ e f viene vista come una funzione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$.
Come abbiamo detto, il limite nella definizione della derivata è un limite complesso, perciò si computa indipendentemente dal percorso che fa w per avvicinarsi a z. In particolare possiamo scegliere il cammino sul quale $h = w - z$ rimane reale. Allora

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \equiv \partial_x f(z) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h,y) + iv(x+h,y) - u(x,y) + iv(x,y)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} + i\frac{v(x+h,y) + v(x,y)}{h} \right) \end{aligned}$$

sicché,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \partial_x f(z) &= \operatorname{Re} \lim_{h\to 0} \left(\frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} + i\frac{v(x+h,y) + v(x,y)}{h} \right) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} \\ \operatorname{Im} \partial_x f(z) &= \operatorname{Re} \lim_{h\to 0} \left(\frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} + i\frac{v(x+h,y) + v(x,y)}{h} \right) = i \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h,y) + v(x,y)}{h} \end{aligned}$$

visto che Re e Im commutano con l'operazione di limite (sono funzioni complesse continue: infatti sono compbinazioni lineari di identità e coniugio, che sono continue). Dunque,

$$\partial_x f(z) = \partial_x u(x,y) + i\partial_x v(x,y).$$

Se scegliamo ora un incremento puramente immaginario, ik, $k \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{k\to 0} \frac{f(z+ik) - f(z)}{ik} \equiv \frac{1}{i}\partial_y f(z) = \lim_{k\to 0} \frac{u(x,y+k) + iv(x,y+k) - u(x,y) + iv(x,y)}{ik} = \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{u(x,y+k) - u(x,y)}{ik} + \frac{v(x,y+k) + v(x,y)}{k} \right) \end{aligned}$$

così, ragionando come prima, abbiamo che u e v sono derivabili parzialmente rispetto a y e si ha

$$\partial_y f(z) = \partial_y v(x,y) + \frac{1}{i}\partial_y u(x,y).$$

Perciò, se f è derivabile in senso complesso si ha

$$\partial_x f = \frac{1}{i}\partial_y f$$

e, inoltre, si ha che u e v sono derivabili parzialmente e

$$\partial_x u(x,y) + i\partial_x v(x,y) = \partial_y v(x,y) - i\partial_y u(x,y)$$

cioè

$$\begin{aligned}\partial_x u(x,y) &= \partial_y v(x,y)\\ \partial_y u(x,y) &= -\partial_x v(x,y)\end{aligned}$$

Le equazioni trovate si dicono **identità di Cauchy-Riemann**.

Teorema IV.6 *Sia $f: D \to \mathbb{C}$, $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ con x, y, u, v reali. Sia $x+iy$ interno a D.*

(i) *Se la funzione f è derivabile in senso complesso in $z \equiv x+iy$ allora u, v sono differenziabili in senso reale, in $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, ed inoltre le derivate di u, v in (x,y) soddisfano l'identità di Cauchy-Riemann;*

(ii) *Se u e v sono differenziabili in (x,y) interno a D e le loro derivate parziali soddisfano l'identità di Cauchy-Riemann, allora f è derivabile in $z \equiv x+iy$.*

Dimostrazione Abbiamo già dimostrato (i). Vediamo (ii). Poniamo $a \equiv \partial_x u(x,y) = \partial_y v(x,y)$ e $b \equiv \partial_x v(x,y) = -\partial_y u(x,y)$. Allora, grazie all'ipotesi di differenziabilità

$$\begin{aligned}u(x+h, y+k) - u(x,y) &= ah - bk + \sigma(h,k)\sqrt{h^2+k^2}\\ v(x+h, y+k) - u(x,y) &= bh + ak + \tau(h,k)\sqrt{h^2+k^2}\end{aligned}$$

con σ e τ infinitesime per $h, k \to 0$. Moltiplicando la seconda per i e sommando

$$f((x+h) + i(y+k)) - f(x+iy) = (ah - bk) + i(bh + ak) + (\sigma + i\tau)\sqrt{h^2+k^2}$$

Ora,

$$(ah - bk) + i(bh + ak) = (a + ib)(h + ik)$$

perciò, posto $w \equiv (x+h) + i(y+k)$ si ha

$$f(w) - f(z) = (a+ib)(w-z) + (\sigma + i\tau)|w-z|$$

sicché, f è derivabile e si ha

$$f'(z) = \partial_x u(x,y) + i\partial_x v(x,y)$$

(c.v.d.)

IV.2.2 Olomorfia

Definizione IV.9 *Sia D un aperto di $\mathbb{C}$. Una funzione $f: D \to \mathbb{C}$ si dice olomorfa in D se è derivabile in senso complesso in ogni punto di D, con derivata continua in D.*

In altra parole f è olomorfa se è $\mathcal{C}^1$ in senso complesso. Ne abbiamo

Teorema IV.7 *Sia D un aperto di $\mathbb{C}$ e sia $f: D \to \mathbb{C}$. Allora f è olomorfa se e solo se u e v sono derivabili parzialmente, con derivata continua e soddisfano l'identità di Cauchy-Riemann. In altre parole, f è olomorfa se e solo se $u, v \in \mathcal{C}^1(D)$ e vale l'identità di Cauchy-Riemann.*

Dimostrazione Se f è olomorfa, allora è derivabile, dunque u e v sono derivabili parzialmente e hanno derivate che si esprimono in termini di f'. Perciò u, v hanno derivate parziali continue, cioè sono $\mathcal{C}^1$. Inoltre, vale l'identità di Cauchy-Riemann. Viceversa, u e v sono differenziabili per il teorema del differenziale totale. Sicché f è derivabile. Siccome f' si esprime in termini delle derivate parziali di u e v, si ha che f è continua. **(c.v.d.)**

Serie di potenze Le somme delle serie di potenze, sono olomorfe all'interno del cerchio di convergenza. Infatti, sono ivi derivabili in senso complesso, e la loro derivata è data dalla derivata termine a termine della serie di partenza. Dunque, la derivata di una serie di potenze è ancora una serie di potenze con il medesimo raggio di convergenza, perciò è continua.

Algebra $H(D)$ Sono dunque funzioni olomorfe (su $\mathbb{C}$) gli esponenziali e le funzioni sin e cos. Le funzioni olomorfe su $\mathbb{C}$ si dicono **intere**. Ovviamente, composizioni, somme e prodotti di funzioni olomorfe danno funzioni olomorfe. Se indichiamo con $H(D)$ l'insieme delle funzioni olomorfe su D, si ha che $H(D)$ è un'algebra.

Serie bilatere Abbiamo richiamato sopra le serie di potenze (per la trattazione delle quali rimandiamo al testo di Mariano Giaquinta, **Analisi**, volume 2, *Processi discreti*). Introduciamo ora le **serie bilatere**. Esse sono definite nel modo che segue

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-z_0)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$$

dove $c_n = a_n$ e $c_{-n} = b_n$ per $n > 0$. Sia r il raggio di convergenza della parte a potenze positive. Esaminiamo la parte a potenze negative: poniamo

$$w \equiv \frac{1}{z-z_0}$$

allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n$$

se r' è il raggio di convergenza del secondo membro, abbiamo che la serie bilatera converge in

$$\frac{1}{r'} < |z-z_0| < r$$

Cioè, se $1/r' < r$ la serie converge in una corona circolare (come d'uso, si pone $1/r' = 0$ se $r' = \infty$).
All'interno della corona di convergenza le serie bilatere sono olomorfe. Infatti, la derivata della parte a potenze negative è

$$\frac{d}{dz} \sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n$$

dove la serie è una funzione continua in w, perciò è continua e derivabile in z visto che si esclude comunque il punto $z = z_0$, cioè $w = 0$. Perciò, dal teorema di composizione della derivata si ha derivabilità e continuità.
Riassumendo

Proposizione IV.4 *Serie di potenze e serie bilatere sono funzioni olomorfe all'interno delle regioni di convergenza (rispettivamente cerchi e corone).*

IV.2.3 Integrazione delle funzioni complesse

Definizione di integrale di funzioni complesse continue Se D è un aperto di $\mathbb{C}$ e $f : D \to \mathbb{C}$ è una funzione **continua**, si può considerare la forma differenziale complessa $f(z)\,dz = f(x+iy)\,dx + if(x,y)\,dy$. Ci interessa la nozione di **integrale** di tale forma lungo un cammino di D. Se $\alpha : [a,b] \to D$ è un cammino di D (cioè α è continua e $\mathcal{C}^1$ a tratti), si pone

$$\int_\alpha f\,dz \equiv \int_a^b f(\alpha(t))\,\alpha'(t)\;dt = \int_a^b f(\alpha(t))\,\alpha_1'(t)\;dt + i\int_a^b f(\alpha(t))\,\alpha_2'(t)\;dt$$

Si verifica facilmente che l'integrale così definito, gode di tutte le proprietà degli integrali di linea sugli spazi reali: cambia segno se si inverte il senso di percorrenza del cammino; non dipende dalla parametrizzazione se essa conserva la orientazione; è additivo sulla congiunzione di due cammini.

Teorema IV.8 (di Darboux, o diseguaglianza fondamentale) *Sia $f : D \to \mathbb{C}$ con D aperto di $\mathbb{C}$. Sia f continua e sia α un cammino in D. Se $M \equiv \max_\alpha |f|$ allora*

$$\left|\int_\alpha f\,dz\right| \le M\,\ell(\alpha)$$

dove $\ell(\alpha)$ è la lunghezza della curva α.

Dimostrazione Notiamo che M è proprio un max: essendo α continua e definita su un compatto, ha immagine in un compatto e su tale compatto, f assume massimo essendo continua.

$$\begin{aligned}\left|\int_\alpha f\,dz\right| &\equiv \left|\int_a^b f(\alpha(t))\left|\alpha_1'(t)+i\alpha_2'(t)\right|\,dt\right| \le \int_a^b |f(\alpha(t))|\left(\alpha_1^2(t)+\alpha_2^2(t)\right)^{1/2}\,dt \le \\ &\le M\int_a^b \left(\alpha_1^2(t)+\alpha_2^2(t)\right)^{1/2}\,dt = M\,\ell(\alpha).\end{aligned}$$

(c.v.d.)

Se poniamo $\alpha(t)\equiv\alpha_1(t)+i\alpha_2(t)$ abbiamo

$$\left|\int_\alpha f\,dz\right| \le \int_a^b |f(\alpha(t))|\,|\alpha'(t)|\,dt \equiv \int_\alpha |f(z)|\,|dz|$$

Esempio IV.3 Sia f una funzione complessa continua. Vogliamo andare a considerarne l'integrale sull'arco di circonferenza γ_r avente centro in $z_0\in\mathbb{C}$, raggio r, percorso in senso positivo (antiorario), compreso tra gli angoli α e β (misurati a partire dalla direzione positiva dell'asse reale). γ_r è parametrizzabile tramite la funzione

$$\gamma_r(\theta) = z_0 + re^{i\theta} = \begin{cases} x = & \operatorname{Re} z_0 + r\cos\theta \\ y = & \operatorname{Im} z_0 + r\sin\theta \end{cases},\ \theta\in[\alpha,\beta]$$

allora

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_r} f(z)\,dz &= \int_\alpha^\beta f(z_0 + r\cos\theta + ir\sin\theta)(x'+iy')\,d\theta = \\ &= \int_\alpha^\beta f\left(z_0+re^{i\theta}\right) ire^{i\theta}\,d\theta\end{aligned}$$

- Nel seguito denoteremo l'angolo cui appartiene l'arco γ_r descritto scrivendo $A(z_0,\alpha,\beta)$

Due utili lemmi

Lemma IV.1 (dell'arco di cerchio grande) *Sia f continua in $A(z_0,\theta_1,\theta_2)\cap\{z\in\mathbb{C}\,||z-z_0|>R\}$ per un qualche $R>0$, allora, se*

$$\lim_{z\to\infty, z\in A(z_0,\theta_1,\theta_2)} zf(z) = k\in\mathbb{C}$$

allora

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\gamma_r} f(z)\,dz = i(\theta_2-\theta_1)k.$$

Lemma IV.2 (dell'arco di cerchio piccolo) *Sia f continua in $A(z_0,\theta_1,\theta_2)\cap\{z\in\mathbb{C}\,||z-z_0|<R\}$ per un qualche $R>0$, allora, se*

$$\lim_{z\to z_0, z\in A(z_0,\theta_1,\theta_2)} (z-z_0)f(z) = k\in\mathbb{C}$$

allora

$$\lim_{r\to0}\int_{\gamma_r} f(z)\,dz = i(\theta_2-\theta_1)k.$$

Dimostrazione Cominciamo con il notare che, nelle ipotesi del primo lemma

$$\lim_{z\to\infty, z\in A(z_0,\theta_1,\theta_2)} zf(z) = k\in\mathbb{C} \Leftrightarrow \lim_{z\to\infty, z\in A(z_0,\theta_1,\theta_2)} (z-z_0)f(z) = k\in\mathbb{C}$$

Infatti,

$$\lim_{z\to\infty, z\in A(z_0,\theta_1,\theta_2)} f(z) = 0$$

questo perché

$$f(z) = \frac{1}{z}zf(z)\to k\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z} = 0$$

Adesso i due lemmi si trattano in modo analogo. Abbiamo

$$\int_{\gamma_r} f(z)\,dz = \int_{\gamma_r} \left(f(z) - \frac{k}{z-z_0} + \frac{k}{z-z_0} \right) dz = \int_{\gamma_r} \frac{(z-z_0)\,f(z) - k}{z-z_0}\,dz + \int_{\gamma_r} \frac{k}{z-z_0}\,dz$$

Ora,

$$\int_{\gamma_r} \frac{k}{z-z_0}\,dz = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{k}{re^{i\theta}} ire^{i\theta}\,d\theta = i\int_{\theta_1}^{\theta_2} k\,d\theta = ik\,(\theta_2 - \theta_1)$$

Per mostrare la tesi bisogna vedere che l'altro integrale è infinitesimo (al limite per $r \to \int nfty$, primo caso, o $r \to 0^+$, secondo caso). Si ha

$$\left| \int_{\gamma_r} \frac{(z-z_0)\,f(z)-k}{z-z_0}\,dz \right| \le \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left| re^{i\theta} f\left(z_0 + re^{i\theta}\right) - k \right| \,d\theta \le \varepsilon(r)\,(\theta_2 - \theta_1)$$

dove $\varepsilon(r)$ è il massimo di $|(z-z_0)\,f(z) - k|$ sul sostegno dell'arco γ_r. In ambedue i casi, dall'ipotesi, $\varepsilon(r) \to 0$.

Infatti, (e lo vediamo per esempio nel secondo caso) fissiamo una qualunque successione $r_n \to 0$: sull'arco n-esimo fissiamo il punto di massimo z_n, valutando $|(z-z_0)\,f(z) - k|$ in $z = z_n$ otteniamo la successione $\varepsilon(r_n)$. La successione z_n tende a z_0, essendo $r_n = |z_0 - z_n| \to 0$. Dunque,

$$\varepsilon(r_n) = |(z_n - z_0)\,f(z_n) - k| \to 0$$

(c.v.d.) perché, per $n \to \infty$, $z_n \to z_0$.

Un altro risultato utile nei calcoli è il seguente

Lemma IV.3 (di Jordan) *Sia f continua nell'angolo $A(z_0, \theta_1, \theta_2)$, almeno per $|z - z_0| > R$, e supponiamo che sia*

$$\lim_{z\to\infty, z\in A(z_0,\theta_1,\theta_2)} f(z) = 0$$

Sia $w = |w|\,e^{i\varphi}$ un numero complesso non nullo per cui $\cos(\theta+\varphi) \le 0$, per $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Se γ_r è l'arco di raggio r centrato in z_0 e compreso nell'angolo considerato, allora

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} f(z)\,e^{wz}\,dz = 0$$

Dimostrazione Si ha,

$$\left| \int_{\gamma_r} f(z)\,e^{wz}\,dz \right| \le \int_{\gamma_r} |f(z)|\,|e^{wz}|\,|dz|$$

Ora, se $z = z_0 + re^{i\theta}$

$$\begin{aligned} |e^{wz}| &= \left|\exp\left(wz_0 + wre^{i\theta}\right)\right| = |e^{wz_0}|\left|\exp\left(wre^{i\theta}\right)\right| = |e^{wz_0}| \exp \mathrm{Re}\left(|w|\,re^{i(\theta+\varphi)}\right) = \\ &= |e^{wz_0}|\,e^{|w|r\cos(\theta+\varphi)} \end{aligned}$$

perciò

$$\left| \int_{\gamma_r} f(z)\,e^{wz}\,dz \right| \le \int_{\gamma_r} |e^{wz_0}|\,e^{|w|r\cos(\theta+\varphi)}\,|f(z)|\,|dz| \le |e^{wz_0}|\,\varepsilon(r) \int_{\theta_1}^{\theta_2} re^{|w|r\cos(\theta+\varphi)}\,d\theta$$

dove $\varepsilon(r) = \max_{\gamma_r} |f(z)| \to 0$ per $r \to \infty$. Perciò si tratta di vedere che l'integrale a destra rimane limitato per $r \to \infty$. Si ha

$$\cos(\theta+\varphi) \le 0,\ \theta \in [\theta_1, \theta_2]$$

se e solo se

$$\frac{\pi}{2} + 2m\pi \le \theta_1 + \varphi \le \theta_2 + \varphi \le \frac{3}{2}\pi + 2m\pi,$$

per m intero. Facciamo allora il seguente cambiamento di variabile $\theta + \varphi = t + \pi/2 + 2m\pi$, siano $0 \le \alpha = \theta_1 + \varphi - (\pi/2 + 2m\pi)$ e $\beta = \theta_2 + \varphi - (\pi/2 + 2m\pi) \le \pi$ i nuovi estremi di integrazione, abbiamo, se $s \equiv |w|\, r$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} re^{|w| r\cos(\theta+\varphi)}\, d\theta = \frac{s}{|w|}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-s\sin t}\, dt \leq \frac{s}{|w|}\int_{0}^{\pi} e^{-s\sin t}\, dt$$

ora,

$$\int_0^{\pi} e^{-s\sin t}\, dt = 2\int_0^{\pi/2} e^{-s\sin t}\, dt,$$

ma in $[0,\pi/2]$ si ha

$$\sin t > \frac{t}{2} \Rightarrow -s\sin t < -\frac{st}{2}$$

$$2\int_0^{\pi/2} e^{-s\sin t}\, dt \leq 2\int_0^{\pi/2} e^{-st/2}\, dt = \frac{4}{s}\left(1-e^{-s\pi/4}\right) < \frac{4}{s} = \frac{4}{|w|\, r}$$

indi

$$\left|\int_{\gamma_r} f(z)\, e^{wz}\, dz\right| \leq |e^{wz_0}|\, \varepsilon(r)\, \frac{4}{|w|\, r} r \to 0$$

(c.v.d.)

IV.2.4 Integrazione delle funzioni olomorfe: teoremi di Cauchy

Sia f una funzione continua definita sull'aperto D di $\mathbb{C}$ e a valori complessi. Allora, se α è un cammino in D

$$\begin{aligned}\int_\alpha f(z)\, dz &= \int_a^b f(\alpha(t))\left(\alpha_1'(t)+i\alpha_2'(t)\right) dt = \int_a^b \left(u(\alpha(t))+iv(\alpha(t))\right)\left(\alpha_1'(t)+i\alpha_2'(t)\right) dt = \\ &= \int_a^b \left[u(\alpha(t))\,\alpha_1'(t) - v(\alpha(t))\,\alpha_2'(t)\right] dt + i\int_a^b \left[u(\alpha(t))\,\alpha_2'(t)+v(\alpha(t))\,\alpha_1'(t)\right] dt = \\ &= \int_\alpha \left[u(x,y)\, dx - v(x,y)\, dy\right] + i\int_a^b \left[v(x,y)\, dx + u(x,y)\, dy\right]\end{aligned}$$

cioè l'integrale di f è dato da una combinazione lineare degli integrali curvilinei su α, cammino di D aperto di $\mathbb{R}^2$, delle forme reali $udx - vdy$ e $vdx + udy$. Abbiamo allora che ambedue le forme considerate **sono chiuse se e solo se f è olomorfa**, infatti, vale l'identità di Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned}\partial_2 u &= -\partial_1 v\\ \partial_2 v &= \partial_1 u\end{aligned}$$

e, se f è olomorfa, u e v sono $\mathcal{C}^1$, viceversa, f è derivabile e ha derivata continua.
Vale allora il seguente

Teorema IV.9 (primo, di Cauchy) *Sia D aperto di $\mathbb{C}$, e $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfa. Se α, β sono circuiti di D omotopi in D si ha*

$$\int_\alpha f(z)\, dz = \int_\beta f(z)\, dz$$

In particolare, per ogni circuito α nullomotopo in D si ha

$$\int_\alpha f(z)\, dz = 0$$

Dimostrazione Se f è olomorfa, il suo integrale è pari a quello di una forma differenziale reale chiusa, perciò localmente esatta. Il teorema discende allora dal teorema di invarianza per omotopia per le forme differenziali reali.
(c.v.d.)

Veniamo ora alla **formula integrale di Cauchy** o

Teorema IV.10 (secondo, di Cauchy)

Sia $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfa su D aperto di $\mathbb{C}$ e sia Γ un circuito in D che racchiuda solo punti di olomorfia per f. Allora, se z è un punto interno a Γ vale

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Dimostrazione Γ racchiude solo punti di olomorfia per f perciò l'integrando è olomorfo nella regione A interna a Γ privata di z. Isoliamo la componente connessa di A che contiene al suo interno z. Consideriamo le altre componenti connesse di A. Esse sono connesse e contengono solo punti di olomorfia, perciò sono nullomotope. Ne segue che ci interessa solo l'integrale eseguito sulla frontiera della componente connessa di A che racchiude z. Sia allora Γ un curva chiusa semplice che racchiude z e sia A l'aperto di cui Γ è frontiera. Esiste una palla $B(z,\rho)$ tutta contenuta in A, se γ_ρ è il contorno di $B(z,\rho)$ si ha che Γ è omotopa a γ_ρ (come detto nell'introduzione al capitolo, lo accettiamo). Allora, dal primo teorema di Cauchy,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Siccome il primo membro dell'eguaglianza non dipende da ρ, nemmeno il secondo dipenderà da ρ, perciò si può passare al limite per $\rho \to 0$ nel secondo membro

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

d'altra parte

$$\int_0^{2\pi} \frac{f\left(z + \rho e^{i\theta}\right)}{\rho e^{i\theta}} i\rho e^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} f\left(z + \rho e^{i\theta}\right)\, d\theta$$

la funzione a primo membro è una funzione continua a supporto in un compatto, perciò è dominata da una funzione sommabile, ne viene che

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z + \rho e^{i\theta}\right)\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_{\rho \to 0} f\left(z + \rho e^{i\theta}\right)\, d\theta$$

Ma, visto che f è continua e $z + \rho e^{i\theta} \to z$ per $\rho \to 0$, si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = f(z)$$

(c.v.d.)

La formula di Cauchy ha il seguente importante corollario

Corollario IV.2 *Sia f una funzione olomorfa in D aperto di $\mathbb{C}$, allora $f \in \mathcal{C}^\infty(D)$, cioè f ammette tutte le derivate ed esse stesse sono olomorfe.*

Dimostrazione Consideriamo $z \in D$. Esiste allora una palla $B(z,\rho)$ tutta contenuta in D. Allora f è olomorfa nella palla e se γ ne è il contorno, per il secondo teorema di Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Ora,

$$\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = i \int_0^{2\pi} f\left(z + \rho e^{i\theta}\right)\, d\theta$$

deriviamo in z ambo i membri

$$\frac{d}{dz} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \lim_{h \to 0} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)}\, d\zeta = \lim_{h \to 0} \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)}{\rho e^{i\theta} - h} i d\theta$$

Consideriamo l'integrando all'ultimo membro

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\rho e^{i\theta} - h}\right| \le \frac{M}{|\rho e^{i\theta} - h|} \le \frac{M}{||\rho| - |h||} \to \frac{M}{|\rho|}$$

perciò è limitato. Applicando il teorema di Lebesgue

$$\frac{d}{dz}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta = \int_\gamma \frac{d}{dz}\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right] d\zeta$$

Sicché

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta$$

cioè, esiste la derivata prima di f. Reiterando, otteniamo

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta$$

perciò $f \in \mathcal{C}^\infty(D)$. In particolare, derivate di funzioni olomorfe, sono funzioni olomorfe.

Per completezza mostriamo che

$$\frac{d^n}{dz^n}\frac{1}{\zeta - z} = \frac{n!}{(\zeta - z)^{n+1}}$$

Abbiamo già visto il primo passo. Passo induttivo. Sia

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\frac{1}{\zeta - z} = \frac{(n-1)!}{(\zeta - z)^n}$$

deriviamo,

$$\frac{d^n}{dz^n}\frac{1}{\zeta - z} = \frac{(n-1)!n(\zeta - z)^{n-1}}{(\zeta - z)^{2n}} = \frac{n!}{(\zeta - z)^{2n-n+1}} = \frac{n!}{(\zeta - z)^{n+1}}.$$

(c.v.d.)

Esempio IV.4 Sia γ un circuito semplice racchiudente l'origine. Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma \frac{\sin z}{z^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!}\frac{2!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sin z}{z^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!}\left.\frac{d^2}{dz^2}\sin z\right|_{z=0} = 0$$

dove si è applicato in modo inverso la formula ricavata nel corollario al secondo teorema di Cauchy. ▪

Una applicazione immediata della formula di Cauchy è data dal

Teorema IV.11 (di Liouville) *Ogni funzione intera limitata è costante.*

Dimostrazione Sia $a \in \mathbb{C}$. Se $r > |a|$ e γ_r è il circolo di centro l'origine e raggio r, si ha

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}d\zeta$$
$$f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta$$

Perciò

$$f(a) - f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} f(\zeta)\frac{a}{\zeta(\zeta - a)}d\zeta$$

Mostriamo ora che il secondo membro tende a 0 per $r \to \infty$. A questo scopo, possiamo utilizzare il lemma del cerchio grande, perciò ci occorre

$$\lim_{\zeta\to\infty} \zeta f(\zeta)\frac{a}{\zeta(\zeta - a)} = a\lim_{\zeta\to\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)} = 0$$

(c.v.d.) essendo f limitata.

Primitive delle funzioni olomorfe Sia f una funzione complessa continua definita nell'aperto D di $\mathbb{C}$. Si dice primitiva di f, la funzione derivabile F tale che, per ogni $z \in D$, risulti $F'(z) = f(z)$. In questo caso, F risulta derivabile con derivata continua, perciò olomorfa. Siccome le derivate di funzioni olomorfe sono olomorfe, si ha che f è olomorfa. Perciò se f ammette primitiva, allora f è olomorfa. Ora, sia $f = u + iv$ e sia la sua primitiva $F = U + iV$. L'integrale di f è dato dall'integrale della forma differenziale $(udx - vdy) + i(vdx + udy)$ e

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{Re} F' \\ v &= \operatorname{Im} F' \end{aligned}$$

ma

$$F' = \partial_x U + i\partial_x V = \partial_y V - i\partial_y U$$

sicché

$$\begin{aligned} u &= \partial_x U = \partial_y V \\ v &= -\partial_y U = \partial_x V \end{aligned}$$

perciò

$$\begin{aligned} udx - vdy &= dU \\ vdx + udy &= dV \end{aligned}$$

Dal teorema fondamentale del calcolo, abbiamo

$$\int_\alpha f\,dz = \int_\alpha (udx - vdy) + i\int_\alpha (vdx + udy) = \int_\alpha dU + i\int_\alpha dV = F(b) - F(a)$$

se a è l'origine di α e b ne è l'estremo.
La domanda adesso è: se f è olomorfa, ammette primitiva? Se f è olomorfa le due forme differenziali $udx - vdy$ e $vdx + udy$ sono chiuse, cioè localmente esatte. Ne viene che le due forme ammettono localmente primitive U e V. Se $F(x+iy) = U(x,y) + iV(x,y)$, allora $F' = f$, come si ha ripetendo a rovescio il ragionamento di sopra. In definitiva, ogni funzione olomorfa ammette primitive locali. Viceversa, una funzione complessa continua che ammetta primitive locali, è localmente olomorfa (ammettere primitiva implica olomorfia, sicché ammettere localmente primitva significa essere localmente olomorfa), cioè olomorfa.
D'altra parte f olomorfa è localmente esatta, perciò su un aperto semplicemente connesso è esatta, dunque ammette primitiva.
In conclusione,

Proposizione IV.5 *Sia D un aperto di $\mathbb{C}$ e sia $f : D \to \mathbb{C}$ una funzione continua. Allora*

(i) *la funzione f ammette primitiva in D se e solo se ha integrale nullo su ogni circuito chiuso contenuto in D;*

(ii) *la funzione f ammette primitive locali se e solo se è olomorfa in D.*

IV.2.5 Analiticità delle funzioni olomorfe

Grazie al secondo teorema di Cauchy, abbiamo dimostrato che le funzioni olomorfe sono $\mathcal{C}^\infty$. In realtà si ha molto di più: una funzione olomorfa è **analitica**. In ogni punto del dominio, la serie di Taylor attorno a quel punto converge alla funzione stessa, su ogni disco centrato nel punto e contenuto nel dominio di olomorfia della funzione. Prima di dimostrare questo importante teorema, ci occorre il seguente

Lemma IV.4 *Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un cammino di $\mathbb{C}$, sia $K = \gamma([a,b])$ il suo sostegno e sia $u : K \to \mathbb{C}$ una funzione continua. La formula*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,\ z \in \mathbb{C}\backslash K$$

definisce una funzione analitica $f : \mathbb{C}\backslash K \to \mathbb{C}$. In altre parole, se $a \in \mathbb{C}\backslash K$ si ha

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^n,\ |z-a| < r \equiv d(a,K)$$

con

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{u(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}d\zeta.$$

Dimostrazione Se $|z-a| < r = d(a,K)$, per $\zeta \in K$ si ha $|z-a| < r \le |\zeta - a|$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - a + a - z} = \frac{1}{\zeta - a}\frac{1}{1-(z-a)/(\zeta-a)} = \frac{1}{\zeta - a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}\end{aligned}$$

perciò

$$\frac{u(\zeta)}{\zeta - a} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{u(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}(z-a)^n$$

La convergenza della serie a secondo membro è totale su $[a,b]$ una volta posto $\zeta = \gamma(t)$: si ha infatti, se $\|u\|_\gamma = \max_K |u|$ (che esiste essendo K un compatto, teorema di Weierstraß) si ha

$$\left|\frac{u(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}(z-a)^n\right| \le \frac{\|u\|_\gamma}{r^{n+1}}|z-a|^n = \frac{\|u\|_\gamma}{r}\left(\frac{|z-a|}{r}\right)^n$$

che converge essendo $|z-a|/r < 1$. La convergenza totale implica quella uniforme, dunque si può procedere a integrare termine a termine

$$\int_\gamma \frac{u(\zeta)}{\zeta-a}d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}\int_\gamma \frac{u(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}(z-a)^n\,d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}\int_\gamma \frac{u(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,d\zeta\,(z-a)^n$$

(c.v.d.) la tesi, una volta diviso ambo i membri per $2\pi i$.

Siamo adesso in grado di dimostrare il

Teorema IV.12 (Analiticità delle funzioni olomorfe) *Se D è aperto di $\mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ è olomorfa, $a \in D$ e $B(a,r) \subset D$ si ha*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,\ z \in B(a,r)$$

e, qualsiasi sia $\delta \in (0,r)$, si ha

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a,\delta)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta,\ n \in \mathbb{N}.$$

Dimostrazione La serie a secondo membro è proprio la serie di Taylor di f in a, grazie al corollario al secondo teorema di Cauchy. Ora, la tesi del teorema è contenuta tutta nel lemma precedente, una volta notato che, ancora dal teorema di Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

(c.v.d.) per ogni $z \in B(a,r) \subset D$.

Come corollario, si ha che l'insieme delle funzioni intere coincide con l'insieme delle serie di potenze con raggio infinito. Esse sono infatti intere. Viceversa, dal teorema si ha che le funzioni intere sono eguali alle loro serie di potenze entro palle arbitrariamente grandi, perciò si ha convergenza su tutto $\mathbb{C}$.

IV.2.6 Serie di Taylor-Laurent

Abbiamo visto che una funzione olomorfa è analitica, cioè coincide con il suo sviluppo di Taylor in dischi compatibili con l'estensione del dominio di olomorfia. In questo modo abbiamo legato le funzioni olomorfe alle serie di potenze che sapevamo essere olomorfe nel disco di convergenza.

Vediamo ora il legame con le serie di potenze bilatere: sappiamo che esse sono olomorfe entro la corona di convergenza.
Prima di enunciare e dimostrare il teorema di Taylor-Laurent che generalizza il risultato ottenuto nella precedente sottosezione, facciamo alcun considerazioni sulla convergenza di una serie di potenze (bilatera). Giusto per completezza richiamiamo i risultati più importanti, a partire dal (trascurato in alcuni testi)

Lemma IV.5 (di Abel) *Sia data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, e sia $w \in \mathbb{C}$ tale che $\{a_n w^n\} \subset \mathbb{C}$ è limitato. Allora la serie di potenze converge assolutamente in ogni z tale che $|z| < |w|$.*

Dimostrazione Molto semplice. Se $\{a_n w^n\}$ è una successione limitata, allora

$$|a_n w^n| \leq M$$

perciò, se $|z| < |w|$ si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n w^n| \left|\frac{z}{w}\right|^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} M \left|\frac{z}{w}\right|^n = \frac{M}{1 - |z/w|} < \infty$$

(c.v.d.)

Proposizione IV.6 *Se una serie di potenze converge puntualmente in w, allora converge assolutamente in ogni z tale $|z| < |w|$.*

Dimostrazione Se la serie converge puntualmente in w, allora

$$\lim_{n\to\infty} a_n w^n = 0$$

perciò la successione $\{a_n w^n\} \subset \mathbb{C}$, essendo convergente, è limitata. Per il lemma di Abel, si ha la convergenza assoluta della serie in $|z| < |w|$.

(c.v.d.)

Si ha, infine, il seguente risultato che vogliamo richiamare

Teorema IV.13 *Se una serie di potenze converge assolutamente in w, allora converge totalmente nella palla aperta $|z| < |w|$.*

Dimostrazione Si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{|z|<|w|} |a_n z^n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n w^n| < \infty$$

(c.v.d.)

Riassumendo, se si definisce cerchio di convergenza il **massimo cerchio in cui la serie converge puntualmente**,

Teorema IV.14 *Nei cerchi interni al cerchio di convergenza una serie di potenze converge totalmente, perciò uniformemente.*

Così, la **convergenza puntuale implica quella uniforme** nei cerchi interni al circolo di raggio dato dal modulo del punto in cui si riscontra convergenza puntuale.
Le serie bilatere convergono totalmente (perciò uniformemente) all'interno della corona circolare di convergenza.

Teorema IV.15 (Taylor-Laurent) *Sia D un aperto di $\mathbb{C}$ e sia $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfa. Sia $a \in \mathbb{C}$ e siano α, β con $0 \leq \alpha < \beta < \infty$ tali che la corona circolare aperta $B(a, \alpha, \beta)$ sia contenuta in D. In tal caso esiste unica una successione bilatera $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$, per cui*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \; \alpha < |z-a| < \beta$$

si ha inoltre, per $\alpha < r < \beta$,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta$$

Dimostrazione Fissiamo z con $\alpha < |z-a| < \beta$. Prendiamo ora due reali r, s di modo che $\alpha < r < |z-a| < s < \beta$. Consideriamo la funzione

$$\begin{aligned} g(\zeta) &\equiv \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z},\ \zeta \in D\setminus\{z\} \\ g(z) &\equiv f'(z) \end{aligned}$$

Si ha che g è olomorfa in D. Infatti, è olomorfa in $D\setminus\{z\}$ e sviluppando f attorno a z si ha

$$f(\zeta) = f(z) + f'(z) + a_2(\zeta - z)^2 + \ldots,\ \forall \zeta \in B(z,\delta) \subset D$$

su $B(z,\delta)$ si ha

$$g(\zeta) = f'(z) + a_2(\zeta - z) + \ldots$$

Indi, g è una serie di potenze in $B(z,\delta)$, allora è olomorfa in $B(z,\delta) \cup D = D$. Se con γ_t denotiamo il bordo (orientato positivamente) della circonferenza di raggio t e centro a, abbiamo che γ_r e γ_s sono omotopi in D dunque

$$\int_{\gamma_r} g(\zeta)\, d\zeta = \int_{\gamma_s} g(\zeta)\, d\zeta$$

sicché

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{\gamma_s} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \int_{\gamma_s} \frac{f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Ma, siccome $1/(\zeta - z)$ è olomorfa nella regione interna a γ_r si ha

$$\int_{\gamma_r} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = 0$$

mentre, dal primo teorema di Cauchy, considerando l'identità,

$$\int_{\gamma_s} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = 2\pi i$$

perciò

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{\gamma_s} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - 2\pi i f(z)$$

cioè

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Il primo addendo si tratta in modo identico a quello usato nella dimostrazione del lemma all'analiticità delle funzioni olomorfe, perciò

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,\ c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta$$

Vediamo il secondo addendo. Siccome ζ appartiene al sostegno di γ_r si ha $|z-a| > r = |\zeta - a|$:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z-a} \frac{1}{(\zeta - a)/(z-a) - 1} = -\frac{1}{z-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta - a)^k}{(z-a)^k} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta - a)^k}{(z-a)^{k+1}}$$

moltiplicando ambo i membri per $f(\zeta)$ si ha

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = -\sum_{k=0}^{\infty} f(\zeta) \frac{(\zeta - a)^k}{(z-a)^{k+1}} = -\sum_{j=1}^{\infty} f(\zeta) \frac{(\zeta - a)^{j-1}}{(z-a)^j}$$

Tale serie è totalmente convergente sul sostegno di γ_r, infatti se M è il massimo modulo di f

sul sostegno, si ha

$$\left| f(\zeta) \frac{(\zeta - a)^{j-1}}{(z-a)^j} \right| \leq \frac{M}{r} \left(\frac{r}{|z-a|} \right)^j$$

che converge essendo $r/|z-a| < 1$. Si può quindi integrare termine a termine su γ_r e ottenere

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\gamma_r} f(\zeta) \frac{(\zeta - a)^{j-1}}{(z-a)^j} d\zeta = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_{-j}}{(z-a)^j}$$

Questo prova l'esistenza dello sviluppo di Taylor-Laurent.

Per l'unicità, supponiamo che esista in $B(a, \alpha, \beta)$ un secondo sviluppo

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n (z-a)^n$$

Fissato un intero k moltiplichiamo ambo i membri per $1/(z-a)^{k+1}$,

$$\frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n (z-a)^{n-k-1}$$

La serie a secondo membro è una serie bilatera che converge puntualmente nella corona $B(a, \alpha, \beta)$, perciò si ha convergenza totale all'interno della corona, in particolare su un circolo di raggio $r < \rho < s$. Perciò si può integrare termine a termine

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n \int_{\gamma_\rho} (z-a)^{n-k-1} dz$$

La funzione $(z-a)^{n-k-1}$ ammette una primitiva, $(z-a)^{n-k}/(n-k)$ a meno che $n = k$, perciò

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz = d_k \int_{\gamma_\rho} \frac{1}{z-a} dz = 2\pi i d_k$$

(c.v.d.) perciò $d_k = c_k$, come volevamo.

IV.2.7 Zeri di una funzione olomorfa

Sia $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfa. L'insieme $Z(f)$ degli zeri di f ha una struttura molto particolare, grazie all'analiticità di f. Uno zero di f si dirà isolato se è un punto isolato di $Z(f)$, equivalentemente, se esiste un intorno di a in cui f assume valori diversi da 0, per complessi diversi da a. Abbiamo subito la seguente

Proposizione IV.7 *Sia D un aperto di $\mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfa, e $a \in \mathbb{C}$ uno zero di f. Le seguenti affermazioni sono equivalenti*

(i) *a è uno zero isolato per f;*

(ii) *il punto a non è interno a $Z(f)$;*

(iii) *esistono un intero m e una funzione g olomorfa in D, con $g(a) \neq 0$, tali che*

$$f(z) = (z-a)^m g(z), \ \forall z \in D$$

(iv) *esiste un intero $m \geq 1$ tale che in a la funzione sia nulla assieme alle sue derivate fino all'ordine $m-1$, mentre la derivata m-esima (in a) è non nulla.*

Dimostrazione Siccome f è olomorfa, è analitica all'interno della palla di centro a e raggio $r = d(a, D^c)$. visto poi che $f(a) = 0$, si ha

$$f(z) = c_1 (z-a) + c_2 (z-a)^2 + \dots$$

(i) implica (ii) Se a fosse interno a $Z(f)$, allora sarebbe un punto di accumulazione per $Z(f)$, perciò non sarebbe isolato.

(ii) implica (iii) Se nello sviluppo di Taylor tutti i coefficienti fossero nulli, f sarebbe nulla in $B(a,r)$, perciò $B(a,r) \subset Z(f)$, dunque a sarebbe interno a $Z(f)$. Esiste allora un intero m tale che $c_m \neq 0$. allora

$$f(z) = c_m (z-a)^m + c_{m+1} (z-a)^{m+1} + \ldots = (z-a)^m [c_m + c_{m+1} (z-a) + \ldots]$$

Posto $g(z) = f(z) / (z-a)^m$, abbiamo che essa è olomorfa in $D \setminus \{a\}$ e in $B(a,r)$ (poiché è ivi analitica). Perciò $g(z)$ è olomorfa in D, non nulla in a, $g(a) = c_m \neq 0$, e $f(z) = (z-a)^m g(z)$.

(iii) implica (iv) Sviluppando g in un intorno di a si ha

$$f(z) = g_0 (z-a)^m + g_1 (z-a)^{m+1} + \ldots$$

e la tesi è immediata.

(iv) implica (i) Dall'ipotesi si ha che i primi m coefficienti della serie di Taylor in un intorno di a sono nulli

$$f(z) = c_m (z-a)^m + c_{m+1} (z-a)^{m+1} + \ldots = (z-a)^m g(z)$$

con g olomorfa e non nulla in a e con l'eguaglianza tra primo e ultimo membro estesa a D. Siccome g è continua, esiste un intorno in cui è non nulla. Siccome a è l'unico zero di $(z-a)^m$ si ha la tesi.

(c.v.d.)

Il numero m di cui nella proposizione (il massimo esponente da dare a $(z-a)$ affinché $(z-a)^m$ divida f) si dice **molteplicità** di a come zero di f.

Veniamo così al

Teorema IV.16 (principio di identità delle funzioni olomorfe) *Sia D aperto connesso di $\mathbb{C}$, e siano f, g olomorfe su D. Allora f e g coincidono su D, se coincidono su un sottoinsieme di D che abbia un punto di accumulazione appartenente a D.*

Dimostrazione Consideriamo la funzione $h = f - g$ che ovviamente è olomorfa in D. Dobbiamo dimostrare che se D è connesso e se $Z(h)$ ammette un punto di accumulazione appartenente a D, allora $Z(h) = D$. Sia a il punto di accumulazione di $Z(h)$ che appartiene a D: allora esiste una successione a valori in $Z(h) \subset D$, z_n, convergente ad $a \in D$: per continuità di h in a si ha

$$h(a) = \lim_{n\to\infty} h(z_n) = 0$$

perciò $a \in Z(h)$. Ma a non è uno zero isolato, perciò appartiene alla parte interna di $Z(h)$ per la proposizione precedente.

Ora, se mostriamo che il complementare in D della parte interna di $Z(h)$ è un insieme aperto e supponiamo che sia pure non vuoto, abbiamo partito D in due aperti non vuoti disgiunti, il che è assurdo, essendo D connesso. Se $a \in D \setminus Z(h)$ per continuità esiste un intorno di a in cui la funzione è non nulla. Se poi $a \in Z(h)$ ma a non è interno a $Z(h)$, dalla proposizione precedente, a è isolato in $Z(h)$, cioè esiste un intorno di a talché l'unico elemento di $Z(h)$ in questo insieme è proprio a. Quindi a ammette un intorno tutto disgiunto dalla parte interna di $Z(h)$. Ne viene che il complementare della parte interna di $Z(h)$ è aperto. La tesi.

(c.v.d.)

Dunque, una volta specificato il valore di una funzione olomorfa su un insieme avente un punto di accumulazione appartenente a D, si è specificata la funzione su tutta quella componente connessa di D contenente il punto di accumulazione. Ad esempio, una volta specificata una funzione olomorfa in $\mathbb{R}$ (che di certo ammette punti di accumulazione contenuti in $\mathbb{C}$), essa ha **al più** una estensione olomorfa in $\mathbb{C}$ (non è detto che esista!). In questo senso, le funzioni esponenziale, seno e coseno sono le uniche possibili! (Richiesta l'olomorfia).

