



Metodi Matematici della Fisica

Appunti su analisi funzionale, complessa e di Fourier

Alberto Maggi

[219,915]

55 via Lopez, 57010 Guasticce (LI)

0586 984 980

Sommario

Prefazione	9
I Cenni di teoria della misura.....	11
I.1 Algebre di insiemi e spazi di misura	11
I.1.1 Algebre di insiemi.....	11
I.1.2 Sigma algebre di insiemi	12
I.1.3 Spazi misurabili e misura esterna	13
I.1.4 Misura	15
I.1.5 Misure complete e completamenti di spazi di misura	17
I.1.6 Misure su algebre e teorema di estensione	18
I.2 Integrazione	20
I.2.1 Funzioni misurabili.....	21
I.2.2 Funzioni semplici	23
I.2.3 Definizione di integrale	25
I.3 Teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale	27
I.3.1 Il teorema di Beppo Levi.....	27
I.3.2 Il lemma di Fatou	29
I.3.3 Il teorema della convergenza dominata di Lebesgue.....	29
I.4 Misure prodotto: i teoremi di Fubini e Tonelli	30
I.4.1 Misura prodotto	30
I.4.2 Il teorema di Fubini	31
I.4.3 Il teorema di Tonelli.....	33
I.5 Gli spazi L^p	34
I.5.1 Definizione degli spazi $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$	34
I.5.2 Completezza degli spazi $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$	36
I.5.3 Lo spazio $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$	37
I.5.4 Il lemma di Urysohn	38
I.5.5 Teoremi di densità	40

	I.5.6	Spazi $\ell^p(\mathbb{C})$	41
I.6		Spazi localmente compatti	41
	I.6.1	Funzionali positivi e limitati su $\mathcal{C}_c(X)$	42
	I.6.2	Il teorema di Riesz-Markov	44
II		Spazi di Hilbert e spazi di Banach	53
II.1		Spazi di Banach e spazi di Hilbert	53
	II.1.1	Spazi normati e spazi di prodotto scalare	53
	II.1.2	Spazi di Banach	55
	II.1.3	Esempi di spazi di Banach	57
	II.1.4	Spazi di Hilbert	59
II.2		Ortogonalità	60
	II.2.1	Ortogonalità e relazione del parallelogramma	60
	II.2.2	Ortocomplemento	62
	II.2.3	Il teorema della proiezione	67
	II.2.4	Sistemi ortonormali	68
	II.2.5	Diseguaglianza di Bessel e identità di Parseval negli spazi prehilbertiani	69
	II.2.6	Diseguaglianza di Bessel e identità di Parseval negli spazi di Hilbert	72
	II.2.7	Sistemi ortonormali completi	74
II.3		Serie di Fourier in L^2 sugli intervalli reali	76
	II.3.1	Il teorema di approssimazione polinomiale di Weierstraß	76
	II.3.2