Esempio IV.5 Abbiamo detto che se l'estensione olomorfa esiste allora è unica. Ma l'esistenza non è certo garantita! Consideriamo la funzione $1/(1-z)$. Essa è una funzione analitica (dunque olomorfa) in $B(0,1)$. Siccome $B(0,1)$ possiede punti di accumulazione contenuti in $\mathbb{C}$ che è connesso, ci si potrebbe aspettare che l'estensione della serie geometrica sia una funzione olomorfa in $\mathbb{C}$. D'altra parte essa ammette, come estensione su $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, la funzione $1/(1-z)$. Si tratta di una buona estensione e che, per di più, soddisfa le ipotesi del principio di identità. Ne viene che $1/(1-z)$ è l'unica estensione della serie geometrica in $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Ammettiamo ora che esista una estensione della serie geometrica a tutto $\mathbb{C}$. Si tratterebbe di una estensione alla $1/(1-z)$ su $\mathbb{C}$. Ma la $1/1-z$ tende a ∞ per $z \to 1$. Se ne esistesse un prolungamento olomorfo g su $\mathbb{C}$ si avrebbe, per il principio di località del limite

$$\infty = \lim_{z\to 1} \frac{1}{1-z} = \lim_{z\to 1} g(z)$$

Ma g sarebbe una funzione continua in 1, perciò non potrebbe avere limite infinito in 1. ▪

Esempio IV.6 Consideriamo la parte di Laurent di una funzione olomorfa f in $\mathbb{C}\setminus\{a\}$

$$L_a(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$$

$L_a(z)$ converge puntualmente su tutto $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ dal teorema di Taylor-Laurent. Inoltre, presa una qualsiasi palla $B(0,r)$ essa è certamente olomorfa al di fuori della palla (come serie a potenze negative con raggio interno di convergenza nullo); all'interno della palla L_a è pari alla differenza di f e T_a che sono olomorfe nella palla bucata, perciò L_a è olomorfa nella palla bucata $B(0,r)$. In definitiva, L_a è olomorfa in $\mathbb{C}\setminus\{a\}$. Ne viene che $f(z) - L_a(z)$ è una funzione olomorfa $\mathbb{C}\setminus\{a\}$. D'altra parte, si estende a una funzione olomorfa in $\mathbb{C}$, visto che in a ammette sviluppo puramente di Taylor. ▪

Corollario IV.3 *Se una funzione olomorfa è localmente costante in un punto del suo dominio, è costante su tutta la componente connessa del dominio che contiene il punto.*

Dimostrazione Sia a il punto in questione. $f(a)$ e $f(z)$ coincidono in un intorno di a, quindi su tutta la componente connessa del dominio che contiene a.

(c.v.d.)

In particolare, sia a un punto di D dominio aperto di olomorfia della funzione f. Se in a, f si annulla con tutte le sue derivate, allora nella palla $B(a,r) \subset D$ la funzione f è nulla, perciò f è nulla in tutta la componente connessa di D che contiene a.
Se D aperto connesso è dominio di olomorfia di f e se f non è identicamente nulla in D, allora l'insieme degli zeri di f è dato da punti isolati e gli eventuali punti di accumulazione di $Z(f)$ non cadono in D.

Esempio IV.7 Dimostrare che per ogni $z \in \mathbb{C}$, $\sin 2z = 2\sin z\cos z$.
In $\mathbb{R}$ si ha la seguente identità

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

L'estensione olomorfa del primo membro è $\sin 2z$, mentre l'estensione del secondo membro è $2\sin z\cos z$. Entrambe, sono estensioni della medesima funzione, perciò devono essere eguali per ogni $z \in \mathbb{C}$. La tesi. ▪

Esempio IV.8 Sia D un aperto connesso e sia $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfa. Siano $a \in D$ e $m \in \mathbb{N}$ tali che

$$f^{(k)}(a) = 0,\ \forall k > m$$

Allora f è un polinomio di grado al più k.
Infatti, essendo D aperto, esiste $B(a,r) \subset D$. In tale palla si ha che $f(z)$ è un polinomio di grado al più m,

$$f(z) = a_0 + \ldots + a_m z^m,,\ \forall z \in B(a,r)$$

Ma $B(a,r)$ ammette come punto di accumulazione per D per esempio a. Essendo D connesso, vale il principio di identità e si ha

$$f(z) = a_0 + \ldots + a_m z^m,\ \forall z \in D.$$

▪

IV.3 Singolarità di una funzione olomorfa

IV.3.1 Singolarità isolate

Veniamo allo studio delle singolarità delle funzioni olomorfe. Si dice che $a \in \mathbb{C}$ è una **singolarità isolata** per una funzione olomorfa f se esiste un aperto D di $\mathbb{C}$ tale che $a \in D$ ed f è olomorfa in $D \setminus \{a\}$.Esiste allora un cerchio di centro a e raggio β tutto contenuto in D. Nel cerchio bucato $B(a,\beta) \setminus \{a\} \equiv B^{\times}(a,\beta)$ la funzione f è identicamente eguale al suo sviluppo di Taylor-Laurent, cioè

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} = T_a(z) + L_a(z), \forall z \in B^{\times}(a,\beta)$$

dove il primo addendo (a potenze positive), T_a, si chiama **parte regolare** (o di Taylor) dello sviluppo e il secondo addendo (a potenze negative), L_a, si chiama **parte singolare** (o di Laurent) dello sviluppo.
La parte singolare dello sviluppo classifica la singolarità a nel modo che segue

(i) se tutti i c_{-n} sono nulli, cioè $L_a(z) \equiv 0$, allora a si dice **singolarità removibile**;

(ii) se solo per un insieme finito di indici n i c_{-n} sono non nulli, allora $L_a(z)$ è una funzione razionale, a si dice **singolarità polare** (o polo) e il massimo m per cui $c_{-m} \neq 0$ si dice **ordine del polo** a.

(iii) i c_{-n} sono non nulli per un insieme infinito di indici n; a si dice **singolarità essenziale.**

Noi ci interesseremo diffusamente solo dei primi due tipi di singolarità. In una singolarità essenziale, la funzione ha un comportamento estremamente complicato e non ammette limite per $z \to a$. Si dimostra (a noi non interessa) che in un intorno di a, la funzione assume tutti i valori complessi tranne al più uno (teorema di Picard).
Vediamo, in ogni caso, un esempio di ogni tipo di singolarità:

Esempio IV.9 La funzione definita su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ $f(z) = \sin z / z$ ha in $z = 0$ una singolarità eliminabile. Infatti, dallo sviluppo in serie di $\sin z$ si ha

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \ldots = T_a(z)$$

perciò la parte di Laurent dello sviluppo è nulla. Consideriamo allora la funzione g tale che $g(z) = f(z)$ per $z \neq 0$ e 1 per $z = 0$. La funzione f, nell'intorno bucato $B(0,r)$ è pari a T_a per il teorema di Taylor-Laurent, perciò la funzione g è pari a T_a su tutta la palla $B(0,r)$. Ne viene che g è olomorfa in $\mathbb{C}$. Siccome g estende f su un connesso e nelle ipotesi del principio di identità, l'estensione è unica. ▪

Esempio IV.10 La funzione $\bar{f}(z) = 1/\left(z^2+1\right)$, definita in $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ è olomorfa. I punti i e $-i$ sono singolarità polari del primo ordine. Infatti,

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1/2i}{z-i} + \frac{-1/2i}{z+i}$$

La parte singolare di $1/\left(z^2+1\right)$ attorno a i è di certo data dal primo addendo di sopra, visto che il secondo addendo è olomorfo in un intorno di i perciò ha ivi parte di Laurent nulla (è analitico). Analogamente per l'intorno di $-i$. ▪

Esempio IV.11 La funzione $\sin 1/z$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ma ha una singolarità essenziale in $z = 0$. Infatti,

$$\sin \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3! z^3} + \ldots$$

perciò f ha solo parte di Laurent diversa da 0. ▪

IV.3.2 Singolarità removibili

La seguente proposizione caratterizza le singolarità removibili

Proposizione IV.8 *Sia a singolarità isolata per la funzione olomorfa f. Sono affermazioni equivalenti*

(i) *a è una singolarità removibile;*

(ii) *esiste*

$$\lim_{z\to a} f(z) \in \mathbb{C};$$

(iii) *f è limitata in un intorno di a.*

Dimostrazione (i) implica (ii) In un intorno di a si ha

$$f(z) = c_0 + c_1 (z-a) + \dots$$

perciò

$$\lim_{z\to a} f(z) = c_0 \in \mathbb{C}$$

(ii) implica (iii) Se

$$\lim_{z\to a} |f(z) - c_0| = 0$$

allora esiste un intorno di a in cui

$$|f(z) - c_0| < \varepsilon$$

perciò $f(z)$ è limitata.
(iii) implica (i) Si ha

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} f(\zeta)(\zeta - a)^{n-1}\, d\zeta,\ n \geq 1$$

se γ_r borda il disco $B(a,r) \subset D$. Volendo usare il lemma del cerchio piccolo, si ha, essendo f limitata in un intorno di a

$$\lim_{\zeta\to a} (\zeta - a) f(\zeta)(\zeta - a)^{n-1} = 0$$

perciò

$$2\pi i c_{-n} = \lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r} f(\zeta)(\zeta - a)^{n-1}\, d\zeta = 0$$

(c.v.d.) cioè la parte di Laurent è nulla.

IV.3.3 Singolarità polari

Proposizione IV.9 *Sia a una singolarità isolata per la funzione olomorfa f. a è un polo per f se e solo se*

$$\lim_{z\to a} f(z) = \infty$$

In tal caso esiste $m \geq 1$ tale che f è dello stesso ordine di $1/(z-a)^m$ per $z \to a$, cioè

$$\lim_{z\to a} (z-a)^m f(z) \in \mathbb{C}\setminus\{0\};$$

m è l'ordine di a come polo di f.

Dimostrazione Sia D aperto di $\mathbb{C}$ tale che f è olomorfa in $D\setminus\{a\}$. Se

$$\lim_{z\to a} f(z) = \infty$$

allora esiste $\delta > 0$ talché $B(a,\delta) \subset D$ e $f(z) \neq 0$ per $z \in B^\times(a,\delta)$. La funzione $g(z) = 1/f(z)$ può essere definita in $B^\times(a,\delta)$, ed essendo

$$\lim_{z\to a} g(z) = 0$$

a è una singolarità removibile per g. Dunque, g si prolunga a una funzione olomorfa in $B(a,\delta)$ che, con leggero abuso di notazione, chiameremo g e tale che $g(a) = 0$. g è nulla solo in a nel dominio $B(a,\delta)$ di olomorfia. Sia m la molteplicità di a come zero di g. Allora

$$g(z) = k(z)(z-a)^m$$

con k olomorfa e mai nulla in $B(a,\delta)$. Ne viene che

$$f(z) = \frac{1}{k(z)} \frac{1}{(z-a)^m} = \frac{h(z)}{(z-a)^m}$$

Ora, $h(z)$ è olomorfa e mai nulla in $B(a,\delta)$, presone lo sviluppo di Taylor

$$h(z) = h_0 + h_1(z-a) + \dots$$

si ha, $h_0 \neq 0$

$$f(z) = \frac{h_0}{(z-a)^m} + \dots + \frac{h_{m-1}}{(z-a)} + h_m + h_{m+1}(z-a) + \dots$$

perciò a è un polo di ordine m.

Viceversa, sia a polo di ordine m allora

$$f(z) = T_a(z) + \dots + \frac{c_{-m}}{(z-a)^m}$$

si trae

$$\begin{aligned} \lim_{z\to a} f(z)(z-a)^m &= c_{-m} \neq 0 \\ \lim_{z\to a} f(z) &= \infty. \end{aligned}$$

(c.v.d.)

Risulta anche dimostrato che se f ammette limite in una singolarità, allora tale singolarità non è essenziale (ma è removibile nel caso in cui il limite sia finito e polare nel caso in cui il limite sia infinito).

IV.3.4 Metodi per la classificazione delle singolarità

Singolarità delle funzioni $h(z)/g(z)$

Nelle applicazioni, il più delle volte, si devono considerare funzioni complesse definite come rapporto di due altre funzioni olomorfe su $\mathbb{C}$ h e g. g abbia solo zeri isolati, allora definiamo la funzione olomorfa $f : \mathbb{C}\backslash Z(g) \to \mathbb{C}$ come

$$f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$$

Allora le singolarità di f sono tutte isolate e coincidono con i punti di $Z(g)$. Dato $a \in Z(g)$ sia n la sua molteplicità come zero di g; controllato se a appartiene anche a $Z(h)$, posta m la molteplicità di a come zero di h (eventualmente $n = 0$ se $a \notin Z(h)$) allora

(i) a è una singolarità eliminabile se $m \geq n$;

(ii) a è una singolarità polare se $m < n$ e l'ordine di a come polo è $n - m$.

Infatti, in un intorno di a si ha $h(z) = (z-a)^m h_1(z)$ e $g(z) = (z-a)^n g_1(z)$ con h_1 e g_1 diverse da 0 nell'intorno considerato. Allora

$$f(z) = \frac{(z-a)^m}{(z-a)^n} f_1(z) = (z-a)^{-(n-m)} f_1(z)$$

con $f_1(z)$ olomorfa e diversa da 0 nell'intorno di a considerato. Allora f_1 è analitica in tale intorno e

$$f_1(z) = c_0 + c_1(z-a) + \dots$$

e

$$f(z) = \frac{c_0}{(z-a)^{n-m}} + \frac{c_1}{(z-a)^{n-m-1}} + \dots$$

come si vede, se $n > m$ allora f ha in a un polo di ordine $n - m$. Viceversa, la singolarità è eliminabile.

Regola dell'Hôpital

Anche in variabile complessa vale la regola dell'Hôpital. Siano f e g olomorfe in un intorno

bucato di a. Se esse sono entrambe infinitesime per $z \to a$, allora il limite per $z \to a$ dek rapporto è pari al limite del rapporto delle derivate.
Infatti, se f, g sono infinitesime in $z \to a$, allora hanno in a singolarità removibili, perciò l'estensione di f e g che in $z = a$ pone entrambe le funzioni a zero è olomorfa nell'intorno di a considerato. Siccome il limite del rapporto è pari al limite del rapporto delle estensioni (località) si ha, dal teorema di analiticità

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a} \frac{f'(a)(z-a)+\dots}{g'(a)(z-a)+\dots} = \lim_{z\to a} \frac{f'(a)}{g'(a)} \frac{c_2(z-a)+\dots}{g_2(z-a)+\dots} = \lim_{z\to a} \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Un'ultima applicazione reca il ben noto

Teorema IV.17 (fondamentale dell'algebra) *Ogni polinomio complesso di grado strettamente positivo ha almeno uno zero.*

Dimostrazione Consideriamo la funzione razionale $f(z) = 1/P(z)$. Se P non avesse zeri, f non avrebbe singolarità e sarebbe una funzione intera. Inoltre, siccome $|P(z)| \to \infty$ per $|z| \to \infty$, si ha che $|f(z)| \to 0$ per $|z| \to \infty$. Dunque, grazie alla continuità di f, essa sarebbe una funzione intera e limitata, perciò, dal teorema di Liouville, costante, il che è assurdo avendo supposto $\deg P > 0$. **(c.v.d.)**

Funzioni razionali Le funzioni razionali sono date dal rapporto di due polinomi A e B. Esse sono funzioni olomorfe in $\mathbb{C}$ privato di un numero finito di punti, gli zeri del denominatore. Una funzione razionale si dice propria se $\deg A < \deg B$ di modo che, all'infinito, $|A \backslash B| \to 0$. Ogni funzione razionale può essere banalmente decomposta in somma di un polinomio e di una funzione razionale propria, come discende dal teorema di divisione dei polinomi:

$$\frac{A(z)}{B(z)} = Q(z) + \frac{R(z)}{B(z)}$$

Inoltre, le funzioni razionali proprie sono tutt e sole quelle funzioni razionali che si annullano all'infinito. Sia infatti F una funzione razionale, allora

$$F(z) = Q(z) + \frac{R(z)}{B(z)}$$

se $Q(z)$ non fosse nulla, allora avremmo $|F| \to \infty$, il che sarebbe assurdo.
Notiamo poi che ogni funzione razionale propria si scrive come

$$\frac{R(z)}{B(z)} = \sum_{j=1}^{r} \left(\frac{c_{-1}(a_j)}{z-a_j} + \dots + \frac{c_{-\nu_j}(a_j)}{(z-a_j)^{\nu_j}} \right) = \sum_{j=1}^{r} L_{a_j}(z)$$

dove $\{a_1, \dots, a_r\}$ sono i poli di R/B. Infatti, la funzione $R/B - \sum L_{a_j}$ ha parte di Laurent nulla in $\mathbb{C}$. Perciò è intera. Siccome poi ha limite nullo all'infinito, per il teorema di Liouville, è identicamente nulla:

Teorema IV.18 (decomposizione delle funzioni razionali) *Sia $F(z)$ una funzione razionale. Essa si può allora scrivere (in modo unico) come*

$$F(z) = Q(z) + \sum_{j=1}^{r} \left(\frac{c_{-1}(a_j)}{z-a_j} + \dots + \frac{c_{-\nu_j}(a_j)}{(z-a_j)^{\nu_j}} \right) = Q(z) + \sum_{j=1}^{r} L_{a_j}(z)$$

dove Q è un polinomio (nullo se F è propria) e $\{a_1, \dots, a_r\}$ sono i poli di F (che mancano se F è un polinomio).

IV.3.5 Residui

Per il calcolo degli integrali risulta importante il coefficiente c_{-1} dello sviluppo di Taylor-Laurent di una funzione olomorfa attorno a una singolarità isolata. Tale quantità si dice **residuo** di f in a, e si scrive

$$R_f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a,r)} f(\zeta)\, d\zeta$$

dove $B(a,r)$ è una palla tutta contenuta in D.
In questa sottosezione ci occuperemo di come effettuare il calcolo dei residui (senza eseguire l'integrale, ovviamente).
Cominciamo dai residui del primo ordine

Proposizione IV.10 *Se a è un polo del primo ordine per f si ha*

$$R_f(a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$$

Se poi $f = h/g$ con $g(a) = 0$, $h(a) \neq 0$ e $g'(a) \neq 0$, allora a è polo del primo ordine e

$$R_f(a) = \frac{h(a)}{g'(a)}.$$

Dimostrazione Si ha $f(z) = T_a(z) + c_{-1}/(z-a)$ con T_a olomorfa in un intorno di a. Allora

$$(z-a)f(z) = (z-a)T_a(z) + c_{-1},$$

passando al limite per $z \to a$, la tesi, essendo $T_a(z)$ continua in a.
Per quanto riguarda la seconda asserzione

$$\lim_{z\to a}(z-a)\frac{h(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a}\frac{h(z)}{g(z)/(z-a)} = \frac{h(a)}{g'(a)}.$$

(c.v.d.)

Per un polo di ordine n è utile notare che in un intorno di a si ha

$$f(z) = T_a(z) + \frac{c_{-1}}{z-a} + \ldots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$$

Ne viene che

$$(z-a)^n f(z) = (z-a)^n T_a(z) + (z-a)^{n-1}c_{-1} + \ldots + c_{-n}$$

Pensiamo ora di derivare successivamente ambo i membri e di passare al limite per $z \to a$. Per isolare il coefficiente c_{-1} bisogna derivare $n-1$ volte. Ora, per ogni $m \leq n-1$

$$\lim_{z\to a}\frac{d^m}{dz^m}(z-a)^n T_a(z) = 0$$

sicché

$$(n-1)!c_{-1} = \lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-a)^n f(z)\right]$$

cioè

$$c_{-1} = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-a)^n f(z)\right]$$

Se $n = 1$, ritroviamo la proposizione precedente.
Il calcolo dei residui ha una notevole importanza a causa del seguente

Teorema IV.19 (dei residui) *Sia D un aperto di $\mathbb{C}$, sia N un sottoinsieme discreto di D e sia $f : D\backslash N \to \mathbb{C}$ olomorfa. Sia γ un circuito in $D\backslash N$ nullomotopo in D. Si ha allora*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{a\in N} R_f(a)\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$$

Dimostrazione Essendo per ipotesi γ null'omotopo in D, esiste un'omotopia $h : [a,b]\times[0,1] \to D$ di γ con una costante. L'immagine K di h è un compatto di D, che ha quindi un intorno con chiusisura compatta, $U^a \subset D$ (basta prendere l'insieme dei complessi che distano al più $\rho/2$ da K, dove ρ è la distanza di K da D^c). Ora, entro U cade al più un insieme finito di punti. Altrimenti, se $N \cap U$ fosse infinito, per il teorema di Bolzano, ci sarebbe almeno un punto di accumulazione di N nel compatto $U^a \subset D$, contro l'ipotesi che N sia discreto. Adesso U contiene γ, $f : U\backslash(N\cap U) \to \mathbb{C}$ è olomorfa e i punti singolari sono nel nuovo dominio sono finiti.

Ridenominiamo D l'insieme U e N, $N \cap U$, con la nuova ipotesi che N sia finito, $N = \{a_1, \ldots, a_r\}$. Per ogni $a \in N$ sia L_a la parte di Laurent di f in a. L_a è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ (essendo olomorfa in una palla bucata centrata in a, si estende per olomorfia a $\mathbb{C} \setminus \{a\}$). La funzione $f - \sum_1^r L_{a_i}$ ha solo singolarità eliminabili in D e perciò si estende a una funzione olomorfa in D. Il suo integrale sul circuito γ nullomotopo in D è dunque nullo. Perciò

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{i=1}^r \int_\gamma L_{a_i}(z)\, dz$$

Calcoliamo ciascun addendo a secondo membro

$$\int_\gamma L_{a_i}(z)\, dz = \int_\gamma \frac{R_f(a_i)}{z - a_i}\, dz + \sum_{n=2}^\infty \int_\gamma \frac{c_{-n}(a_i)}{(z - a_i)^n}\, dz$$

poiché si ha convergenza totale della serie in ogni $\mathbb{C} \setminus B(a_i, \delta)$, per ogni $\delta > 0$ e dato che il sostegno di γ è compatto e non passa per alcun a_i. Ora, gli integrali entro la serie sono tutti nulli perché gli integrandi ammettono tutti una primitiva, sicché

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{i=1}^r R_f(a_i) \int_\gamma \frac{1}{z - a_i}\, dz$$

(c.v.d.)

Osservazione IV.2 La quantità

$$\operatorname{avv}_\gamma(a) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - a}\, dz$$

si dice **indice di avvolagimento** di γ attorno ad a. Sia a è interno a γ, allora applicando il primo teorema di Cauchy alla funzione identica, si ha

$$1(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - a}\, dz$$

perciò

$$\operatorname{avv}_\gamma(a) = 1$$

Se invece adesso a è esterno a γ, allora abbiamo l'integrale si riduce alla circuitazione di una funzione olomorfa entro il circuito d'integrazione, perciò l'integrale è nullo.
Nel teorema dei residui tutti i punti a_i sono interni a γ, perciò in essi l'indice di avvolgimento vale 1 e, in definitiva,

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{i=1}^r R_f(a_i)$$

Quello che per tutta la trattazione abbiamo accettato è che un circuito semplice è omotopo a una qualsiasi circonferenza contenuta in esso (in particolare è nullomotopo): effettivamente non lo dimostreremo (come detto nell'introduzione non ci servirà: useremo infatti circuiti fatti da archi di circonferenza e segmenti, per i quali la cosa sarebbe facilmente dimostrabile). ▪

IV.3.6 Punto all'infinito

Definizione del punto all'infinito In qualche occasione abbiamo considerato il comportamento all'infinito delle funzioni complesse aventi dominio illimitato. Risulta molto utile assumere la convenzione che il piano complesso sia dotato di un solo punto all'infinito. Una rappresentazione intuitiva di questa convenzione è la seguente: immaginiamo di considerare una sfera tangente al piano complesso nell'origine O del piano stesso. Sia O′ il punto della sfera diametralmente opposto a O. Proiettiamo dal punto O′ ogni punto della superficie della sfera sul piano complesso. Mediante una tale proiezione (stereografica) a ogni punto P′ della sfera (distinto da O′) andiamo ad associare un punto al finito del piano complesso. Al punto O′ corrisponde invece, **per definizione**, il punto all'infinito del piano complesso di cui sopra. In tal modo si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i punti della sfera (detta **sfera complessa**) e i punti del piano complesso, compreso il punto all'infinito. Consideriamo ora una linea chiusa nel piano

complesso, i punti che stanno all'esterno della linea sono, sulla sfera, un intorno di O′, cioè costituiscono un intorno dell'infinito complesso.
Inoltre, la trasformazione

$$z' \equiv \frac{1}{z}$$

associa al punto O il punto O′, cioè è una corrispondenza biunovoca del piano complesso (unito all'infinito) in sé che manda l'origine nell'infinito e l'infinito nell'origine. In particolare, trasforma un intorno dell'origine in un intorno dell'infinito e viceversa.
Allora se una funzione $f(z)$ è definita in un dominio illimitato si definisce il suo comportamento all'infinito, come il comportamento della funzione

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

nel punto $z = 0$. Per definizione, si assume che il comportamento della funzione f all'infinito è il comportamento della funzione g nell'origine.

Esempio IV.12 La funzione $f(z) = 1/\left(1+z^2\right)$ è olomorfa nel piano complesso esclusi i punti $\pm i$ in cui presenta poli del primo ordine. Occupiamoci del comportamento all'infinito. Definiamo

$$g(z) = \frac{1}{1+1/z^2} = \frac{z^2}{z^2+1}$$

essa è olomorfa nell'origine. Ne viene che f è olomorfa all'infinito e presenta uno zero di ordine due all'infinito. ▪

Esempio IV.13 La funzione $f(z) = e^z$ presenta all'infinito una singolarità essenziale essendo

$$g(z) = e^{1/z}$$

che ha, in 0, sviluppo di Laurent a infiniti coefficienti. ▪

Se è possibile eseguire lo sviluppo di Taylor-Laurent nell'origine di $g(z)$, cioè

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c'_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c'_{-n}}{z^n}$$

allora si ha il seguente sviluppo all'infinito per f:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c'_n}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} c'_{-n} z^n$$

Teorema di Liouville Notiamo adesso che una funzione olomorfa in $\mathbb{C}$ unito all'infinito è costante. Infatti, f è intera, limitata al finito e all'infinito (g è limitata in un intorno dell'origine, f è limitata in un intorno dell'infinito), dal teorema di Liouville si conclude la costanza di f. Un altro modo per ridimostrare il teorema di Liouville in queste particolari ipotesi (olomorfia anche all'infinito) è il seguente.
Su ogni $B(0,r)$ si ha

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

inoltre, su ogni $\mathbb{C} \backslash B(0,r)$

$$f(z) = b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \ldots$$

In definitiva, per ogni punto al finito

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots = b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \ldots$$

da cui $a_i = b_i = 0$ per ogni $i \neq 0$, cioè $f(z) = a_0$.

Residuo all'infinito Data una funzione f olomorfa su un aperto illimitato, esista un circuito Γ tale che al suo esterno si trovino solo punti di olomorfia (si noti che l'ipotesi è tutt'altro che banale, si consideri come controesempio la funzione $\sin(1/z)$). Si definisce allora il **residuo di f all'infinito**

$$R_f(\infty) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\gamma} f(z)\, dz$$

dove γ è una qualsiasi curva esterna a Γ e dove il segno meno indica che la percorrenza della γ deve avvenire in senso orario. Dall'ipotesi posta, si ha che l'esterno di Γ individua un intorno dell'infinito e in tale intorno l'unica singolarità che eventualemnte esiste si ha proprio all'infinito (il che assicura che la definizione di residuo non dipende dalla particolare scelta di γ se questa è esterna a Γ).

Ora, sia $g(z) = f(1/z)$, allora se con a'_n indichiamo i coefficienti di Taylor-Laurent dello sviluppo di g

$$a'_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'} \frac{g(z')}{z'^{n+1}}dz' = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\gamma} \frac{f(z)}{z^{-n-1}}\frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\gamma} \frac{f(z)}{z^{-n+1}}\, dz$$

dove si è effetuato il cambio di coordinate $z = 1/z'$ (lecito cambiando parametrizzazione e curva). Ne viene che

$$R_f(\infty) = -a'_1$$

Evidentemente vale anche un teorema dei residui esterni, infatti

$$\int_\gamma f(z)\, dz = -2\pi i R_f(\infty) = 2\pi i a'_1$$

se all'esterno della curva γ non vi sono singolarità al finito. Se il circuito α interno a γ ha al suo esterno qualche singolarità al finito, allora

$$\begin{aligned}
\int_\alpha f(z)\, dz &= \text{somma dei residui entro } \alpha \\
\int_\gamma f(z)\, dz &= \text{somma dei residui entro } \gamma = \text{somma dei residui entro } \alpha + \text{somma dei residui esterni a } \alpha \\
&= \int_\alpha f(z)\, dz + \text{somma dei residui al finito esterni a } \alpha \\
\int_\gamma f(z)\, dz &= -2\pi i R_f(\infty)
\end{aligned}$$

da cui

$$\int_\alpha f(z)\, dz = -2\pi i \sum_{a\in\mathbb{C},\ \text{esterno } \alpha} R_f(a) - 2\pi i R_f(\infty)$$

IV.3.7 Calcolo degli integrali con il metodo dei residui

Utilizzeremo i risultati dell'analisi complessa per calcolare particolari tipi di integrali definiti o generalizzati.

Primo tipo Si debba calcolare

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta$$

dove R è una funzione razionale di due variabili **definita** sulla circonferenza unitaria $\mathbb{S}^1$. Posto $z = e^{i\theta}$ si ha

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{z + 1/z}{2} \\
\sin\theta &= \frac{z - 1/z}{2i}
\end{aligned}$$

Ora, come abbiamo già visto $dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta$, perciò, andando a integrale sul circolo unitario γ

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta = \int_\gamma R\left(\frac{z+1/z}{2}, \frac{z-1/z}{2i}\right)\frac{dz}{iz}$$

Siccome l'integranda non ha poli sul circuito d'integrazione si ha che l'integrale è pari alla somma dei residui nei poli della funzione aventi modulo minore stretto di 1, moltiplicata per $2\pi i$.

Secondo tipo Il metodo è utile per il calcolo degli integrali su tutto $\mathbb{R}$ delle funzioni razionali. Si abbia una funzione olomorfa in un aperto contenente tutto il semipiano $\operatorname{Im} z \geq 0$ eccetto che per un numero finito di singolarità nell'aperto $\operatorname{Im} z > 0$. In particolare f deve essere continua sulla retta reale.

Se

$$\lim_{z\to\infty, \operatorname{Im} z>0} zf(z) = 0$$

allora si ha

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a>0} R_f(a)$$

Infatti, si integra sul bordo del semidisco S_r centrato nell'origine, di raggio r e posto nel semipiano $\operatorname{Im} z \geq 0$. Tale semidisco ha frontiera composta dalla semicirconferenza σ_r e dal segmento reale $[-r, r]$: da un certo r in poi

$$2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a>0} R_f(a) = \int_{-r}^{r} f(x)\, dx + \int_{\sigma_r} f(z)\, dz$$

Per il lemma del cerchio grande il secondo addendo tende a 0 e si ha la tesi passando al limite per $r \to \infty$.

Naturalmente nel caso in cui in tutte le ipotesi si usi il semipiano inferiore, basta moltiplicare la somma dei residui per $-2\pi i$.

Terzo tipo Come prima, si abbia una funzione olomorfa in un aperto contenente tutto il semipiano $\operatorname{Im} z \geq 0$ eccetto che per un numero finito di singolarità nell'aperto $\operatorname{Im} z > 0$. In particolare f deve essere continua sulla retta reale.

Se

$$\lim_{z\to\infty, \operatorname{Im} z>0} f(z) = 0$$

allora si ha

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} e^{i\alpha x} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a>0} R_{e^{i\alpha \cdot} f}(a)$$

La dimostrazione è analoga a quella precedente, ma il pezzo

$$\int_{\sigma_r} e^{i\alpha z} f(z)\, dz$$

tende a 0 grazie al lemma di Jordan, se $\alpha > 0$. Infatti, si deve avere, per z con $\operatorname{Im} z \geq 0$, $\cos(\theta + \varphi) \leq 0$, che si ha se φ è pari a $\pi/2$ (cioè se $\alpha > 0$).

Se $\alpha < 0$ conviene chiudere nel smipiano inferiore, ma allora si devono riformulare convenientemente le ipotesi (e aggiungere un segno meno nella formula di sopra).

Quarto tipo Sia R una funzione razionale priva di poli sul semiasse reale positivo. L'integrale

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} R(t)\, dt$$

si riconduce a un integrale sull'asse reale tramite la sostituzione $t = e^x$,

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} R(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha x} R(e^x)\, dx$$

Adesso si usa la periodicità della funzione e^z nel piano complesso. Si considera, per $r > 0$, il rettangolo di vertici, $-r, r, r + 2\pi i, -r + 2\pi i$. Se R non aveva singolarità su $\mathbb{R}^+$, la funzione $f(z) = e^{\alpha z} R(e^{\alpha z})$ non avrà singolarità su $\mathbb{R}$ né su $\mathbb{R} + 2m\pi i$. Integriamo allora f sul bordo del rettangolo. La funzione f ha singolarità sui logaritmi dei poli di R, su ogni striscia di ampiezza 2π, vi sono allora un numero finito di singolarità. Ne viene che da un certo r in poi la somma dei residui diviene costante e si ha

$$\int_\gamma f(z)\ dz = \int_{-r}^{r} f(x)\ dx - \int_{-r}^{r} f(x+2\pi i)\ dx + \int_{s_r} f(z)\ dz - \int_{s_{-r}} f(z)\ dz = 2\pi \sum_{0<\operatorname{Im} a<2\pi} R_f(a)$$

I contributi verticali spesso sono nulli (al limite $r \to \infty$) mentre il confronto dei contributi orizzontali consente di concludere.

Valori principali Finora abbiamo richiesto l'assenza di poli sull'asse reale. Vediamo come si procede quando si ha che fare con dei poli. Consideriamo un esempio concreto. Si voglia calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi x)}{x^2} dx$$

L'integrale è assolutamente convergente (per $x \to 0$ la funzione ammette limite, all'infinito è L^1). Tuttavia, non è possibile eseguire l'integrale con il metodo dei semicerchi, perché il $\sin^2(\pi z)$ scoppia sull'asse immaginario. Si deve allora scrivere

$$\sin^2(\pi x) = \frac{1-\cos(2\pi x)}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(1-e^{2\pi i x}\right)$$

dunque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi x)}{x^2} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re}\left(\frac{1-e^{2\pi i x}}{x^2}\right)$$

Purtroppo integrale e parte reale non commutano, dato che la funzione $1 - e^{-2\pi i z}/z^2$ ha, nell'origine, un polo di ordine 1.

Si deve allora introdurre la nozione di **valore principale**. Sia $I = [a, b]$ un intervallo compatto della retta reale; se c è interno a I ed è l'unica singolarità di f si scrive

$$P_c \int_I f(x)\ dx \equiv \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{I\setminus[c-\varepsilon, c+\varepsilon]} f(x)\ dx$$

se tale limite esiste (ed esiste senz'altro se f è integrabile in senso generalizzato in I).

La parte principale, grazie a linearità di limiti e integrali è lineare. Dunque, la parte principale coincide con la somma di parte principale della parte reale più i volte la parte principale della parte immaginaria:

$$P\int f(x)\, dx = P\int (\operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f)\, dx = P\int \operatorname{Re} f\, dx + iP\int \operatorname{Im} f\, dx$$

e, in particolare

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} P\int f(x)\, dx &= P\int \operatorname{Re} f\, dx \\ \operatorname{Im} P\int f(x)\, dx &= P\int \operatorname{Im} f\, dx\end{aligned}$$

Tornando all'esempio, abbiamo

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re}\left(\frac{1-e^{2\pi i x}}{x^2}\right) dx = \frac{1}{2}P_0\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re}\left(\frac{1-e^{2\pi i x}}{x^2}\right) dx = \frac{1}{2}\operatorname{Re} P_0\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1-e^{2\pi i x}}{x^2}\right) dx$$

Abbiamo

$$\int_{-r}^{-s} \frac{1-e^{2\pi i x}}{x^2}\, dx + \int_{r}^{s} \frac{1-e^{2\pi i x}}{x^2}\, dx + \int_{\gamma_r} \frac{1-e^{2\pi i z}}{z^2}\, dz - \int_{\gamma_s} \frac{1-e^{2\pi i z}}{z^2}\, dz = 0$$

Vediamo che accade in γ_r: il primo pezzo è $1/z^2$ che moltiplicato per z va a zero all'infinito: lemma di cerchio grande implica contributo nullo; il secondo pezzo si annulla banalmente grande al lemma di Jordan. Integrale in γ_s: si ha

$$\lim_{z\to 0} z\frac{1-e^{2\pi i z}}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{-2\pi i z^2 + O\left(z^3\right)}{z^2} = -2\pi i$$

perciò il lemma di cerchio piccolo reca

$$\int_{\gamma_s} \frac{1-e^{2\pi i z}}{z^2}\, dz = -2\pi i\,(i\pi) = 2\pi^2$$

Passando al limite per $r \to \infty$ e $s \to 0$ si ha

$$\begin{aligned} P_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{2\pi i x}}{x^2} dx &= 2\pi^2 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi x)}{x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re}\left(\frac{1 - e^{2\pi i x}}{x^2}\right) dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} P_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{2\pi i x}}{x^2} dx = \pi^2. \end{aligned}$$

IV.3.8 Tagli e punti di diramazione

In questa sottosezione ci occuperemo brevemente di un ultimo aspetto interessante delle funzioni olomorfe. Finora non abbiamo considerato mai diffusamente singolarità non isolate. Ebbene, lo facciamo adesso.

Definizione del logaritmo complesso: problematiche

Cominciamo con l'introdurre un problema molto importante. Si voglia definire il logaritmo. Come sappiamo il logaritmo fornisce in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ infiniti valori per ogni z che si vada a valutare, per esempio, se scriviamo

$$z = \rho e^{i\theta}$$

possiamo scrivere

$$\log z \equiv \log \rho + i\theta + 2im\pi, \; m \in \mathbb{Z}$$

infatti,

$$\exp(\log z) = \rho e^{i\theta} e^{2im\pi} = \rho e^{i\theta}, \; \forall m \in \mathbb{Z}$$

D'altra parte, una applicazione a infiniti valori non è una funzione, perciò si tenta di ridurre il log a una applicazione a un valore. Si può procedere fissando $\theta \in [0, 2\pi]$ nella rappresentazione esponenziale dei numeri complessi. Si ha allora

$$\log z \equiv \log \rho + i\theta$$

Questa funzione ha però un grave difetto. Prendiamo i punti $z_+ = e^{i\varepsilon}$ e $z_- = e^{i(2\pi - \varepsilon)}$, abbiamo

$$|z_+ - z_-| \le 2\varepsilon$$

D'altra parte,

$$|\log z_+ - \log z_-| = 2(\pi - \varepsilon)$$

perciò, quando z_+ e z_- si avvicinano i loro logaritmi vanno a distare per 2π, cioè

$$\left| \lim_{z \to 0, \operatorname{Im} z > 0} \log z - \lim_{z \to 0, \operatorname{Im} z > 0} \log z \right| = 2\pi$$

e la funzione logaritmo non è continua.

Intrinsecità della discontinuità

La funzione che abbiamo costruito è discontinua su tutto il semiasse reale positivo, si dice allora che essa ha un taglio su tale semiasse. Il significato del taglio è molto più profondo di quanto non si sia messo in luce qui. Tanto per cominciare, si potrebbe pensare che la discontinuità segua dal fatto che si è operato **quella** determinata determinazione dell'argomento (abbiamo fissato θ tra 0 e 2π): questo non è vero.

Prendiamo un punto z_0 qualsiasi sul circolo di raggio ρ e aumentiamo gradualmente l'argomento θ (quale che sia la sua determinazione): il logaritmo aumenta, cioè il punto $w = \log z$ si sposta sempre più in alto nel piano complesso w; se la funzione fosse continua dopo un giro w dovrebbe tornare in $w_0 = \log z_0$, invece si è spostata di $2\pi i$.

Tuttavia, si nota che se avessimo fatto un circolo attorno a un qualsiasi altro punto diverso dallo zero, questo non sarebbe accaduto: in effetti, l'argomento θ, dopo un giro torna in sé: per esempio, per un tratto aumenta (fino alla tangente) poi diminuisce (fino all'altra tangente), poi aumenta di nuovo fino a tornare al valore di partenza: così il logaritmo.

Punti di diramazione e tagli

Si sintetizza la particolarità dello zero dicendo che esso è un **punto di diramazione**. Precisamente, si chiama **punto di diramazione**, un punto z_0 per il quale esistano curve chiuse γ che godano della seguente proprietà: considerato un punto z_1 sul sostegno di γ e il corrispondente valore $f(z_1)$, facendo muovere la variabile z lungo γ, il valore della funzione

non torna ad essere $f(z_1)$ quando il punto z torna a coincidere con z_1 dopo aver percorso un giro sul sostegno di γ.
Torniamo al logaritmo: ogni curva chiusa che abbraccia lo zero, grande quanto si voglia, è tale da produrre una discontinuità della funzione: dunque, questo accade anche per ogni curva chiusa che abbraccia l'infinito (è la stessa cosa). Se ne deriva che gli unici punti di diramazione della funzione logaritmo sono l'origine e l'infinito. Notiamo che quando prima abbiamo stabilito il **taglio** lo abbiamo proprio tracciato tra 0 e ∞: non è un fatto casuale.
Si chiama, infatti, **taglio** una qualsiasi linea del piano che congiunga i punti di diramazione della funzione. Il taglio impedisce ai circuiti di chiudere un singolo punto di diramazione: su di esso si manifesta la discontinuità della funzione, perciò scegliere il taglio equivale a decidere una determinazione per la funzione stessa.

Definizione rigorosa di logaritmo

Prima abbiamo affermato che l'esistenza di un taglio nel logaritmo è un fatto intrinseco, che non ha a che vedere che la parametrizzazione del piano complesso. In quanto segue, cerchiamo di chiarire questo punto.
Cominciamo con la seguente

Definizione IV.10 *Se $f : D \to \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa, un suo logaritmo su D è una funzione $\varphi : D \to \mathbb{C}$ tale che*

$$\exp\varphi(z) = f(z)$$

per ogni $z \in D$.

Il logaritmo di cui sopra è il logaritmo della funzione z. In generale, $\exp\varphi(z) \neq 0$, perciò condizione necessaria perché f ammetta un logaritmo è che $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in D$. Il logaritmo comunemente inteso va allora definito come logaritmo della funzione z olomorfa su $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Vediamo allora la seguente

Proposizione IV.11 *Sia D un aperto connesso e sia $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfa; la funzione $\varphi : D \to \mathbb{C}$ è un logaritmo di f in D se e solo se $\varphi'(z) = f'(z)/f(z)$ per ogni z in D, e inoltre, esiste in D almeno un punto a tale che $\exp\varphi(a) = f(a)$. Se poi φ e ψ sono logaritmi di f, allora esiste un intero k tale che sia*

$$\psi(z) = \varphi(z) + 2\pi k i$$

per ogni $z \in D$.

Dimostrazione Dall'identità $\exp(\varphi(z)) = f(z)$ si ottiene, derivando

$$\varphi'(z)\exp(\varphi(z)) = f(z)$$

cioè

$$\varphi'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

perché ammettendo logaritmo f è sempre diversa da 0. Viceversa, sia $\varphi' = f'/f$. Deriviamo la $\exp(-\varphi(z))f(z)$, otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}(\exp(-\varphi(z))f(z)) &= \exp(-\varphi(z))(f'(z) - \varphi'(z)f(z)) = \\ &= \exp(-\varphi(z))f(z)\left(\frac{f'(z)}{f(z)} - \varphi'(z)\right)\end{aligned}$$

da cui

$$\frac{d}{dz}(\exp(-\varphi(z))f(z)) = 0$$

Ne viene, grazie alla connessione, che $\exp(-\varphi(z))f(z) = \exp(-\varphi(a))f(a) = 1$ sicché

$$f(z) = \exp(\varphi(z)).$$

Vediamo, infine, l'ultima affermazione

$$\exp(\varphi(z)) = \exp(\psi(z)), \forall z \in D$$

allora

$$\exp(\varphi(z) - \psi(z)) = 1, \forall z \in D$$

se e solo se

$$\varphi(z) - \psi(z) \in 2\pi i\mathbb{Z}$$

ma, siccome l'immagine di $\varphi - \psi$ è un connesso e $2\pi i\mathbb{Z}$ è discreto, si ha che

$$\varphi(z) - \psi(z) = 2\pi ik$$

(c.v.d.) per qualche $k \in \mathbb{Z}$: la tesi.

Origine di diramazione e taglio per il logaritmo Nel costruire la funzione logaritmo comunemente intesa, dobbiamo allora cercare una primitiva di $1/z$. Sappiamo bene che essa non esiste in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, tuttavia tentiamo di costruirla. La funzione che andiamo a costruire sia $F(z)$. Se essa è una primitiva di $1/z$ allora

$$F(z) = \int_{\alpha_z} \frac{1}{\zeta} d\zeta$$

dove α_z è una linea qualsiasi in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ che partendo da una origine prefissata, diciamo pure 1, va in z. Ora, grazie alla olomorfia in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ di $1/z$, se consideriamo due linee α_{1z} e α_{2z} abbiamo che esse recano alla stessa $F(z)$ se, unite, non racchiudono lo 0. Infatti, il circuito α dato dalla giustapposizione delle due linee racchiude solo punti di olomorfia, dunque ha circuitazione nulla (è nullomotopo in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$), perciò

$$\int_{\alpha_{1z}} \frac{1}{z} dz - \int_{\alpha_{2z}} \frac{1}{z} dz = 0$$

La funzione F sembra è allora ben posta (è una funzione a un valore), ma si noti che per ottenerlo abbiamo dovuto restringere la classe delle linee α_z. In ogni caso, F non è una primitiva in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ della funzione $1/z$, ma lo diventa se cambiamo il dominio in modo da realizzare effettivamente la restrizione detta sulla classe delle linee che vanno da 1 a z. Siccome dobbiamo impedire che un circuito passante per 1 (come per un qualsiasi altro punto, a meno di traslazioni nella definizione della F) abbracci l'origine, togliamo a $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ una qualsiasi linea che parta dall'origine. Otteniamo un aperto D connesso, ma tale che non esista un circuito di D che abbracci l'origine. Quella linea che va a definire il dominio D è proprio il **taglio** di cui abbiamo euristicamente parlato prima. $z = 0$ è un **punto di diramazione**, perché è una singolarità di $1/z$.

Si noti come, **qualsiasi** sia la linea che definisce il taglio, su di essa si registra la solita discontinuità $2\pi i$: infatti, sia z_1 appartenente al taglio: la funzione poco a destra del taglio e poco a sinistra del taglio si ottengono tramite linee che al limite danno un circuito che abbraccia lo 0, cioè

$$F(z_1^+) - F(z_1^-) = \int_{\alpha_{z_1^+}} \frac{1}{z} dz - \int_{\alpha_{z_1^-}} \frac{1}{z} dz = \oint \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

Tornando al problema della definizione del logaritmo di una funzione qualsiasi, l'esistenza delle primitive di f'/f è equivalente al fatto che su ogni circuito chiuso l'integrale di f'/f sia nullo, cosa che accade se ogni circuito chiuso è nullomotopo in D, si ha perciò che

Corollario IV.4 *Ogni funzione non nulla f olomorfa su un aperto semplicemente connesso ammette logaritmi.*

Potenze Definito il logaritmo si passa poi a definire le potenze: se f ammette logaritmi, allora, scelto un logaritmo di f e denotatolo con $\log f(z)$ si ha

$$f^\alpha(z) = \exp(\alpha \log f(z))$$

Siccome gli altri logaritmi hanno determinazioni che differiscono da quello scelto per $2\pi ik$, la funzione potenza è indeterminata per $e^{2\pi ik\alpha}$. In particolare, se $\alpha \in \mathbb{N}$ non vi è indeterminazione (l'indeterminazione è 1, qualsiasi logaritmo si prenda). Invece, esiste indeterminazione per $\alpha = 1/n$ con $n \in \mathbb{N}$: per esempio, se $n = 2$ si ha una indeterminazione pari a $e^{\pi ik} = (-1)^k$, cioè si hanno due interminazioni. Una volta scelto un taglio per il logaritmo, quel taglio viene ereditato dalla funzione potenza: tuttavia può accaddere che la discontinuità al taglio, per quanto visto, sia nulla, di modo che la singolarità sul taglio sia removibile.

IV.4 Funzioni olomorfe e potenziali in due dimensioni

IV.4.1 Applicazioni conformi

Applicazioni conformi del piano Un applicazione conforme del piano è una trasformazione lineare non singolare del piano che conserva gli angoli. Un'applicazione conforme è, allora, una similitudine, infatti un triangolo è mappato in un altro triangolo con eguali angoli al vertice.
Inoltre, se T è un'applicazione conforme, allora ha determinante non nullo, perciò $T' = T/\sqrt{|\det T|}$ è conforme. Ma T' ha determinante di modulo 1, perciò conserva le aree. In particolare, dovendo conservare gli angoli, considerando un qualunque triangolo, si ottiene che T' conserva anche le lunghezze. Perciò T' è un'isometria: $T' \in O\left(\mathbb{R}^2\right)$. Ne viene che *ogni applicazione lineare conforme è multipla di una trasformazione ortogonale*.
Questo fatto, che abbiamo dimostrato utilizzando nozioni elementari di geoemtria sintetica piana, si dimostra facilmente in un ambito un po' più generale

Proposizione IV.12 *Sia V uno spazio euclideo, $T \in GL(V)$ un'applicazione lineare invertibile. Sono fatti equivalenti,*

(i) *T è conforme, cioè, per ogni $u, v \in V \setminus \{0\}$*
$$\frac{(Tu, Tv)}{|Tu|\,|Tv|} = \frac{(u, v)}{|u|\,|v|};$$

(ii) *T conserva l'ortogonalità dei vettori;*

(iii) *T è una similitudine: esistono $\lambda > 0$ e $A \in O(V)$ tali che $T = \lambda A$.*

Dimostrazione Le implicazioni (i) $\Rightarrow$ (ii) e (iii) $\Rightarrow$ (i) sono ovvie. Resta allora da vedere che (ii) $\Rightarrow$ (iii). Basta mostrare che esiste $\lambda > 0$ per cui, per ogni versore $u \in V$, $|u| = 1$, si ha
$$|Tu| = \lambda$$
al che avremo che $A = T/\lambda$ trasforma basi ortonormali in basi ortonormali, perciò $A \in O(V)$.
Siano u e v due versori: la nostra tesi è $|Tu| = |Tv|$. Ora, $u+v$ e $u-v$ sono ortogonali, infatti
$$(u+v, u-v) = (u,u) - (u,v) + (u,v) - (v,v) = 1 - 1 = 0.$$
Dunque,
$$(T(u+v), T(u-v)) = 0$$
cioè
$$(Tu, Tu) - (Tu, Tv) + (Tu, Tv) - (Tv, Tv) = 0 \Leftrightarrow (Tu, Tu) = (Tv, Tv)$$

(c.v.d.) la tesi.

Funzioni olomorfe come applicazioni conformi Nell'ambito dell'analisi complessa, chiamiamo **conforme** un'applicazione $f : D \to \mathbb{C}$, con D aperto di $\mathbb{C}$, che sia $\mathbb{R}$-differenziabile, con differenziale mai nullo, che trasformi curve $\mathcal{C}^1$ che incontrandosi formano un dato angolo, in curve $\mathcal{C}^1$ che formano lo stesso angolo.
Ora, date α, β due curve $\mathcal{C}^1$ da $I \to D$ che si incontrano in $w_0 = \alpha(t_0) = \beta(t_0)$, i rispettivi vettori tangenti in $f(w_0)$ delle curve trasformate sono dati da $f'(w_0)\,\dot\alpha(t_0)$ e da $f'(w_0)\,\dot\beta(t_0)$. Entrambi, sono dati dai vettore tangenti di partenza, $\dot\alpha(t_0)$ e $\dot\beta(t_0)$, moltiplicati per il numero complesso $f'(w_0)$. Ne viene che i vettori tangenti alle curve trasformate si ottengono dai vettori $\dot\alpha(t_0)$ e $\dot\beta(t_0)$ tramite una roto-omotetia, il che garantisce la conservazione degli angoli.

Proposizione IV.13 *Una funzione olomorfa in D con derivata mai nulla è ivi conforme.*

Applicazioni conformi come funzioni olomorfe Sia f un'applicazione $\mathcal{C}^1$ in senso reale conforme su un dominio connesso D. Allora essa ha jacobiano sempre positivo o sempre negativo. La matrice jacobiana di f (riguardata come funzione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$) è data da

$$J_f = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix},$$

ma siccome f è conforme, J_f è conforme sul piano (essendo anche $\det J_f \neq 0$), dunque, per quanto detto in apertura,

$$\frac{1}{\sqrt{|\det J_f|}} J_f^t = \sqrt{|\det J_f|} J_f^{-1}$$

da cui

$$\begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_x v \\ \partial_y u & \partial_y v \end{pmatrix} = \frac{|\det J_f|}{\det J_f} \begin{pmatrix} \partial_y v & -\partial_y u \\ -\partial_x v & \partial_x u \end{pmatrix}$$

perciò, se $\det J_f > 0$, allora valgono le identità di Cauchy-Riemann e f è olomorfa. Altrimenti, $\bar{f}$ è olomorfa.

Proposizione IV.14 *Sia D un aperto connesso di $\mathbb{C}$ e sia $f : D \to \mathbb{C}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ in senso reale, conforme, con determinante jacobiano mai nullo. Se lo jacobiano è positivo, allora f è olomorfa, altrimenti f è antiolomorfa (cioè $\bar{f}$ è olomorfa).*

IV.4.2 Inversa di una funzione olomorfa

Sia f una funzione olomorfa sull'aperto $D \subset \mathbb{C}$, allora lo jacobiano di f vale

$$\det J_f = (\partial_x u)(\partial_y v) - (\partial_x v)(\partial_y u) = (\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2 = |f'|^2$$

dunque, f ha derivata nulla se e solo se ha jacobiano nullo. Ne viene che se $f'(z_0) \neq 0$, allora la mappa $(x, y) \mapsto (u, v)$ è invertibile per il teorema dell'invertibilità locale. Cioè, esiste un intorno di z_0 in cui la funzione f è invertibile. Se chiamiamo g l'inversa di f nell'intorno detto, abbiamo che essa ha jacobiano

$$\frac{1}{|f'(z)|^2} \begin{pmatrix} \partial_y v & -\partial_y u \\ -\partial_x v & \partial_x u \end{pmatrix}\Bigg|_{z=x+iy}$$

perciò, se $w = f(z)$

$$g'(w) = \frac{\partial_y v - i\partial_y u}{|f'(g(w))|^2} = \frac{\partial_x u - i\partial_y u}{|f'(g(w))|^2} = \frac{f'^*(g(w))}{|f'(g(w))|^2} = \frac{1}{f'(g(w))}.$$

Infine,

Teorema IV.20 (di invertibilit dià) *omorfa sull'aperto D e $f'(z_0) \neq 0$ allora esiste una palla $B(z_0, \delta)$ nel quale è ben definita g inversa di f. g è olomorfa e vale*

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}, \ \forall w \in f(B(z_0, \delta)).$$

Una volta garantità l'invertibilità globale della funzione, l'olomorfia dell'inversa discende dal teorema precedente:

Teorema IV.21 *Sia f una funzione olomorfa ed iniettiva sull'aperto D. Se $f'(z) \neq 0$ per ogni $z \in D$, allora l'inversa g di f è olomorfa su $f(D)$ e risulta*

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}, \ \forall w \in f(D)$$

Dimostrazione Su ogni insieme $f(B(z_0, \delta))$ l'inversa g coincide con l'inversa locale, dal teorema di invertibilità locale, la tesi.

(c.v.d.)

IV.4.3 Funzioni armoniche e funzioni olomorfe

Funzioni olomorfe come funzioni armoniche

Sappiamo che una funzione olomorfa è $\mathcal{C}^\infty$ e che, dunque, in particolare, la sua parte reale e la sua parte immaginaria sono funzioni $\mathcal{C}^\infty$ in senso reale. Dunque, possiamo derivare ulteriormente l'identità di Cauchy-Riemann per ottenere

$$\begin{aligned}\partial_x^2 u &= \partial_x \partial_y v \\ \partial_y^2 u &= -\partial_y \partial_x v\end{aligned}$$

dal teorema di Schwarz, concludiamo che

$$\Delta u\,(x, y) = 0$$

per ogni $(x, y) \in D$, dunque u è **armonica** in D. In modo del tutto analogo, si trova che v è, a sua volta, **armonica** in D.

Esistenza globale e locale dell'armonica coniugata

Si pone adesso il seguente problema: sia $u : D \to \mathbb{R}$ una funzione reale armonica, esiste una funzione reale armonica $v : D \to \mathbb{R}$, talché $u + iv$ sia olomorfa in D? Una tale v, se esiste, si dice **armonica coniugata** di u. Le derivate parziali della funzione v sono determinate dall'identità di Cauchy-Riemann e si ha

$$\begin{aligned}\partial_x v &= -\partial_y u \\ \partial_y v &= \partial_x u\end{aligned}$$

Si ha che v esiste su D se e solo se la forma differenziale reale

$$(-\partial_y u)\, dx + (\partial_x u)\, dy$$

è esatta su D, essendone v una primitiva. La forma che stiamo considerando è chiusa, in quanto u è armonica, perciò è localmente esatta. Dunque, se D è semplicemente connesso si ha l'esistenza di v, armonica coniugata. In ogni caso, la locale esattezza sussiste sempre, di modo che l'**armonica coniugata esiste localmente**. Localmente $u+iv$ è olomorfa, dunque, localmente u è $\mathcal{C}^\infty$, perciò u è $\mathcal{C}^\infty$:

Proposizione IV.15 *Una funzione armonica di due variabili è $\mathcal{C}^\infty$.*

IV.4.4 Problemi di potenziale in due dimensioni

Problemi di potenziale elettrostatico: potenziale complesso

Supponiamo di dover risolvere un problema di potenziale in due dimensioni: si tratta cioè di determinare una funzione $\varphi : \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}$ soddisfacente all'equazione di Laplace

$$\Delta\varphi\,(x, y) = 0$$

assegnate certe condizioni al bordo, che chiameremo C.
Se il dominio nel quale si cerca la soluzione è semplicemente connesso, esiste certamente l'armonica ψ coniugata a φ, e allora esiste una funzione olomorfa $f : D \to \mathbb{C}$ tale che φ è pari alla parte reale di f. Una tale funzione f si dice **potenziale complesso**.

Potenziale in una circonferenza a terra: problema di Dirichlet

Vediamo subito un'applicazione di quanto detto. Sia Γ una circonferenza (centrata in (x_0, y_0)) all'interno della quale non vi siano cariche. Il potenziale all'interno della circonferenza è una funzione armonica: il suo dominio è semplicemente connesso, perciò esiste un potenziale complesso, che è una funzione olomorfa, dunque

$$\begin{aligned}\varphi\,(x_0, y_0) &= \operatorname{Re} f\,(z_0) = \operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f\,(\zeta)}{\zeta - z_0}\,dz = \operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)}{re^{i\theta}} ire^{i\theta}\,d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re} f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi\,(r\cos\theta; r\sin\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi\,(r,\theta)\,d\theta\end{aligned}$$

con ovvio abuso di notazione. La formula trovata consente di determinare il potenziale nel centro della circonferenza noto il potenziale al bordo (**problema di Dirichlet**). Il problema si sa risolvere anche per ogni altro punto interno alla circonferenza, ma non è comodo usare il metodo del potenziale complesso.
Prima di andare avanti nell'illustrazione delle applicazioni della teoria delle funzioni olomorfe alla teoria del potenziale, mostriamo il seguente risultato

Proposizione IV.16 *Se $f(x+iy) = u(x+iy) + iv(x+iy)$ è una funzione olomorfa, allora le linee su cui u è costante sono ortogonali alle linee su cui v è costante.*

Dimostrazione Si tratta di verificare l'ortogonalità dei rispettivi gradienti

$$\nabla u \cdot \nabla v = \begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_y u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\partial_y u \\ \partial_x u \end{pmatrix} = 0$$

(c.v.d.)

Se u rappresenta il potenziale, le linee a u costante sono le superfici equipotenziali e dunque le linee dove l'armonica coniugata sono costanti, sono proprio le linee del campo elettrico.

Potenziale di un piano uniformemente carico Passiamo ora in rassegna alcuni esempi illustrativi delle tecniche finora descritte. Cominciamo a considerare un caso molto semplice: un piano carico posto a terra. Il caso si presta bene a essere trattato in variabile complessa: grazie alla simmetria del problema (traslazione), il potenziale non dipende dalle coordinate parallele al piano, diciamo che una di esse sia z. Se $x = 0$ è l'equazione del piano, sappiamo bene che

$$\varphi(x) = cx$$

Ora, il semipiano $x > 0$ è certamente semplicemente connesso, dunque, deve esistere un potenziale complesso. Ma esso è banalmente

$$f(z) = cz$$

(si tratta infatti di una funzione olomorfa con parte reale eguale a φ). Le superfici equipotenziali sono parallele all'asse delle y, mentre quelle $\operatorname{Im} f$ costante sono parallele all'asse delle x e rappresentano, correttamente, le linee di campo.

Uso delle applicazioni conformi: esposizione tramite un esempio Complichiamoci leggermente la vita per mostrare un metodo particolarmente interessante che si basa sull'uso delle applicazioni conformi. Vogliamo calcolare il potenziale nella regione compresa tra due semipiani ortogonali aventi origine in comune e posti a terra. Ancora una volta, la traslazione rispetto a vettori paralleli alla retta di origine dei semipiani è una simmetria del problema. Ne viene che se su tale retta fissiamo l'asse z, il potenziale non dipenderà da z. Possiamo ancora applicare i risultati in variabile complessa: il dominio D (regione che comprende la zona tra i due piani) è un aperto semplicemente connesso. Esiste allora $f(z)$ olomorfa tale che la sua parte reale è il potenziale φ che andiamo cercando. Vogliamo, ora, eseguire un cambiamento di coordinate $z' = \Phi(z)$ di modo da semplificare il problema. Φ dovrà mappare l'aperto semplicemente connesso D, unito alla sua frontiera C, in un altro aperto semplicemente connesso D', unito alla sua frontiera C', in modo biunivoco. Se richiediamo che Φ sia olomorfa su D assieme alla sua inversa (per questo, come sappiamo, basta che Φ' sia mai nulla in D) abbiamo che

$$g(z') \equiv f\left(\Phi^{-1}(z')\right)$$

è una funzione olomorfa su D'. La parte reale di g sarà allora armonica e avrà i valori assegnati sull'immagine C', secondo Φ, dei due piani, cioè di C. Il problema su D è equivalente al problema su D': se troviamo g abbiamo automaticamente la f che stavamo cercando, essendo

$$f(z) = g(\Phi(z))$$

(infatti, f è olomorfa e assume i giusti valori al bordo). Si noti come la biunivocità di Φ unita alla sua olomorfia, garantiscono che Φ sia un'applicazione conforme in D.

Risoluzione del problema dell'esempio L'idea è quella di applicare Φ, olomorfa e invertibile in D, al nostro sistema, in modo da mandare i due semipiani in una configurazione più semplice, che magari sappiamo già risolvere. Cerchiamo allora Φ in modo che l'immagine dei due semipiani sia un unico piano.

Conviene scegliere gli assi x e y di modo che i due semipiani formino un angolo $\pm\pi/4$ con l'asse delle x e siano nella regione a $x > 0$. Consideriamo il semipiano in $y > 0$: per trasformarlo nel semipiano $x = 0$, $y > 0$, basta applicargli una rotazione di $\pi/4$, che corrisponde a $\Phi(z) = z^2$. Anche l'altro semipiano ruota nel semipiano a $x = 0$, ma con $y < 0$. $\Phi(z) = z^2$ semplifica notevolmente il nostro lavoro. Tuttavia, per renderla invertibile e olomorfa dobbiamo scegliere un taglio conveniente per la sua funzione inversa $\sqrt{z}$. Non possiamo certo mettere il taglio sul semiasse reale positivo. Poniamolo allora sul semiasse reale negativo, il che corrisponde a fissare gli angoli polari tra $-\pi$ e π. Con questa determinazione abbiamo trovato la Φ che volevamo. Come avevamo visto prima, si ha

$$g\left(z'\right) = cz'$$

e, dunque,

$$f\left(z\right) = g\left(\Phi\left(z\right)\right) = c\Phi\left(z\right) = cz^2$$

Ne viene che

$$\varphi\left(x,y\right) = c\left(x^2 - y^2\right)$$

Le linee equipotenziali, come quelle di campo, sono allora archi di iperbole, le prime, asintotiche ai due semipiani.

Un ultimo esempio

Siano ora i due semipiani di cui nell'esempio precedente inclinati di un angolo $\alpha < \pi/2$, il primo posto a un potenziale V_1 e il secondo a V_2. Poniamo il primo sul semiasse reale positivo. Una trasformazione interessante per questo problema è la

$$\Phi\left(z\right) = i\log z = i\log\rho - \theta$$

Essa, infatti, manda il primo semipiano sull'asse (tutto!) immaginario positivo, mentre trasforma il secondo in un piano avente ascissa pari a $-\alpha$. Scelto il taglio del logaritmo sul semiasse reale negativo, abbiamo che Φ è olomorfa e si ha pure subito che

$$g\left(z'\right) = -\frac{V_2 - V_1}{\alpha} z' + V_1$$

Dunque, si conclude notando che

$$f\left(z\right) = -\frac{V_2 - V_1}{\alpha}\left(i\log\rho - \theta\right) + V_1$$

sicché

$$\varphi\left(\rho,\theta\right) = \operatorname{Re} f\left(z\right) = \left(V_2 - V_1\right)\frac{\theta}{\alpha} + V_1$$

come ci si poteva immaginare.

Capitolo V

Analisi di Fourier

Anche in questo capitolo andiamo a trattare un argomento molto vasto e difficile, per cui abbiamo privilegiato gli aspetti più generali e semplici, nonché quelli che avessero maggiori possibilità di essere applicati nello studio della meccanica quantistica.

V.1 Spazi di funzioni regolari

In questa sezione studieremo alcuni tipici spazi di funzioni definite su $\mathbb{R}^\ell$ regolari: funzioni di classe $\mathcal{C}^m$ su un compatto o su un aperto, a supporto compatto o meno; funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$ su un compatto, su un aperto, a supporto compatto; funzioni $\mathcal{C}^\infty$ infinitesime all'infinito; funzioni a decrescenza rapida.

V.1.1 Topologizzazione degli spazi di funzioni lisce

Notazioni e definizioni fondamentali

Fissiamo la notazione una volta per tutte: con Ω indicheremo un aperto di $\mathbb{R}^\ell$ e con K un compatto contenuto in $\mathbb{R}^\ell$; con i simboli $\mathcal{C}^m(\Omega)$ intenderemo gli spazi lineari delle funzioni di classe $\mathcal{C}^m$ (m intero non negativo oppure infinito) definite sull'aperto Ω; con $\mathcal{C}^m_K(\Omega)$ intenderemo lo spazio delle funzioni a supporto contenuto in K, dove il supporto è

$$\operatorname{supp} f = \left\{ x \in \mathbb{R}^\ell \,|\, f(x) \neq 0 \right\}^a ;$$

infine, con $\mathcal{C}^m_c(\Omega)$ indicheremo lo spazio delle funzioni di classe $\mathcal{C}^m$ a supporto compatto contenuto in Ω e con $\mathcal{C}^m_\infty$ lo spazio delle funzioni definite in $\mathbb{R}^\ell$, di classe $\mathcal{C}^m$, infinitesime all'infinito. In seguito introdurremo le funzioni a decrescenza rapida.

Nozioni di convergenza

In ciascuno degli spazi $\mathcal{C}^m_K(\Omega)$, diremo che f_n è una successione convergente a $f \in \mathcal{C}^m_K(\Omega)$ se, per ogni multi-indice $\mathbf{p} \in \mathbb{N}^\ell$ talché $|\mathbf{p}| = \sum_{i=1}^\ell p_i \leq m$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \|D^{\mathbf{p}} f_n - D^{\mathbf{p}} f\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in K} |D^{\mathbf{p}} f_n(x) - D^{\mathbf{p}} f(x)| = 0.$$

Per quello che riguarda gli spazi $\mathcal{C}^m(\Omega)$, la convergenza di f_n a f si ha se, per ogni compatto $K \subset \Omega$ e per ogni $|\mathbf{p}| \leq m$ risulta

$$\lim_{n\to\infty} \|D^{\mathbf{p}} f_n - D^{\mathbf{p}} f\|_{\infty,K} = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in K} |D^{\mathbf{p}} f_n(x) - D^{\mathbf{p}} f(x)| = 0.$$

Ricordiamo che

$$D^{\mathbf{p}} f = \frac{\partial^{|\mathbf{p}|}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_\ell^{p_\ell}} f.$$

Topologizzazione

Adesso vogliamo procedere a topologizzare tutti gli spazi qui introdotti: mostreremo che per ciascuno di essi esiste una opportuna metrica che riproduce le nozioni di convergenza di cui sopra. Mostreremo poi che ciascuno degli spazi detti è completo nella metrica introdotta. Sebbene quello che seguiremo non è un modo generale di ragionare, ci eviterà di parlare degli spazi localmente convessi, e ci darà comunque modo di vedere alcune cose interessanti sugli spazi delle funzioni lisce.
Cominciamo con un lemma ben noto (lo abbiamo già usato in precedenza), ma fondamentale nel seguito.

Lemma V.1 *Per ogni $A \subset \mathbb{R}^\ell$, lo spazio $\mathcal{C}(A)$ è uno spazio di Banach nella norma uniforme*

$$\|f\|_\infty \equiv \sup_{x\in A} |f(x)|$$

Dimostrazione Sia f_n una successione a valori in $\mathcal{C}(A)$ di Cauchy. Tale cioè che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu(\varepsilon)$ per cui, se $n, m > \nu$, allora

$$\|f_n - f_m\|_\infty = \sup_{x\in A} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

In particolare, per ogni $x \in A$, la successione a valori in $\mathbb{C}$, $\{f_n(x)\}$ è di Cauchy, perciò è convergente, visto che $\mathbb{C}$ è completo. Ne deriva che per ogni $x \in A$ abbiamo definito la funzione f talché

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Si tratta di vedere che la convergenza a f è uniforme e che f è continua. Ora, per $n, m > \nu$ si ha, per ogni $x \in A$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

fissato n, la funzione $|f_n(x) - \cdot|$ è continua, sicché, passando al limite per $m \to \infty$, per la permanenza del segno

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

per ogni $x \in A$, da cui la convergenza è uniforme.

Continuità di f. Abbiamo

$$|f(x) - f(x_0)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$, allora troviamo n tale che

$$\sup_{x\in A} |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

siccome f_n è continua, esiste un raggio δ tale che se $x \in B(x_0, \delta)$ allora

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

(c.v.d.) da cui la continuità di f.

Lemma V.2 *Sia D un aperto di $\mathbb{R}^\ell$. Lo spazio delle funzioni $\mathcal{C}^m(D)$ è di Banach nella norma*

$$\|f\|_{m,D} \equiv \sum_{|\mathbf{p}|\le m} \|D^{\mathbf{p}} f\|_\infty = \sum_{|\mathbf{p}|\le m} \sup_{x\in D} \|D^{\mathbf{p}} f(x)\|_\infty$$

Dimostrazione Notiamo che f_n converge a f (risp. è di Cauchy) rispetto alla norma introdotta, se e solo se ogni $D^{\mathbf{p}} f_n$ converge a $D^{\mathbf{p}} f$ (risp. è di Cauchy) nella norma uniforme (di cui nel lemma precedente).

Se f_n è di Cauchy, dunque, ciascuna $D^{\mathbf{p}} f_n$ è di Cauchy, perciò converge nella norma uniforme a una funzione $g_{\mathbf{p}}$ continua su D. Si tratta solo di mostrare che $g \equiv g_0$ è $\mathcal{C}^m(D)$ e che $g_{\mathbf{p}} = D^{\mathbf{p}} g$. A questo scopo basta mostrare che se $f_n \to g$ e $(\partial f_n/\partial x_i) \to g_1$ uniformemente, allora $g \in \mathcal{C}^1$ e

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = g_1$$

Sia $x_0 \in D$, allora esiste r tale che $B(x_0, r) \subset D$. Per ogni n consideriamo

$$h_n(\tau) = f_n(x_0 + \tau \mathbf{e}_i), \ \tau \in \left]-r, r\right[$$

dove $\mathbf{e}_i$ è il versore dell'i-esimo asse di $\mathbb{R}^\ell$. Allora $h_n(\tau)$ converge uniformemente a

$$h(\tau) = g(x_0 + \tau \mathbf{e}_i)$$

Inoltre, $h_n \in \mathcal{C}^1$ e

$$h_n'(\tau) = \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(x_0 + \tau \mathbf{e}_i)$$

ne viene che h_n' converge uniformemente a

$$h_1(\tau) = g_1(x_0 + \tau \mathbf{e}_i)$$

D'altra parte, siccome $h_n \in \mathcal{C}^1$, dal teorema fondamentale del calcolo,

$$h_n(\tau) = h_n(0) + \int_0^\tau h_n'(t)\, dt$$

Passiamo al limite per $n \to \infty$ in entrambi i membri, dato che la convergenza di h_n' è uniforme, si ha

$$h(\tau) = h(0) + \int_0^\tau h_1(t)\, dt$$

da cui h è di classe $\mathcal{C}^1$ e, derivando e valutando in $\tau = 0$,

$$h'(0) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0) = h_1(0) = g_1(x_0)$$

come volevamo. (La stessa dimostrazione, se non si vuole usare quest'ultima induzione, può essere fatta usando la formula di Taylor con resto integrale). **(c.v.d.)**

Topologizzazione di $\mathcal{C}_K^m(\Omega)$ Andiamo a dare una struttura metrica agli spazi $\mathcal{C}_K^m(\Omega)$ con m finito. Consideriamo la norma

$$\|f\|_{m,K} = \sum_{|\mathbf{p}| \le m} \|D^{\mathbf{p}} f\|_{\infty,K}$$

Che sia ben definita è praticamente ovvio. Notiamo che $\{f_n\} \subset \mathcal{C}_K^m(\Omega)$ converge a $f \in \mathcal{C}_K^m(\Omega)$ nel senso definito prima, se e solo se si ha convergenza nella norma $\|\cdot\|_{m,K}$. Dunque, $\mathcal{C}_K^m(\Omega)$ è uno spazio normato. Si ha di più:

Proposizione V.1 *Lo spazio vettoriale $\mathcal{C}_K^m(\Omega)$ dotato della norma*

$$\|f\|_{m,K} = \sum_{|\mathbf{p}| \le m} \|D^{\mathbf{p}} f\|_\infty$$

è uno spazio di Banach.

Dimostrazione La dimostrazione discende subito dal lemma V.2. Infatti, una successione $\{f_n\} \subset \mathcal{C}_K^m(\Omega)$ di Cauchy è di Cauchy (grazie al supporto contenuto in K) anche in $\mathcal{C}^m(\Omega)$. Ne viene che essa converge a una funzione $f \in \mathcal{C}^m(\Omega)$ nella norma del lemma V.2 e quindi nella norma di questa proposizione. Inoltre, f è nulla fuori da K come limite uniforme, perciò puntuale, di funzioni nulle fuori da K. **(c.v.d.)**

Topologizzazione di $\mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$ Andiamo a topologizzare lo spazio $\mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$. A questo scopo introduciamo la distanza

$$d(f,g) \equiv \sum_{m=0}^\infty \frac{\min\left(\|f-g\|_{m,K}; 1\right)}{2^m}$$

Verifichiamo che la definizione sia ben posta. Anzitutto la serie a secondo membro è banalmente convergente. Siccome tale serie è a termini positivi, d è un'applicazione a valori non negativi. Certamente è simmetrica. La diseguaglianza triangolare si verifica immediatamente. Sia ora $d(f,g) = 0$, allora ciascun termine della serie è nullo, ne segue che per ogni m si ha $\|f-g\|_{m,K} = 0$, perciò $f = g$.
$\{f_n\} \subset (\mathcal{C}_K^\infty(\Omega); d)$ converge a f se e solo se per ogni m $\|f_n - f\|_{m,K} \to 0$. Dimostriamolo. Se $d(f_n, f) \to 0$ allora per ogni $0 < \varepsilon < 1$ esiste ν tale che

$$\sum_{m=0}^\infty \frac{\min\left(\|f_n - f\|_{m,K}; 1\right)}{2^m} < \varepsilon$$

se $n > \nu$, allora, per ogni $m \in \mathbb{N}$ si ha

$$\frac{\|f_n - f\|_{m,K}}{2^m} < \varepsilon$$

da cui $f_n \to f$ in $\left(\mathcal{C}_K^m(\Omega); \|\cdot\|_{m,K}\right)$. Viceversa, per ogni $m \in \mathbb{N}$, $\|f_n - f\|_{m,K} \to 0$. Fissiamo M, allora per ogni $0 < \varepsilon < 1$ esiste ν tale che se $n > \nu$, si ha

$$\|f_n - f\|_{m,K} < \varepsilon, \forall m \leq M$$

Preso dunque $n > \nu$ abbiamo

$$\begin{aligned} d(f_n, f) &= \sum_{m=0}^{M} \frac{\min\left(\|f_n - f\|_{m,K}; 1\right)}{2^m} + \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{\min\left(\|f_n - f\|_{m,K}; 1\right)}{2^m} \leq \\ &\leq \sum_{m=0}^{M} \frac{\varepsilon}{2^m} + \sum_{m=M+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m \leq 2\varepsilon + \frac{1}{2^M} \end{aligned}$$

visto che

$$\sum_{m=0}^{M} \frac{1}{2^m} = \frac{1 - (1/2)^{M+1}}{1 - (1/2)} = 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{M+1}\right]$$

Se adesso scegliamo $\varepsilon = 1/M$, abbiamo che per ogni M esiste $\nu(M) > 0$ per cui se $n > \nu(M)$ allora

$$d(f_n, f) \leq \frac{2}{M} + \frac{1}{2^M}$$

da cui si ricava la tesi.
Vale poi la seguente

Proposizione V.2 *Lo spazio metrico $(\mathcal{C}_K^\infty(\Omega); d)$ è completo.*

Dimostrazione Sia $\{f_n\} \subset \mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$ una successione di Cauchy nella metrica d. Allora f_n è di Cauchy nella norma $\|\cdot\|_{m,K}$ per ogni $m \in \mathbb{N}$. Di conseguenza f_n converge nella norma detta a una funzione $f \in \mathcal{C}_K^m(\Omega)$ per ogni $m \in \mathbb{N}$. Sicché $f \in \mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$ e f_n converge in d a f per le considerazioni precedenti.

(c.v.d.)

Topologizzazione di $\mathcal{C}^m(\Omega)$ Andiamo a considerare gli spazi $\mathcal{C}^m(\Omega)$. Sia K_i una successione crescente di compatti tali che

$$\Omega \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i$$

Definiamo allora la seguente metrica in $\mathcal{C}^m(\Omega)$:

$$\delta^m(f, g) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\min\left(\|f - g\|_{m,K_i}; 1\right)}{2^i}$$

Mostriamo che δ^m è una distanza.
Vediamo che la nozione di convergenza introdotta in precedenza coincide con la convergenza nella metrica δ^m. Sia

$$\lim_{n\to\infty} \delta^m(f_n, f) = 0$$

allora per ogni $0 < \varepsilon < 1$ esiste ν tale che se $n > \nu$ allora

$$\frac{\|f - f_n\|_{m,K_i}}{2^i} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\min\left(\|f - f_n\|_{m,K_i}; 1\right)}{2^i} < \varepsilon$$

perciò $D^{\mathbf{p}} f_n \to D^{\mathbf{p}} f$ su ogni K_i, per ogni multi-indice con $|\mathbf{p}| \leq m$. Dato un qualsiasi compatto sottoinsieme di Ω, esso sarà contnuto in un K_i di qui la tesi.

Viceversa f_n converga a f nel senso convenuto precedentemente. Allora su ogni compatto si ha

$$\|f - f_n\|_{m,K} \to 0$$

in particolare, per ogni $i \in \mathbb{N}$, si ha

$$\|f - f_n\|_{m,K_i} \to 0$$

Fissiamo $M \in \mathbb{N}$. Per ogni $0 < \varepsilon < 1$ troviamo ν per cui, se $n > \nu$ allora

$$\|f - f_n\|_{m,K_i} < \varepsilon$$

per ogni $i \leq M$. Dunque,

$$\delta^m(f_n, f) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\min\left(\|f - f_n\|_{m,K_i}, 1\right)}{2^i} \leq \sum_{i=0}^{M} \frac{\varepsilon}{2^i} + \sum_{i=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \leq 2\varepsilon + \frac{1}{2^M}$$

scelto $\varepsilon = 1/M$ abbiamo la tesi.
Ancora

Proposizione V.3 *Lo spazio metrico $(\mathcal{C}^m(\Omega), \delta^m)$ è completo.*

Dimostrazione Sia $\{f_n\} \subset (\mathcal{C}^m(\Omega), \delta^m)$ di Cauchy. Allora, per ogni i, la successione $\left\{ f_n|_{K_i} \right\}$ è di Cauchy nella norma $\|\cdot\|_{m,K_i}$. Dal lemma V.2, preso come aperto D l'insieme $\operatorname{int}(K_{i+1})$, questo implica che $f_n|_{K_i}$ converge, rispetto a $\|\cdot\|_{m,K_i}$, a una funzione f^i di classe $\mathcal{C}^m$. Ovviamente $f^{i+1}\big|_{K_i} = f^i$ perciò, in definitiva, la convergenza di ciascuna $f_n|_{K_i}$ è a $f|_{K_i}$ di classe $\mathcal{C}^m$. Siccome si ha convergenza della successione a f su ogni compattocontenuto in Ω, per le considerazioni precedenti, si ha la tesi. **(c.v.d.)**

Topologizzazione di $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ La metrica che introduciamo su $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ è la seguente

$$\delta_\Omega(f, g) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\min(\delta^m(f, g); 1)}{2^m}$$

Il fatto che si tratti di una distanza è evidente (si tratta di fare gli stessi ragionamenti fatti nelle altre occasioni...). Anche il discorso sulla convergenza è identico a quello fatto prima, perciò lo omettiamo.

Proposizione V.4 *Lo spazio metrico $(\mathcal{C}^\infty(\Omega), \delta_\Omega)$ è completo.*

Dimostrazione Sia $\{f_n\} \subset (\mathcal{C}^\infty(\Omega), \delta_\Omega)$ di Cauchy. Allora, per ogni m, la successione $\{f_n\}$ è di Cauchy rispetto alla distanza δ^m. Questo implica che f_n converge, rispetto a δ^m, a una funzione f di classe $\mathcal{C}^m$. Siccome questo vale per ogni m (la funzione limite non cambia al variare di m!) allora f è di classe $\mathcal{C}^\infty$ ed è limite secondo δ_Ω di f_n. **(c.v.d.)**

Convergenza in $\mathcal{C}_c^m(\Omega)$ e $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ Annotiamo che è d'uso denotare con $\mathcal{D}(\Omega)$ lo spazio $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ e con $\mathcal{D}$ lo spazio $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^\ell)$. Spesso ci atterremo a questa convenzione. Veniamo a presentare le nozioni di convergenza negli spazi di funzioni lisce a supporto compatto. Diciamo che una successione $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a valori in $\mathcal{C}_c^m(\Omega)$ converge a $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ se esiste un compatto K tale che

$$\begin{aligned} \operatorname{supp}\varphi_n &\subset K, \forall n \in \mathbb{N} \\ \operatorname{supp}\varphi &\subset K \end{aligned}$$

e tale che $\|\varphi_n - \varphi\|_{m,K} \to 0$, $n \to \infty$. Analogamente, se $m = \infty$, basta sostituire alla norma di $\mathcal{C}_K^m$ la metrica di $\mathcal{C}_K^\infty$.

V.1.2 Teoremi di densità

Prodotto di convoluzione Per dimostrare i teoremi di densità ci occorre la nozione di prodotto di convoluzione. Ambientiamo inizialmente il prodotto di convoluzione in $\mathcal{C}_c^m\left(\mathbb{R}^\ell\right) = \mathcal{D}$. Se $f, g \in \mathcal{C}_c^m\left(\mathbb{R}^\ell\right)$, allora definiamo la funzione

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^\ell} f(x-y)\, g(y)\, d\mu(y)$$

prodotto di convoluzione di f e g. La definizione data è buona, visto che l'integrale si estende su un insieme limitato ove le funzioni sono limitate (perché continue). Il supporto di $f * g$ è chiaramente compatto, essendo

$$\operatorname{supp} f * g \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$$

Il prodotto di convoluzione è commutativo, posto $z = x - y$, si ha

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^\ell} f(x-y)\, g(y)\, d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^\ell} f(z)\, g(x-z)\, d\mu(z) = (g * f)(x)$$

Grazie al teorema di derivazione sotto segno (probabilmente noto al lettore, ma che, comunque, dimostreremo nella prossima sezione) si ha che $f * g$ è derivabile con continuità m volte, cioè $f * g \in \mathcal{C}_c^m\left(\mathbb{R}^\ell\right)$. In particolare $\mathcal{D}$ è stabile per convoluzione. Si ha di più

$$D^{\mathbf{p}}(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^\ell} D^{\mathbf{p}} f(x-y)\, g(y)\, d\mu(y) = \left(\left(D^{\mathbf{p}} f\right) * g\right)(x)$$

Ora, applicando il teorema di Fubini e il teorema di integrazione per parti, si ha che

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^\ell} \frac{\partial}{\partial x_i} f(x-y)\, g(y)\, d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^\ell} -\frac{\partial}{\partial y_i} f(x-y)\, g(y)\, d\mu(y) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^{\ell-1}} d\mu\left(y_1, \ldots y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots y_\ell\right) \int_{\mathbb{R}} -\frac{\partial}{\partial y_i} f(x-y)\, g(y)\, d\mu(y_i) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^{\ell-1}} d\mu\left(y_1, \ldots y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots y_\ell\right) \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \frac{\partial}{\partial y_i} g(y)\, d\mu(y_i) \\
&= \left(f * \frac{\partial}{\partial y_i} g\right)(x)
\end{aligned}$$

per induzione,

$$D^{\mathbf{p}}(f * g)(x) = \left(\left(D^{\mathbf{p}} f\right) * g\right)(x) = \left(f * D^{\mathbf{p}} g\right)(x).$$

Il prodotto di convoluzione è anche continuo in $\mathcal{D}$, come si verifica subito tramite il teorema di Lebesgue.

Regolarizzazione delle funzioni: successione di Dirac Vogliamo adesso mostrare alcuni teoremi di densità degli spazi di funzioni lisce introdotti. Cominciamo con il vedere che lo spazio $\mathcal{D}$ contiene elementi non banali. Cominciamo con il considerare la funzione definita sull'asse reale

$$\rho(x) \equiv \begin{cases} e^{-1/x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Si vede facilmente che $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Adesso, per $x \in \mathbb{R}^\ell$ poniamo

$$\varphi(x) = \rho\left(1 - |x|^2\right)$$

La funzione φ è non negativa, di classe $\mathcal{C}^\infty$ ed è nulla per $|x|^2 \leq 1$. Se $a = \int \varphi\, d\mu$, poniamo

$$\chi = \frac{\varphi}{a}$$

ed abbiamo ricavato una funzione appartenente a $\mathcal{D}$, non negativa, a integrale unitario e a supporto nella chiusura della 1-palla di centro l'origine. La successione a valori in $\mathcal{D}$

$$\chi_n(x) = n^\ell \chi(nx),\, n \in \mathbb{N}^\times$$

si dice successione **regolarizzante di Dirac**. Notiamo che χ_n ha supporto nella palla chiusa di raggio $1/n$ e ha integrale sempre pari a 1. Il fatto che χ_n sia "regolarizzante" è dimostrato nella seguente

Proposizione V.5 *Sia $\psi \in \mathcal{C}_c^m\left(\mathbb{R}^\ell\right)$, per $m \in \mathbb{N}$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ la funzione $\psi * \chi_n \in \mathcal{D}$ e la successione*

$\{\chi_n * \psi\}$ *converge in* $\mathcal{C}_c^m\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ a ψ.

Dimostrazione Ricordiamo che si definisce prodotto di convoluzione delle funzioni ψ e χ_n la funzione

$$(\chi_n * \psi)(x) = \int_{\mathbb{R}^\ell} \chi_n(x-y)\,\psi(y)\;d\mu(y)$$

Si ha subito che, avendo χ_n e ψ supporti compatti, il loro prodotto di convoluzione è a supporto compatto:

$$\operatorname{supp}(\chi_n * \psi) \subset \operatorname{supp}(\psi) + \operatorname{supp}(\chi_n) \subset \operatorname{supp}(\psi) + B^a(0, 1/n) \subset \operatorname{supp}(\psi) + B^a(0,1)$$

Inoltre, applicando il teorema di derivazione sotto segno (che vale in modo ovvio) si ha che la convoluzione è infintamente derivabile, perciò $\chi_n * \psi \in \mathcal{D}$. Inoltre,

$$D^{\mathbf{p}}(\chi_n * \psi) = (D^{\mathbf{p}}\psi * \chi_n)$$

Ora, dato che il supporto di χ_n è contenuto nella $1/n$ palla chiusa e dato che χ_n ha integrale unitario, si ha

$$\begin{aligned} \left|D^{\mathbf{p}}(\chi_n * \psi)(x) - D^{\mathbf{p}}\psi(x)\right| &= \left|(D^{\mathbf{p}}\psi * \chi_n)(x) - D^{\mathbf{p}}\psi(x)\right| = \\ &= \left|\int_{|y|\le 1/n} \left[D^{\mathbf{p}}\psi(x-y) - D^{\mathbf{p}}\psi(x)\right]\chi_n(y)\;d\mu(y)\right| \le \\ &\le \sup_{x,z\in\mathbb{R}^\ell;|z-x|<1/n} \left|D^{\mathbf{p}}\psi(z) - D^{\mathbf{p}}\psi(x)\right| \end{aligned}$$

Tuttavia, $D^{\mathbf{p}}\psi$ è continua e a supporto compatto, perciò è uniformemente continua. Ne viene che scelto ε si trova ν tale che se $n > \nu$ allora il secondo membro della diseguaglianza di sopra è minore di ε, da cui si ha la tesi. **(c.v.d.)**

Si noti come non si è usata la forma particolare di χ_n, ma solo il fatto che ha supporto che si stringe attorno a un punto e che ha integrale costantemente unitario.
In ogni caso, abbiamo che $\mathcal{D}$ è denso in ogni $\mathcal{C}_c^m\left(\mathbb{R}^\ell\right)$, dunque, se $n < m$ allora $\mathcal{C}_c^m\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ è denso in $\mathcal{C}_c^n\left(\mathbb{R}^\ell\right)$, in quanto il primo contiene un sottoinsieme che è denso nel secondo. La stessa cosa può essere generalizzata agli spazi $\mathcal{C}_c^m(\Omega)$ con il seguente

Corollario V.1 *Lo spazio* $\mathcal{D}(\Omega)$ *è denso in ogni* $\mathcal{C}_c^m(\Omega)$ *per ogni* $m \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione Sia $\varphi \in \mathcal{C}_c^m(\Omega)$, allora possiamo vederlo come elemento di $\mathcal{C}_c^m\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ estendo φ fuori da Ω per continuità, cioè ponendo $\varphi = 0$. Ora,

$$\operatorname{supp}(\chi_n * \varphi) \subset \operatorname{supp}(\varphi) + B(0, 1/n)^a$$

per cui, per n abbastanza grande $\operatorname{supp}(\chi_n * \varphi) \subset \Omega$. Dunque, $\chi_n * \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ (definitivamente) e converge, per la proposizione precedente, a φ nella norma di $\mathcal{C}_c^m(\Omega)$. **(c.v.d.)**

In conclusione le inclusioni

$$\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \subset \ldots \subset \mathcal{C}_c^0(\Omega) = \mathcal{C}_c(\Omega)$$

sono **continue** e **dense** (cioè le iniezioni date dall'identità di uno spazio nell'altro sono applicazioni continue, con immagine densa).
Riprendiamo adesso il teorema di partizione dell'unità dimostrato nel corso del capitolo I nel corso dello studio del teorema di rappresentazione di Riesz-Markov. Abbiamo

Teorema V.1 (partizione C^∞ dell'unit paà) *'e un sottoinsieme compatto di* $\mathbb{R}^\ell$ *e* $U_1, \ldots, U_n$ *è un suo ricoprimento finito, allora esistono* n *funzioni* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *appartenenti a* $\mathcal{D}$*, tali che, per* $i \in J_n$

$$0 \le \varphi_i \le 1, \ \operatorname{supp}\varphi_i \subset U_i$$

e per $x \in K$

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i(x) = 1$$

Dimostrazione Nel teorema di partizione dell'unità di cui al capitolo I, avevamo dimostrato l'esistenza di funzioni h_i risponendenti alla tesi del presente teorema, ma di classe $\mathcal{C}^0$ e non $\mathcal{C}^\infty$. Ora, sia $U = \bigcup_{i \in J_n} U_i$ e poniamo

$$d = d\left(K, U^c\right)$$

Sia

$$K' = \{x \,| d\left(x, K\right) \leq d/2\}$$

allora l'insieme K' è compatto e si ha

$$K \subset \{x \,| d\left(x, K\right) < d/2\} \subset \operatorname{int} K'$$

perciò $K \subset \operatorname{int} K' \subset K' \subset U$. Applichiamo il vecchio teorema di partizione a K' determinando le funzioni continue h_i a supporto contenuto in U_i e tali che

$$\sum_{i=1}^n h_i\left(x\right) = 1,\ x \in K'$$

Definiamo adesso $\delta = d\left(K, \left(\operatorname{int} K'\right)^c\right)$, $\eta_i = d\left(\operatorname{supp} h_i, U_i^c\right)$ e

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\min\left(\delta, \eta_i\right)$$

Sia ora χ la funzione regolarizzante definita in apertura di sottosezione e poniamo

$$u\left(x\right) = \varepsilon^d \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

allora $u \in \mathcal{D}$ è non negativa, ha integrale unitario e supporto contenuto nella ε-palla chiusa di centro l'origine. Per ogni $i \in J_n$ poniamo $\varphi_i = u * h_i$ di modo che $\varphi_i \in \mathcal{C}^\infty$ e

$$\operatorname{supp} \varphi_i \subset \operatorname{supp} h_i + B\left(0, \varepsilon\right)^a \subset U_i$$

cioè $\varphi \in \mathcal{D}$. Resta da vedere che per ogni $x \in K$ si ha $\sum \varphi_i\left(x\right) = 1$. Abbiamo

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \varphi_i\left(x\right) &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^\ell} u\left(x-y\right) h_i\left(y\right)\, d\mu\left(y\right) = \int_{\mathbb{R}^\ell} \sum_{i=1}^n u\left(x-y\right) h_i\left(y\right)\, d\mu\left(y\right) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^\ell} \sum_{i=1}^n u\left(z\right) h_i\left(x-z\right)\, d\mu\left(z\right)\end{aligned}$$

d'altronde, per $x \in K$ e $z \in B\left(0, \varepsilon\right)^a$ si ha $x - z \in K'$ e dunque

$$\sum_{i=1}^n u\left(z\right) h_i\left(x-z\right) = u\left(z\right) \sum_{i=1}^n h_i\left(x-z\right) = u\left(z\right)$$

perciò

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i\left(x\right) = \int_{\mathbb{R}^\ell} u\left(z\right)\, d\mu\left(z\right) = 1$$

(c.v.d.) come si voleva.

Conseguentemente troviamo un altro risultato di densità: se denotiamo, come è d'uso, con $\mathcal{E}\left(\Omega\right)$ lo spazio $\mathcal{C}^\infty\left(\Omega\right)$, abbiamo

Proposizione V.6 *Lo spazio $\mathcal{D}\left(\Omega\right)$ è denso in $\mathcal{E}\left(\Omega\right)$ e in $\mathcal{C}^m\left(\Omega\right)$ per ogni $m \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione Sia K_n una successione crescente (nel senso che $K_n \subset \operatorname{int} K_{n+1}$) di compatti avente unione che include Ω. Dal teorema di partizione dell'unità, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste un elemento $\varphi_n \in \mathcal{D}\left(\Omega\right)$ tale che

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varphi_n \leq 1 \\ \varphi_n\left(x\right) &= 1,\ x \in K_n \\ \operatorname{supp} \varphi_n &\subset K_{n+1}\end{aligned}$$

Se $f \in \mathcal{E}(\Omega)$, abbiamo $f\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Se K è un sottoinsieme compatto di Ω, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $K \subset \operatorname{int}(K_N)$, perciò, per ogni $n > N$ e $\mathbf{p} \in \mathbb{N}^\ell$ abbiamo $D^{\mathbf{p}} f\varphi_n = D^{\mathbf{p}} f$ su K. Da cui $\{f\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ converge in $\mathcal{E}(\Omega)$ a f, come volevamo dimostrare. Analogamente si dimostra che $\mathcal{C}_c^m$ è denso in $\mathcal{E}^m$, ma $\mathcal{D}$ è denso in $\mathcal{C}_c^m$, da cui $\mathcal{D}$ è denso in $\mathcal{C}^m$.

Mostriamo, a margine, l'esistenza di N per cui $K \subset \operatorname{int}(K_n)$: K è un compatto un cui ricoprimento aperto è dato dalla successione $\operatorname{int} K_n$, dunque K è ricorperto da un numero finito di $\operatorname{int}(K_n)$ e perciò (crescenza) da un solo $\operatorname{int}(K_N)$.

(c.v.d.)

In particolare ricaviamo che le inclusioni

$$\mathcal{E}(\Omega) = \mathcal{C}^\infty(\Omega) \subset \ldots \subset \mathcal{C}^0(\Omega) = \mathcal{C}(\Omega)$$

sono iniezioni continue a immagini dense.

V.1.3 Lo spazio $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ delle funzioni a decrescenza rapida

Funzioni a decrescenza rapida

Veniamo ora a descrivere lo spazio $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ delle **funzioni a decrescenza rapida**, oppure spazio di Schwartz. Siano $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{N}^\ell$ due multi-indici e sia $f \in \mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}^\ell\right)$; con $f^{\mathbf{k},\mathbf{l}}$ indichiamo la funzione

$$f^{\mathbf{k},\mathbf{l}}(x) = x_1^{k_1} \ldots x_\ell^{k_\ell} D^{\mathbf{l}} f(x)$$

Ora, l'insieme $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ è costituito dalle funzioni $\mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}^\ell\right)$, tali che

$$\lim_{|x|\to\infty} \left|f^{\mathbf{k},\mathbf{l}}(x)\right| = 0,\ \forall \mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{N}^\ell.$$

Si noti come se $f \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$, allora $f^{\mathbf{k},\mathbf{l}} \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$, perciò $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ è stabile rispetto alla derivazione di qualsiasi ordine e alla moltiplicazione per un polinomio di qualsiasi grado.

Nozione di convergenza

Una successione $\{f_n\} \subset \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ converge a $f \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ se $f_n^{\mathbf{k},\mathbf{l}} \to f^{\mathbf{k},\mathbf{l}}$ uniformemente per ogni multi-indice $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{N}^\ell$. Come si vede la nozione di convergenza che si utilizza in $\mathcal{S}$ non usa i compatti come avveniva per gli spazi di funzioni continue, questo consente di avere un controllo globale dell'andamento all'infinito di tutti i termini della successione, come avremo modo di apprezzare in seguito.

Il duale topologico $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ di $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ si dice **spazio delle distrubuzioni temperate**.

Evidentemente $\mathcal{D}$ è contenuto in $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$, ma l'inclusione è propria, come mostra l'esempio della funzione introdotta in precedenza

$$\exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right),\ x \in \mathbb{R}^\ell$$

che è a decrescenza rapida, ma non a supporto compatto.

Vediamo la seguente

Proposizione V.7 *$f \in \mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ appartiene a $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ se e solo se verifica una delle seguenti condizioni*

(i) *$f^{\mathbf{k},\mathbf{l}}$ è limitata per ogni $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{N}^\ell$;*

(ii) *la funzione*

$$x \mapsto \left(1 + |x|^2\right)^k D^{\mathbf{l}} f(x)$$

è limitata per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $\mathbf{l} \in \mathbb{N}^\ell$.

Dimostrazione Cominciamo con l'asserto (i). Se $f \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ allora

$$\lim_{|x|\to\infty} \left|f^{\mathbf{k},\mathbf{l}}(x)\right| = 0$$

perciò, essendo $f^{\mathbf{k},\mathbf{l}}(x)$ continua, si ha che esiste $M_{\mathbf{k},\mathbf{l}}$ per cui

$$\left|f^{\mathbf{k},\mathbf{l}}(x)\right| \le M_{\mathbf{k},\mathbf{l}},\ \forall x \in \mathbb{R}^\ell$$

Viceversa, valga la diseguaglianza di sopra. Si ha

$$f^{\mathbf{k},\mathbf{l}}(x) = x^{\mathbf{k}} D^{\mathbf{l}} f(x) = \frac{x^{\mathbf{k}}}{x^{\mathbf{k}_0}} x^{\mathbf{k}_0} D^{\mathbf{l}} f(x)$$

preso $\mathbf{k}_0 = (k_1+1, \ldots, k_\ell+1) = \mathbf{k} + (1, \ldots, 1)$, si conclude

$$\left| f^{\mathbf{k},\mathbf{l}}(x) \right| \le \left| \frac{x^{\mathbf{k}}}{x^{\mathbf{k}_0}} \right| M_{\mathbf{k},\mathbf{l}} \to 0$$

Vediamo adesso (ii). Sia $f \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$, allora certamente la funzione considerata è limitata, essendo data da un polinomio per $D^{\mathbf{l}} f(x)$, dunque continua e tendente a 0 all'infinito. Vediamo il viceversa. Si ha

$$\left| \left(1 + \sum_{r=1}^{\ell} x_r^2 \right)^k D^{\mathbf{l}} f(x) \right| \le M$$

Fissato un qualunque $\mathbf{k}$ ci basta trovare k di modo che

$$\left| \frac{x^{\mathbf{k}}}{\left(1 + \sum_{r=1}^{\ell} x_r^2\right)^k} \right| \to 0$$

(c.v.d.) e per questo è sufficiente $k > |\mathbf{k}|$.

Topologizzazione di $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$

Si tratta adesso di dare una conveniente metrizzazione di $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$. Per le funzioni q volte derivabili con continuità e che decadono all'infinito più delle potenze p-esime poniamo

$$\|f-g\|_{p,q} \equiv \sum_{|\mathbf{k}| \le p, |\mathbf{l}| \le q} \left\| f^{\mathbf{k},\mathbf{l}} - g^{\mathbf{k},\mathbf{l}} \right\|_\infty$$

Una successione f_n converge a f se e solo se ciascuna $f_n^{\mathbf{k},\mathbf{l}}$ converge uniformemente a $f^{\mathbf{k},\mathbf{l}}$. Per metrizzare lo spazio $\mathcal{S}$ ci basta porre

$$\delta_{\mathcal{S}}(f,g) = \sum_{p,q} \frac{\min\left(\|f-g\|_{p,q}\,; 1\right)}{2^{p+q}}$$

La nozione di convergenza introdotta da questa distanza è quella cercata. Infatti, se $\delta_{\mathcal{S}}(f_n, f) \to 0$ allora per ogni ε' si trova ν tale che se $n > \nu$ allora

$$\delta_{\mathcal{S}}(f_n, f) < \varepsilon'$$

d'altra parte, fissati p, q si può scegliere $2^{p+q}\varepsilon' \equiv \varepsilon < 1$ di modo che

$$\frac{\min\left(\|f-f_n\|_{p,q}\,; 1\right)}{2^{p+q}} \le \delta_{\mathcal{S}}(f_n, f) < \varepsilon'$$

cioè, se $n > \nu$

$$\|f - f_n\|_{p,q} < \varepsilon$$

Quindi, per ogni $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ si ha $x^{\mathbf{p}} D^{\mathbf{q}} f_n \to x^{\mathbf{p}} D^{\mathbf{q}} f$. Viceversa, fissiamo $P, Q > 0$. Fissiamo ε troviamo ν tale che per $n > \nu$, $p \le P$ e $q \le Q$ si ha

$$\|f - f_n\|_{p,q} < \varepsilon$$

dunque, $n > \nu$ implica

$$\delta_{\mathcal{S}}(f, f_n) \le \sum_{p \le P, q \le Q} \frac{\varepsilon}{2^{p+q}} + \sum_{p > P, q > Q} \frac{1}{2^{p+q}}$$

La prima somma è inferiore a $\varepsilon/2$. La seconda è la coda di una serie geometrica: siccome quest'ultima converge si possono scegliere P, Q di modo da rendere la coda inferiore a $\varepsilon/2$. La tesi.

Infine, resta da vedere la completezza di $\mathcal{S}$. Data una successione $\{f_n\} \subset \mathcal{S}$ di Cauchy, essa è di Cauchy in ogni $\mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}^\ell\right)$, perciò esiste f cui la successione f_n converge uniformemente.

Inoltre, tutte le $D^{\mathbf{k}} f_n$ convergono a $D^{\mathbf{k}} f$ e $f \in \mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ come dimostrato precedentemente. Vediamo adesso che $x^{\mathbf{l}} D^{\mathbf{k}} f_n$ converge uniformemente a $x^{\mathbf{l}} D^{\mathbf{k}} f$. A questo scopo basta notare che la successione $x^{\mathbf{l}} D^{\mathbf{k}} f_n$ converge puntualmente a $x^{\mathbf{l}} D^{\mathbf{k}} f$, ma dovendo ammettere anche limite uniforme, questo è eguale al limite puntuale.
Infine, dobbiamo vedere che

$$\lim_{|x|\to\infty} x^{\mathbf{l}} D^{\mathbf{k}} f = 0$$

a questo scopo basta notare che

$$\left|x^{\mathbf{l}} D^{\mathbf{k}} f\right| \le \left|x^{\mathbf{l}} D^{\mathbf{k}} f_n - x^{\mathbf{l}} D^{\mathbf{k}} f\right| + \left|x^{\mathbf{l}} D^{\mathbf{k}} f\right|$$

dunque, si sceglie n affinché il primo addendo sia inferiore a $\varepsilon/2$, e poi R di modo che per $|x| > R$ il secondo addendo stia sotto $\varepsilon/2$. In definitiva,

Proposizione V.8 *Lo spazio $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ delle funzioni a decrescenza rapida è uno spazio metrico completo.*

Prodotto di convoluzione in $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ Anche su $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ si definisce il prodotto di convoluzione

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^\ell} f(x-y)\, g(y)\, d\mu(y),$$

infatti, all'infinito le due funzioni scendono più rapidamente di $1/|y|^2$. $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ è stabile per convoluzione. Per vederlo cominciamo con lo stimare la quantità

$$\left|D^{\mathbf{l}}(f * g)(x)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^\ell} D^{\mathbf{l}} f(x-y)\, g(y)\, d\mu(y)\right| \le \int_{\mathbb{R}^\ell} \left|D^{\mathbf{l}} f(x-y)\, g(y)\right| d\mu(y)$$

dove $D^{\mathbf{l}}$ commuta con l'integrale, perché le funzioni a decrescenza rapida sono sommabili con derivate sommabili. In definitiva, non resta che mostrare che moltiplicando per x_1, la funzione

$$x_1 (f * g)(x)$$

è ancora limitata, per poi concludere usando l'induzione e il punto (i) della proposizione che caratterizza $\mathcal{S}$: basta notare che

$$|x_1 (f * g)(x)| = |(x_1 f * g)(x) + (f * x_1 g)(x)|$$

Consideriamo ancora una successione regolarizzante χ_n (successione non negativa a valori in $\mathcal{D}$ con integrale sempre 1 e supporto che si stringe entro la palla $1/n$) vogliamo dimostrare che, ancora

$$\mathcal{S} - \lim_{n\to\infty} \chi_n * \varphi = \varphi$$

Abbiamo

$$\begin{aligned}\left|\int [\varphi(x-y) - \varphi(x)]\, \chi_n(y)\, d\mu(y)\right| &\le \int |\varphi(z) - \varphi(x)|\, \chi_n(x-z)\, d\mu(y) = \sup_{|z-x|\le 1/n} |\varphi(z) - \varphi(x)| = \\ &= \sup_{|z-x|\le 1/n} \left|\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x + \theta(z-x))(z-x)\right| \le \sup_x \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right| \frac{1}{n} \to 0\end{aligned}$$

analogamente per le derivate. Invece, per la moltiplicazione per i monomi, basta vedere

$$\begin{aligned}\left|\int [(x-y)\,\varphi(x-y) - x\varphi(x)]\, \chi_n(y)\, d\mu(y)\right| &\le \int |z\varphi(z) - x\varphi(x)|\, \chi_n(x-z)\, d\mu(y) \le \\ &\le \sup_{|z-x|\le 1/n} |z\varphi(z) - x\varphi(x)| \le \\ &\le \sup_{|z-x|\le 1/n} |z\varphi(z) - z\varphi(x)| + \sup_{|z-x|\le 1/n} |z\varphi(x) - x\varphi(x)|\end{aligned}$$

il secondo termine converge banalmente a 0. Per il secondo si sfrutta la limitatezza di $z\partial\varphi/\partial z$ e si usa il teorema del valor medio. Torneremo a usare questo risultato quando mostreremo che $\mathcal{S}$ è denso nel suo duale topologico $\mathcal{S}'$.

Teoremi di densità per $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ Notando che $\mathcal{D}$ è denso in $\mathcal{C}_c\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ che è denso in $L^p\left(\mathbb{R}^\ell\right)$, si ottiene che $\mathcal{D}$ è denso in $L^p\left(\mathbb{R}^\ell\right)$. Infine, essendo $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$, si ottiene che $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ è denso in $L^p\left(\mathbb{R}^\ell\right)$. Inoltre,

Proposizione V.9 *Lo spazio $\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ è denso in $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$.*

Dimostrazione Consideriamo una funzione φ_1 $\mathcal{C}^\infty$ che sia pari a 1 sulla palla $B(0,1)^a$ e poi scenda a zero in modo da avere supporto contenuto in $B(0,2)$. Consideriamo la successione $\varphi_n = \varphi_1(x/n)$. Essa ha supporto in $B(0,2n)$ ed è identicamente eguale a 1 su $B(0,n)^a$.

Sia $\varphi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$. Vogliamo vedere che

$$\mathcal{S} - \lim_{n\to\infty} \varphi\varphi_n = \varphi$$

In questo caso, avremmo la tesi, dal momento che $\varphi\varphi_n \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ per ogni $n \in \mathbb{N}^\times$. Ricordando la regola di Leibniz

$$D^{\mathbf{p}}(fg) = \sum_{|\mathbf{q}|\le|\mathbf{p}|} \binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}} D^{\mathbf{p}-\mathbf{q}} f\, D^{\mathbf{q}} g$$

dove

$$\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}} = \prod_{j=1}^{\ell} \binom{p_j}{q_j},$$

abbiamo

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}^\ell} \left|x^{\mathbf{k}} D^{\mathbf{l}}(\varphi_n\varphi - \varphi)\right| &= \sup_{x\in\mathbb{R}^\ell} \left|\sum_{|\mathbf{j}|\le|\mathbf{l}|} c_{\mathbf{j}} x^{\mathbf{k}}\, D^{\mathbf{j}}\varphi\, D^{\mathbf{l}-\mathbf{j}}(\varphi_n - 1)\right| \le \\
&\le \sum_{|\mathbf{j}|\le|\mathbf{l}|} c_{\mathbf{j}} \sup_{|x|\ge N} \left|x^{\mathbf{k}} D^{\mathbf{j}}\varphi\right| \sup_{x\ge N} \left|D^{\mathbf{l}-\mathbf{j}}(\varphi_n - 1)\right| \le \\
&\le \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{l} c_l^j \sup_{x\in\mathbb{R}^\ell} \left||x|\, x^{\mathbf{k}} D^j \varphi\right| \sup_{x\in\mathbb{R}^\ell} \left|D^{\mathbf{l}-\mathbf{j}}(\varphi_n - 1)\right| =
\end{aligned}$$

Ora, i due estremi superiori sono quantità finite grazie al fatto che $\varphi, \varphi_n \in \mathcal{S}$. Passando al limite per $N \to +\infty$, abbiamo la tesi. **(c.v.d.)**

V.2 Trasformata di Fourier in $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$

V.2.1 La trasformata di Fourier

Cominciamo con l'introdurre la trasformata di Fourier sullo spazio $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$, anziché su $L^1\left(\mathbb{R}^\ell\right)$, per un motivo fondamentale: $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ è Fourier-invariante, a differenza di $L^1\left(\mathbb{R}^\ell\right)$, questo consente di introdurre l'operatore di trasformata e quello di antitrasformata fin da subito, per poi procedere a una loro estensione sullo spazio $L^2\left(\mathbb{R}^\ell\right)$, nel quale, come abbiamo dimostrato, $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ è denso.

È tempo di passare alla

Definizione V.1 *Definiamo le due applicazioni, trasformata di Fourier,*

$$\begin{aligned}
\hat{F}:\ \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right) &\to \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right) \\
f &\mapsto \hat{f}(k) \equiv \int_{\mathbb{R}^\ell} \exp(ik\cdot x)\, f(x)\, d\mu(x)
\end{aligned}$$

e antitrasformata di Fourier

$$\begin{aligned}
\check{F}:\ \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right) &\to \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right) \\
f &\mapsto \check{f}(x) \equiv \frac{1}{(2\pi)^\ell} \int_{\mathbb{R}^\ell} \exp(-ik\cdot x)\, f(k)\, d\mu(k)
\end{aligned}$$

Osservazione V.1 Entrambe le definizioni sono ben poste. Infatti, le intagrande (per ogni k sopra, e x sotto) sono dominate da $f \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right) \subset L^1\left(\mathbb{R}^\ell\right)$.

Derivando sotto segno di integrale si ottiene subito che $\hat{f}$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$. Vediamo che per ogni coppia di multi-indici $\mathbf{n},\mathbf{r}$ si ha che $\hat{f}^{\mathbf{n},\mathbf{r}}$ è una funzione limitata:

$$\begin{aligned}\hat{f}^{\mathbf{n},\mathbf{r}}(k) &= \frac{k^{\mathbf{n}}}{(2\pi)^{\ell/2}} D_k^{\mathbf{r}} \int_{\mathbb{R}^\ell} \exp(ik\cdot x) f(x)\, d\mu(x) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\ell/2}} \int_{\mathbb{R}^\ell} k^{\mathbf{n}} D_k^{\mathbf{r}} \exp(ik\cdot x) f(x)\, d\mu(x)\end{aligned}$$

ma

$$D_k^{\mathbf{r}} \exp(-ik\cdot x) = \prod_{j=1}^{\ell} \frac{\partial^{r_j}}{\partial k_j^{r_j}} \exp(ik_j x_j) = \prod_{j=1}^{\ell} i^{r_j} (x_j)^{r_j} \exp(ik_j x_j) = i^{|\mathbf{r}|} x^{\mathbf{r}} \exp(-ik\cdot x)$$

sicché, passando al modulo ed eliminando così le fasi delle derivazioni

$$\begin{aligned}\left|\hat{f}^{\mathbf{n},\mathbf{r}}(k)\right| &= \left|\frac{1}{(2\pi)^{\ell/2}} \int_{\mathbb{R}^\ell} \left[D_x^{\mathbf{n}} \exp(ik\cdot x)\right] x^{\mathbf{r}} f(x)\, d\mu(x)\right| = \\ &\le \frac{1}{(2\pi)^{\ell/2}} \int_{\mathbb{R}^\ell} \left|D_x^{\mathbf{n}} \left(x^{\mathbf{r}} f(x)\right)\right| d\mu(x) < \infty\end{aligned}$$

dove si è integrato per parti. ▪

Osservazione V.2 Trasformata e antitrasformata sono legate nel modo che segue

$$\check{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^\ell} \overline{\left[\widehat{\bar{f}}(k)\right]}$$

Infatti,

$$\frac{1}{(2\pi)^\ell}\left[\widehat{\bar{f}}(k)\right]^* = \frac{1}{(2\pi)^\ell} \overline{\int_{\mathbb{R}^\ell} \bar{f}(x) e^{ik\cdot x}\, d\mu(x)} = \frac{1}{(2\pi)^\ell} \int_{\mathbb{R}^\ell} f(x) e^{-ik\cdot x}\, d\mu(x) = \check{f}(k)$$

Grazie a questa osservazione, riconduciamo facilmente le proprietà dell'antitrasformata a quelle della trasformata. ▪

Prima di procedere ad esaminare le proprietà più intrinseche delle trasformate di Fourier, vediamo subito alcuni fatti tecnici molto utili:

Proposizione V.10 *Abbiamo*

(i) *teoremi di traslazione,*

$$\begin{aligned} g(x) = e^{ia\cdot x} f(x) &\Longrightarrow \hat{g}(k) = \hat{f}(k+a) \\ g(x) = f(x+a) &\Longrightarrow \hat{g}(k) = e^{-ia\cdot k}\hat{f}(k)\end{aligned}$$

(ii) *teorema di convoluzione,*

$$g(x) = (f * h)(x) \Longrightarrow g(k) = \hat{f}(k)\,\hat{h}(k)$$

(iii) *teorema di parità,*

$$g(x) = f(-x) \Longrightarrow \hat{g}(k) = (2\pi)^\ell \check{f}(k)$$

(iv) *teorema di cambiamento di scala,*

$$g(x) = f(\varepsilon x),\ \varepsilon > 0 \Longrightarrow \hat{g}(k) = \frac{1}{\varepsilon}\hat{f}\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)$$

(v) *teorema di derivazione,*

$$\begin{aligned} g(x) = x_j^n f(x) &\Longrightarrow \hat{g}(k) = (-i)^n \frac{\partial^n}{\partial k_j^n}\hat{f}(k) \\ g(x) = i^n \frac{\partial^n}{\partial x_j^n} f(x) &\Longrightarrow \hat{g}(k) = k_j^n \hat{f}(k)\end{aligned}$$

(vi) *trasformata della gaussiana,*

$$g(x)=\exp\left(-\frac{1}{2}|x|^2\right)\Longrightarrow \hat{g}(k)=(2\pi)^{\ell/2}g(k)$$

Dimostrazione Teoremi di traslazione. Posto $g(x)=e^{ia\cdot x}f(x)$ si ha

$$\hat{F}\left(e^{ia\cdot x}f\right)(k)=\int e^{ia\cdot x}f(x)e^{ik\cdot x}\,d\mu(x)=\int f(x)e^{i(k+a)\cdot x}\,d\mu(x)=\hat{f}(k+a)$$

Posto $g(x)=f(x+a)$ si ha

$$\hat{F}(g)(k)=\int f(x+a)e^{ik\cdot x}\,d\mu(x)=\int f(y)e^{ik\cdot(y-a)}\,d\mu(y)=e^{-ik\cdot a}\hat{f}(k)$$

Convoluzione. Grazie al fatto che $f,g\in L^1$, vale il teorema di Fubini perciò

$$\begin{aligned}\hat{F}(f*g)(k) &= \int d\mu(x)\ e^{ik\cdot x}\int d\mu(y)\ f(x-y)g(y)=\int d\mu(y)g(y)\int d\mu(x)\ e^{ik\cdot x}f(x-y)=\\ &= \int d\mu(y)g(y)\int d\mu(z)\ e^{ik\cdot z}e^{ik\cdot y}f(z)=\hat{f}(k)\int d\mu(y)g(y)e^{ik\cdot y}=\hat{f}(k)\hat{g}(k)\end{aligned}$$

Parità. Posto $g(x)=f(-x)$ si ha

$$\hat{F}(g)(k)=\int f(-x)e^{ik\cdot x}\,d\mu(x)=\int f(y)e^{-ik\cdot y}\,d\mu(y)=(2\pi)^{\ell}\check{F}(f)(k)$$

Cambiamento di scala. Posto $g(x)=f(\varepsilon x)$ si ha

$$\hat{F}(g)(k)=\int f(\varepsilon x)e^{ik\cdot x}\,d\mu(x)=\frac{1}{\varepsilon}\int f(y)e^{ik\cdot y/\varepsilon}\,d\mu(y)=\frac{1}{\varepsilon}\hat{f}\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)$$

Derivazione. Posto $g(x)=x_j^n f(x)$ si ha

$$\begin{aligned}\hat{F}(g)(k) &= \int x_j^n f(x)e^{ik\cdot x}\,d\mu(x)=\frac{1}{i^n}\int f(x)\frac{\partial^n}{\partial k_j^n}e^{ik\cdot x}\,d\mu(x)=\\ &= \frac{1}{i^n}\frac{\partial^n}{\partial k_j^n}\int f(x)e^{ik\cdot x}\,d\mu(x)=(-i)^n\frac{\partial^n}{\partial k_j^n}\hat{f}(k)\end{aligned}$$

Posto $g(x)=i^n\left(\partial^n/\partial x_j^n\right)f(x)$ si ha

$$\begin{aligned}\hat{F}(g)(k) &= i^n\int\frac{\partial^n}{\partial x_j^n}f(x)e^{ik\cdot x}\,d\mu(x)=\\ &= i^n\int_{i\neq j}d\mu(x_i)\ e^{ik_i\cdot x_i}\int d\mu(x_j)\ \frac{\partial^n}{\partial x_j^n}f(x)e^{ik_jx_j}=\\ &= k_j^n\int d\mu(x)\ e^{ik\cdot x}f(x)=k_j^n\hat{f}(k)\end{aligned}$$

Trasformata della gaussiana. Più in generale cerchiamo la trasformata di Fourier di $e^{-a|x|^2}$ abbiamo

$$\int d\mu(x)\ e^{-a|x|^2}e^{ik\cdot x}=\prod_{i=1}^{\ell}\int d\mu(x_i)\ e^{-ax_i^2}e^{ik_ix_i}$$

cioè si tratta di calcolare

$$\hat{F}\left(e^{-ax^2}\right)(k)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}e^{ikx}\,dx$$

L'integrale scritto coincide con l'integrale sulla linea γ, data da $\operatorname{Im}z=0$, di $e^{-az}e^{ikz}$ funzione evidentemente intera. Dunque,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}e^{ikx}\,dx=\int_\gamma e^{-az^2}e^{ikz}\,dz=e^{-k^2/4a}\int_\gamma e^{-\left(\sqrt{a}z-ik/2\sqrt{a}\right)^2}\,dz$$

Consideriamo il rettangolo compreso tra $-r$ e r e tra γ e γ' data da $\operatorname{Im}z=k/2a$. L'integrale sul bordo del rettangolo è nullo, i contributi sui lati verticali si elidono, perciò, passando al limite per $r \to \infty$

$$\int_\gamma e^{-\left(\sqrt{a}z - ik/2\sqrt{a}\right)^2} dz = \int_{\gamma'} e^{-\left(\sqrt{a}z - ik/2\sqrt{a}\right)^2} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

sicché

$$\hat{F}\left(e^{-ax^2}\right)(k) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-k^2/4a}$$

Nel caso in cui $a = 1/2$ si ottiene

$$\hat{F}\left(e^{-ax^2}\right)(k) = \sqrt{2\pi} e^{-k^2/2}$$

(c.v.d.)

Veniamo adesso agli aspetti più rilevanti, a cominciare dal seguente

Teorema V.2 *La mappa $\hat{F}$ è una applicazione lineare, biunivoca di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$ in sé, e la sua inversa è $\check{F}$.*

Dimostrazione La linearità discende in modo banale dalla linearità dell'integrazione.

Veniamo alla iniettività. Date $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$, si ha, per ogni $x \in \mathbb{R}^\ell$, valendo il teorema di Fubini,

$$\begin{aligned}\int g(k) \hat{f}(k) \exp(-ik\cdot x)\, d\mu(k) &= \int d\mu(k)\, g(k) \exp(-ik\cdot x) \int d\mu(z)\, f(z) \exp(ik\cdot z) = \\ &= \int d\mu(z)\, f(z) \int d\mu(k)\, g(k) \exp(ik\cdot(z-x)) = \\ &= \int d\mu(z)\, f(z)\, \hat{g}(z-x) = \int d\mu(z)\, f(z+x)\, \hat{g}(z)\end{aligned}$$

dunque,

$$\begin{aligned}\int g(\varepsilon k) \hat{f}(k) \exp(-ik\cdot x)\, d\mu(k) &= \frac{1}{\varepsilon} \int d\mu(z)\, f(z+x)\, \hat{g}\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) = \\ &= \int d\mu(z)\, f(\varepsilon z + x)\, \hat{g}(z), \ \forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}^\ell\end{aligned}$$

Poniamo adesso

$$g(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}|x|^2\right)$$

e passiamo al limite per $\varepsilon \to 0$ in ambedue i membri, grazie al teorema di Lebesgue (si noti che $|g| \le 1$)

$$\begin{aligned}(2\pi)^\ell \check{F}\hat{F} f &= \int \hat{f}(k) \exp(-ik\cdot x)\, d\mu(k) = f(x) \int d\mu(z)\, \hat{g}(z) = f(x) \int d\mu(z)\, (2\pi)^{\ell/2} g(z) = \\ &= (2\pi)^\ell f\end{aligned}$$

se ne conclude che

$$\check{F}\hat{F} f = f$$

per ogni $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$. Ne deriva l'iniettività. Per quello che riguarda la suriettività,

$$\begin{aligned}\hat{F}^2 f(x) &= (2\pi)^\ell f(-x) \\ \hat{F}^4 f(x) &= (2\pi)^{2\ell} f(x)\end{aligned}$$

perciò

$$\begin{aligned}R\left(\hat{F}^4\right) &= \mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell) \\ R\left(\hat{F}^4\right) &\subset R\left(\hat{F}\right)\end{aligned}$$

(c.v.d.) donde la tesi.

In vista dell'estensione di $\hat{F}$ a $L^2\left(\mathbb{R}^\ell\right)$, riguardiamo $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ come una varietà lineare (densa) in $L^2\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ e studiamo le proprietà topologiche di $\hat{F}$:

Teorema V.3 (identità di Parseval) *Per ogni $f \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ si ha*

$$\left\|\hat{f}\right\| = (2\pi)^{\ell/2}\left\|f\right\|.$$

Dimostrazione Si tratta di dimostrare, equivalentemente, che

$$\left(\hat{f}, \hat{g}\right) = (2\pi)^\ell (f, g), \forall f, g \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right),$$

abbiamo

$$\begin{aligned}(f,g) &= \int \bar{f} g\, d\mu = \int \bar{f} \check{F} \hat{F} g\, d\mu = \frac{1}{(2\pi)^\ell}\int d\mu(x)\, \bar{f}(x) \int d\mu(k)\, e^{-ik\cdot x}\int d\mu(z)\, g(z)\, e^{ik\cdot z} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^\ell}\int d\mu(k)\, \overline{\int d\mu(x)\, f(x)\, e^{ik\cdot x}}\int d\mu(z)\, g(z)\, e^{ik\cdot z} = \frac{1}{(2\pi)^\ell}\int d\mu(k)\, \overline{\hat{f}(k)}\hat{g}(k) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^\ell}\left(\hat{f}, \hat{g}\right)\end{aligned}$$

(c.v.d.)

Ne viene che la trasformata di Fourier è continua nel suo dominio $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ (essendo ivi limitata), grazie al teorema di estensione delle applicazioni continue, si ha che, essendo $\mathcal{S}$ denso in L^2, la trasformata di Fourier si estende ad operatore continuo nello spazio di Hilbert L^2. Quanto detto sarà preciso nella prossima sezione.

Proprietà $\mathcal{S}$-topologiche di $\hat{F}$ A margine, notiamo che la traformata di Fourier è continua su $\mathcal{S}$ anche nella topologia di $\mathcal{S}$ (finora abbiamo esaminato le proprietà topologiche indotte dalla metrica L^2 su $\mathcal{S}$).

Lemma V.3 *Sia $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{S}$ una successione tale che esiste $\varphi \in \mathcal{S}$ per cui*

$$\varphi = \mathcal{S} - \lim_{n\to\infty}\varphi_n$$

allora

$$\varphi = L^1 - \lim_{n\to\infty}\varphi_n$$

Dimostrazione Abbiamo

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int\left|\varphi(x) - \varphi_n(x)\right| d\mu &= \lim_{n\to\infty}\int\frac{1}{1+|x|^2}\left(1+|x|^2\right)\left|\varphi(x)-\varphi_n(x)\right| d\mu \le \\ &\le \int\frac{1}{1+|x|^2}\, d\mu \lim_{n\to\infty}\left[\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi-\varphi_n| + \sup_{x\in\mathbb{R}}|x|^2|\varphi-\varphi_n|\right]\end{aligned}$$

Il limite è nullo essendo

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi-\varphi_n| + \sup_{x\in\mathbb{R}}|x|^2|\varphi-\varphi_n| \le \|\varphi-\varphi_n\|_{0,0} + \|\varphi-\varphi_n\|_{2,0} \to 0$$

(c.v.d.)

Teorema V.4 *La trasformata di Fourier in $\mathcal{S}$ è un'applicazione continua rispetto alla convergenza di $\mathcal{S}$.*

Dimostrazione Sia φ_n una successione di funzioni a decrescenza rapida convergenti a $\varphi \in \mathcal{S}$ nella metrica di $\mathcal{S}$.

Allora, usando il lemma precedente

$$\left\|\hat{\varphi}(x) - \hat{\varphi}_n\right\|_{0,0} = \sup_{k\in\mathbb{R}^\ell}\left|\int_{\mathbb{R}^\ell} e^{ik\cdot x}\left(\varphi(x) - \varphi_n(x)\right) d\mu\right| \le \|\varphi - \varphi_n\|_{L^1} \to 0$$

Notiamo che

$$k^r\frac{d^s}{dk^s}\left(\hat{\varphi}(k) - \hat{\varphi}_n(k)\right) = \hat{F}\left[i^{r+s}\frac{d^r}{dx^r}\left(x^s\left(\varphi - \varphi_n\right)\right)\right]$$

Siccome l'argomento di $\hat{F}$ converge uniformemente a 0, per quanto visto sopra, così farà il primo membro. Sicché abbiamo la tesi. **(c.v.d.)**

V.3 Trasformata di Fourier in $L^2\left(\mathbb{R}^\ell\right)$

V.3.1 Estensione della trasformata di Fourier allo spazio $L^2\left(\mathbb{R}^\ell\right)$

Teorema di estensione

Gli operatori $\hat{F}$ e $\check{F}$ sono limitati sullo spazio $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$, dunque per il teorema dell'estensione continua degli operatori continui, esistono unici due operatori che estendono $\hat{F}$ e $\check{F}$ a $L^2\left(\mathbb{R}^\ell\right)$. Tali estensioni sono, a meno di un fattore, operatori unitari e se F estende $\hat{F}$ l'estensione di $\check{F}$ è F^{-1}.

Estensione dell'antitrasformata e unitarietà della trasformata

Infatti, sappiamo che esiste F che estende $\hat{F}$ e che F ha norma pari a quella di $\hat{F}$, cioè $\|F\| = (2\pi)^{\ell/2}$. L'operatore F è definito nel seguente modo: sia $f \in L^2\left(\mathbb{R}^\ell\right)$, sia $\{f_n\} \subset \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ una successione di funzioni convergente a f (la cui esistenza è dovuta alla densità di $\mathcal{S}$ in L^2), allora

$$Ff = \lim_{n\to\infty} \hat{F} f_n.$$

Analogamente si procede per $\check{F}$, costruendo $\tilde{F}$ avente norma $1/(2\pi)^{\ell/2}$, su $L^2\left(\mathbb{R}^\ell\right)$. Mostriamo adesso che $(2\pi)^\ell \tilde{F}$ è l'aggiunto di F. Siano $f, g \in L^2\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ e siano $f_n, g_n \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ le rispettive approssimanti, allora

$$(Ff, g) = \left(\lim_{n\to\infty} \hat{F} f_n, \lim_{n\to\infty} g_n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\hat{F} f_n, g_n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(f_n, (2\pi)^\ell \check{F} g_n\right) = \left(f, (2\pi)^\ell \tilde{F} g\right)$$

quindi

$$(2\pi)^\ell \tilde{F} = F^*.$$

Ora,

$$\begin{aligned} F\tilde{F}f &= \lim_{n\to\infty} F\tilde{F}f_n = \lim_{n\to\infty} \hat{F}\check{F}f_n = \lim_{n\to\infty} f_n = f \\ \tilde{F}Ff &= \lim_{n\to\infty} \tilde{F}Ff_n = \lim_{n\to\infty} \check{F}\hat{F}f_n = \lim_{n\to\infty} f_n = f \end{aligned}$$

Se adesso poniamo

$$\hat{U} \equiv \frac{F}{(2\pi)^{\ell/2}};\ \check{U} \equiv (2\pi)^{\ell/2} \tilde{F}$$

abbiamo

$$\hat{U}^{-1} = \check{U}$$

e

$$\hat{U}^* = \frac{(2\pi)^\ell \tilde{F}}{(2\pi)^{\ell/2}} = (2\pi)^{\ell/2} \tilde{F} = \check{U}$$

perciò $\hat{U}, \check{U}$ sono l'uno l'aggiunto e l'inverso dell'altro, cioè sono operatori unitari.

Trasformata e antitrasformata in $L^2\left(\mathbb{R}^\ell\right)$

L'operatore unitario F di $L^2\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ si dice **trasformata di Fourier** in $L^2\left(\mathbb{R}^\ell\right)$, il suo inverso $\tilde{F}$, si dice **antitrasformata di Fourier** in $L^2\left(\mathbb{R}^\ell\right)$.

V.3.2 Trasformata di Fourier in $L^1\left(\mathbb{R}^\ell\right)$

Utilità dell'estensione a L^1 della trasformata di Fourier

La formula con la quale abbiamo definito trasformata e antitrasformata in $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ non vale più in $L^2\left(\mathbb{R}^\ell\right)$, anzi in quest'ultimo spazio, può non avere alcun senso, perciò si deve utilizzare la costruzione tramite le approssimanti.
In ogni modo, la formula integrale resta valida in $L^1\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ perciò ha un qualche interesse andare ad esaminare la trasformata in tale spazio.
L'estensione di $\hat{F}$ a $L^1\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ avviene ancora grazie al teorema di estensione degli operatori

lineari continui definiti su un denso. Useremo questo teorema in modo leggermente diverso da quanto fatto sopra, ne ricordiamo la formulazione completa data nel capitolo "Teoria degli operatori lineari":

Teorema V.5 (di estensione) *Siano X e Y spazi di Banach e sia $A \in \mathcal{O}(X,Y)$ con $D(A) \neq X$. Se A è continuo sul dominio, allora esiste uno e un solo operatore $\bar{A} \in \mathcal{O}(X,Y)$ tale che*

(i) $D\left(\bar{A}\right) = [D(A)]^a$;

(ii) $A \subset \bar{A}$;

(iii) $\bar{A}$ *è continuo.*

Vale, infine, $\left\|\bar{A}\right\| = \|A\|$.

Sia $X = L^1\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ e sia $Y = \mathcal{C}_\infty\left(\mathbb{R}^\ell\right)$, l'insieme delle funzioni continue che si annullano all'infinito, normato con la norma del sup. Ora, sia $f \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$, abbiamo

$$\begin{aligned} \left|\int f(x)\, e^{ik\cdot x}\, d\mu(x)\right| &\leq \int \left|f(x)\, e^{ik\cdot x}\right| d\mu(x) \leq \int |f(x)|\, d\mu(x) \\ \left\|\hat{f}\right\|_\infty &\leq \|f\|_{L^1} \end{aligned}$$

da cui $\hat{F} \in \mathcal{O}\left(L^1, \mathcal{C}_\infty\right)$ (il range di $\hat{F}$ è $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}_\infty$) è continuo, poiché limitato sul domino $\mathcal{S}$. Inoltre, $D\left(\hat{F}\right)^a = \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right)^a = L^1\left(\mathbb{R}^\ell\right)$, perciò esiste $F_1 \in L\left(L^1, \mathcal{C}_\infty\right)$ che estende in modo continuo l'operatore $\hat{F}$. Per completezza mostriamo il seguente

Teorema V.6 *Lo spazio $\mathcal{C}_\infty\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ delle funzioni continue che hanno limite nullo all'infinito, normato dalla*

$$\|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}^\ell} |f|$$

è uno spazio di Banach.

Dimostrazione Sia $\{f_n\} \subset \mathcal{C}_\infty$ una successione di Cauchy. Allora, siccome $\mathcal{C}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ è uno spazio di Banach nella norma uniforme, esiste f tale che

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}^\ell} |f_n - f| \to 0$$

Si tratta di vedere che f è infinitesima all'infinito. Abbiamo

$$|f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty + |f_n(x)|$$

Scegliamo n affinché il primo addendo sia minore di $\varepsilon/2$ e $|x| > M$ affinché il secondo sia inferiore a $\varepsilon/2$ per avere la tesi.

(c.v.d.)

Dimostrazione del lemma di Riemann-Lebesgue Vogliamo adesso dare forma esplicita all'operatore F_1: esso esiste ed è unico per quello che abbiamo dimostrato sopra. Perciò, se ne esibiamo uno, esso è F_1. Diciamo che F_1 ha la stessa forma di $\hat{F}$

$$F_1 f = \int f(x)\, e^{ik\cdot x}\, d\mu(x)$$

Esso è certo un'estensione di $\hat{F}$, ci basta mostrare che si tratta di un'estensione continua con range in $\mathcal{C}_\infty$. Il fatto che sia continuo è ovvio dalla stima fatta in $\mathcal{S}$ che vale pure in L_1, resta da vedere che $F_1 f \in \mathcal{C}_\infty$. Ora, la continuità di $F_1 f$ discende dal teorema della convergenza dominata in modo banale (si scambiano limite e integrale). Per quanto concerne la tendenza a 0 all'infinito di $F_1 f$ si può procedere sfruttando la densità di $\mathcal{S}$ in L^1: sia $f_n \in \mathcal{S}$ una successione convergente a f, allora

$$\sup_k |F_1 f(k) - F_1 f_n(k)| \leq \|f - f_n\|_{L_1} \to 0$$

perciò $F_1 f$ è limite uniforme di $F_1 f_n = \hat{F} f_n \in \mathcal{S} \subset \mathcal{C}_\infty$, per il teorema precedente, $F_1 f \in \mathcal{C}_\infty$.

Il risultato secondo cui $F_1 f$ è infinitesima all'infinito è generalmente indicato come **lemma di Riemann-Lebesgue**.

Iniettività di F_1

Mostriamo, ancora, che F_1 è un operatore iniettivo (ma non suriettivo). Sia $F_1 f = 0$. Per ogni $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$ vale allora

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^\ell} F_1 f(k)\, g(k)\, d\mu(k) = \int_{\mathbb{R}^\ell} d\mu(k) \left[\int_{\mathbb{R}^\ell} f(x)\, e^{ik\cdot x} d\mu(x)\right] g(k) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^\ell} d\mu(x)\; f(x) \int_{\mathbb{R}^\ell} g(k)\, e^{ik\cdot x}\, d\mu(k) = \int_{\mathbb{R}^\ell} f(x)\, \hat{g}(x)\, d\mu(x) \end{aligned}$$

sicché

$$0 = \int_{\mathbb{R}^\ell} (F_1 f)\, g\, d\mu = \int_{\mathbb{R}^\ell} f \hat{g}\, d\mu$$

Poiché $\hat{F}$ è suriettiva, per ogni $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$ si ha

$$0 = \int_{\mathbb{R}^\ell} f h\, d\mu$$

da cui

$$0 = \int_{\mathbb{R}^\ell} f h\, d\mu,\ \forall h \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^\ell)$$

Sia $D_n \equiv B(0,n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e sia χ_n la funzione caratteristica di D_n. Definita la funzione segno (nulla per $f = 0$) che risulta di modulo inferiore a 1 e misurabile (come prodotto di funzioni q.o. misurabili) si ha che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\chi_n \operatorname{sign} f \in L^1$ è approssimabile con una successione $\{h_i\} \subset \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^\ell)$ (con le h_i di modulo minore a 1). Allora, dal teorema di Lebsegue

$$\int_{D_n} |f|\, d\mu = \int_{D_n} f \operatorname{sign} f\, d\mu = \int_{\mathbb{R}^\ell} \chi_n f \operatorname{sign} f\, d\mu = \lim_{i\to\infty} \int f h_i\, d\mu = 0$$

Perciò f è q.o. nulla su ogni D_n, poiché

$$\mathbb{R}^\ell = \bigcup_n D_n$$

si conclude che f è q.o. nulla in $\mathbb{R}^\ell$, perciò $f = 0$.

Relazione tra la trasformata di Fourier in L^1 e in L^2

Ovviamente F_1 si dice trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R}^\ell)$. Vogliamo adesso dimostrare che se $f \in L^1(\mathbb{R}^\ell) \cap L^2(\mathbb{R}^\ell)$, allora

$$Ff = F_1 f$$

Comiciamo col considerare la successione di funzioni $f_n = \chi_n f$: essa converge a f sia in L^1 che in L^2: in L^2 abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^\ell} |f - f_n|^2\, d\mu &= \int_{\mathbb{R}^\ell} |f - f\chi_n|^2\, d\mu = \int_{\mathbb{R}^\ell \setminus D_n} |f|^2\, d\mu = \\ &= \int_{\mathbb{R}^\ell} \left|f\chi_{D_n^C}\right|^2\, d\mu \end{aligned}$$

La successione $f\chi_{D_n^C}$ tende puntualmente a zero ed è dominata da $|f|^2 \in L^1$, perciò dal teorema di Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} \int |f - f_n|^2\, d\mu = 0$$

Analogamente, in L^1

$$\int |f - f_n|\, d\mu = \int_{\mathbb{R}^\ell} |f - f_n|\, d\mu = \int_{\mathbb{R}^\ell} |f - f\chi_n|\, d\mu = \int_{\mathbb{R}^\ell} \left|f\chi_{D_n^C}\right|\, d\mu \to 0$$

Grazie alla densità di $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^\ell)$ in L^p possiamo trovare, per ogni n, $\varphi_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^\ell)$, tale che

$$\|f_n - \varphi_n\|_{L^2} \le \frac{1}{n\mu^{1/2}(D_n)}$$

possiamo inoltre supporre che il supporto di φ_n sia contenuto in D_n e allora, grazie alla diseguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\|f_n - \varphi_n\|_{L^1} = \int_{D_n} |f - \varphi_n| \, d\mu \leq \|f_n - \varphi_n\|_{L^2} \mu^{1/2} (D_n) \leq \frac{1}{n}$$

da cui abbiamo che φ_n tende a f sia in senso L^1 che in senso L^2. Essendo anche una funzione di Schwartz, abbiamo

$$F_1 f = \lim_{n\to\infty} \hat{F}\varphi_n = Ff$$

Riassumendo

Teorema V.7 (di Riemann-Lebsegue) *L'operatore lineare $\hat{F}$ si estende in modo unico a un operatore lineare, iniettivo e continuo*

$$\begin{array}{rccl} F_1 : & L^1 \left(\mathbb{R}^\ell\right) & \to & \mathcal{C}_\infty \left(\mathbb{R}^\ell\right) \\ & f(x) & \mapsto & F_1 f(k) = \dfrac{1}{(2\pi)^{\ell/2}} \displaystyle\int f(x) \, e^{-ik\cdot x} d\mu(x) \end{array}$$

Se poi $f \in L^1 \left(\mathbb{R}^\ell\right) \cap L^2 \left(\mathbb{R}^\ell\right)$, allora $Ff = F_1 f$.

Dimostrazione Completata in più passi sopra.

(c.v.d.)

Nel corso della dimostrazione del teorema di sopra abbiamo dimostrato un risultato che vogliamo rimarcare

Lemma V.4 (di Dubois-Reymond) *Se f è una funzione su $\mathbb{R}^\ell$ integrabile su ogni sottoinsieme misurabile limitato (cioè f è localmente sommabile, i.e., $f \in L^1_{\mathrm{loc}} \left(\mathbb{R}^\ell\right)$) e vale*

$$\int_{\mathbb{R}^\ell} fh \, d\mu = 0, \, \forall h \in \mathcal{C}_c^\infty \left(\mathbb{R}^\ell\right)$$

allora $f = 0$ quasi ovunque.

In modo analogo si dimostra un teorema di Riemann-Lebesgue per l'antitrasformata di Fourier su L^1. Ovviamente, se è $\tilde{F}_1$ l'antitrasformata su L^1, $\tilde{F}_1 \neq F_1^{-1}$ (nel modo più assoluto!), si ha

$$\tilde{F}_1 f(x) = \frac{1}{(2\pi)^\ell} \int f(k) \, e^{-ik\cdot x} d\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^\ell} \overline{\left(F_1 \bar{f}\right)}$$

Forma esplicita della trasformata di Fourier in L^2 Infine, volendo una forma più esplicita per l'operatore F, notiamo che se $f \in L^2 \left(\mathbb{R}^\ell\right)$, allora $f_n = f\chi_n$ appartiene a $L^1 \left(\mathbb{R}^\ell\right) \cap L^2 \left(\mathbb{R}^\ell\right)$ (usando come sempre Cauchy-Schwarz) e converge in norma L^2 a f, perciò

$$Ff(k) = L^2 - \lim_{n\to\infty} Ff_n = L^2 - \lim_{n\to\infty} F_1 f_n = L^2 - \lim_{n\to\infty} \int_{B(0,n)} e^{ik\cdot x} f(x) \, d\mu(x)$$

cioè $Ff(k)$ è il limite in senso L^2 della successione di funzioni di L^2

$$g_n(k) = \int_{B(0,n)} e^{ik\cdot x} f(x) \, d\mu(x)$$

Va da sé che se $g(k)$ è limite puntuale di $g_n(k)$ quasi ovunque, allora, siccome $g_n(k)$ ammette limite in senso L^2 a $Ff(k)$, ammette pure una sottosuccessione che converge puntualmente a $Ff(k)$ quasi ovunque. Ma allora, quasi ovunque,

$$g(k) = Ff(k)$$

perciò, se per quasi ogni k fissato esiste

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} e^{ikx} f(x) \, d\mu(x) = P_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} f(x) \, d\mu(x) = g(k)$$

allora

$$Ff(k) = P_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} f(x) \, d\mu(x), \text{ q.o.}$$

dove P_∞ è la parte principale dell'integrale.

Inversione della trasformata di Fourier in L^2

Ci aspettiamo che

$$F^{-1}g(x) = L^2 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^\ell} \int_{B(0,n)} e^{-ik\cdot x} g(k)\, d\mu(k) = \frac{1}{(2\pi)^\ell} \overline{(F\bar{g})}$$

Per mostrare questo bisogna vedere che, se $f = \overline{F\bar{g}}$, allora

$$\hat{f} = Ff = g$$

cioè

$$\left\|\hat{f} - g\right\|_{L^2} = 0$$

Tuttavia

$$\begin{aligned}\left\|\hat{f} - g\right\|_{L^2} &= \left\|\hat{f}\right\|_{L^2} + \|g\|_{L^2} - \left(\hat{f}, g\right) - \left(g, \hat{f}\right) = \|f\|_{L^2} + \|g\|_{L^2} - \left(\hat{f}, g\right) - \left(g, \hat{f}\right) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^\ell} \left\|\overline{F\bar{g}}\right\|_{L^2} + \|g\|_{L^2} - \left(\hat{f}, g\right) - \left(g, \hat{f}\right) = 2\|g\|_{L^2} - 2\,\mathrm{Re}\left(g, \hat{f}\right)\end{aligned}$$

d'altra parte, grazie al fatto che sulle palle finite le funzioni L^2 sono L^1, si può scambiare l'ordine di integrazione e trovare

$$\begin{aligned}\left(g, \hat{f}\right) &= \lim_{n\to\infty} (g_n, F_1 f_n) = \lim_{n\to\infty} \int d\mu(k) \int d\mu(x)\, e^{ikx} f_n(x) \overline{g_n(k)} = \lim_{n\to\infty} \left(\overline{f_n}, F_1 \overline{g_n}\right) = \\ &= \left(\bar{f}, F\bar{g}\right) = (F\bar{g}, F\bar{g}) = (g, g)\end{aligned}$$

da cui la tesi.

V.3.3 Il teorema di Payley-Wiener

Come abbiamo visto le trasformate di Fourier di funzioni a decrescenza rapida sono a decrescenza rapida. Vogliamo adesso caratterizzare, tra le funzioni a decrescenza rapida, quelle che sono trasformate di Fourier di funzioni $\mathcal{C}_c^\infty$. A questo scopo mostriamo il seguente

Teorema V.8 (di Payley-Wiener)

Le trasformate di Fourier delle funzioni di $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ formano lo spazio lineare delle funzioni g intere (olomorfe su $\mathbb{C}$) che soddisfano alla seguente condizione: esistono un reale non negativo a e, per ogni intero k, delle costanti $c_k > 0$ tali che

$$|g(\lambda)|\,|\lambda|^k \le c_k e^{a|\mathrm{Im}\,\lambda|}$$

L'insieme delle funzioni così individuate prende il nome di classe di Payley-Wiener.

Dimostrazione

Sia $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ e sia $\operatorname{supp} f \subset [-b, b]$. Allora la funzione

$$g(\lambda) = \int_{-b}^{b} e^{i\lambda x} f(x)\, dx$$

è una funzione intera che estende in modo unico su $\mathbb{C}$ la trasformata di Fourier di f. Sviluppando, infatti, l'esponenziale, si ottiene

$$g(\lambda) = \int_{-b}^{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\lambda x)^n}{n!} f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} d_n$$

con

$$d_n \equiv \int_{-b}^{b} (ix)^n f(x)\, dx$$

da cui

$$|d_n| \le 2\|f\|_\infty b^n$$

perciò la serie a secondo membro sopra converge per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$. Dunque, siccome g è olomorfa su $\mathbb{C}$ ed estende $\hat{f}$, si ha che g è unica. Usando ripetutamente l'integrazione per parti, si ottiene

$$\left(\frac{\lambda}{i}\right)^k g(\lambda) = \int_{-b}^{b} e^{i\lambda x} f^{(k)}\, dx$$

quindi

$$\begin{aligned} |\lambda|^k |g(\lambda)| &\leq 2\left\| f^{(k)} \right\|_\infty \int_0^b e^{|\mathrm{Im}\,\lambda| x}\, dx \leq 2\left\| f^{(k)} \right\|_\infty e^{|\mathrm{Im}\,\lambda| b} \int_0^b dx = \\ &= 2b \left\| f^{(k)} \right\|_\infty e^{|\mathrm{Im}\,\lambda| b} \end{aligned}$$

come si voleva.

Vediamo il viceversa. Sia g intera e verifichi la condizione di Payley-Wiener. Allora, la sua restrizione all'asse reale (che chiameremo ancora g) è $\mathcal{C}^\infty$, inoltre, dalle condizioni Payley-Wiener, per ogni k

$$x^k g(x) \to 0,\ \forall k \in \mathbb{N}$$

Siccome, in particolare $g \to 0$, si può applicare il teorema dell'Hôpital

$$x^{k+1} g'(x) \to 0$$

per induzione si ha che le derivate di g scendono più rapidamente dei polinomi, dunque, $g \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ e si può considerare $f = \check{F} g$. Si ha ovviamente che $f \in \mathcal{C}^\infty$, vediamo adesso che f ha supporto compatto. Applichiamo il metodo dei residui. Dobbiamo calcolare, per ogni x

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} g(\lambda)\, d\lambda$$

Consideriamo i rettangoli aventi un lato sull'asse reale, tra $-R$ e R, e uno su una parallela all'asse reale. La circuitazione di $e^{-i\lambda x} g(\lambda)$ su tali rettangoli è nulla. Passando al limite per $R \to \infty$, abbiamo che i contributi sui lati verticali si annullano, perciò gli integrali sulle rette parallele all'asse reale sono eguali. Siccome, posto $\lambda \equiv \lambda' + i\lambda''$, si ha

$$e^{-i\lambda x} = e^{-i\lambda' x} e^{\lambda'' x}$$

allora scegliamo di integrare su una retta avente $\lambda'' x < 0$. Preso $t > 0$ abbiamo

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} g(\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R} - it\,\mathrm{sign}\,x} e^{-i\lambda x} g(\lambda)\, d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda' x} e^{-t|x|} g\left(\lambda' - it\,\mathrm{sign}\,x\right) d\lambda' \end{aligned}$$

Ora,

$$\begin{aligned} |g| &\leq c_0 e^{at} \\ |g| &\leq \frac{c_2}{|\lambda|^2} e^{at} \leq \frac{c_2}{\lambda'^2} e^{at} \end{aligned}$$

perciò possiamo dominare $g\left(\lambda' - it\,\mathrm{sign}\,x\right)$ con una funzione L^1 che chiameremo $h\left(\lambda'\right) e^{at}$. Allora

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} e^{-t|x|} e^{at} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| h\left(\lambda'\right) \right| d\lambda' = \frac{1}{2\pi} e^{-t(|x| - a)} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| h\left(\lambda'\right) \right| d\lambda'$$

perciò, per $|x| > a$, passando al limite per $t \to \infty$ si ottiene

$$|f(x)| = 0$$

(c.v.d.) da cui f ha supporto compatto.

V.3.4 Alcune proprietà della trasformata di Fourier

Utilizzando il teorema di estensione, possiamo riformulare alcune della asserzioni di cui nella proposizione V.10.

Traslazione Sia T_a l'operatore di traslazione di a su $L^i(\mathbb{R}^\ell)$, $i \in J_2$:

$$(T_a f)(x) = f(x-a)$$

e sia U_a l'operatore

$$(U_a f)(x) = e^{ia\cdot x} f(x)$$

allora, i due operatori sono continui e inoltre

$$FT_a = U_a F$$

Infatti, sia $f \in L^2(\mathbb{R}^\ell)$ e sia $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$ una successione di approssimanti, allora

$$FT_a f = Ff(x-a) = \lim_{n\to\infty} \hat{F} f_n(x-a) = e^{ia\cdot x} \lim_{n\to\infty} \hat{F} f_n(x) = U_a F f$$

Parità Se I è l'operatore di parità, tale cioè che

$$If(x) = f(-x)$$

allora, I è un operatore continuo e si ha

$$F^2 = (2\pi)^\ell I$$

infatti,

$$FIf = \lim_{n\to\infty} \hat{F} f_n(-x) = (2\pi)^\ell \lim_{n\to\infty} \check{F} f_n(x) = (2\pi)^\ell F^{-1} f$$

perciò

$$F^2 I = (2\pi)^\ell \mathbb{I} \Leftrightarrow F^2 = (2\pi)^\ell I$$

e, quindi,

$$F^4 = (2\pi)^{2\ell} \mathbb{I}$$

Derivazione Più complicato il rapporto tra derivazione e trasformata di Fourier. Invece di assumere un punto di vista operatoriale, come sopra, lavoriamo solo in casi speciali (sarebbe altrimenti richiesto di definire con opportune estensioni gli operatori di derivazione e moltiplicazione). Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$, vogliamo vedere quando la sua trasformata di Fourier, $g(k) = F_1 f$, oltre che, come sappiamo, essere continua, è derivabile. A questo scopo, calcoliamone il rapporto incrementale (oppure usiamo il teorema di derivazione sotto segno la cui dimostrazione sarà data tra poco)

$$\frac{g(k+\varepsilon) - g(k)}{\varepsilon} = i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \frac{e^{i\varepsilon x} - 1}{ix\varepsilon} (xf(x))\, d\mu(x)$$

Applichiamo il teorema di Lebesgue, notando che

$$\left| \frac{e^{ix\varepsilon} - 1}{ix\varepsilon} \right| = \frac{|\cos(\varepsilon x) - 1| + |\sin(\varepsilon x)|}{\varepsilon |x|} \le \sup_{\mathbb{R}} \frac{|\cos(\varepsilon x) - 1|}{\varepsilon |x|} + \sup_{\mathbb{R}} \frac{|\sin(\varepsilon x)|}{\varepsilon |x|} \le 2$$

Abbiamo, se $xf \in L^1$ si ha

$$\frac{dg}{dk} = F_1(ixf)$$

Proposizione V.11 *Se $f, xf, \ldots, x^k f \in L^1(\mathbb{R})$ allora $g = F_1 f$ è una funzione $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^\ell)$ e*

$$\frac{d^n g}{dk^n} = F_1\left((ix)^n f\right)$$

tutte le derivate dette sono infinitesime all'infinito.

Vediamo adesso i risultati *simmetrici*. Sia $f \in L^1 \cap \mathcal{C}^1$ e sia $df/dx \in L^1$ allora

$$F_1 f' = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\, e^{ikx}\, dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} ikf(x)\, e^{ikx}\, dx = -ikF_1 f$$

dove si è integrato per parti, notando che

$$f \in L^1 \cap \mathcal{C}^1 \& \frac{df}{dx} \in L^1 \Rightarrow f \in \mathcal{C}_\infty$$

Infatti, siccome $f \in \mathcal{C}^1$ si ha

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\ dt$$

Ora, il limite per $x \to \infty$ del secondo membro esiste finito, perciò esiste finito il limite di f per $x \to \infty$. Ne viene che esiste

$$\ell = \lim_{x \to +\infty} |f(x)|$$

Se tale limite fosse maggiore o eguale a 0, allora da un certo punto in poi $|f| > \varepsilon$ e perciò non sarebbe sommabile, il che è assurdo.
In definitiva,

Proposizione V.12 *Se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ e $f^{(i)} \in L^1(\mathbb{R})$ per $i = 1, \ldots, k$ allora*

$$F_1\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right) = (-ik)^n F_1(f)$$

e, inoltre, $(-ik)^n F_1(f)$ è limitata, perciò $F_1(f)$ scende come $1/k^n$ per $k \to \infty$

Ritroviamo la chiusura di $\mathcal{S}$ per trasformata e antitrasformata di Fourier.

V.4 Trasformata di Laplace

V.4.1 Definizione e prime proprietà

La trasformata di Laplace è stretta parente della trasformata di Fourier, ma ha applicazioni indipendenti e presenta alcune novità interessanti. Dunque, la introduciamo:

Definizione V.2 *Sia f una funzione localmente sommabile su $(0, +\infty)$, allora si dice trasformata di Laplace di f la funzione del piano complesso in sé*

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(x)\, e^{-sx} dx$$

definita su tutti i punti $s \in \mathbb{C}$ per i quali l'integrale della formula di sopra è finito.

Il dominio di esistenza della trasformata di Laplace ha qualche analogia con il dominio di convergenza delle serie di potenze. Vale, infatti, la seguente

Proposizione V.13 *Se la trasformata di Laplace $F(s)$ di $f(x)$ è definita in $s_0 \in \mathbb{C}$, allora è definita in tutto il semipiano*

$$\operatorname{Re} s \geq \operatorname{Re} s_0$$

Dimostrazione D'ora in poi assumiamo la seguente convenzione per indicare parte reale e parte immaginaria di un numero complesso s

$$\operatorname{Re} s = s';\ \operatorname{Im} s = s''$$

Si vuole dunque dimostrare che se

$$f(x)\, e^{-s_0 x} \in L^1(0, +\infty)$$

allora per ogni $s' > s'_0$ risulta

$$f(x)\, e^{-sx} \in L^1(0, +\infty)$$

D'altra parte, la funzione $f(x)\, e^{-sx}$, essendo localmente sommabile, è misurabile sul semiasse reale positivo, inoltre,

$$\left|f(x)\, e^{-sx}\right| = \left|f(x)\, e^{-s'x}\right| \leq \left|f(x)\, e^{-s'_0 x}\right| \leq \left|f(x)\, e^{-s_0 x}\right| \in L^1$$

(c.v.d.) da cui la tesi.

Ne viene che se $f(x)$ è sommabile, allora certamente la sua trasformata di Laplace esisterà per ogni $\operatorname{Re} s \geq 0$. L'estremo inferiore delle $\operatorname{Re} s$ alle quali si ha esistenza della trasformata di Laplace si dice **ascissa di convergenza** della trasformata e si indica solitamente con λ. Dunque, se $f \in L^1$, allora $\lambda \leq 0$. Presentiamo adesso un criterio di trasformabilità

Proposizione V.14 *Se f è localmente sommabile, $f(x) = 0$ per $x < 0$ ed esistono tre costanti $M > 0, x_0, k$ tali che*

$$|f(x)| \leq M e^{kx}, \ \forall x \geq x_0$$

allora f è Laplace trasformabile e si ha $\lambda \leq k$ se λ è l'ascissa di convergenza di f.

Dimostrazione Abbiamo

$$\int_0^{+\infty} \left|f(x) e^{-sx}\right| dx = \int_0^{x_0} \left|f(x) e^{-sx}\right| dx + \int_{x_0}^{+\infty} \left|f(x) e^{-sx}\right| dx$$

Il primo integrale esiste poiché f è localmente sommabile. Per quanto riguarda il secondo, abbiamo

$$\left|f(x) e^{-sx}\right| = |f(x)| e^{-s'x} \leq M e^{-\left(s'-k\right)} x$$

che è sommabile per ogni s tale che

$$s' = \operatorname{Re} s > k$$

perciò

$$\lambda \leq k.$$

(c.v.d.)

Esempio V.1 La funzione di Heaviside $\theta(x)$ è certamente Fourier trasformabile se $s' > 0$. Infatti, in tal caso

$$\mathcal{L}(\theta)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx}\, dx = \frac{1}{s}$$

Viceversa, se $s' \leq 0$, la trasformata di Laplace di $\mathcal{L}$ non è definita e perciò $\lambda = 0$.Un altro modo istruttivo per dirimere la questione dell'ascissa di convergenza è il seguente: vedremo tra un po' che la trasformata di Laplace è olomorfa nel semipiano di convergenza. Perciò se $\mathcal{L}(\theta)(s)$ avesse $\lambda < 0$ dovrebbe essere olomorfa nell'origine. D'altra parte, $\mathcal{L}(\theta)(s) = 1/s$ per $s' > 0$. Dal teorema di estensione abbiamo che $\mathcal{L}(\theta)(s)$ dovrebbe essere pari a $1/s$ anche per $\lambda < \operatorname{Re} s \leq 0$, ma questo è assurdo perché $1/s$ presenta un polo nell'origine.

Ascissa di convergenza ed olomorfia della trasformata L'esempio di sopra mostra dunque un fatto del tutto generale: l'ascissa di convergenza della trasformata di Laplace di f è la massima compatibile con le singolarità dell'estensione a $\mathbb{C}$ della trasformata di Laplace determinata in un qualsiasi semipiano.

Vediamo alcuni risultati tecnici a proposito della trasformata di Laplace

Teorema V.9 (di traslazione) *Sia $\mathcal{L}(f)(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(x)$. Sia λ l'ascissa di convergenza. Allora*

$$\mathcal{L}\left(e^{cx} f(x)\right) = \mathcal{L}(f)(s-c)$$

e $e^{cx} f(x)$ ha ascissa di convergenza pari a $\lambda + \operatorname{Re} c$

Inoltre,

$$\mathcal{L}(f(x-a)\,\theta(x-a))(s) = e^{-sa} \mathcal{L}(f)(s)$$

Dimostrazione Abbiamo

$$\mathcal{L}\left(e^{cx} f(x)\right) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-(s-c)x}\, d\mu(x) = \mathcal{L}(f)(s-c)$$

inoltre, dovendo essere

$$\mathrm{Re}\,(s-c) > \lambda$$

si ha che l'ascissa di convergenza di $e^{cx} f(x)$ è $\lambda + \mathrm{Re}\, c$.

Passiamo alla seconda parte

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(f(x-a)\,\theta(x-a)\right)(s) &= \int_a^{+\infty} f(x)\, e^{-sx}\, d\mu(x) = \int_0^{+\infty} f(y)\, e^{-sy} e^{-sa}\, d\mu(x) = \\ &= e^{-sa}\mathcal{L}(f)(s)\end{aligned}$$

(c.v.d.)

Teorema V.10 (di convoluzione) *Se f_1 e f_2 sono funzioni L^1 nulle per $x<0$, allora*

$$\mathcal{L}(f_1 * f_2) = \mathcal{L}(f_1)\,\mathcal{L}(f_2)$$

Dimostrazione Se f_1 e f_2 sono L^1 allora il loro prodotto di convoluzione $f_1 * f_2 \in L^1$. Siccome f_1 e f_2 hanno supporto in $(0,+\infty)$ si ha

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-y)\, f_2(y)\; d\mu(y) = \int_0^x f_1(x-y)\, f_2(y)\; d\mu(y)$$

da cui

$$(f_1 * f_2)(x) = 0,\; x<0$$

Passando alla trasformata di Lalplace e utilizzando Fubini,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} (f_1 * f_2)(x)\, e^{-sx}\, d\mu(x) &= \int_0^{+\infty} d\mu(x)\; e^{-sx} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-y)\, f_2(y)\; d\mu(y) = \\ &= \int_0^{+\infty} d\mu(y)\; f_2(y)\, e^{-sy} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(x)\; f_1(x-y)\, e^{-s(x-y)} = \\ &= \int_0^{+\infty} d\mu(y)\; f_2(y)\, e^{-sy} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(z)\; f_1(z)\, e^{-sz} = \\ &= \int_0^{+\infty} d\mu(y)\; f_2(y)\, e^{-sy} \int_0^{+\infty} d\mu(x)\; f_1(x)\, e^{-sx} = \mathcal{L}(f_1)\,\mathcal{L}(f_2)\,.\end{aligned}$$

(c.v.d.)

V.4.2 Integrali dipendenti da parametri

In questa sottosezione affrontiamo il problema della regolarità degli integrali dipendenti da un parametro. Molti dei risultati che vedremo sono già noti al lettore, tanto che ci siamo permessi di utilizzarli in precedenza. In ogni caso, sono molto utili in vista della trattazione dell'olomorfia della trasformata di Laplace.

Sia E un insieme misurabile in $\mathbb{R}^n$, sia A un aperto di $\mathbb{R}^k$, consideriamone il prodotto cartesiano $E \times A$ che conterrà le coppie (x,t). Sia $f(x,t)$ una funzione definita in $E \times A$, integrabile in x per ogni fissato $t \in A$. Poniamo allora

$$F(t) \equiv \int_E f(x,t)\; d\mu(x)$$

Vogliamo indagare la continuità e la differenziabilità di F che è un integrale dipendente dai k parametri t.

Comiciamo dal seguente

Lemma V.5 *Sia $f(x,t)$ una funzione integrabile in x per ogni $t \in A$ e continua in t per quasi ogni $x \in E$. Se esiste una funzione sommabile in E, $g(x)$ talché*

$$|f(x,t)| \le g(x)$$

per ogni $t \in A$ e per quasi ogni $x \in A$, allora la funzione $F(t)$ è continua in A.

Dimostrazione Sia $t_0 \in A$ e sia $\{t_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset A$ una successione a valori in A, convergente a t_0. Poiché $f(x,t)$ è continua in t per quasi tutti gli x, varrà, dal teorema di collegamento,

$$\lim_{h\to\infty} f(x,t_h) = f(x,t_0) \text{ q.o. in } E.$$

Ma quasi ovunque,

$$|f(x,t_h)| \le g(x)$$

perciò, applicando il teorema di Lebesgue,

$$\lim_{h\to\infty} \int_E f(x,t_h)\, d\mu(x) = \int_E f(x,t_0)\, d\mu(x)$$

perciò

$$F(t_h) \to F(t_0)$$

(c.v.d.) valendo per ogni $t_h \to t_0$, ciò significa che F è continua in t_0.

Vale il fondamentale

Teorema V.11 (di derivazione sotto il segno di integrale) *Sia $f(x,t)$ una funzione integrabile in E per ogni $t \in A$, di classe $\mathcal{C}^1(A)$ per quasi ogni $x \in E$. Supponiamo che esistano $k+1$ funzioni sommabili in E, tali che, per ogni $t \in A$ e per quasi ogni $x \in E$, risulti*

$$|f(x,t)| \le g_0(x),$$
$$\left|\frac{\partial f}{\partial t_h}(x,t)\right| \le g_h(x),\ h \in J_k$$

Allora $F(t) \equiv \int_E f(x,t)\, d\mu(x)$ è di classe $\mathcal{C}^1(A)$, e risulta

$$\frac{\partial F}{\partial t_h}(t) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t_h}(x,t)\, d\mu(x).$$

Dimostrazione Dalle disuguaglianze e dal teorema del confronto si ha che la funzione, come le derivate sono sommabili in x su E.

Sia, intanto $A \subset \mathbb{R}$, sicché F è funzione di una sola variabile. Fissato $t_0 \in A$, esiste $r > 0$ per cui $B(t_0,r) \subset A$. Sia $\{t_k\} \subset B(t_0,r)$ una successione convergente a t_0. Abbiamo

$$\frac{F(t_h) - F(t_0)}{t_h - t_0} = \int_E \frac{f(x,t_h) - f(x,t_0)}{t_h - t_0}\, d\mu(x)$$

Definiamo la successione di funzioni

$$\psi_h(x) = \frac{f(x,t_h) - f(x,t_0)}{t_h - t_0}$$

per il teorema del valor medio, quasi ovunque in E, essa varrà

$$\psi_h(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,\tau)$$

con $\tau \in B(t_0,r)$, perciò, quasi ovunque,

$$\psi_h(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,\tau) \le g_1(x)$$

d'altra parte, per quasi ogni x, la successione converge

$$\lim_{h\to\infty} \psi_h(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)$$

Siamo allora nelle ipotesi del teorema di Lebesgue, perciò

$$\int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\, d\mu(x) = \lim_{h\to\infty} \int_E \frac{f(x,t_h) - f(x,t_0)}{t_h - t_0}\, d\mu(x) = \lim_{h\to\infty} \frac{F(t_h) - F(t_0)}{t_h - t_0}$$

ma ciò vale per ogni successione convergente a t_0, sicché dal teorema di collegamento,

$$\int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\, d\mu(x) = \lim_{t\to t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \frac{dF}{dt}(t_0)$$

dalla disuguaglianza e dal lemma si ha la continuità.

(c.v.d.) Il caso di più variabili si riconduce a questo una volta fissate tutte le t_j con $j \neq i$.

Esempio V.2 Consideriamo il caso in cui $E = [a,b] \subset \mathbb{R}$. Siano allora $f(x,t)$ e $\partial f/\partial t_j$ continue in $[a,b] \times A$. Fissato $t \in A$, la funzione $f(x,t)$ come le $\partial f/\partial t_j(x,t)$ sono continue e definite su un compatto, perciò ovunque dominate da una costante per il teorema di Weierstraß. Siamo allora nelle ipotesi del teorema di derivazione sotto il segno di integrale.
Nelle ipotesi di cui sopra, siano anche $u, w \in [a,b]$, la funzione

$$F(t,u,w) = \int_u^w f(x,t)\; d\mu(x)$$

essa risulterà definita in $A \times [a,b] \times [a,b]$ e sarà $\mathcal{C}^1$ nel dominio per il teorema di cui sopra e per il teorema fondamentale del calcolo. Inoltre,

$$\frac{\partial F}{\partial t_j} = \int_u^w \frac{\partial f}{\partial t_j}(x,t)\; d\mu(x)$$
$$\frac{\partial F}{\partial u} = -f(u,t)$$
$$\frac{\partial F}{\partial w} = f(w,t)$$

perciò se $u = \alpha(t)$ e $w = \beta(t)$ con $\alpha, \beta \in \mathcal{C}^1(A;[a,b])$, posto

$$G(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\; d\mu(x)$$

dal teorema di derivazione composta,

$$\frac{\partial G}{\partial t_j} = \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial \beta}{\partial t_j} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial \alpha}{\partial t_j} + \frac{\partial F}{\partial t_j} = f(\beta(t),t)\frac{\partial \beta}{\partial t_j}(t) - f(\alpha(t),t)\frac{\partial \alpha}{\partial t_j}(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t_j}(x,t)\; d\mu(x)$$

In particolare, se $A \subset \mathbb{R}$, vale

$$\frac{d}{dt}\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\; dx = f(\beta(t),t)\frac{d\beta}{dt}(t) - f(\alpha(t),t)\frac{d\alpha}{dt}(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\; dx$$

■

V.4.3 Olomorfia della trasformata di Laplace

Regolarità delle trasformate di Laplace Siamo adesso in grado di stabilire le proprietà di differenziabilità della trasformata di Laplace. Riguardiamo la trasformata come una funzione di due variabili

$$F(s' + is'') \equiv F(s', s'')$$

di modo che $F(s', s'')$ divenga un integrale dipendente dai parametri s, s''. Fissiamo l'aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ di variazione dei parametri s' e s'' ponendo

$$s' > \eta > \lambda;\ s'' \in \mathbb{R}.$$

L'insieme misurabile E della sezione precedente diviene invece $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$. La funzione $f(x)\,e^{-sx}$ è di classe $\mathcal{C}^\infty(A)$ per ogni $x \in E$, e, inoltre, abbiamo le seguenti diseguaglianze

$$\begin{aligned}
|F(s', s'')| &= \left|f(x)\,e^{-s'x}e^{is''x}\right| \le \left|f(x)\,e^{-\eta x}\right| \\
\left|\frac{\partial}{\partial s'}F(s', s'')\right| &= \left|-xf(x)\,e^{-s'x}e^{is''x}\right| \le \left|xf(x)\,e^{-\eta x}\right| \\
\left|\frac{\partial}{\partial s'}F(s', s'')\right| &= \left|ixf(x)\,e^{-s'x}e^{is''x}\right| \le \left|xf(x)\,e^{-\eta x}\right|
\end{aligned}$$

Ascissa di sommabilità per $x^n f(x)\,e^{-\eta x}$ Notiamo che $x^n f(x)\,e^{-\eta x}$ è sommabile. Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste M per cui, se $x > M$, si ha

$$x^n \le e^{\varepsilon x}$$

Per $0 < x < M$ la funzione $x^n f(x) e^{-sx}$ è certamente sommmabile, per $x > 0$, invece, si ha

$$\left|x^n f(x) e^{-sx}\right| \leq \left|f(x) e^{-(s-\varepsilon)x}\right|$$

da cui la $xf(x) e^{-sx}$ è sommabile per ogni s talché

$$\operatorname{Re} s > \lambda + \varepsilon$$

Per l'arbitrarietà di ε si ha che l'ascissa di sommabilità di $x^n f(x) e^{-sx}$ è ancora λ e in particolare valgono le diseguaglianza di sopra.
Di conseguenza possiamo applicare i teoremi di derivazione sotto segno di integrale per le derivate di qualsiasi ordine; in particolare per la prima derivata

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s'} F(s', s'') &= \int -xf(x) e^{-sx} d\mu(x) \\ \frac{\partial}{\partial s''} F(s', s'') &= \int ixf(x) e^{-sx} d\mu(x)\end{aligned}$$

Da cui F è differenziabile e rispetta le condizioni di Cauchy-Riemann, sicché, per l'arbitrarietà di η

Teorema V.12 *La trasformata di Laplace di una funzione localmente sommabile con ascissa di sommabilità $\lambda \in \mathbb{R}$ è olomorfa nel semipiano $\operatorname{Re} s > \lambda$.*

Derivata della trasformata

Ne viene che

$$\frac{dF}{ds} = \int -xf(x) e^{-sx} d\mu(x) \iff \frac{d}{ds}\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(-xf)$$

più in generale

$$\frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}(f) = (-1)^n \mathcal{L}(x^n f)$$

Trasformata della derivata

Supponiamo ora che f sia una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ e che f e f' siano localmente sommabili. Supponiamo inoltre che per un certo s ambedue fe^{-sx} e $f'e^{-sx}$ siano sommabili; si ha allora

$$\mathcal{L}(f'(x)) = \int_0^{+\infty} f'(x) e^{-sx} \, d\mu(x) = f(x) e^{-sx}\Big|_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} f(x) e^{-sx} \, d\mu(x) = -f(0) + s\mathcal{L}(f)$$

dove

$$f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

e si è usato il fatto che se $g \in L^1 \cap \mathcal{C}^1$ e $dg/dx \in L^1$, allora $g \in \mathcal{C}_\infty$, applicandolo a $g \equiv fe^{-sx}$.
In generale

$$\mathcal{L}\left(f^{(n)}\right)(s) = s^n \mathcal{L}(f)(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

Andamento all'infinito reale della trasformata

Vogliamo adesso studiare l'andamento all'infinito reale della trasformata di Laplace. Abbiamo

$$\lim_{s' \to +\infty} F(s', s'') = 0$$

Infatti,

$$|F(s', s'')| \leq \int_0^{+\infty} \left|f(x) e^{-s'x} e^{-is''x}\right| d\mu(x) = \int_0^{+\infty} |f(x)| e^{-s'x} \, d\mu(x)$$

Il limite puntuale (in x) dell'integranda, per $s' \to +\infty$, è nullo. D'altra parte

$$|f(x)| e^{-s'x} \leq |f(x)| e^{-\lambda x} \in L^1$$

sicché, dal teorema di Lebesgue, ricaviamo la tesi.

Proposizione V.15 *Se f è una funzione Laplace trasformabile, allora*

$$\lim_{\operatorname{Re} s \to \infty} \mathcal{L}(f)(s) = 0.$$

La proposizione trovata ci consente di dimostrare anche il

Teorema V.13 (del valore iniziale) *Se $f \in \mathcal{C}^1$ e f ed f' sono Laplace trasformabili allora*

$$f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{\operatorname{Re} s \to \infty} s\mathcal{L}(f)$$

V.4.4 Inversione della trasformata di Laplace

Trasformata di Fourier e trasformata di Laplace Sia $f(x)$ una funzione nulla per $x < 0$. Come abbiamo visto se essa è L^1 allora è Laplace trasformabile (con λ al più 0). Se $f \in L^2$, allora

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, e^{-sx}\, d\mu(x) < \infty$$

se $e^{-sx} \in L^2$ cioè se $s' > 0$. Perciò se $f \in L^1$ o $f \in L^2$ allora f è Laplace trasformabile e si ha $\lambda \leq 0$. In queste ipotesi f è pure Fourier trasformabile. Se adesso supponiamo che $\lambda < 0$ (ascissa di sommabilità **strettamente** negativa), vediamo che

$$(Ff)(\omega) = (\mathcal{L}f)(-i\omega)$$

Inversione della $\mathcal{L}$-trasformata Vogliamo adesso ricavare una formula che consenta di invertire la trasformata di Laplace. Data $f(x)$ avente ascissa di convergenza $\lambda < +\infty$, possiamo scrivere, per ogni s avente $\operatorname{Re} s > \lambda$

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^{+\infty} f(x)\, e^{-s'x} e^{-is''x}\, d\mu(x) = F\left(fe^{-s'x}\right)(-s'')$$

Dalla formula per l'antitrasformata di Fourier abbiamo

$$fe^{-s'x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{L}f)(s', s'')\, e^{is''x}\, d\mu(s'')$$

da cui

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} (\mathcal{L}f)(s)\, e^{isx}\, ds$$

per ogni $a \in \mathbb{R}$ con $a > \lambda$. Il risultato trovato è corretto nell'ipotesi che $fe^{-s'x} \in L^2$ (già sapevamo che appartiene a L^1).

V.5 Distribuzioni

In questa sezione riporteremo solo alcuni cenni agli aspetti più utili ed interessanti della teoria delle distribuzioni: ci concentreremo in particolare sulle distribuzioni temperate.

V.5.1 Funzioni generalizzate

Gli elementi del duale topologico dell'insieme $\mathcal{D}(\Omega)$ si dicono **funzioni generalizzate** o **distribuzioni**. Lo spazio delle distribuzioni si denota con il simbolo $\mathcal{D}'(\Omega)$. Si omette l'indicazione Ω se si ha $\Omega = \mathbb{R}^\ell$.
Cominciamo con un teorema che ci consente di caratterizzare le distribuzioni

Teorema V.14 *Sia T una forma lineare definita su $\mathcal{D}(\Omega)$. Allora T è una distribuzione se e solo se, per ogni compatto K in Ω, esistono $m \in \mathbb{N}$ e $C \geq 0$ tali che, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$,*

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \left\|\varphi\right\|_{m,K}$$

Dimostrazione Sia T una distribuzione. Per definizione, T è continua rispetto a ogni $\left\|\cdot\right\|_{m,K}$. In particolare, è continua in 0. Fissati m e K e $\varepsilon > 0$ troviamo δ tale che se

$$\left\|\varphi\right\|_{m,K} \leq \delta$$

allora

$$|\langle T, \varphi \rangle| < \varepsilon$$

Presa poi $\psi \neq 0$ abbiamo

$$\psi = \frac{\delta\psi}{\|\psi\|_{m,K}}\frac{\|\psi\|_{m,K}}{\delta}$$

da cui

$$\begin{aligned}|\langle T,\psi\rangle| &= \left|\left\langle T,\frac{\delta\psi}{\|\psi\|_{m,K}}\frac{\|\psi\|_{m,K}}{\delta}\right\rangle\right| = \frac{\|\psi\|_{m,K}}{\delta}\left|\left\langle T,\frac{\delta\psi}{\|\psi\|_{m,K}}\right\rangle\right| < \\ &< \frac{\varepsilon}{\delta}\|\psi\|_{m,K}\end{aligned}$$

Vediamo l'inverso. Sia allora T continua, ma non valga il criterio di sopra. Allora esistono un compatto K contenuto in Ω e una successione $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_K(\Omega)$ tale che

$$|\langle T,\varphi_n\rangle| > n\|\varphi_n\|_{n,K}$$

Per $n \geq 1$, poniamo

$$\psi_n = \frac{1}{n\|\varphi_n\|_{n,K}}\varphi_n \in \mathcal{D}_K(\Omega)$$

Per ogni m

$$\|\psi_n\|_{m,K} \leq \|\psi_n\|_{n,K} = \frac{1}{n},\ \forall n > m$$

Ne viene che la successione ψ_n è convergente a 0. D'altronde la successione $|\langle T,\psi_n\rangle|$ è tale che

$$|\langle T,\psi_n\rangle| > 1$$

(c.v.d.) perciò non converge a 0. Assurdo.

V.5.2 Supporto di una distribuzione

Sia T una distribuzione in $\mathcal{D}'(\Omega)$. Definiamo **dominio di nullità** di T un aperto $\Omega' \subset \Omega$ tale che la restrizione di T alle funzioni in $\mathcal{D}(\Omega')$ è eguale alla distribuzione nulla in $\mathcal{D}'(\Omega')$. Proveremo che esiste un dominio di nullità massimale. Il suo complementare (che è un chiuso) si dice **supporto** di T

Teorema V.15 *Ogni distribuzione T su Ω ha un dominio di nullità massimo.*

Dimostrazione Sia $\mathcal{U}$ la collezione dei domini di nullità di T. Sia

$$\Omega_0 = \bigcup_{O\in\mathcal{U}} O$$

Vogliamo provare che Ω_0 è un dominio di nullità per T. Prendiamo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_0) \subset \mathcal{D}(\Omega)$. Siccome φ ha supporto compatto contenuto in Ω_0, esiste un numero finito di aperti $O_1,\ldots,O_n \in \mathcal{U}$ che ricoprono il supporto di φ. Esiste allora una partizione $\mathcal{C}^\infty$ dell'unità associata con questo ricoprimento finito: cioè esistono $\varphi_1,\ldots,\varphi_n \in \mathcal{D}$ tali che $0 \leq \varphi_i \leq 1$, $\operatorname{supp}\varphi_i \subset O_i$ e

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i(x) = 1,\ \forall x \in \operatorname{supp}\varphi.$$

Ne viene che

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi\varphi_i$$

Siccome ciascuna $\varphi\varphi_i$ ha supporto nel dominio di nullità O_i concludiamo che

$$\langle T,\varphi\rangle = \sum_{i=1}^n \langle T,\varphi\varphi_i\rangle = 0.$$

(c.v.d.)

Abbiamo in qualche modo accennato al concetto di restrizione di una distribuzione a un insieme $\Omega' \subset \Omega$. In modo inverso, se $T \in \mathcal{D}(\Omega')$ definiamo estensione di T a Ω una distribuzione a valori $\mathcal{D}(\Omega)$ tale che la sua restrizione a Ω' sia pari a T. I concetti elementari fin qui introdotti ci consentono di passare a un teorema non banale:

Teorema V.16 *Sia T una distribuzione in Ω. Condizione necessaria e sufficiente affinché il supporto di T sia compatto è che T abbia una estensione a una forma lineare continua su $\mathcal{E}(\Omega)$. L'estensione allora è unica.*

Dimostrazione Supponiamo in primo luogo che il supporto di T sia compatto. Allora esiste un compatto K in Ω la cui parte interna contiene il supporto di T. Segue dal teorema di partizione $\mathcal{C}^\infty$ dell'unità che esiste $\rho \in \mathcal{D}(\Omega)$ tale che $0 \leq \rho \leq 1$ e $\rho(x) = 1$ per ogni $x \in K$. Poniamo allora

$$\hat{T}(f) \equiv \langle T, f\rho \rangle$$

Evidentemente questo definisce una forma lineare su $\mathcal{E}$. D'altro canto se $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, abbiamo

$$\operatorname{supp}(\varphi - \rho\varphi) \subset \Omega \backslash \operatorname{int} K \subset \Omega \backslash \operatorname{supp} T$$

sicché

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi\rho \rangle$$

Ne viene che $\hat{T}$ estende T in $\mathcal{E}(\Omega)$. Veniamo alla continuità di $\hat{T}$. Sia f_n una successione di funzioni $\mathcal{E}$-convergente a 0. Usando la formula di Leibinz è facile vedere che $f_n\rho$ tende a 0 in $\mathcal{D}(\Omega)$ di modo che $\langle T, f_n\rho \rangle \to 0$. Siccome $\mathcal{D}(\Omega)$ è denso in $\mathcal{E}(\Omega)$ l'estensione continua $\hat{T}$ di T è unica.

Vediamo l'inverso. Sia $\hat{T}$ l'estensione a $\mathcal{E}$ di T. Sia K_n una successione di compatti che esaurisce lo spazio Ω. Se il supporto di T non fosse compatto, esisterebbe per ogni intero $n \in \mathbb{N}$, una funzione $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ tale che

$$\operatorname{supp} \varphi_n \subset \Omega \backslash K_n \;\&\; \langle T, \varphi_n \rangle \neq 0$$

Dividendo, se necessario, per φ_n possiamo pure supporre che

$$\langle T, \varphi_n \rangle = 1$$

La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n$$

converge in $\mathcal{E}(\Omega)$. Infatti, se K è un compatto allora K esiste n_0 talché $K \subset K_{n_0}$ e, su K, la serie si riduce a una somma finita. Ne verrebbe che

$$\left\langle \hat{T}, \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \right\rangle = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \left\langle \hat{T}, \varphi_n \right\rangle = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \langle T, \varphi_n \rangle = \lim_{N\to\infty} N < \infty$$

(c.v.d.) il che è palesemente falso.

Distribuzioni a supporto compatto La restrizione a $\mathcal{D}(\Omega)$ di una forma lineare continua definita in $\mathcal{E}(\Omega)$ è una distribuzione appartenente a $\mathcal{D}'(\Omega)$. Infatti, se una successione converge in senso $\mathcal{D}$, allora $\mathcal{E}$-converge. Ma tale restrizione ha supporto compatto. Ne viene che possiamo identificare lo spazio delle distribuzioni su Ω aventi supporto compatto con il duale topologico di $\mathcal{E}(\Omega)$ che indicheremo con $\mathcal{E}'(\Omega)$. Perciò

$$\mathcal{E}'(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$$

e lo spazio $\mathcal{E}'(\Omega)$ prende il nome di **spazio delle distribuzioni a supporto compatto**.

Distribuzioni temperate In aggiunta allo spazio delle distribuzioni e delle distribuzioni a supporto compatto, si introduce lo spazio delle **distribuzioni temperate** come duale topologico dello spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$. Evidentemente,

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^\ell) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^\ell) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^\ell)$$

Alcuni esempi È il momento di concretizzare un po' le nozioni fin qui presentate. Esporremo una sequenza di esempi molto importanti.

Esempio V.3 Sia $u(x)$ una qualunque funzione localmente sommabile (cioè sommabile su ogni compatto o su ogni palla), limitata, i.e., $u \in L^1_{\text{loc}}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$, l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}^\ell} u(x)\,\varphi(x)\;d\mu(x)$$

esiste per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$ ed è un funzionale lineare continuo definito su $\mathcal{S}$. La limitatezza di u garantisce che $|u\varphi| \le \sup|u|\,|\varphi| \equiv M\,|\varphi| \in L^1\left(\mathbb{R}^\ell\right)$, perciò si ha l'esistenza dell'integrale. La linearità discende immediatamente dalla linearità dell'integrale, resta da vedere la continuità. Sia $\varphi_n \to \varphi$ una successione di funzioni test, allora

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^\ell} u(x)\left(\varphi(x)-\varphi_n(x)\right)\,d\mu(x)\right| &\le M\int_{\mathbb{R}^\ell}\left|\varphi(x)-\varphi_n(x)\right|\,d\mu(x) = \\
M\int_{\mathbb{R}^\ell}\frac{1}{1+|x|^2}\left(1+|x|^2\right)\left|\varphi(x)-\varphi_n(x)\right|\,d\mu(x) &\le \\
M'\left[\sup_{\mathbb{R}^\ell}\left|\varphi(x)-\varphi_n(x)\right| + \sup_{\mathbb{R}^\ell}\left(|x|^2\left|\varphi(x)-\varphi_n(x)\right|\right)\right] &\to 0
\end{aligned}$$

Ma se $\varphi_n \to \varphi$ nella topologia di $\mathcal{S}$, allora

$$\sup_{\mathbb{R}^\ell}\left|x_j^2\left(\varphi(x)-\varphi_n(x)\right)\right| = \sup_{\mathbb{R}^\ell} x_j^2\left|\varphi(x)-\varphi_n(x)\right| \to 0$$

da cui

$$\sup_{\mathbb{R}^\ell}\left(|x|^2\left|\varphi(x)-\varphi_n(x)\right|\right) \le \sum_{j=1}^{\ell}\sup_{\mathbb{R}^\ell} x_j^2\left|\varphi(x)-\varphi_n(x)\right| \to 0$$

per cui si ha la continuità del funzionale.
Ne viene che l'insieme delle funzioni limitate è iniettato nell'insieme $\mathcal{S}'$ (e perciò in $\mathcal{D}'$) dall'applicazione

$$u \mapsto T_u \equiv \langle u,\cdot\rangle = \int_{\mathbb{R}^\ell} u(x)\cdot\,d\mu$$

Tramite tale iniezione, si ha che $\mathcal{S}'$ *contiene* l'insieme delle funzioni localmente sommabili limitate. ▪

Esempio V.4 $\mathcal{D}'$ contiene l'insieme $L^1_{\text{loc}}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ senza bisogno della restrizione sulla limitatezza di tali funzioni, grazie alla compattezza del supporto delle funzioni test. Proprio a questa inclusione $\mathcal{D}'$ deve il nome di spazio delle funzioni generalizzate.
Se invece vogliamo includere le localmente sommabili in $\mathcal{E}'$ dobbiamo pure richiedere che esse abbiano supporto compatto, come ci si poteva aspettare. ▪

Grazie al lemma di Dubois-Reymond, abbiamo che

Proposizione V.16 *Due funzioni localmente integrabili, definiscono la stessa distribuzione se e solo se sono eguali quasi ovunque.*

Esempio V.5 Sia ora $g \in L^1(\mathbb{R})$ e consideriamo ancora il funzionale su $\mathcal{S}$

$$T_g\varphi = \langle g,\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^\ell} g(x)\,\varphi(x)\;d\mu$$

Vediamo che appartiene a $\mathcal{S}'$. Tanto per cominciare, è ben definito

$$\left|\int_{\mathbb{R}^\ell} g(x)\,\varphi(x)\;d\mu\right| \le \sup_{\mathbb{R}^\ell}|\varphi|\,\|g\|_{L^1} < \infty;$$

è banalmente lineare, ed è continuo. Vediamo perché. Sia $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathcal{S}$, allora

$$\left|\int_{\mathbb{R}^\ell} g(x)\left(\varphi(x)-\varphi_n(x)\right)\,d\mu\right| \le \sup_{\mathbb{R}^\ell}\left|\varphi(x)-\varphi_n(x)\right|\,\|g\|_{L^1} \to 0$$

- Dunque ricaviamo un'altra iniezione via la quale possiamo dire che $L^1\left(\mathbb{R}^\ell\right) \subset \mathcal{S}'$.

Esempio V.6 Procediamo come nell'esempio precedente: sia $g \in L^q\left(\mathbb{R}^\ell\right)$, $q \neq 1$ allora il funzionale su $\mathcal{S}$

$$T_g\varphi = \langle g, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^\ell} g(x)\,\varphi(x)\ d\mu$$

è lineare e continuo, perciò appartiene a $\mathcal{S}'$. Infatti, $\varphi(x) \in L^p\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ per ogni p, in particolare per p coniugato a q, allora dalla diseguaglianza di Hölder (capitolo I),

$$\left|\int_{\mathbb{R}^\ell} g(x)\,\varphi(x)\ d\mu\right| \leq \int_{\mathbb{R}^\ell} |g(x)\,\varphi(x)|\ d\mu \leq \|g\|_{L^q}\,\|\varphi\|_{L^p} < \infty$$

Si tratta di vedere la continuità,

$$\left|\int g(x)\left[\varphi(x) - \varphi_n(x)\right]\ d\mu\right| \leq \|g\|_{L^q}\,\|\varphi - \varphi_n\|_{L^p}$$

Ora, se $\psi \in \mathcal{S}$, allora

$$\begin{aligned}\|\psi\|_{L^p} &= \left\||\psi|^{1/p}\,|\psi|^{1-1/p}\right\|_{L^p} = \left\||\psi|^{1/p}\,|\psi|^{1/q}\right\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^\ell} |\psi|\,|\psi|^{p/q}\ d\mu\right)^{1/p} \leq \\ &\leq \sup_{\mathbb{R}^\ell} |\psi|^{1/q}\,\|\psi\|_{L^1}^{1/p}\end{aligned}$$

Se $\psi = \varphi - \varphi_n$, si ha, come avevamo pure già visto in precedenza,

$$\begin{aligned}\|\varphi - \varphi_n\|_{L^1} &= \int |\varphi - \varphi_n|\ d\mu = \int \frac{\left(1 + |x|^2\right)}{1 + |x|^2}\,|\varphi - \varphi_n|\ d\mu \leq \\ &\leq C\left(\sup|\varphi - \varphi_n| + \sup|x|^2\,|\varphi - \varphi_n|\right) \to 0\end{aligned}$$

In definitiva, tutti gli spazi $L^p\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ definiscono dei funzionali continui su $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$, perciò appartengono a $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^\ell\right)$. ▪

Osservazione V.3 In particolare abbiamo dimostrato che se $\varphi_n \to \varphi$ nella topologia di $\mathcal{S}$, allora $\varphi_n \to \varphi$ in senso L^p, per un qualsiasi intero $p \geq 1$. Ne viene che l'identità da $\mathcal{S} \to L^p$ è una funzione continua. In particolare, se $\varphi_n \to \varphi$, allora φ_n tende a φ in senso L^2 e, se $u \in L^2$, allora

$$\langle u, \varphi\rangle = (u, \varphi) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \langle u, \varphi_n\rangle = \lim_{n\to\infty} (u, \varphi_n) = (u, \varphi)$$

che è uno dei risultati trovati nell'esempio precedente. ▪

Lo spazio $\mathcal{S}'$ contiene ben più degli spazi L^p come dimostra il seguente

Esempio V.7 (delta di Dirac) Il seguente è un funzionale lineare continuo definito su $\mathcal{S}$

$$\delta_{x_0}(\varphi) = \langle \delta_{x_0}, \varphi\rangle = \varphi(x_0)$$

la dimostrazione è ovvia. La δ_{x_0}, **delta di Dirac**, è una distribuzione che agisce non solo in $\mathcal{S}$, ma su anche su $\mathcal{C}(\Omega)$, se $x_0 \in \Omega$. Essa non corrisponde ad alcuna funzione L^p, ma in analogia con queste ultime si suole scrivere impropriamente

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^\ell} \delta(x - x_0)\,\varphi(x)\ d\mu = \varphi(x_0)\,.$$

Quest'ultima scrittura è suggerita anche dal fatto che esiste una misura, μ_{x_0} (vedi capitolo I), **misura puntuale**, tale che

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^\ell} \varphi(x)\ d\mu_{x_0} = \varphi(x_0)$$

In questo senso, δ_{x_0} non è associata a una funzione, ma a una misura.
Ovviamente δ_{x_0} appartiene anche a $\mathcal{E}'\left(\mathbb{R}^\ell\right)$. ▪

Esempio V.8 Sia $T \in \mathcal{S}'$, definiamo per ogni polinomio $P(x)$ la distribuzione $P(x)\,T$ come

$$\langle P(x)\,T, \varphi\rangle = \langle T, P(x)\,\varphi\rangle$$

essa è ben definita essendo $P\varphi \in \mathcal{S}$. La continuità deriva dall'ovvio fatto che se

$$\varphi_n \to \varphi$$

allora

$$P\varphi_n \to P\varphi$$

in $\mathcal{S}$. ▪

V.5.3 Convergenza debole e debole completezza

Non abbiamo ancora imposto una nozione di convergenza negli spazi distribuzionali. Con $\mathcal{T}$ indichiamo i vari spazi funzionali e con $\mathcal{T}'$ i rispettivi duali topologici. Diremo che $\{T_n\} \subset \mathcal{T}'$ converge a T se, per ogni $\varphi \in \mathcal{T}$, risulta

$$\langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$$

dove il limite è ovviamente eseguito in $\mathbb{C}$. La convergenza introdotta si chiama **convergenza debole**. Adesso vogliamo mostrare che la convergenza debole *cattura* vari altri tipi di convergenza:

Esempio V.9 Sia $\{u_n\} \subset L^1$ una successione convergente, in senso L^1!, a $u \in L^1$, allora $u_n \to u$ in senso della convergenza distribuzionale, infatti

$$\left| \int u\varphi \, d\mu - \int u_n \varphi \, d\mu \right| \leq \int |u - u_n| \, |\varphi| \; d\mu \leq \sup_{\mathbb{R}^\ell} |\varphi| \int |u - u_n| \; d\mu \to 0$$

▪

Esempio V.10 Sia $\{u_n\} \subset L^q$ una successione convergente, in senso L^q, a $u \in L^q$, allora $u_n \to u$ in senso della convergenza distribuzionale ($\mathcal{S}'$ o $\mathcal{D}'$), infatti, grazie alla diseguaglianza di Hölder, se p è coniugato a q, allora

$$\left| \int u\varphi \, d\mu - \int u_n \varphi \, d\mu \right| \leq \int |u - u_n| \, |\varphi| \; d\mu \leq \|u - u_n\|_{L^p} \, \|\varphi\|_{L^q} \to 0$$

In particolare, in L^2, dove esiste un prodotto scalare, basta che $u_n \to u$ debolmente, infatti

$$\lim_{n \to \infty} \langle u_n, \varphi \rangle = \lim_{n \to \infty} (u_n, \varphi) = (u, \varphi) = \langle u, \varphi \rangle$$

▪

Esempio V.11 Sia data una successione di funzioni u_n localmente sommabili convergenti puntualmente quasi ovunque alla funzione u. Se tutti gli elementi della successione ed il limite u sono dominati da un polinomio, allora si ha convergenza in senso $\mathcal{S}'$

$$\lim_{n \to \infty} \left| \int u\varphi \, d\mu - \int u_n \varphi \, d\mu \right| \leq \lim_{n \to \infty} \int |u - u_n| \, |\varphi| \; d\mu$$

ma

$$|u - u_n| \, |\varphi| \leq 2P \, |\varphi| \in \mathcal{S} \subset L^1$$

usando il teorema di Lebesgue si può portare dentro il limite ottenendo la tesi. ▪

La convergenza distribuzionale consente anche il verificarsi di situazioni nuove

Proposizione V.17 *Sia $f \in L^1\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ una funzione normalizzata, i.e.*

$$\int_{\mathbb{R}^\ell} f(x) \; d\mu = 1$$

Allora la successione di funzioni $tf(tx)$ tende alla delta di Dirac per $t \to \infty$.

Dimostrazione Sia $\varphi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ si ha

$$\int tf(tx) \; d\mu = \int f(y) \; d\mu = 1$$

dunque,

$$\lim_{t\to\infty}\left|\int tf(tx)\left[\varphi(x)-\varphi(0)\right]\,dx\right| = \lim_{t\to\infty}\left|\int f(y)\left[\varphi\left(\frac{y}{t}\right)-\varphi(0)\right]\,dy\right|$$

siccome

$$\left|f(y)\left[\varphi\left(\frac{y}{t}\right)-\varphi(0)\right]\right| \le 2\sup\varphi\,|f| \in L^1$$

e si ha convergenza puntuale

$$\varphi\left(\frac{y}{t}\right)-\varphi(0)\to 0,\ t\to\infty,$$

(c.v.d.) dal teorema di Lebesgue si ha la tesi.

Esempio V.12 Le successioni

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{\pi}\frac{n}{1+n^2x^2} \\ u_\varepsilon &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\pi}}e^{-x^2/\varepsilon} \end{aligned}$$

▪ tendono alla delta per $n\to\infty$ e $\varepsilon\to 0$, rispettivamente.

Debole completezza di $\mathcal{S}'$ ed $\mathcal{E}'$ Sia ora $\mathcal{T}\equiv\mathcal{S},\mathcal{E}$. Sia T_n una successione di Cauchy in $\mathcal{T}'$, dunque per ogni φ, per ogni $\varepsilon>0$, esiste un indice ν, talché se $n,m>\nu$ allora

$$|T_n\varphi - T_m\varphi| < \varepsilon$$

Dunque, $\{T_n\varphi\}\subset\mathbb{C}$ è una successione di Cauchy. Siccome $\mathbb{C}$ è completo, esiste per ogni φ

$$T\varphi = \lim_{n\to\infty} T_n\varphi$$

Si tratta di vedere se $T\in\mathcal{T}'$. Cominciamo dalla linearità

$$T(\varphi+\lambda\psi) = \lim_{n\to\infty} T_n(\varphi+\lambda\psi) = \lim_{n\to\infty}(T_n\varphi+\lambda T_n\psi) = \lim_{n\to\infty}T_n\varphi + \lambda\lim_{n\to\infty}T_n\psi = T\varphi+\lambda T\psi$$

Si tratta adesso di mostrare che T è continuo. La cosa è un po' più complicata perché richiede il teorema di uniforme limitatezza di Banach-Steinhaus. Sia $\varphi_m\to\varphi$, allora

$$|T\varphi_m - T\varphi| = |T\varphi_m - T_n\varphi_m| + |T_n\varphi_m - T_n\varphi| + |T_n\varphi - T\varphi|$$

Fissiamo ε. Fissato φ esiste ν_φ tale che preso $n>\nu_\varphi$ si ha

$$|T_n\varphi - T\varphi| < \frac{\varepsilon}{3}$$

d'altra parte, fissato $m>\nu_n$ si trova

$$|T\varphi_m - T_n\varphi_m| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Resta da minorare un addendo

$$|T_n\varphi_m - T_n\varphi|$$

Notiamo che si ha a che fare con una famiglia di operatori lineari T_n definiti su $\mathcal{T}$ (che è uno spazio metrico completo nei casi $\mathcal{E}$ ed $\mathcal{S}$) a valori nello spazio normato (completo) $\mathbb{C}$. Per ogni $\varphi\in\mathcal{T}$ la successione

$$\{T_n\varphi\}$$

è limitata in $\mathbb{C}$, ossia esiste M_φ per cui

$$\forall n\in\mathbb{N}\ |T_n\varphi| < M_\varphi$$

ne viene, dal teorema di Banach-Steinhaus, che esiste M per cui

$$\forall n\in\mathbb{N}\ |T_n\varphi| < M,\ \forall\varphi\in B(0,1)$$

Siccome in $\mathcal{T}$ l'operazione di moltiplicazione è continua ($\mathcal{T}$ è uno spazio metrico lineare), si ha che esiste δ per cui

$$B(0,\delta) \subset \frac{\varepsilon}{3M} B(0,1)$$

allora, se ψ_1 e ψ_2 distano meno di δ

$$|T_n\psi_1 - T_n\psi_2| = |T_n(\psi_1 - \psi_2)| = \frac{\varepsilon}{3M}\left|T_n \frac{3M}{\varepsilon}(\psi_1 - \psi_2)\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

sicché, scelto $m > \nu_n$ e m tale che

$$d_{\mathcal{T}}(\varphi_m, \varphi) < \delta,$$

abbiamo

$$|T_n\varphi_m - T_n\varphi| < \frac{\varepsilon}{3}$$

In definitiva abbiamo dimostrato il seguente

Teorema V.17 (della debole completezza) *Il duale topologico di uno spazio metrico lineare è debolmente completo.*

Cioè

Teorema V.18 *Gli spazi $\mathcal{E}'\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ e $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ sono completi nella topologia della convergenza debole, cioè sono debolmente completi.*

Debole completezza di $\mathcal{D}'$ Veniamo a considerare il caso $\mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^\ell\right)$. Si ragiona come prima per definire T, limite della successione T_n. Sempre come prima si usa l'argomento $\varepsilon/3$ per mostrare la continuità di T. Se φ_n è una successione $\mathcal{D}$-convergente a $\varphi \in \mathcal{D}$, si tratta di compiere la minorazione

$$|T_n\varphi_m - T_n\varphi| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$\mathcal{D}$ non è uno spazio metrico, tuttavia, esiste un compatto K tale che i supporti delle φ_m e il supporto di φ sono tutti contenuti in K e, inoltre,

$$\varphi = \mathcal{D}_K - \lim_{m\to\infty} \varphi_m$$

Siccome $\mathcal{D}_K$ è uno spazio metrico completo, possiamo tornare ad applicare il teorema di Banach-Steinhaus e, in modo identico a prima, pervenire alla tesi.

Teorema V.19 *Lo spazio delle funzioni generalizzate, $\mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^\ell\right)$, è debolmente completo.*

V.5.4 Prodotto tensoriale di distribuzioni e teoremi di densità

Nel seguito indicheremo con $\mathbb{R}^n$ lo spazio di variazione della x, e con $\mathbb{R}^m$ lo spazio di variazione della y. Ancora, $\mathcal{T} \equiv \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{S}$. Inoltre, se $T \in \mathcal{T}'(\mathbb{R}^n)$ e $S \in \mathcal{T}'(\mathbb{R}^m)$ specificheremo

$$\begin{aligned} \langle T, \varphi\rangle &\equiv \langle T_x, \varphi(x)\rangle \\ \langle S, \psi\rangle &\equiv \langle S_y, \psi(y)\rangle \end{aligned}$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$ e $\psi \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^m)$.
Cominciamo dal seguente semplice

Teorema V.20 (derivazione entro parentesi) *Sia $\mathcal{T} \equiv \mathcal{D}, \mathcal{E}$. Sia $T \in \mathcal{T}'(\mathbb{R}^n)$ e sia $\varphi \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$, la mappa su $\mathbb{R}^m$ definita da*

$$y \mapsto \langle T, \varphi(\cdot, y)\rangle$$

appartiene a $\mathcal{T}(\mathbb{R}^m)$ e, per ogni multi-indice $\mathbf{p} \in \mathbb{N}^m$ si ha, per ogni $y \in \mathbb{R}^m$

$$\frac{\partial^{|\mathbf{p}|}}{\partial y^{\mathbf{p}}}\langle T, \varphi(\cdot, y)\rangle = \left\langle T, \frac{\partial^{|\mathbf{p}|}}{\partial y^{\mathbf{p}}}\varphi(\cdot, y)\right\rangle.$$

Dimostrazione Per ogni y la funzione $x \mapsto \varphi(x, y) \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$ quindi la mappa è ben definita. Vediamo che essa è continua. Sia y_n una successione a valori in $\mathbb{R}^m$ che converga a y. Se mostriamo che

$$\mathcal{T} - \lim_{n\to\infty} \varphi(\cdot, y_n) = \varphi(\cdot, y)$$

allora, dato che T è continuo, avremo che

$$\lim_{n\to\infty}\langle T,\varphi(\cdot,y_n)\rangle=\langle T,\varphi(\cdot,y)\rangle$$

da cui la continuità. Nel caso in cui $\mathcal{T}=\mathcal{D}$, siano K e K' compatti tali che $\operatorname{supp}\varphi\subset K\times K'$ si ha che ogni $\langle T,\varphi(\cdot,y_n)\rangle$ ha supporto in K' perciò possiamo procedere a studiarne la convergenza nei compatti contenuti in K'.

Dal teorema del valor medio, sui compatti

$$\sup_x|\varphi(x,y_n)-\varphi(x,y)|=\sup_x\left|\frac{\partial}{\partial y}\varphi(x,\eta_n)(y_n-y)\right|$$

dove $\eta_n\in[y_n,y]$. Siccome il sup della derivata è limitato, si conclude che il limite uniforme per $n\to\infty$, è nullo. Si procede analogamente per le derivate di ordine superiore.

Si deve adesso derivare in y la mappa. Se $y_n\to y_0$ si tratta di calcolare

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\langle T,\varphi(\cdot,y_n)\rangle-\langle T,\varphi(\cdot,y_0)\rangle}{y_n-y_0}=\lim_{n\to\infty}\left\langle T,\frac{\varphi(\cdot,y_n)-\varphi(\cdot,y_0)}{y_n-y_0}\right\rangle$$

Ancora ci basta mostrare che esiste

$$\mathcal{T}-\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi(\cdot,y_n)-\varphi(\cdot,y_0)}{y_n-y_0}$$

Evidentemente, puntualmente

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi(x,y_n)-\varphi(x,y_0)}{y_n-y_0}=\frac{\partial}{\partial y}\varphi(x,y_0)$$

Perciò se mostriamo che il limite è anche in senso $\mathcal{T}$, abbiamo mostrato pure la seconda parte della tesi (per $|p|=1$, il resto è analogo o induttivo).

Abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(x,y_n)-\varphi(x,y_0)}{y_n-y_0}-\frac{\partial}{\partial y}\varphi(x,y_0) &= \frac{\partial}{\partial y}\varphi(x,y_0+\eta_n)-\frac{\partial}{\partial y}\varphi(x,y_0)=\\ &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\varphi(x,y_0+\eta_n)-\varphi(x,y_0)\right]\end{aligned}$$

Siccome $\varphi(x,y_0+\eta_n)-\varphi(x,y_0)$ converge a 0 in senso $\mathcal{T}$ per quanto visto sopra, anche la sua derivata convergerà a 0 in senso $\mathcal{T}$, la tesi.

(c.v.d.)

Vogliamo andare a parlare di prodotto tensore di due distribuzioni T_x e S_y. Ci occorre preliminarmente il seguente

Lemma V.6 *Supponiamo $\psi,\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Per $\varepsilon>0$ e $x\in\mathbb{R}^n$ poniamo*

$$g_\varepsilon(x)=\varepsilon^n\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}\varphi(x-\varepsilon\nu)\psi(\varepsilon\nu)$$

allora $g_\varepsilon\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e

$$\mathcal{D}-\lim_{\varepsilon\to0^+}g_\varepsilon=\varphi*\psi.$$

Dimostrazione Notiamo, in primo luogo, che $g_\varepsilon(x)$ è una somma di Riemann per $(\varphi*\psi)(x)$ a ogni x fissato. Infatti, a ε fissato la somma è finita dovendo essere

$$\varepsilon|\nu|\le\max_{x\in\operatorname{supp}\psi}|x|\equiv R$$

Grazie a questo fatto si ha subito che $g_\varepsilon\in\mathcal{D}$.

Per quanto concerne il limite, si tratta, intanto, di vedere che

$$\sup_{x\in K}|(\varphi*\psi)(x)-g_\varepsilon(x)|\to0$$

Ora, se reticoliamo $\mathbb{R}^n$ con punti $\varepsilon\nu$ al variare di $\nu\in\mathbb{Z}^n$ e chiamiamo il quadrato di lato ε e vertice ν, Q_ν^ε, abbiamo

$$|(\varphi * \psi)(x) - g_\varepsilon(x)| \le \sum_{|\nu|<R/\varepsilon} \int_{Q_\nu^\varepsilon} |\varphi(x-y)\psi(y) - \varphi(x-\nu\varepsilon)\psi(\nu\varepsilon)| \, d\mu(y)$$

Grazie al teorema del valor medio

$$|\varphi(x-y)\psi(y) - \varphi(x-\nu\varepsilon)\psi(\nu\varepsilon)| \le C\,|y-\nu\varepsilon|$$

Dunque,

$$|(\varphi * \psi)(x) - g_\varepsilon(x)| \le \sum_{|\nu|<R/\varepsilon} C \int_{Q_\nu^\varepsilon} |y-\nu\varepsilon| \, d\mu(y)$$

Ciascun integrale porta un contributo di ordine ε^{n+1}, il numero degli integrali da sommare varia come $(R/\varepsilon)^n$, perciò il limite per $\varepsilon \to 0$ è nullo. Su ogni compatto K, g_ε converge uniformemente a $\varphi * \psi$. Stesso discorso vale per le derivate. Infatti, visto che g_ε è una somma finita,

$$D^{\mathbf{p}} g_\varepsilon = \varepsilon^n \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} D^{\mathbf{p}}\varphi(x-\varepsilon\nu)\psi(\varepsilon\nu)$$

perciò $D^{\mathbf{p}} g_\varepsilon$ converge uniformemente sui compatti a $(D^{\mathbf{p}}\varphi * \psi) = D^{\mathbf{p}}(\varphi * \psi)$, come si voleva.

Ne viene che

(c.v.d.) $$\mathcal{D} - \lim_{\varepsilon \to 0} g_\varepsilon = \varphi * \psi.$$

Usiamo il lemma per dimostrare il seguente importante

Teorema V.21 *Lo spazio $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ generato dalle funzioni*

$$f \otimes g : (x,y) \mapsto f(x)\,g(y)$$

è denso in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$.

Dimostrazione Consideriamo due successioni regolarizzanti (a supporto compatto tendente a un punto e di integrale unitario), $\chi_i^{(1)} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e $\chi_j^{(2)} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. Chiaramente $\chi_i^{(1)} \otimes \chi_i^{(2)}$è una successione regolarizzante in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$. Prendiamo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$. Allora esistono due compatti K_1 e K_2 tali che $\operatorname{supp}\varphi \subset K_1 \times K_2 \subset K_1' \times K_2'$ con $K_h \subset \operatorname{int} K_h'$, $h \in J_2$. Per i sufficientemente grande, si ha $K_h + \operatorname{supp}\chi_i^{(h)} \subset K_h'$, perciò $\left(\chi_i^{(1)} \otimes \chi_i^{(2)}\right) * \varphi$ approssima φ in $\mathcal{D}_{K_1' \times K_2'}$. Tuttavia, dal lemma, $\left(\chi_i^{(1)} \otimes \chi_i^{(2)}\right) * \varphi$ può essere approssimata, in $\mathcal{D}_{K_1' \times K_2'}$, da funzioni della forma

$$\varepsilon^{n+m} \sum_{\nu^1,\nu^2} \varphi\left(\varepsilon\nu^{(1)}, \varepsilon\nu^{(2)}\right) \chi_i^1\left(x - \varepsilon\nu^{(1)}\right) \chi_i^{(2)}\left(y - \varepsilon\nu^{(2)}\right)$$

Ne viene che, essendo $\mathcal{D}_{K_1' \times K_2'}$ uno spazio metrico, esiste una successione a valori in $\mathcal{D}_{K_1' \times K_2'}$ che converge a φ e che è data dal prodotto di funzioni in $\mathcal{D}_{K_1'}$ e $\mathcal{D}_{K_2'}$. In definitiva, si ha che
(c.v.d.) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ è denso in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$.

Osservazione V.4 Presa ora una funzione φ in $\mathcal{E}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ troviamo una successione f_i a valori in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ tale che

$$\mathcal{E}, \mathcal{S} - \lim_{i \to \infty} f_i = \varphi$$

Consideriamo ogni f_i. Su un compatto K_i che ne contiene il supporto tale che $K_i \subset K_i' \times K_i''$, troviamo $\psi_{i,n}^{(1)} \in \mathcal{D}_{K_i'}(\mathbb{R}^n)$ e $\psi_{i,n}^{(2)} \in \mathcal{D}_{K_i''}(\mathbb{R}^m)$ per cui

$$\mathcal{D}_{K_i} - \lim_{n \to \infty} \psi_{i,n}^{(1)} \otimes \psi_{i,n}^{(2)} = f_i$$

Perciò

$$\mathcal{E}, \mathcal{S} - \lim_{n \to \infty} \psi_{i,n}^{(1)} \otimes \psi_{i,n}^{(2)} = f_i$$

Cioè, esiste ν sufficientemente grande per cui

$$\delta_{\mathcal{E},\mathcal{S}}\left(\psi^{(1)}_{i,\nu}\otimes\psi^{(2)}_{i,\nu},f_i\right)<\frac{1}{i}$$

sicché

$$\delta_{\mathcal{E},\mathcal{S}}\left(\psi^{(1)}_{i,\nu}\otimes\psi^{(2)}_{i,\nu},\varphi\right)\leq\delta_{\mathcal{E},\mathcal{S}}\left(\psi^{(1)}_{i,\nu}\otimes\psi^{(2)}_{i,\nu},f_i\right)+\delta_{\mathcal{E},\mathcal{S}}\left(f_i,\varphi\right)\to 0$$

In definitiva, siccome $\psi^{(1)}_{i,\nu}\otimes\psi^{(2)}_{i,\nu}\in\mathcal{E}\left(\mathbb{R}^n\right)\otimes\mathcal{E}\left(\mathbb{R}^m\right),\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)\otimes\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^m\right)$.

Riassumiamo il contenuto dell'osservazione nel seguente

Teorema V.22 *$\mathcal{E}\left(\mathbb{R}^n\right)\otimes\mathcal{E}\left(\mathbb{R}^m\right)$ è denso in $\mathcal{E}\left(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\right)$. $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)\otimes\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^m\right)$ è denso in $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\right)$.*

Veniamo a introdurre il concetto di prodotto tensore di distribuzioni mediante il seguente

Teorema V.23 (di Fubini) *Supponiamo $T\in\mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$ e $S\in\mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^m\right)$. Esiste un'unica distribuzione in $\mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\right)$ tale che*

$$\langle T\otimes S,\varphi\otimes\psi\rangle=\langle T,\varphi\rangle\langle S,\psi\rangle\;\forall\varphi\in\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^n\right),\psi\in\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^m\right)$$

$T\otimes S$ si dice prodotto tensore di T ed S. Inoltre, per ogni $\zeta\in\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\right)$ vale

$$\langle T\otimes S,\zeta\rangle=\langle T_x,\langle S_y,\zeta\left(x,y\right)\rangle\rangle=\langle S_y,\langle T_x,\zeta\left(x,y\right)\rangle\rangle$$

Dimostrazione $T\otimes S$ è un'applicazione lineare continua su un denso perciò si estende per continuità a un'unica applicazione, di qui esistenza e unicità. Consideriamo la mappa (ben definita, dai teoremi precedenti)

$$\zeta\mapsto\langle S_y,\langle T_x,\zeta\left(x,y\right)\rangle\rangle$$

se mostriamo che essa è continua, abbiamo la tesi, grazie all'unicità (Fubini si ottiene poi scambiando, nella dimostrazione, il ruolo di x con quello di y). Infatti, se $\zeta=\varphi\left(x\right)\psi\left(y\right)$ abbiamo

$$\langle S_y,\langle T_x,\varphi\left(x\right)\psi\left(y\right)\rangle\rangle=\langle S_y,\psi\left(y\right)\langle T_x,\varphi\left(x\right)\rangle\rangle=\langle S_y,\psi\left(y\right)\rangle\langle T_x,\varphi\left(x\right)\rangle.$$

Continuità. Sia $K_1\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ un compatto e siano K e K' tali che $K_1\subset K\times K'$. Per la continuità di T ed S esistono $C,C'>0$ e $m,m'\in\mathbb{N}$ tali che

$$\begin{aligned}\left|\langle T,\varphi\rangle\right| &\leq C\left\|\varphi\right\|_{m,K}\;\forall\varphi\in\mathcal{D}_K\left(\mathbb{R}^n\right)\\ \left|\langle S,\varphi\rangle\right| &\leq C'\left\|\varphi\right\|_{m',K'}\;\forall\varphi\in\mathcal{D}_{K'}\left(\mathbb{R}^m\right)\end{aligned}$$

Allora, ancora grazie al teorema di derivazione entro parentesi, si ha, per ogni $\zeta\in\mathcal{D}_{K_1}\left(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\right)$

$$\begin{aligned}\left|\langle S_y,\langle T_x,\zeta\left(x,y\right)\rangle\rangle\right| &\leq C'\sum_{|\mathbf{i}|\leq m'}\sup_{y\in K'}\left|D^{\mathbf{i}}\langle T_x,\zeta\left(x,y\right)\rangle\right|=C'\sum_{|\mathbf{i}|\leq m'}\sup_{y\in K'}\left|\langle T_x,D^{\mathbf{i}}\zeta\left(x,y\right)\rangle\right|\leq\\ &\leq C'C\sum_{|\mathbf{i}|\leq m'}\sup_{y\in K'}\sup_{x\in K}\sum_{|\mathbf{k}|\leq|\mathbf{i}|}\left|D^{\mathbf{i}+\mathbf{k}}\zeta\left(x,y\right)\right|\leq C''\left\|\zeta\right\|_{m+m',K_1}\end{aligned}$$

(c.v.d.) Da cui, la tesi.

Adesso, presa una successione regolarizzante $\varphi_n\subset\mathcal{D}$ e una distribuzione $T\in\mathcal{D}'$, vogliamo approssimare la distribuzione T usando la successione di funzioni appartenenti a $\mathcal{D}$, $T_n\equiv\langle T_x,\varphi_n\left(x-y\right)\rangle$. Dal teorema di Fubini, si ha, per ogni $\psi\in\mathcal{E}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ (perciò $\psi\in\mathcal{D}'$),

$$\langle\langle T_x,\varphi_n\left(x-y\right)\rangle,\psi\left(y\right)\rangle=\langle\psi\left(y\right),\langle T_x,\varphi_n\left(x-y\right)\rangle\rangle=\langle T_x,\langle\psi\left(y\right),\varphi_n\left(x-y\right)\rangle\rangle=\langle T_x,\varphi_n*\psi\rangle$$

Fissato $\psi\in\mathcal{T}\equiv\mathcal{D},\mathcal{E},\mathcal{S}\subset\mathcal{E}$, siccome $\varphi_n*\psi$ converge a ψ in $\mathcal{T}$, si ha che

$$\mathcal{T}'-\lim_{n\to\infty}\langle T_x,\varphi_n\left(x-y\right)\rangle=T$$

Ne viene che $\mathcal{D}$ è denso in $\mathcal{T}'$, essendo poi $\mathcal{D}$ denso in $\mathcal{T}$, abbiamo

Teorema V.24 (di densit dià)

o $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ è denso in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.Lo spazio $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ è denso in $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è denso in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Ogni distribuzione (funzione generalizzata, a supporto compatto o distribuzione temperata) è limite di una successione di funzioni "belle quanto si vuole" (per dirla col Cicogna).

V.5.5 Derivazione delle distribuzioni

Motivazione Sia T una distribuzione, vogliamo definirne la derivata. Ovviamente richiediamo che se T_u è associata a una funzione derivabile u la cui derivata u' continua ad essere associabile a una distribuzione, allora

$$DT_u = T_{u'}$$

Consideriamo, ad esempio, $u \in L^1_{\text{loc}}$ tale che anche $u' \in L^1_{\text{loc}}$, allora $T_u, T_{u'} \in \mathcal{D}'$. Abbiamo, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$

$$T_{u'}(\varphi) = \int u'\varphi \, d\mu = -\int u\varphi' \, d\mu = -T_u(\varphi')$$

dove i termini di bordo nell'integrazione per parti sono nulli grazie alla compattezza del supporto di φ.
Ancora, se per esempio $u, u' \in L^1_{\text{loc}}$ polinomialmente dominate, allora $T_u, T_{u'} \in \mathcal{S}'$, per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$

$$T_{u'}(\varphi) = \int u'\varphi \, d\mu = -\int u\varphi' \, d\mu = -T_u(\varphi')$$

Se poi $u, u' \in L^1_{\text{loc}}$ e u ha supporto compatto, allora, per ogni $\varphi \in \mathcal{E}$,

$$T_{u'}(\varphi) = \int u'\varphi \, d\mu = -\int u\varphi' \, d\mu = -T_u(\varphi')$$

Definizione della derivata debole Definiamo, allora, per **ogni** distribuzione $T \in \mathcal{T}'$, la derivata DT come segue

$$DT\varphi = -T\varphi', \, \forall \varphi \in \mathcal{T}$$

Vediamo che $DT \in \mathcal{T}'$, cioè che la definizione è ben posta. Siano $\varphi, \psi \in \mathcal{T}'$ allora

$$DT(\varphi + \lambda\psi) = -T(\varphi + \lambda\psi)' = -T\varphi' - \lambda T\psi' = DT\varphi + \lambda DT\psi$$

Sia ora $\varphi_n \to \varphi$, allora anche $\varphi_n' \to \varphi'$, perciò DT è continuo.
Per induzione si definisce, per ogni intero k, la derivata k-esima

$$D^k T\varphi = (-1)^k \, T\varphi^{(k)}$$

Allora $D^k T \in \mathcal{T}'$ e otteniamo il ragguardevole risultato che ogni distribuzione è infinitamente derivabile. La derivata distribuzionale così definita si dice anche **derivata debole** (**weak derivative**).
È opportuno considerare qualche esempio:

Esempio V.13 Consideriamo la funzione di Heaviside

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

essa appartiene chiaramente a $\mathcal{S}'$ perciò ha senso calcolarne la derivata (debole): abbiamo

$$\langle D\theta, \varphi \rangle = -\langle \theta, D\varphi \rangle = -\int_0^{+\infty} \varphi' \, d\mu = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

da cui

$$D\theta = \delta_0.$$

Più in generale, sia $u = u(x) \in \mathcal{S}'$ una funzione derivabile in ogni punto tranne che nel punto x_0, dove la funzione stessa presenta una discontinuità finita,

$$\sigma \equiv \lim_{x \to x_0^+} u(x) - \lim_{x \to x_0^-} u(x)$$

Allora, se la funzione u' è generalmente continua (la generalità continuità serve per eseguire l'integrazione per parti), abbiamo (aggiunte alcune ipotesi ragionevoli che specifichiamo sotto)

$$\begin{aligned}\langle Du,\varphi\rangle &= -\langle u, D\varphi\rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} u\varphi'\,d\mu = -\int_{-\infty}^{x_0} u\varphi'\,d\mu - \int_{x_0}^{+\infty} u\varphi'\,d\mu = \\ &= -\left.u\varphi\right|_{-\infty}^{x_0} + \int_{-\infty}^{x_0} u'\varphi\,d\mu - \left.u\varphi\right|_{x_0}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{x_0} u'\varphi\,d\mu = \\ &= \sigma\varphi(x_0) + \int_{-\infty}^{+\infty} u'\varphi\,d\mu = \sigma\langle\delta_{x_0},\varphi\rangle + \langle u',\varphi\rangle\end{aligned}$$

dove ci si accerti che u non diverga più che polinomialmente all'infinito e abbiano senso gli integrali in cui appare u' (per questo si può richiedere che u' sia limitata o L^p o polinomialmente dominata...). ▪

Esempio V.14 Direttamente dalla definizione

$$\left\langle D^k\delta_{x_0},\varphi\right\rangle = (-1)^k\,\varphi^{(k)}(x_0)\,.$$

▪

V.5.6 Moltiplicazione e convoluzione

Moltiplicazione di una distribuzione per una funzione Evidentemente definire prodotto e convoluzione di distribuzioni risulta particolarmente complicato. Noi non ci occuperemo diffusamente di questo problema, ma ci limiteremo ai suoi aspetti principali.

Sia, tanto per cominciare, $T\in\mathcal{D}'$. Sia poi $\alpha\in\mathcal{E}$; possiamo definire la distribuzione αT in modo naturale come

$$\langle\alpha T,\varphi\rangle = \langle T,\alpha\varphi\rangle\,,\ \forall\varphi\in\mathcal{D}$$

Infatti, la funzione $\alpha\varphi\in\mathcal{D}$ (è $\mathcal{C}^\infty$ come prodotto di $\mathcal{C}^\infty$ ed è a supporto compatto).

In $\mathcal{S}'$ la cosa non è possibile nei termini di sopra (basta prendere $\alpha = e^{x_i}$ per avere che $e^{x_i}\varphi\notin\mathcal{S}$) e dovremmo richiedere $\alpha\in\mathcal{E}$ limitata polinomialmente.

Continuità della moltiplicazione L'applicazione $T\mapsto\alpha T$ è continua in $\mathcal{D}'(\Omega)$. Infatti, sia $T_n\to T$ allora

$$\lim_{n\to\infty}\langle\alpha T_n,\varphi\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle T_n,\alpha\varphi\rangle = \langle T,\alpha\varphi\rangle = \langle\alpha T,\varphi\rangle\,.$$

Proposizione V.18 *Siano $T\in\mathcal{D}'$ e $\varphi\in\mathcal{E}$ allora*

$$\operatorname{supp}(\alpha T)\subset\operatorname{supp}(\alpha)\cap\operatorname{supp}(T)$$

Se $\beta\in\mathcal{E}$, allora

$$\alpha(\beta T) = (\alpha\beta)\,T$$

Dimostrazione Sia $\varphi\in\mathcal{D}$, allora, se $\operatorname{supp}(\varphi)\subset\operatorname{supp}(\alpha)^c$ allora $\langle\alpha T,\varphi\rangle = \langle T,\alpha\varphi\rangle = 0$, perciò φ appartiene a un dominio di nullità di αT, dunque, $\operatorname{supp}(\alpha)^c\subset\operatorname{supp}(\alpha T)^c$,cioè

$$\operatorname{supp}(\alpha T)\subset\operatorname{supp}(\alpha)$$

Se $\operatorname{supp}(\varphi)\subset\operatorname{supp}(T)^c$, allora $\langle\alpha T,\varphi\rangle = \langle T,\alpha\varphi\rangle = 0$, perciò $\operatorname{supp}(T)^c\subset\operatorname{supp}(\alpha T)^c$,cioè

$$\operatorname{supp}(\alpha T)\subset\operatorname{supp}(T)$$

(c.v.d.) La seconda parte è del tutto ovvia.

Supporto in un punto Vediamo adesso un risultato interessante che riguarda proprio la moltiplicazione.

Teorema V.25 *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^\ell$ contenente l'origine. Allora le uniche distribuzioni $T\in\mathcal{D}'(\Omega)$ con supporto ridotto all'origine sono quelle esprimibili come combinazione lineare finita della delta di Dirac e delle sue derivate.*

Dimostrazione T abbia supporto nell'origine. Consideriamo una funzione χ di classe $\mathcal{C}^{\infty}$ pari a 1 nella 1-palla e nulla fuori dalla palla di raggio 2. Consideriamo adesso $\chi_{\varepsilon}(x) = \chi(x/\varepsilon)$. Essa ha supporto contenuto nella 2ε-palla e vale 1 nella ε-palla. Sia f una funzione qualsiasi in $\mathcal{D}(\Omega)$. Posto $f_{\varepsilon} = \chi_{\varepsilon} f$, abbiamo

$$\langle T, f\rangle = \langle T, f_{\varepsilon}\rangle$$

per ogni ε. Infatti, per ogni ε, la $f - f_{\varepsilon}$ ha supporto nel dominio di nullità di T, perciò

$$\langle T, f - f_{\varepsilon}\rangle = 0.$$

Perciò il valore di T in f non dipende dai valori che f assume fuori da ogni palla $B(0,\varepsilon)$.

Grazie alla continuità di T, fissato il compatto $B(0,1)^{a}$ esistono due costanti C e k tali che

$$|\langle T, f\rangle| \leq C \sup_{|\mathbf{j}|\leq k, |x|\leq 1} \left|D^{\mathbf{j}} f(x)\right|, \forall f \in \mathcal{D}_{B(0,1)^{a}}(\Omega)$$

Proveremo, per cominciare, che la condizione

$$D^{\mathbf{j}} f(0) = 0, \forall |\mathbf{j}| \leq k$$

implica

$$\langle T, f\rangle = 0$$

Siccome,

$$\langle T, f_{\varepsilon}\rangle = \langle T, f\rangle$$

ci basta vedere che

$$\langle T, f\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \langle T, f_{\varepsilon}\rangle = 0$$

Ossia, visto che per $\varepsilon < 1/2$ $f_{\varepsilon} \in \mathcal{D}_{B(0,1)^{a}}(\Omega)$ ci basta vedere che

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{|\mathbf{j}|\leq k, |x|\leq 1} \left|D^{\mathbf{j}} f_{\varepsilon}(x)\right| = 0$$

cioè che tutte le derivate di ordine inferiore a k di f_{ε} convergono uniformemente (sulla 1-palla, cioè sul supporto) a 0.

Dalla formula di Leibniz, le derivate $D^{\mathbf{j}}$ di ordine inferiore a k di f_{ε} sono una combinazione lineare di termini $|\varepsilon|^{-|\mathbf{j}|} D^{\mathbf{j}}\chi D^{\mathbf{i}} f$ con $|\mathbf{i}| + |\mathbf{j}| \leq k$. Siccome le derivate di f di ordine inferiore a k sono nulle nell'origine, abbiamo che $D^{\mathbf{j}} f_{\varepsilon}$ è nulla per ogni $|\mathbf{j}| \leq k$. Applicando la formula di Taylor a $D^{\mathbf{j}} f_{\varepsilon}$ abbiamo che essa, nel suo supporto, è dominata da

$$C\varepsilon^{k+1-|\mathbf{j}|}$$

sicché, per ogni $|\mathbf{j}| \leq k$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{|x|\leq 1} \left|D^{\mathbf{j}} f_{\varepsilon}(x)\right| \leq \lim_{\varepsilon\to 0} C\varepsilon^{k+1-|\mathbf{j}|} \to 0$$

Adesso prendiamo una f qualsiasi (cioè che non abbia tutte le prime derivate nulle. Sia f_k il suo sviluppo di Taylor nell'origine fino all'ordine k moltiplicato per χ. Allora, siccome χ è pari a 1 sulla 1-palla, $f - f_k$ ha, nell'origine, derivate tutte nulle fino all'ordine k. Dunque,

$$\langle T, f\rangle = \langle T, f_k\rangle + \langle T, f - f_k\rangle = \langle T, f_k\rangle$$

Questo mostra che T è una combinazione lineare di funzionali lineari nelle derivate di f calcolate nell'origine e di ordine inferiore a k:

$$f_k(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} \sum_{|\mathbf{p}|=i} D^{\mathbf{p}} f(0)\, x^{\mathbf{p}} \chi(x)$$

sicché

$$\langle T, f\rangle = \langle T, f_k\rangle = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} \sum_{|\mathbf{p}|=i} D^{\mathbf{p}} f(0) \langle T, x^{\mathbf{p}}\chi\rangle = \sum_{|\mathbf{p}|\leq k} C_{\mathbf{p}} \langle D^{\mathbf{p}}\delta, f\rangle$$

(c.v.d.) come si voleva.

Convoluzione in $\mathcal{E}'$

Le cose si complicano ulteriormente quando si tenta di definire il prodotto di convoluzione di due distribuzioni in modo generale. Per i nostri scopi, ci limiteremo alla definizione della convoluzione in $\mathcal{E}'$ e della convoluzione di una funzione con una funzione generalizzata.
Consideriamo $T, S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Allora $T \otimes S$ è una distribuzione a supporto compatto appartenente a $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Sia $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e consideriamo l'applicazione definita su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$(x, y) \mapsto \varphi(x + y)$$

Banalmente tale applicazione appartiene a $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Definiamo allora

$$\langle T * S, \varphi \rangle = \langle T_x \otimes S_y, \varphi(x + y) \rangle$$

$T * S$ appartiene a $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Infatti, se φ_n $\mathcal{D}$-converge a φ, allora $\varphi_n(x + y)$ $\mathcal{E}$-converge a $\varphi(x + y)$, perciò

$$\langle T_x \otimes S_y, \varphi_n(x + y) \rangle \to \langle T_x \otimes S_y, \varphi(x + y) \rangle = \langle T * S, \varphi \rangle$$

D'altra parte, $T_x \otimes S_y$ ha supporto contenuto in $\operatorname{supp} T \times \operatorname{supp} S$, perciò $T * S$ ha supporto compatto, essendo contenuto in $\operatorname{supp} T + \operatorname{supp} S$, e quindi si estende in modo unico a una distribuzione in $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.
Per completezza dimostriamo la

Proposizione V.19 *Se $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ allora*

$$\operatorname{supp} T \otimes S = \operatorname{supp} T \times \operatorname{supp} S$$

Dimostrazione Se φ ha supporto in $(\operatorname{supp} T)^c \times \mathbb{R}^m$, allora il supporto di $\varphi(\cdot, y)$, per ogni y, è contenuto in $(\operatorname{supp} T)^c$. Allora

$$\langle T \otimes S, \varphi \rangle = \langle S_y, \langle T_x, \varphi(x, y) \rangle \rangle = 0$$

Ne viene che $\operatorname{supp} T \otimes S \subset \operatorname{supp} T \times \mathbb{R}^m$. Similmente, si ha $\operatorname{supp} T \otimes S \subset \mathbb{R}^n \times \operatorname{supp} S$. Perciò il supporto del prodotto tensore è contenuto nell'intersezione dei due insiemi trovati, cioè

$$\operatorname{supp} T \otimes S = \operatorname{supp} T \times \operatorname{supp} S$$

(c.v.d.)

Mostriamo ora che

$$D_x^{\mathbf{p}} D_y^{\mathbf{q}} (T \otimes S) = D_x^{\mathbf{p}} T \otimes D_y^{\mathbf{q}} S$$

Basta vederlo sulle funzioni in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, per densità e continuità si conclude. Abbiamo

$$\begin{aligned}
\left\langle D_x^{\mathbf{p}} D_y^{\mathbf{q}} (T \otimes S), \varphi \otimes \psi \right\rangle &= (-1)^{|\mathbf{p}|+|\mathbf{q}|} \left\langle (T \otimes S), D_x^{\mathbf{p}} D_y^{\mathbf{q}} \varphi \otimes \psi \right\rangle = \\
&= (-1)^{|\mathbf{p}|+|\mathbf{q}|} \left\langle (T \otimes S), D_x^{\mathbf{p}} \varphi \otimes D_y^{\mathbf{q}} \psi \right\rangle = \\
&= (-1)^{|\mathbf{p}|+|\mathbf{q}|} \langle T, D_x^{\mathbf{p}} \varphi \rangle \left\langle S, D_y^{\mathbf{q}} \psi \right\rangle = \langle D_x^{\mathbf{p}} T, \varphi \rangle \left\langle D_y^{\mathbf{q}} S, \psi \right\rangle \\
&= \left\langle D_x^{\mathbf{p}} T \otimes D_y^{\mathbf{q}} S, \varphi \otimes \psi \right\rangle.
\end{aligned}$$

Ne viene che, ancora sfruttando continuità e densità,

$$\begin{aligned}
D^{\mathbf{p}} (T * S) &= D_x^{\mathbf{p}} (T_x \otimes S_y) = (D_x^{\mathbf{p}} T_x \otimes S_y) \\
&= D_y^{\mathbf{p}} (T_x \otimes S_y) = \left(T_x \otimes D_y^{\mathbf{p}} S_y\right)
\end{aligned}$$

cioè

$$D^{\mathbf{p}} (T * S) = (D^{\mathbf{p}} T * S) = (T * D^{\mathbf{p}} S)$$

Da cui il fondamentale

Teorema V.26 *Sia $P(D)$ un operatore differenziale a coefficienti costanti, allora*

$$P(D)(T * S) = (P(D) T) * S = T * (P(D) S)$$

Convoluzione di una distribuzione con una funzione

Con qualche accorgimento sarebbe possibile definire il prodotto di convoluzione di funzioni generalizzate. A noi basterà dare senso alla convoluzione di una distribuzione con una funzione.

Siano $T \in \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ e $\varphi \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$ poniamo

$$(T * \varphi)(x) = \langle T_y, \varphi(x-y)\rangle,$$

si ha subito che $T * \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ e che $\operatorname{supp}(T * \varphi) \subset \operatorname{supp} T + \operatorname{supp} \varphi$, perciò $T * \varphi \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$. Inoltre,

$$D^{\mathbf{p}}(T * \varphi)(x) = (D^{\mathbf{p}} T * \varphi)(x) = (T * D^{\mathbf{p}} \varphi)(x)$$

cioè

$$P(D)(T * \varphi) = (P(D) T) * \varphi(x) = T * (P(D) \varphi(x))$$

Notiamo, infine che, se $\psi \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$

$$\begin{aligned} \langle (T * \varphi)(x), \psi(x)\rangle &= \langle \psi(x), (T * \varphi)(x)\rangle = \langle \psi(x), \langle T_y, \varphi(x-y)\rangle\rangle = \\ &= \langle T_y, \langle \psi(x), \varphi(x-y)\rangle\rangle = \langle T_y, (\tilde{\varphi} * \psi)(y)\rangle \end{aligned}$$

dove $\tilde{\varphi}(y) = \varphi(-y)$.

Funzione di Green Se adesso consideriamo l'equazione

$$P(D) G = \delta$$

e ne determiniamo una soluzione $G \in \mathcal{E}'$, abbiamo che

$$P(D) u = f$$

è risolta da $u = G * f$, nel caso in cui f sia a supporto compatto, infatti

$$P(D) u = P(D)(G * f) = (P(D) G) * f = \delta * f = f$$

infatti,

$$\langle \delta * f, \varphi\rangle = \langle f(y), \langle \delta(x), \varphi(x+y)\rangle\rangle = \langle f(y), \varphi(y)\rangle = \langle f, \varphi\rangle$$

cioè

$$\delta * f = f.$$

Se invece, come più spesso accade, $G \in \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^\ell\right)$, abbiamo che una soluzione particolare per l'equazione

$$P(D) u = f,$$

se, ancora, $f \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^\ell\right)$, è data da $G * f$. La distribuzione G si dice **soluzione fondamentale** o **funzione di Green** di $P(D)$. Il problema della dimostrazione dell'esistenza di una funzione di Green è particolarmente importante e complicato. Noi lo affronteremo solo nel semplice caso in cui $\ell = 1$, cioè $P(D)$ è un operatore che contiene solo derivate totali in una variabile.

Teorema V.27 *Sia dato il polinomio*

$$P(t) = \sum_{j=0}^{m} a_j t^j,\ m \in \mathbb{N}^\times,\ a_j \in \mathbb{C},\ a_m \neq 0$$

Sia φ la soluzione dell'equazione differenziale $P(D)\varphi = 0$ ai dati iniziali seguenti $\varphi^{(m-1)}(0) = 1$, $\varphi^{(j)}(0) = 0$ per $j \in J_{m-1}$. Allora la distribuzione

$$G = \frac{1}{a_m} T_{\theta\varphi}$$

è una funzione di Green per $P(D)$.

Dimostrazione Tutte le derivate funzionali di $\theta\varphi$ sono continue nell'origine, tranne la derivata $m-1$-esima che presenta un 1-salto. Perciò le derivate distribuzionali sono le seguenti

$$\begin{aligned} D^m(T_{\theta\varphi}) &= D\left(T_{\theta\varphi^{(m-1)}}\right) = T_{\theta\varphi^{(m)}} + \delta \\ D^k(T_{\theta\varphi}) &= T_{\theta\varphi^{(k)}},\ k \leq m-1 \end{aligned}$$

sicché

$$P(D)\,G = \frac{1}{a_m}\sum_{j=0}^{m} a_j D^j T_{\theta\varphi} = \frac{1}{a_m}\left[\sum_{j=0}^{m} a_j \theta D^j \varphi + a_m \delta\right] = \delta$$

(c.v.d.)

Funzioni di Green causali Si noti come il supporto di G sia nel semiasse positivo. In termini fisici questo comporta che il sistema descritto dalla $P(D)$ è **causale**. Infatti, la risposta u del sistema dipende dall'ingresso f come segue

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-t')\, f(t')\; dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t-t')\, \frac{\varphi(t-t')}{a_m} f(t')\; dt' = \int_{-\infty}^{t} \frac{\varphi(t-t')}{a_m} f(t')\; dt'$$

cioè nell'espressione per $u(t)$ compaiono tutti i valori che l'input f ha assunto per tempi inferiori a t: $t' \le t$. Si noti come dato $P(D)$ la funzione di Green non è unica, perché si può sempre aggiungere a $G = \varphi/a_m$ una soluzione dell'omogenea. Tuttavia, se così si fa si perde la causalità perché non esistono soluzioni della omogenea che siano right-sided (ossia nulle per $t < 0$). Ne viene che la soluzione φ/a_m è **l'unica funzione di Green causale** ammessa da $P(D)$.

Soluzione dell'equazione omogenea Consideriamo l'equazione omogenea indotta dall'operatore $P(D)$:

$$P(D)\,T = 0$$

Come noto, se $\deg P = m$, di essa troviamo m soluzioni linearmente indipendenti in $\mathcal{E}^n$ $u_1, \ldots, u_m$. Le distribuzioni associate T_{u_i} appartengono a $\mathcal{D}'$, vogliamo vedere che ogni altra soluzione dell'omogenea è esprimibile come combinazione lineare delle T_{u_i}. Sia S una soluzione, i.e., $P(D)\,S = 0$, mostriamo che S è una funzione. Restringiamoci per un momento a considerare lo spazio $\mathcal{D}'(a,b)$. Sia $\varphi \in \mathcal{D}(a,b)$ una qualunque funzione test. Sia $\chi \in \mathcal{D}(a,b)$ una fissata funzione avente integrale tale che

$$\int_a^b \tilde{G}(b-x')\; \chi(x')\; dx' = 1$$

e poniamo

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - \chi(x) \int_a^b \tilde{G}(b-t)\, \varphi(t)\; dt \in \mathcal{D}(a,b)$$

dove $\tilde{G}$ è la funzione di Green, determinata nel teorema precedente, associata al problema

$$\tilde{P}(D)\,\Phi = \tilde{\varphi},$$

con

$$\tilde{P}(D)\,\Phi = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j\, a_j D^j \Phi,$$

Poniamo ancora

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \tilde{G}(x-x')\, \tilde{\varphi}(x')\; dx'$$

allora $\Phi \in \mathcal{E}$. Siccome $\tilde{\varphi}$ ha supporto compatto, Φ ha supporto compatto in (a,b) essendo, per $x > b$

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \int_a^b \tilde{G}(b-x')\, \tilde{\varphi}(x')\; dx' \\ &= \int_a^b \tilde{G}(b-x')\, \varphi(x')\; dx - \int_a^b \tilde{G}(b-x')\; \chi(x)\; dx' \int_a^b \tilde{G}(b-t)\, \varphi(t)\; dt = 0\end{aligned}$$

Dunque è possibile scrivere

$$0 = \langle P(D)\,S, \Phi\rangle = \left\langle S, \tilde{P}(D)\,\Phi\right\rangle = \langle S, \varphi\rangle - \langle S, \chi\rangle \int_a^b \tilde{G}(b-t)\, \varphi(t)\; dt$$

cioè

$$\langle S, \varphi \rangle = \int_a^b \langle S, \chi \rangle \, \tilde{G}(b-t) \, \varphi(t) \; dt$$

Concludiamo che in $\mathcal{D}(a,b)$ ogni soluzione distribuzionale è, in realtà, una funzione di classe $\mathcal{C}^m$. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}$. Sia T una soluzione del nostro problema su Ω. Sia $\mathcal{U}$ l'insieme degli intervalli (a,b) contenuti in Ω. Per ogni $\omega \in \mathcal{U}$ esiste $f_\omega \in \mathcal{C}^m$ tale che $T = T_{f_\omega}$. Se $\omega_1 \cap \omega_2 \neq \varnothing$, allora $f_{\omega_1} = f_{\omega_2}$ su $\omega_1 \cap \omega_2$. Perciò esiste $f \in \mathcal{C}^m$ tale che, per ogni $\omega \in \mathcal{U}$, la restrizione di f a ω è f_ω. Ne segue che ogni ω è dominio di nullità di $T - T_f$ e dunque, per il teorema sull'esistenza del massimo dominio di nullità, $T - T_f = 0$ sull'intero Ω.
Ora, visto che $T = T_f$ e $f \in \mathcal{C}^m$

$$0 = P(D) \, T_f = P(D) \, f$$

perciò f è data da una combinazione lineare delle u_i.

Proposizione V.20 *Lo spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione differenziale a coefficienti costanti $P(D) = T$ ha dimensione pari al grado di P anche nello spazio delle funzioni generalizzate.*

Risulta adesso perfettamente giustificata l'affermazione di sopra per cui esiste una e una sola funzione di Green causale per ogni $P(D)$.

V.5.7 Trasformata di Fourier delle distribuzioni temperate

In questa sottosezione focalizziamo la nostra attenzione sullo spazio delle distribuzioni temperate. Esso è infatti il massimo spazio sul quale sia possibile estendere la trasformata di Fourier

Motivazione Definiamo la trasformata di Fourier come abbiamo fatto per la derivata. Se $u \in \mathcal{S}$ e richiediamo

$$\hat{F} T_u \varphi = T_{\hat{u}} \varphi$$

abbiamo

$$\begin{aligned} \hat{F} T_u \varphi &= T_{\hat{u}} \varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\xi) \, \varphi(\xi) \; d\mu(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(\xi) \; \varphi(\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(\eta) \; u(\eta) \, e^{i\eta\xi} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(\eta) \; u(\eta) \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(\xi) \; \varphi(\xi) \, e^{i\eta\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(\eta) \; u(\eta) \, \hat{\varphi}(\eta) = T_u \hat{\varphi} \end{aligned}$$

Definizione della trasformata di Fourier delle distribuzioni Poniamo allora per definizione, per ogni distribuzione temperata T,

$$\left\langle \hat{F} T, \varphi \right\rangle = \left\langle T, \hat{F} \varphi \right\rangle$$

Vediamo che si tratta di una buona definizione. Linearità

$$\hat{F} T (\varphi + \lambda \psi) = T \hat{F} (\varphi + \lambda \psi) = T \hat{F} \varphi + \lambda T \hat{F} \psi = \hat{F} T \varphi + \lambda \hat{F} T \psi$$

Continuità: se $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathcal{S}$, allora, per continuità di $\hat{F}$ su $\mathcal{S}$, $\hat{F} \varphi_n \to \hat{F} \varphi$ in $\mathcal{S}$, sapendo poi che T è continuo, si ha

$$\lim_{n \to \infty} \hat{F} T \varphi_n = \lim_{n \to \infty} T \hat{F} \varphi_n = \lim_{n \to \infty} T \hat{F} \varphi_n = T \hat{F} \varphi = \hat{F} T \varphi.$$

Antitrasformata Lavoro analogo si può fare per l'antitrasformata $\check{F}$. In particolare, se $u \in \mathcal{S}$, allora

$$\begin{aligned} \left\langle \check{F} T_u, \varphi \right\rangle &= \left\langle T_u, \check{F} \varphi \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(\xi) \; u(\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(\eta) \; \varphi(\eta) \, e^{-i\eta\xi} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(\eta) \; \varphi(\eta) \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(\xi) \; u(\xi) \, e^{-i\eta\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(\eta) \; \varphi(\eta) \, \check{u}(\eta) = \\ &= \langle T_{\check{u}}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

Mostriamo adesso che $\hat{F} \check{F} = \check{F} \hat{F} = \mathbb{I}$: per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\left\langle \hat{F} \check{F} T, \varphi \right\rangle = \left\langle T, \check{F} \hat{F} \varphi \right\rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

$$\left\langle \check{F}\hat{F}T,\varphi\right\rangle = \left\langle T,\hat{F}\check{F}\varphi\right\rangle = \langle T,\varphi\rangle$$

Chiaramente non avremmo potuto estendere la definizione allo spazio $\mathcal{D}'$. Infatti, se $\varphi \in \mathcal{D}$ allora la trasformata di Fourier $\hat{\varphi}$ è una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$, perciò non è a supporto compatto!

Convoluzione Ricordiamo che abbiamo definito il prodotto di convoluzione di una funzione con una distribuzione come segue

$$T * \varphi(x) = \langle T_y, \varphi(x-y)\rangle$$

e che, se $\psi \in \mathcal{S}$, allora

$$\langle T*\varphi,\psi\rangle = \langle T,\tilde{\varphi}*\psi\rangle$$

con $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(-x)$.
Siccome la mappa $g \mapsto \tilde{\varphi} * g$ è continua in $\mathcal{S}$, abbiamo che $T*\varphi$ appartiene effettivamente a $\mathcal{S}'$. Si vede poi facilmente che il prodotto di convoluzione è continuo. Ora, grazie al fatto che derivazione e trasformata di Fourier sono continue in $\mathcal{S}'$ e che $\mathcal{S}$ è denso in $\mathcal{S}'$, abbiamo

$$\begin{aligned} D^\alpha(T*\varphi) &= D^\alpha T * \varphi = T * D^\alpha\varphi \\ \hat{F}(T*\varphi) &= \hat{\varphi}\hat{F}T \end{aligned}$$

In modo analogo si ha

$$\begin{aligned} \hat{F}(D^\alpha T) &= (-i\omega)^\alpha \hat{F}T \\ \hat{F}\left((ix)^k T\right) &= D^k\left(\hat{F}T\right) \end{aligned}$$

Adesso siamo pronti a vedere qualche esempio

Esempio V.15 Vogliamo calcolare la trasformata di Fourier della delta di Dirac. Abbiamo

$$\left\langle \hat{F}\delta_0,\varphi\right\rangle = \left\langle \delta_0,\hat{F}\varphi\right\rangle = \left\langle \delta_0, \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\, e^{i\eta\xi}\, d\mu(\xi)\right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\, d\mu(\xi) = \langle 1,\varphi\rangle$$

cioè

$$\hat{F}\delta_0 = 1.$$

Grazie alle formule di sopra

$$\hat{F}\left(\delta_0^{(\alpha)}\right) = (-i\omega)^\alpha$$

■

Esempio V.16 (parità) Vogliamo trovare la trasformata di Fourier di 1 (dall'esempio percedente sappiamo che la sua antitrasformata è δ_0). A questo scopo ricordiamo che, in $\mathcal{S}$, si ha

$$\hat{F}^2 = 2\pi I$$

dove I indica l'inversione spaziale

$$\varphi(x) \to I\varphi(x) = \varphi(-x)$$

perciò, in $\mathcal{S}'$

$$\left\langle \hat{F}^2 T,\varphi\right\rangle = \left\langle T,\hat{F}^2\varphi\right\rangle = 2\pi\langle T, I\varphi\rangle = 2\pi\langle IT,\varphi\rangle$$

Dove si è definito IT come abbiamo definito derivata e trasformata. Si tratta di una buona definizione, perché se $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathcal{S}$, allora $I\varphi_n \to I\varphi$. Inoltre se u è una funzione, per esempio continua e polinomialmente dominata, allora

$$IT_u = T_{Iu}$$

infatti,

$$\begin{aligned} \langle IT_u,\varphi\rangle &= \langle T_u, I\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,\varphi(-x)\, d\mu(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(-y)\,\varphi(y)\, d\mu(y) = \\ &= \langle T_{Iu},\varphi\rangle \end{aligned}$$

Ma torniamo al nostro problema

$$2\pi I\delta_0 = \hat{F}^2\delta_0 = \hat{F}1$$

Diciamo che δ_0 è pari, cioè

$$I\delta_0 = \delta_0$$

infatti, per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\langle I\delta_0, \varphi\rangle = \langle \delta_0, I\varphi\rangle = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi\rangle$$

In definitiva,

$$\hat{F}1 = 2\pi\delta_0.$$

Si noti come la parità della delta discende dall'invarianza per parità dello 0, ecco perché è fondamentale avere a che fare con δ_0 e non con una qualsiasi δ_{x_0}. In particolare, troviamo

$$\hat{F}\left(x^k\right) = (-i)^k D^k\hat{F}1 = (-i)^k \delta_0^{(k)}$$

■

Esempio V.17 (traslazione) Ancora grazie alla proposizione V.10, recuperiamo i teoremi di traslazione. Se U_a è l'operatore di traslazione definito in $\mathcal{S}$, abbiamo che esso è continuo in $\mathcal{S}$ (con la convergenza di $\mathcal{S}$!). Ricordiamo che

$$(T_a\varphi)(x) = \varphi(x-a)$$

Allora è una buona definizione la

$$\langle T_aT, \varphi\rangle = \langle T, T_{-a}\varphi\rangle$$

Mostriamo che se $u \in \mathcal{S}$, allora

$$T_aT_u = T_{T_au}$$

abbiamo, per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned}\langle T_aT_u, \varphi\rangle &= \langle T_u, T_{-a}\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,\varphi(x+a)\;d\mu(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(y-a)\,\varphi(y)\;d\mu(y) = \\ &= \langle T_{T_au}, \varphi\rangle\end{aligned}$$

Dai teoremi di traslazione in $\mathcal{S}$, abbiamo

$$\begin{aligned}\hat{F}(T_a\varphi) &= e^{iak}\left(\hat{F}\varphi\right)(k) \\ \hat{F}\left(e^{iax}\varphi(x)\right) &= \left(\hat{F}\varphi\right)(k+a)\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}\left\langle \hat{F}T_aT, \varphi\right\rangle &= \left\langle T, T_{-a}\hat{F}\varphi\right\rangle = \langle T, \hat{\varphi}(k+a)\rangle = \left\langle T, \hat{F}\left(e^{iax}\varphi(x)\right)\right\rangle = \\ &= \left\langle \hat{F}T, e^{iax}\varphi(x)\right\rangle = \left\langle e^{iax}\hat{F}T, \varphi\right\rangle\end{aligned}$$

Abbiamo così ricavato che

$$\hat{F}T_a = e^{iax}\hat{F}$$

In particolare, se $T \equiv \delta_0$, allora

$$T_a\delta_0 = \check{F}\left(e^{iax}\hat{F}\delta_0\right) = \check{F}\left(e^{iax}\right)$$

Notiamo che

$$T_a\delta_0 = \delta_a$$

Infatti, per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$, si ha

$$\langle T_a\delta_0, \varphi\rangle = \langle \delta_0, \varphi(x+a)\rangle = \varphi(a)$$

Il risultato è coerente col fatto che si scrive δ_0 come $\delta(x)$ (come se fosse una funzione cui è associata una distribuzione), infatti

$$T_a\delta(x) = \delta(x-a) \equiv \delta_a.$$

Ne viene che

$$\hat{F}\delta_a = e^{iax}$$

o, come si può trovare scritto,

$$\hat{F}\delta(x-a) = e^{iax}$$

cioè

$$\int dx\, e^{ikx}\delta(x-a) = e^{iax}$$

■

Esempio V.18 Sia u una funzione dominata polinomialmente avente derivata dominata polinomialmente e generalmente continua. Se u ha una discontinuità σ finita in x_0 allora, come abbiamo visto prima,

$$DT_u = T_{u'} + \sigma\delta_{x_0}$$

allora

$$\hat{F}(DT_u) = \hat{F}(T_{u'}) + \sigma e^{ikx_0} = -ik\hat{F}(T_u)$$

■

Vediamo un altro risultato generale (che abbiamo finora mostrato in casi particolari, traslazione, parità derivazione, trasformata di Fourier):

Proposizione V.21 *Se U è un'operatore lineare continuo (nella topologia di $\mathcal{S}$) definito su $\mathcal{S}$ e a valori in $\mathcal{S}$, allora l'operatore U definito su $\mathcal{S}'$ come*

$$\langle UT, \varphi\rangle = \langle T, U\varphi\rangle$$

è un operatore lineare continuo da $\mathcal{S}'$ in $\mathcal{S}'$.

Dimostrazione Cominciamo a vedere che UT appartiene a $\mathcal{S}'$. Linearità: per ogni $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, si ha

$$\langle UT, \varphi + \lambda\psi\rangle = \langle T, U\varphi + \lambda U\psi\rangle = \langle T, U\varphi\rangle + \lambda\langle T, U\psi\rangle = \langle UT, \varphi\rangle + \lambda\langle UT, \psi\rangle.$$

Continuità: sia φ_n una successione in $\mathcal{S}$ convergente a φ, allora

$$\lim_{n\to\infty}\langle UT, \varphi_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle T, U\varphi_n\rangle = \lim_{n\to\infty}(T\circ U)\varphi_n$$

per continuità della composizione, essendo $T \in \mathcal{S}'$ continuo,

$$\lim_{n\to\infty}\langle UT, \varphi_n\rangle = (T\circ U)\varphi = \langle T, U\varphi\rangle = \langle UT, \varphi\rangle$$

Vediamo che U, riguardato come operatore su $\mathcal{S}'$ è continuo. Siano $T, R \in \mathcal{S}'$, vogliamo vedere che

$$\mathcal{S}' \ni U(T + \lambda R) = UT + \lambda UR$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$, abbiamo

$$\begin{aligned}
\langle U(T+\lambda R), \varphi\rangle &= \langle T + \lambda R, U\varphi\rangle = \langle T, U\varphi\rangle + \lambda\langle R, U\varphi\rangle = \\
&= \langle UT, \varphi\rangle + \lambda\langle UR, \varphi\rangle = \langle UT, \varphi\rangle + \langle \lambda UR, \varphi\rangle \\
&= \langle UT + \lambda UR, \varphi\rangle
\end{aligned}$$

Vediamo, infine, che U è continuo. Cioè, se $T_n \to T$, allora $UT_n \to UT$. Infatti, se $T_n \to T$, allora, per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$, si ha

$$\lim_{n\to\infty}\langle T_n, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle$$

ma

$$\langle UT_n, \varphi\rangle = \langle T_n, U\varphi\rangle$$

con $U\varphi \in \mathcal{S}$ essendo $R(U) \subset \mathcal{S}$, per cui

$$\lim_{n\to\infty} \langle UT_n, \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle T_n, U\varphi\rangle = \langle T, U\varphi\rangle = \langle UT, \varphi\rangle$$

da cui

$$UT_n \to UT,$$

(c.v.d.) la tesi.

In particolare, la derivata, la trasformata di Fourier, la parità e le traslazioni sono operatori lineari continui da $\mathcal{S}'$ in sé.
L'esempio delle traslazioni si generalizza nel seguente

Esempio V.19 (cambio di variabile) Sia A un mappa lineare invertibile in $\mathbb{R}^\ell$, cioè $A \in GL(\ell, \mathbb{R})$. definiamo allora

$$V(A) : \mathcal{S} \to \mathcal{S},\ (V(A)\varphi)(x) = \varphi\left(A^{-1}x\right)$$

$V(A)$ è un'applicazione lineare continua di $\mathcal{S}$ in sé. Vogliamo estendere $V(A)$ a $\mathcal{S}'$ di modo che se T_u è associata a $u \in \mathcal{S}$, allora

$$V(A)\,T_u = T_{V(A)u}$$

Dunque,

$$\begin{aligned} V(A)\,T_u\varphi &= T_{V(A)u}\varphi = \int_{\mathbb{R}^\ell} u\left(A^{-1}x\right)\varphi(x)\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^\ell} u(y)\,\varphi(Ay)\,\frac{d\mu(y)}{|\det A|} = \\ &= T_u \frac{V\left(A^{-1}\right)}{\det A}\varphi \end{aligned}$$

ossia, poniamo per ogni $T \in \mathcal{S}'$

$$\langle V(A)\,T, \varphi\rangle = \left\langle T, \frac{V\left(A^{-1}\right)}{|\det A|}\varphi \right\rangle$$

■ in modo che $V(A)\,T$ è ben definito e continuo.

Diamo ancora un importante esempio di distribuzione

Esempio V.20 (parte principale) Poniamo

$$P\left(\frac{1}{x}\right) : \varphi \mapsto \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{1}{x}\varphi(x)\, d\mu$$

Vogliamo mostrare che si tratta di una distribuzione temperata. Cominciamo con il notare

$$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{1}{x}\varphi(x)\, d\mu = \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\, d\mu$$

D'altra parte l'integranda ammette limite per $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} = 2\varphi'(0)$$

perciò è $L^1(0, +\infty)$ dunque

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{1}{x}\varphi(x)\, d\mu = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\, d\mu < \infty$$

perciò il limite ha senso per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$.
La linearità è ovvia, vediamo la continuità. Sia $\varphi \in \mathcal{S}$ allora

$$\left|\frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\right| \le \frac{1}{x}\int_{-x}^{x} |\varphi'(t)|\, dt \le 2\,\|\varphi'\|_\infty$$

perciò

$$\left|P\left(\frac{1}{x}\right)\varphi\right| = \left|\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\, d\mu\right| = \left|\int_0^1 \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\, d\mu + \int_1^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\, d\mu\right| \le$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_0^1 \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \right| d\mu + \left| \int_{|x|\geq 1} \frac{\varphi(x)}{x}\, d\mu \right| \leq 2 \int_0^1 \|\varphi'\|_\infty \, d\mu + \left| \int_{|x|\geq 1} \frac{x\varphi(x)}{x^2}\, d\mu \right| \\
&\leq 2\|\varphi'\|_\infty + \left| \int_1^{+\infty} \frac{x\varphi(x)}{x^2}\, d\mu \right| \leq 2\|\varphi'\|_\infty + \|x\varphi\|_\infty
\end{aligned}
$$

da cui si ricava la continuità di $P(1/x)$ che è perciò, a buon diritto, una distribuzione temperata. ▪

Esempio V.21 Andiamo a risolvere l'equazione

$$xT = 0$$

Sia $\varphi \in \mathcal{D}$ il cui supporto non contenga lo 0, allora

$$0 = \langle xT, \varphi \rangle = \langle T, x\varphi \rangle$$

per ogni $\psi \in \mathcal{D}$ il cui supporto non contenga lo 0 vale allora

$$\langle T, \psi \rangle = 0$$

visto che $\varphi = \psi/x \in \mathcal{D}$ e

$$\langle T, \psi \rangle = \langle T, x\varphi \rangle = 0$$

Ne viene che il complementare dell'origine è contenuto nel dominio di nullità di T, perciò il supporto di T è al più ridotto al solo 0. Allora T è dato da una combinazione lineare della delta di Dirac con le sue derivate. D'altra parte, si vede subito che l'unico termine che resta nella combinazione lineare è quello nella delta, perciò tutte e sole le soluzioni del nostro problema sono

$$T = c\delta_0$$

Siccome una soluzione particolare della

$$xT = 1$$

è $P(1/x)$ si ha che la soluzione generale di quest'ultima è

$$T = P\frac{1}{x} + c\delta_0.$$

▪

Esempio V.22 Ancora sulla parte principale. Mostriamo anzitutto che essa può essere vista come limite per $\sigma \to 0$ della seguente successione di distribuzioni

$$u_\sigma(x) = \begin{cases} 0, & |x| < \sigma \\ 1/x, & |x| > \sigma \end{cases}$$

Infatti

$$\lim_{\sigma\to 0} \langle u_\sigma, \varphi \rangle = \lim_{\sigma \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} u_\sigma \varphi \, d\mu = \lim_{\sigma\to 0} \int_{|x|>\sigma} \frac{1}{x} \varphi \, d\mu = \left\langle P\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle$$

Grazie a questo fatto e alla continuità della trasformata di Fourier distribuzionale, possiamo passare a calcolare

$$\hat{F}P\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{\sigma\to 0} \hat{F}u_\sigma.$$

Siccome u_σ appartiene a L^2 per ogni σ la sua trasformata di Fourier (è facile verificarlo) è la trasformata di Fourier della u_σ intesa come funzione

$$\hat{F}u_\sigma = Fu_\sigma$$

Usando il lemma di Jordan si conclude facilmente che

$$
\begin{aligned}
\hat{F}P\left(\frac{1}{x}\right) &= \pi i \operatorname{sign} k \\
\check{F}P\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{2i} \operatorname{sign} k
\end{aligned}
$$

∎

Esempio V.23 Vogliamo risolvere la seguente equazione differenziale

$$\dot{y} = \delta(t)$$

Come sappiamo (lo abbiamo dimostrato quando abbiamo introdotto la funzione di Green), una soluzione particolare del problema è $\theta(t)$. La soluzione generale è, lo abbiamo dimostrato,

$$y(t) = \theta(t) + k$$

Passiamo in trasformata di Fourier. In questo modo non perdiamo alcuna soluzione visto che $y \in \mathcal{S}'$. Abbiamo

$$-i\omega\hat{y} = 1$$

da cui

$$\hat{y} = iP\frac{1}{\omega}$$

questa è solo una soluzione particolare. L'operatore $-i\omega$ ha kernel non vuoto essendo pari a $c\delta(\omega), c \in \mathbb{C}$. Allora

$$\hat{y} = iP\frac{1}{\omega} + c\delta(\omega)$$

In definitiva, abbiamo

$$\hat{F}(\theta) = iP\frac{1}{\omega} + c\delta(\omega)$$

D'altra parte, antitrasformando

$$\theta(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sign} x + \frac{c}{2\pi}$$

perciò, posto $x = 1$,

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{c}{2\pi} \Rightarrow c = \pi$$

Sicché

$$\hat{F}(\theta) = iP\frac{1}{\omega} + \pi\delta(\omega)$$

Si ha poi anche

$$\check{F}(\theta) = -\frac{i}{2\pi}P\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\delta(x)$$

∎

Esempio V.24 Un altro risultato utile che riguarda la parte principale è il seguente

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{x \pm i\varepsilon} = P\frac{1}{x} \mp \pi i\delta_0$$

che si dimostra subito osservando che

$$\frac{1}{x - i\varepsilon} = \check{F}(u_\varepsilon(\omega))$$

dove $u_\varepsilon = 2\pi i\theta(\omega)e^{-\varepsilon\omega}$.
Infatti,

$$\hat{F}\left(\frac{1}{x - i\varepsilon}\right) = \int \frac{e^{i\omega x}}{x - i\varepsilon}\,dx$$

Applichiamo il lemma di Jordan. Si ha un polo nel semipiano superiore (visto che $\varepsilon > 0$). Per $\omega > 0$ si chiude il semicerchio nel semipiano immaginario positivo e perciò

$$\int \frac{e^{i\omega x}}{x - i\varepsilon}\,dx = 2\pi i e^{-\varepsilon\omega}$$

mentre per $\omega < 0$ si deve chiudere nel semipiano inferiore ove l'integranda è olomorfa, per cui si ottiene 0. In definitiva si ha quanto preannunciato. D'altra parte u_ε tende a $2\pi i\theta(\omega)$.

Sicché

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{x-i\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\check{F}(u_\varepsilon)=\check{F}\lim_{\varepsilon\to 0^+}u_\varepsilon = 2\pi i\check{F}\theta(\omega)= = P\frac{1}{x}+\pi i\delta(x)$$

■

Equazioni differenziali Un'importante applicazione della trasformata di Fourier è la soluzione di problemi agli operatori differenziali (ordinari o parziali). Se consideriamo l'operatore a coefficienti costanti $P(D)$ abbiamo che l'equazione

$$P(D)\,u=f$$

si legge in trasformata come

$$P(-ik)\,\hat{u}=\hat{f}$$

che è un'equazione algebrica. Si noti come tuttavia nel passare in trasformata si richiede che u ed f siano trasformabili. Questo comporta, in generale, la perdita di alcune (molte?!) soluzioni. Per esempio, la soluzione dell'omogenea associata contiene degli esponenziali, ebbene essi non sono trasformabili, perciò la trasformata di Fourier seleziona al più la soluzione particolare (fatto comunque rilevante, visto che nei sistemi dissipativi, quelli **fisici**, la soluzione dell'omogenea decade in un tempi caratteristico breve, perciò, più che a questa fase transiente, si è proprio interessati alla soluzione particolare).
Nonostante in trasformata ci si riduca a un'equazione algebrica, le difficoltà non sono poi scomparse. In effetti, si è costretti ad operare una divisione che non è detto abbia senso. Se per esempio $P(-ik)=k$, non è possibile moltiplicare ambo i membri per $1/k$ dal momento che $1/k$ **non** è una distribuzione temperata. Bisogna, invero, dire che la difficoltà non è insormontabile, dal momento che vale

$$kP\frac{1}{k}=1,$$

formula che può essere generalizzata al caso di zeri multipli.

Ricerca della funzione di Green causale via Fourier Prima abbiamo accennato al fatto che la soluzione ottenuta via trasformata di Fourier perde le soluzioni dell'omogenea associata e fornisce (se la fornisce!) la soluzione particolare. D'altra parte, come abbiamo visto, quello che interessa il fisico è la soluzione causale del problema in cui $f=\delta$. Vediamo se riusciamo a catturare almeno questa con il metodo della trasformata.
Come abbiamo dimostrato precedentemente, la funzione di Green associata a $P(D)$ è il prodotto di $\theta(x)$ con la soluzione φ del problema di Cauchy ai dati inziali $\varphi^{(m)}=0$, $m<\deg P-1$ e $\varphi^{(m)}=1$, $m=\deg P-1$. Quello che vogliamo mostrare è che sotto certe condizioni la soluzione dell'equazione $P(D)\,u=\delta$ è proprio quella che si ottiene passando in trasformata.
Dobbiamo metterci in una condizione fisicamente sensata. Supporremo allora che il sistema sia dissipativo o, almeno, che all'infinito raggiunga l'equilibrio (nel senso di Lyapunov: la funzione si mantiene limitata per tempi grandi). In questo caso le soluzioni dell'omogenea sono caratterizzate da esponenziali decrescenti, cioè le radici λ_i del polinomio secolare $P(z)=0$ sono tali che

$$\operatorname{Re}\lambda_i\le 0,\ i\in J_{\deg P}$$

In queste condizioni $G(x)=\theta(x)\,\varphi(x)$ è certamente Fourier trasformabile visto che è, per ipotesi, limitata sulla retta reale e continua (perciò localmente sommabile).
Ora, nell'ipotesi in cui per tutte le radici valga $\operatorname{Re}\lambda_i<0$, la soluzione che si ottiene via Fourier è **unica** ed è (allora) proprio la funzione di Green causale del sistema. Infatti, in trasformata l'equazione diventa

$$P(-i\omega)\,\hat{G}=1$$

dove $\omega\in\mathbb{R}$. Ora, gli zeri di P si hanno per $\omega_i=i\lambda_i$, cioè si trovano nel semipiano immaginario negativo. Questo comporta

(i) $P(-i\omega)$ ha inversa che è ancora una distribuzione, perciò

$$\hat{G} = \frac{1}{P(-i\omega)}$$

(ii) $\hat{G}$ è olomorfa nel semipiano immaginario positivo.

Antitrasformiamo $\hat{G}$, abbiamo

$$G(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{P(-i\omega)}\,d\omega$$

Per $t < 0$, dal lemma di Jordan, dobbiamo chiudere il semicerchio nel semipiano positivo, ivi $1/P(-i\omega)$ è olomorfa, perciò

$$G(t) = 0,\, t < 0$$

da cui la causalità.
Nel caso in cui qualche λ_i appartenga all'asse reale avremo da aggiungere qualche parte principale.e allora $\hat{G}$ dipenderà da dei parametri c_i che andranno a moltiplicare le delta di Dirac. Perdiamo così l'unicità della funzione di Green fornita via trasformata. Tuttavia, scegliendo opportunamente i c_i potremo far comparire termini del tipo

$$P\left(\frac{1}{\omega}\right) + \pi\delta = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\omega + i\varepsilon}$$

che, come limiti $\mathcal{S}'$ di trasformate di funzioni a supporto in $(0, +\infty)$, sono trasformate di funzioni a valori in $(0, +\infty)$. In definitiva, seppure dobbiamo selezionarla tra tante, la funzione di Green causale si ottiene ancora dalla risoluzione del problema in trasformata di Fourier.

Traslazione nel tempo e diagonalizzazione in trasformata

Prima di chiudere, ancora un'importante osservazione sull'uso della trasformata di Fourier nello studio dei sistemi lineari.
Consideriamo un operatore lineare T continuo su $L^2(\mathbb{R})$. Si debba risolvere il problema

$$Tf(t) = g(t)$$

Adesso, se T commuta con le traslazioni nel tempo, allora, in trasformata di Fourier esso è un'operatore di moltiplicazione (e come tale è diagonalizzato). Ricordiamo che se T è un operatore, allora il suo trasformato è $\hat{T}$ tale che

$$\hat{T}\hat{f} = \hat{g}$$

perciò

$$FTF^{-1}Ff(t) = Fg(t) \Rightarrow \hat{T} = FTF^{-1}$$

Ora, se T commuta con le traslazioni nel tempo, cioè con T_a per ogni a, allora $\hat{T}$ commuta con l'operatore di moltiplicazione per $e^{i\omega a}$. Infatti, dall'equazione $TT_a = T_aT$, troviamo

$$\begin{aligned}\left(FTF^{-1}\right)\left(FT_aF^{-1}\right) &= \left(FT_aF^{-1}\right)\left(FTF^{-1}\right)\\ \hat{T}\left(FT_aF^{-1}\right) &= \left(FT_aF^{-1}\right)\hat{T}\end{aligned}$$

D'altra parte

$$FT_aF^{-1} = e^{-i\omega a}$$

da cui, per ogni a

$$\hat{T}e^{i\omega a} = e^{i\omega a}\hat{T}$$

Ammettiamo, lo dimostreremo tra poco, che l'equazione di sopra, implichi che, per ogni $g(\omega) \in \mathcal{C}_c^\infty$ risulti

$$\hat{T}g(\omega) = g(\omega)\,\hat{T}$$

dove $g(\omega)$ è inteso, come prima $e^{i\omega a}$, come operatore di moltiplicazione. Fissiamo adesso la funzione $\chi \in \mathcal{S}$ (per esempio, $\chi = e^{-\omega^2}$) che sia sempre diversa da 0. Allora abbiamo

$$\hat{T}(g\chi) = g\left(\hat{T}\chi\right)$$

Poniamo adesso $\psi \equiv \hat{T}\chi$. Abbiamo

$$\hat{T}(g\chi) = g\psi = g\frac{\psi}{\chi}\chi = \frac{\psi}{\chi}(g\chi)$$

dove ψ/χ ha perfettamente senso, visto che χ è una funzione fissata che non si annulla mai. Ora, l'insieme delle funzioni del tipo $g\chi$ coincide ancora con $\mathcal{C}_c^\infty$ visto che χ non si annulla mai. Dunque, posto $h(\omega) = T\chi/\chi$ abbiamo che l'operatore $\hat{T}$ è un operatore di moltiplicazione sul denso $\mathcal{C}_c^\infty$, cioè

$$\hat{T}\varphi = h\varphi, \; \forall\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty.$$

Siccome T è un operatore continuo, $\hat{T}$ è esso stesso un operatore continuo, dunque h è una funzione limitata e l'operatore $h\varphi$ si estende per continuità a tutto lo spazio. In definitiva $\hat{T} = h$.

Dobbiamo vedere che

$$\hat{T}e^{i\omega a} = e^{i\omega a}\hat{T} \; \forall a \in \mathbb{R} \Longrightarrow \hat{T}g(\omega) = g(\omega)\hat{T} \; \forall g \in \mathcal{C}_c^\infty.$$

Ora, ogni funzione $g(\omega)$ in $\mathcal{C}_c^\infty$ si espande in serie di Fourier sugli intervalli $[-L, L]$ che, preso L abbastanza grande, vanno a comprendere l'intero supporto di g. Poniamo

$$g_{N,L} = \begin{cases} \sum_{-N}^{N} c_n^{(L)} e^{i2\pi n\omega/L}, & \omega \in (-L, L) \\ 0, & \omega \notin (-L, L) \end{cases}$$

Si vede subito che $g_{N,L}$ converge uniformemente a g per $N, L \to \infty$. Allora, per ogni N e per L sufficientemente grande (a fissata g) si ha

$$\hat{T}(g_{N,L}\chi) = g_{N,L}\left(\hat{T}\chi\right)$$

Ora, dalla continuità di $\hat{T}$ si ha che il primo membro tende a

$$\hat{T}(g_{N,L}\chi) \to \hat{T}g\chi$$

per $N, L \to \infty$. A secondo membro, invece, la convergenza di $g_{N,L}$ in senso operatoriale è a g in senso uniforme visto che $g_{N,L}$ converge, come funzione, a g in senso uniforme. In definitiva

$$\hat{T}g\chi = g\hat{T}\chi$$

e abbiamo la tesi.

V.6 Operatori di derivazione e moltiplicazione in L^2

In questa sezione applichiamo i concetti appresi nel corso del capitolo sulla teoria degli operatori lineari. Gli operatori di derivazione e moltiplicazione sono molto importanti, specie in meccanica quantistica. Riportiamo l'argomento in questa sede, perché la trattazione è sbrigativa e mancano alcune dimostrazioni (una su tutte, il lemma di Sobolev).

V.6.1 Operatori di moltiplicazione

Con $(X, \mathcal{A}, \mu)$ intendiamo uno spazio di misura σ-finita (ricordiamo che ciò significa che X ammette un ricomprimento costituito da insiemi misurabili, di misura finita). Data la funzione h misuranile, consideriamo l'insieme

$$D(h) \doteqdot \left\{ f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu) \middle| \int |hf|^2 \, d\mu < \infty \right\}$$

Esso è una varietà lineare in $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$. Infatti, se $f, g \in D(h)$ allora hf e $hg \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$, perciò $hf + hg \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$, dunque $f + g \in D(h)$.

Proposizione V.22 *L'insieme $D(h)$ è denso in $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$.*

Dimostrazione Si consideri la seguente successione di sottoinsiemi incapsulati di X

$$E_n \doteqdot \{x \in X \,|\, |h(x)| \leq n\}$$

Si ha subito che

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

Sia $f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$. Consideriamo ora la successione $\{f_n\} \subset L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$, dove $f_n \doteqdot \chi_{E_n} f$. La successione f_n converge a f. Infatti, si ha convergenza puntuale quasi ovunque e, inoltre,

$$|f - f_n|^2 = \left|f - \chi_{E_n} f\right|^2 \leq |f|^2 \in L^1$$

(c.v.d.) da cui, applicando il teorema di Lebesgue, si perviene alla tesi.

Siamo allora in grado di definire l'**operatore di moltiplicazione** associato alla funzione h misurabile come

$$\begin{array}{rccl} M_h: & D(h) & \rightarrow & L^2(X, \mathcal{A}, \mu) \\ & f(x) & \mapsto & h(x) f(x),\ \forall x \in X \end{array}$$

Talvolta denoteremo M_h con h confondendo funzione ed operatore.
Veniamo alle prime proprietà di tale operatore

Teorema V.28 *Sia h una funzione misurabile definita sullo spazio di misura σ-finita $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Su $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ consideriamo l'operatore di moltiplicazione M_h associato a h. Abbiamo*

(i) *M_h è aggiuntabile e il suo aggiunto è $M_{\bar{h}}$;*

(ii) *M_h è chiuso:*

(iii) *M_h è continuo se e solo se $h \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$. In questo caso $\|M_h\| = \|h\|_{L^\infty}$.*

Dimostrazione Vediamo (i). Siccome, come dimostrato nella proposizione precedente, $D(h)$ è denso, si ha che M_h è aggiuntabile. Per calcolare l'aggiunto di M_h, cominciamo a mostrare che $M_{\bar{h}} \subset M^*$. Abbiamo

$$(g, M_h f) = \int \bar{g} h f \, d\mu = \int \overline{g\bar{h}} f \, d\mu = (M_{\bar{h}} g, f)$$

se $g \in D(\bar{h})$. Per mostrare l'inclusione opposta, ci basta vedere che $D(M^*) \subset D(\bar{h})$. Sia, allora, $g \in D(M^*)$, allora esiste $\tilde{g}$ tale che

$$(g, M_h f) = (\tilde{g}, f) \ \forall f \in D(h)$$

cioè, per ogni $f \in D(h)$, si ha

$$0 = (g, M_h f) - (\tilde{g}, f) = \int_X \overline{\bar{h} g - \tilde{g}} \, f \, d\mu$$

Se riconsideriamo la successione incapsulata ricoprente, definita nella dimostrazione della proposizione di prima, possiamo definire il sottospazio di $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$

$$L^2(E_n) = \left\{ f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu) \,|\, f(x) = 0, \text{q.o. in } E_n \right\}$$

Che $L^2(E_n)$ sia una varietà lineare è ovvio. Inoltre, se $\{g_n\} \subset L^2(E_n)$ è una successione convergente a $g \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$, essa ammette una sottosuccessione che converge puntualmente quasi ovunque a g. Ma allora g è quasi ovunque nulla in E_n, perciò $g \in L^2(E_n)$. Ora, per ogni $f \in L^2(E_n)$ abbiamo

$$0 = \int_{E_n} \overline{\bar{h} g - \tilde{g}} \, f \, d\mu = \left(\left. (\bar{h} g - \tilde{g}) \right|_{E_n}, f \right)$$

visto che $\left.(h^* g - \tilde{g})\right|_{E_n} \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$. Ne viene che

$$\left.(h^* g - \tilde{g})\right|_{E_n} = 0$$

dove lo 0 è inteso come elemento dello spazio di Hilbert $L^2(E_n)$. Dall'arbitrarietà di n, troviamo

$$\tilde{g} = \bar{h} g$$

quasi ovunque in X. Perciò $\bar{h}g = \tilde{g} \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$, $g \in D(\bar{h})$.

La (ii) segue immediatamente dalla (i) essendo l'aggiunto di un operatore chiuso.

Infine, (iii). Se $h \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ allora è $D(h) = L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$. Abbiamo

$$\|hf\|_{L^2} \leq \|h\|_{L^\infty} \|f\|_{L^2}$$

da cui M_h è continuo. Si ha $\|M_h\| = \|h\|_{L^\infty}$. Infatti, supponiamo $\rho \doteqdot \|h\|_{L^\infty} > 0$ (altrimenti la tesi è banale). Per ogni $n > 1$ troviamo dei sottoinsiemi F_n misurabili di X con le proprietà $0 < \mu(F_n) < \infty$ e tali che

$$\rho - \frac{1}{n} \leq |h(x)| \leq \rho, \; x \in F_n$$

per ogni $x \in F_n$. Infatti, consideriamo

$$\mathcal{F}_n \doteqdot \{x \in X \,|\rho - 1/n \leq |h(x)| \leq \rho\}$$

ciascuno di questi insiemi non può avere misura nulla, altrimenti avremmo $\rho = 0$. D'altra parte, esi potrebbero avere misura infinita. Se X_i è la successione di insiemi di misura finita che ricorpono X, è sempre possibile trovare un X_i tale che $\mu(X_i \cup \mathcal{F}_n)$, altrimenti

$$\mu(\mathcal{F}_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(X_i \cup \mathcal{F}_n) = 0$$

Poniamo allora

$$f_n \doteqdot \frac{\chi_{F_n}}{\mu(F_n)^{1/2}}$$

f_n è una successione di funzioni di L^2 di norma unitaria. Perciò

$$\|M_h\| = \sup_{\|f\|_{L^2}=1} \|M_h f\|_{L^2} \geq \|M_h f_n\|_{L^2} \geq \rho - \frac{1}{n}$$

da cui

$$\|M_h\| \geq \rho = \|h\|_{L^\infty}$$

come volevamo.

Vediamo adesso che se M_h è continuo, allora $h \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$. h sia, per assurdo, non essenzialmente limitata. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, consideriamo i sottoinsiemi

$$\mathcal{M}_n \doteqdot \{x \in X \,|n \leq |h(x)| \leq n+1\}$$

Ovviamente, tali sottoinsiemi sono misurabili. Se da un certo n in poi essi avessero misura nulla la funzione h sarebbe essenzialmente limitata, perciò esistono infiniti n per cui questi sottoinsiemi hanno misura positiva. Passando eventualmente a una sottosuccessione, essi hanno tutti misura positiva. Intersecandoli poi con i sottoinsiemi X_i, come prima, otteniamo una successione $\mathcal{N}_n$ di insiemi di misura positiva finita all'interno dei quali $n \leq |h(x)| \leq n+1$. Gli elementi

$$f_n = \frac{\chi_{\mathcal{N}_n}}{\mu(\mathcal{N}_n)^{1/2}}$$

stanno in $D(h)$ e hanno norma pari a 1. La successione dei trasformati, però, non è limitata
(c.v.d.) essendo $\|M_h f_n\| \geq n$ per ogni n. L'operatore M_h non può perciò essere continuo.

Abbiamo il seguente

Corollario V.2 *L'operatore di moltiplicazione associato alla funzione misurabile h è autoaggiunto se e solo se h è a valori reali.*

Si noti che $D(h) = D(\bar{h})$ e $R(h) = R(\bar{h})$. Talvolta, con abuso di notazione, si scrive $M^* = h^* = \bar{h}$.

Veniamo all'invertibilità di M_h. Cominciamo con l'introdurre la seguente funzione misurabile

$$\frac{1}{h} : X \to \mathbb{C}, \; \frac{1}{h}(x) \doteqdot \begin{cases} 1/h(x), & h(x) \neq 0 \\ 0, & h(x) = 0 \end{cases}$$

Abbiamo

Teorema V.29 *Per un operatore di moltiplicazione M_h sono affermazioni equivalenti*

(i) *M_h è invertibile;*

(ii) *$\mu(\{x \in X \,|h(x) = 0\}) = 0$;*

(iii) *M_h ha immagine densa in $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$.*

Se M_h è invertibile, il suo inverso è $M_{1/h}$.

Dimostrazione (ii) implica (i) Poiché

$$\ker M_h = \{f \in D(h) \,|h(x) f(x) = 0\text{q.o.}\}$$

se vale (ii), allora $f(x) = 0$ quasi ovunque, e il kernel di M_h è banale.

(i) implica (ii) Ammettiamo che valga (i) ma che la misura dell'insieme su cui h si annula sia positiva. Esiste sempre (al solito, intersecando con gli X_i) un insieme $E \subset \{x \in X \,|h(x) = 0\}$ di misura finita e non nulla. La funzione $\chi_E \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$, è non nulla, e appartiene al kernel di M_h che quindi risulta non banale. Assurdo.

(i) implica (iii) Abbiamo

$$R(M_h)^{\perp} = \ker(M^*) = \ker(M_{h^*}) = \ker(M_h)$$

il kernel è banale se e solo se la chiusura di $R(M_h)$ coincide con $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$, come si voleva.

Sia M_h è invertibile. Se $g(x)$ appartiene all'immagine di M_h, allora esiste $f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ tale che

$$g(x) = f(x) h(x)$$

perciò, quasi ovunque, grazie alla (ii),

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

da cui $M_{1/h}g \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$. Ne viene che $g \in D(1/h)$. Il viceversa è altrettanto evidente.

(c.v.d.) Ne viene che $D(1/h) = R(h)$. Adesso è immediato vedere che $(M_h)^{-1} = M_{1/h}$.

V.6.2 L'operatore posizione della meccanica quantistica

Uno degli esempi più importanti di operatori di moltiplicazione, è l'**operatore posizione** della meccanica quantistica. Sia

$$D(q) \doteqdot \left\{f \in L^2(\mathbb{R}) \,\middle|xf \in L^2(\mathbb{R})\right\}$$

e consideriamo l'operatore di moltiplicazione definito su $D(q)$ dato da $q \doteqdot M_x$. Grazie alla discussione della sottosezione precedente, troviamo

Teorema V.30 (operatore posizione) *L'operatore posizione q gode delle seguenti proprietà*

(i) *è autoaggiunto;*

(ii) *è non limitato;*

(iii) *è invertibile con inverso non limitato.*

Torna utile definire l'operatore posizione come chiusura di uno dei due seguenti operatori

$$\begin{array}{rccc} q_{\mathcal{D}}: & \mathcal{D}(\mathbb{R}) & \to & L^2(\mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & xf \end{array}$$

oppure

$$\begin{array}{rccc} q_{\mathcal{S}}: & \mathcal{S}(\mathbb{R}) & \to & L^2(\mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & xf \end{array}$$

Essenziale autoaggiunzione di $q_{\mathcal{S}}$ e $q_{\mathcal{D}}$ Entrambi questi operatori sono **essenzialmente autoaggiunti** e la loro chiusura è q. Si vede subito che sono operatori simmetrici. Infatti, sono densamente definiti e hanno valori di aspettazione reali. Abbiamo adesso che, limitandoci a $q_{\mathcal{S}}$, $q^* = q$. Infatti, si ha subito che $q \subset q^*$, essendo

$$(f, q_{\mathcal{S}} g) = \int \bar{f} x g \, d\mu = \int \overline{xf} g \, d\mu = (qf, g)$$

se $f \in D(q)$. Vediamo adesso che $D(q^*) \subset D(q)$. Sia $f \in D(q^*)$ allora esiste $\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R})$ per cui

$$(f, q_{\mathcal{S}} g) = \left(\tilde{f}, g\right) \; \forall g \in D(q_{\mathcal{S}})$$

Ne viene che

$$\int \overline{xf - \tilde{f}} \, g = 0$$

per ogni $g \in \mathcal{S}$ e, dunque, $g \in \mathcal{D}$. Ora, per ogni $E \subset \mathbb{R}$ limitato, si ha che $xf - \tilde{f} \in L^2(E) \cap L^1(E)$, perciò, per il lemma di Du Bois-Reymond, si conclude $xf = \tilde{f}$ q.o., da cui $f \in D(q)$. In definitiva,

$$q = q^*.$$

Passando agli aggiunti, abbiamo

$$q = \overline{q_{\mathcal{S}}}$$

Si ha così anche l'essenziale autoaggiunzione di $q_{\mathcal{S}}$.

V.6.3 Operatori di derivazione in $L^2(a, b)$

Funzioni assolutamente continue Sia $(a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto generalizzato (cioè eventualmente illimitato). Con $A_n(a, b)$ intendiamo lo spazio lineare delle funzioni definite su (a, b) a valori in $\mathbb{C}$, tali che esistono e sono **assolutamente continue** le derivate di ordine strettamente inferiore a n.

Ricordiamo che $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, definita in un intervallo **chiuso e limitato**, si dice assolutamente continua se è continua, derivabile quasi ovunque in $[\alpha, \beta]$, e la sua derivata è integrabile su $[\alpha, \beta]$ e, per ogni $c \in [\alpha, \beta]$, vale

$$f(x) = f(c) + \int_c^x f'(y) \; d\mu(y), \; \forall x \in [\alpha, \beta].$$

Una funzione definita su un intervallo aperto è detta assolutamente continua, se è assolutamente continua su ogni intervallo chiuso contenuto nell'intervallo aperto di definizione.

Spazio di Sobolev Consideriamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la seguente varietà lineare in $L^2(a, b)$

$$W_n(a, b) \doteqdot \left\{ f \in A_n(a, b) \middle| f^{(k)} \in L^2(a, b), \forall k \in J_n^0 \right\}$$

Vale la seguente stima

Lemma V.7 (diseguaglianza di Sobolev) *Sia $f \in A_n(a, b)$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $C > 0$ tale che*

$$\int_a^b \left| f^{(k)} \right|^2 d\mu \le \varepsilon \int_a^b \left| f^{(n)} \right|^2 d\mu + C \int_a^b |f|^2 \; d\mu, \; \forall j \in J_{n-1}^0$$

Dimostrazione Omessa

(c.v.d.)

In virtù del lemma di Sobolev, abbiamo

$$W_n(a, b) \doteqdot \left\{ f \in A_n(a, b) \cap L^2(a, b) \middle| f^{(n)} \in L^2(a, b) \right\}$$

Teorema V.31 *Sia $W_n(a, b)$; per ogni $j = 0, \ldots, n-1$ esiste finito*

$$\lim_{x \to a} f^{(j)}(x)$$

che è nullo se $a = -\infty$. Analoghe proprietà per b.

Dimostrazione Sia $c \in (a,b)$ e $a > -\infty$. Per ogni $x \in (a,b)$

$$f^{(j)}(x) = f^{(j)}(c) + \int_c^x f^{(j+1)}(y)\, d\mu(y)$$

da cui

$$\lim_{x\to a} f^{(j)}(x) = f^{(j)}(c) + \int_c^a f^{(j+1)}(y)\, d\mu(y)$$

che esiste finito dal momento che $f^{(j+1)} \in L^2(a,b)$ e perciò $L^2(a,c)$ e che (a,c) è un intervallo finito.

Sia, invece, $a = -\infty$. Integrando per parti, si ha

$$\int_c^x f^{(j)}(y)\, f^{(j+1)}(y)\, d\mu(y) = \left[f^{(j)}(x)\right]^2 - \left[f^{(j)}(c)\right]^2 - \int_c^x f^{(j)}(y)\, f^{(j+1)}(y)\, d\mu(y)$$

da cui

$$\int_c^x f^{(j)}(y)\, f^{(j+1)}(y)\, d\mu(y) = \frac{1}{2}\left\{\left[f^{(j)}(x)\right]^2 - \left[f^{(j)}(c)\right]^2\right\}$$

Ora, siccome $f^{(j)}$ e $f^{(j+1)}$ appartengono a $L^2(-\infty,b)$, si ha che il loro prodotto è un elemento di $L^1(-\infty,b)$. Esiste allora finito il limite per $x \to -\infty$ di $f^{(j)}(x)$. Ovviamente tale limite non può essere diverso da 0, visto che $f^{(j)} \in L^2(-\infty,b)$. **(c.v.d.)**

Osservazione V.5 Rimarchiamo che se a (oppure b) è finito, allora le funzioni $f \in W_n(a,b)$ ammettono, grazie al teorema dimostrato, insieme alle loro derivate, estensione continua all'intervallo $[a,b)$. Noi faremo questa estensione e denoteremo con $f^{(j)}(a)$ il limite per $x \to a$ di $f^{(j)}(x)$. ▪

$W_n(a,b)$ appare la più vasta varietà lineare densa di $L^2(a,b)$ sul quale definire un operatore di derivazione di ordine n che abbia immagine in $L^2(a,b)$. Altre varietà dense sulle quali è possibile definire la derivata appaiono $\mathcal{D}$ ed $\mathcal{S}$.
Poniamo, per ogni intero $n \geq 1$,

$$\begin{array}{rccl} p_{n,\mathcal{D}}: & \mathcal{D}(a,b) & \to & L^2(a,b) \\ & f & \mapsto & p_{n,\mathcal{D}} f \doteqdot (-i)^n f^{(n)} \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccl} p_n: & W_n(a,b) & \to & L^2(a,b) \\ & f & \mapsto & p_n f \doteqdot (-i)^n f^{(n)} \end{array}$$

Come nel caso dell'operatore posizione, vedremo che $p_{n,\mathcal{D}}$ è simmetrico e ha come aggiunto p_n. $p_{n,\mathcal{D}}$ si chiama operatore di derivazione **minimale**, mentre p_n si dice **massimale**.
Ci occorrono due lemmi.

Lemma V.8 *Per l'immagine di $p_{n,\mathcal{D}}$ vale*

$$R(p_{n,\mathcal{D}}) = \left\{ f \in \mathcal{D}(a,b) \left| \int_a^b x^k f(x)\, d\mu = 0,\ k = 0,\ldots n-1 \right.\right\} \doteqdot I_n$$

Dimostrazione Sia $f \in R(p_{n,\mathcal{D}})$, allora esiste $g \in \mathcal{D}(a,b)$ per cui $f = (-i)^n g^{(n)}$, allora integrando successivamente per parti, visto che i termini di bordo sono nulli,

$$\int_a^b x^k f(x)\, d\mu = (-i)^n \int_a^b x^k g^{(n)}\, d\mu = 0$$

Dobbiamo adesso vedere che $I_n \subset R(p_{n,\mathcal{D}})$. Procediamo per induzione su n. Sia $n = 1$. Sia $f \in I_1$ e sia $\operatorname{supp} f \subset [\alpha,\beta]$. Definiamo

$$g(x) = i\int_a^x f(y)\, d\mu(y)$$

Allora, ovviamente $g(x) = 0$ per $x \notin [\alpha,\beta]$. Ne viene che $g \in \mathcal{D}(a,b)$. Immediatamente, $p_{\mathcal{D}} g = f$.

Supponiamo ora che $I_{n-1} = R(p_{n-1,\mathcal{D}})$. Sia $f \in I_n$. A maggior ragione $f \in I_{n-1}$, dunque, esiste $\bar{g} \in \mathcal{D}(a,b)$ tale che

$$f = (-i)^{n-1} \bar{g}^{(n-1)}$$

D'altra parte, $\bar{g} \in I_1$, infatti

$$0 = \int_a^b x^n f(x)\, d\mu(x) = (-i)^{n-1} \int_a^b x^n \bar{g}^{(n-1)}\, d\mu(x) = (-1)^n (-i)^{n-1} \int_a^b x\bar{g}\, d\mu(x)$$

(c.v.d.) Allora $\bar{g} = -ih'$ per qualche $h \in \mathcal{D}(a,b)$, da cui $f = (-i)^n h^{(n)}$.

Il secondo lemma è un risultato di algebra lineare.

Lemma V.9 *Sia E un $\mathbb{K}$-spazio lineare e $\{u_i\}_{i\in J_n}$ una famiglia finita di funzionali lineari. Se u è un funzionale lineare, talché*

$$\bigcap_{i=1}^n \ker u_i \subset \ker u$$

allora

$$u \in \operatorname{Span}\langle u_i\rangle_{i\in J_n}.$$

Dimostrazione Omessa

(c.v.d.)

Veniamo finalmente al

Teorema V.32 *Per ogni intero $n \geq 1$, l'operatore $p_{n,\mathcal{D}}$ è simmetrico e $p^* = p_n$.*

Dimostrazione La simmetria segue dalla densità del dominio e dal fatto che

$$(f, p_{n,\mathcal{D}} g) = \int_a^b \bar{f}\,(-i)^n g^{(n)}\, d\mu = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[\bar{f}^{(n-k-1)} g^{(k)}\right]_b^a + (-1)^n (-i)^n \int_a^b \overline{f^{(n)}} g\, d\mu$$

per ogni $f, g \in \mathcal{D}(a,b)$. In modo del tutto analogo si vede che

$$(f, p_n g) = (p_{n,\mathcal{D}} f, g)$$

per ogni $f \in \mathcal{D}(a,b)$ e $g \in W_n(a,b)$. Dunque, $p_n \subset p^*$.

Sia, ora, $g \in D(p^*)$. Esiste, allora $\tilde{g} \in L^2(a,b)$ tale che

$$(p_{n,\mathcal{D}} f, g) = (f, \tilde{g})$$

per ogni $f \in \mathcal{D}(a,b)$. Siano $c \in (a,b)$ e h la funzione su (a,b) data da

$$h(x) = (i)^n \int_c^x d\mu(x_n) \int_c^{x_n} d\mu(x_{n-1}) \ldots \int_c^{x_2} d\mu(x_1)\, \tilde{g}(x_1)$$

Per costruzione, $h \in A_n(a,b)$ e $(-i)^n h^{(n)} = \tilde{g}$. Integrando per parti il secondo membro dell'eguaglianza

$$(p_{n,\mathcal{D}} f, g) = (f, \tilde{g})$$

otteniamo

$$\int_a^b \overline{f^{(n)}}\,(g-h)\, d\mu = 0,\ \forall f \in \mathcal{D}(a,b).$$

Adesso consideriamo i seguenti funzionali definiti su $\mathcal{D}(a,b)$

$$u(f) \doteqdot \int_a^b f\,(g-h)\, d\mu$$

e per $i = 0, \ldots, n-1$

$$u_i(f) = \int_a^b x^i f(x)\, d\mu(x)$$

Applicando i due lemmi, si ha che esiste un polinomio P di grado al più $n-1$ tale che

$$\int_a^b f(g - h - P)\, d\mu = 0, \forall f \in \mathcal{D}(a, b)$$

Restringendoci su intervalli finiti $[\alpha, \beta]$, interpretando l'integrale come prodotto scalare su $L^2(\alpha, \beta)$, per la densità di $\mathcal{D}(\alpha, \beta)$, si conclude, usando l'arbitrarietà di α e β,

$$g(x) = h(x) + P(x), \text{ q.o. in } [\alpha, \beta]$$

(c.v.d.) Donde $g \in A_n(a, b)$. Poiché $g, \tilde{g} \in L^2(a, b)$ si conclude dal lemma di Sobolev, che $g \in W_n(a, b)$.

Abbiamo come conseguenza due teoremi.

Teorema V.33 *Se $(a, b) = \mathbb{R}$ allora per ogni $n \geq 1$, p_n è autoaggiunto, $p_{n,\mathcal{D}}$ è essenzialmente autoaggiunto ed ha chiusura pari a p_n.*

Dimostrazione Poiché $p_{n,\mathcal{D}} \subset p_n$, dal teorema precedente abbiamo

$$p^* \subset p^* = p_n$$

Basta provare che p_n è simmetrico per averne l'autoaggiunzione. Ma, come abbiamo visto, le funzioni in $W_n(a, b)$ sono infinitesime all'infinito, sicché, integrando per parti si trova la simmetria.

Siccome poi

$$p^* = p_n$$

aggiuntando

$$\overline{p_{n,\mathcal{D}}} = p_{n,\mathcal{D}}^{**} = p_n.$$

(c.v.d.)

Osservazione V.6 Per $(a, b) = \mathbb{R}$ e $n \geq 1$ si possono ripetere esattamente tutti i ragionamenti fatti andando a sostituire $\mathcal{S}$ con $\mathcal{D}$. L'essenziale autoaggiunzione di $p_{n,\mathcal{S}}$ discende dal fatto che

$$\begin{aligned} p_n &= \overline{p_{n,\mathcal{D}}} \subset \overline{p_{n,\mathcal{S}}} \\ \overline{p_{n,\mathcal{S}}} &\subset p_n. \end{aligned}$$

■

Se $(a, b) \neq \mathbb{R}$ le cose cambiano molto

Teorema V.34 *Sia $(a, b) \neq \mathbb{R}$, per ogni $n \geq 1$ la chiusura di $p_{n,\mathcal{D}}$ è l'operatore*

$$p_{n,0} = (-i)^n f^{(n)}$$

definito sull'insieme $W_n^0(a, b)$ dato da (se a, b sono finiti)

$$\begin{aligned} W_n^0(a, +\infty) &= \left\{ f \in W_n(a, b) \middle| f^{(j)}(a) = 0,\ j = 0, \ldots, n-1 \right\} \\ W_n^0(-\infty, b) &= \left\{ f \in W_n(a, b) \middle| f^{(j)}(b) = 0,\ j = 0, \ldots, n-1 \right\} \\ W_n^0(a, b) &= \left\{ f \in W_n(a, b) \middle| f^{(j)}(a) = f^{(j)}(b) = 0,\ j = 0, \ldots, n-1 \right\} \end{aligned}$$

In questo caso $p_{n,0} \neq p_n$ e nessuno di questi operatori è autoaggiunto. $p_{n,0}$ è simmetrico chiuso e vale

$$\begin{aligned} p_{n,0} &= p^* \\ p^* &= p_n \end{aligned}$$

Dimostrazione (c.v.d.) Omessa, perché noiosa.

Vediamo un ultimo esempio di operatore di derivazione che si incontra molto spesso negli esercizi.

Proposizione V.23 *L'operatore $p_{(a,b)}$ di derivazione nell'intervallo* finito $(a,b) \subset \mathbb{R}$ *con dominio*

$$D(a,b) \doteqdot \left\{ f \in L^2(a,b) \cap A_1(a,b) \middle| f' \in L^2(a,b)\,,\, f(a) = f(b) \right\}$$

(operatore di derivazione con condizioni di periodicità al contorno), estende p_0 ed è autoaggiunto.

Dimostrazione Mostrare la simmetria è banale, integrando per parti. Dal fatto che $p_{\mathcal{D}} \subset p_{(a,b)}$ si ha

$$p^* \subset p$$

Quindi, se $g \in D(p^*)$ allora $g \in W_1(a,b)$ e $p^*g = (-i)\,g'$. Da

$$\left(p_{(a,b)}f, g\right) = (f, -ig')\,, \forall f \in D(a,b)$$

si ottiene, integrando per parti il secondo membro,

$$\overline{f(b)}g(b) - \overline{f(a)}g(a) = 0\,\forall f \in D(a,b)$$

tenendo conto delle condizioni di periodicità per f

$$\overline{f(b)}\,(g(b) - g(a)) = 0\,\forall f \in D(a,b)$$

(c.v.d.) da cui $g(b) = g(a)$, sicché $g \in D\left(p_{(a,b)}\right)$.

V.6.4 Equivalenza unitaria di posizione ed impulso

Impulso e posizione Probabilmente, dalla meccanica quantistica, è noto al lettore che posizione ed impulso sono operatori unitariamente equivalenti. Ricordiamo che l'operatore di moltiplicazione è q ed è M_x, mentre l'operatore impulso è l'operatore di derivazione p su $L^2(\mathbb{R})$ di cui nella precedente sottosezione.

Equivalenza unitaria Dicevamo che impulso e posizione sono unitariamente equivalenti: questo significa che esiste un operatore unitario U tale che $q = UpU^*$.
Ora, in generale due operatori unitariamente equivalenti hanno le stesse proprietà geometriche e topologiche. Siano, infatti, A, B due operatori connessi dalla trasformazione unitaria U, cioè sia $A = UBU^*$, da cui $B = U^*AU$. B è continuo se e solo se A è continuo, essendo il prodotto di operatori continui un operatore continuo. Ancora B è chiudibile se e solo se A è chiudibile. Sia B chiudibile, allora per ogni successione x_n convergente a 0 tale che la successione $Bx_n \to y$, si ha $y = 0$. Ora, sia x_n una successione convergente a 0 tale che $Ax_n \to y$. Ne viene che la successione$U^*Ax_n \to U^*y$ per la continuità di U^*. Adesso, abbiamo $U^*Bx_n \to U^*y$, ma B è chiudibile, perciò $U^*y = 0$, ossia $y = 0$, per l'iniettività di U^*. Ne viene anche che

$$\bar{A} = U\bar{B}U^*$$

Ragionamenti analoghi per la chiusura.
Sia poi B autoaggiunto, allora A è densamente definito avendo come dominio $U(D(B))$, perciò è aggiuntabile, dunque

$$A^* = UBU^* = A$$

dove si è usato il teorema per cui se C è continuo, allora $(CB)^* = B^*C^*$. Analogamente si mostra che se B è simmetrico o essenzialmente autoaggiunto, A è della stessa natura.

Teorema V.35 *Siano $A, B \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$ due operatori unitariamente equivalenti. Allora B è continuo, chiuso, densamente definito, simmetrico, essenzialmente autoaggiunto o autoaggiunto, se e solo se A è della stessa natura.*

Equivalenza di posizione ed impulso

Forti delle considerazioni precedenti, passiamo a vedere l'unitaria equivalenza di impulso e posizione. Se andiamo a considerare le restrizioni di posizione ed impulso ad $\mathcal{S}$, abbiamo che, se F è la trasformata di Fourier, allora

$$q_{\mathcal{S}} = F^* p_{\mathcal{S}} F$$

Perciò,

$$\overline{q_{\mathcal{S}}} = F^* \overline{p_{\mathcal{S}}} F$$

infine,

$$q = F^* p F$$

Si noti che avremmo potuto usare la sola trasformata di Fourier e la trattazione degli operatori di moltiplicazione per ottenere che $p_{\mathcal{S}}$ è essenzialmente autoaggiunto, e che la sua chiusura, che sarebbe stato lecito definire direttamente come l'operatore impulso, $p \doteqdot \overline{p_{\mathcal{S}}}$, è autoaggiunta e unitariamente equivalente a q.

Definizione alternativa dell'operatore impulso

Questo punto di vista (che ci eviterebbe di introdurre gli spazi di Sobolev e, a posteriori, ci porta a sdrammatizzare il fatto che non abbiamo dimostrato la diseguaglianza di Sobolev) ha un inconveniente. Il dominio dell'operatore impulso è espresso in termini di trasformata di Fourier: esso è dato dall'immagine via Fourier dello spazio delle funzioni tali che $xf \in L^2$. Se volessimo determinare esplicitamente il dominio dell'impulso, ci troveremmo di fronte a un nuovo difficile problema, la cui soluzione è comunque W_1.

Bibliografia

[1] **Michael Reed, Barry Simon**, *Modern Methods of Mathematical Physics*, (volume 1) *Functional Analysis*, Academic Press;

[2] **Michael Reed, Barry Simon**, *Modern Methods of Mathematical Physics*, (volume 2) *Fourier Analysis*, *Self-Adjointness*, Academic Press;

[3] **Michael Reed, Barry Simon**, *Modern Methods of Mathematical Physics*, (volume 3) *Scattering Theory*, Academic Press;

[4] **Michael Reed, Barry Simon**, *Modern Methods of Mathematical Physics*, (volume 4) *Analysis of Operators*, Academic Press;

[5] **Kôsaku Yosida**, *Functional Analysis*, Springer-Verlag;

[6] **Serge Lang**, *Real and Functional Analysis*, GTM, Springer;

[7] **Maria Cristina Abbati, Renzo Cirelli**, *Metodi matematici per la fisica, operatori lineari negli spazi di Hilbert*, Città Studi Edizioni;

[8] **A. A. Kirillov, A. D. Gvišiani**, *Teoremi e problemi dell'analisi funzionale*, MIR;

[9] **Walter Thirring**, *A course in Mathematical Physics 3: Quantum Mechanics of Atoms and Molecules*, Springer-Verlag;

[10] **Paolo Caressa**, *Meccanica quantistica*, appunti dal web `math.unifi.it/˜caressa`;

[11] **Francis Hirsch**, **Gilles Lacombe**, *Elements of Functional Analysis*, GTM, Springer;

[12] **Ciro Ciliberto**, *Algebra lineare*, Bollati Boringhieri;

[13] **Mariano Giaquinta**, **Giuseppe Modica**, *Analisi*, Pitagora;

[14] **Enrico Giusti**, *Analisi II*, Bollati Boringhieri;

[15] **Giuseppe De Marco**, *Analisi Due*, Decibel;

[16] **Giovanni Morchio**, *Appunti sull'autoaggiunzione*, Università di Pisa.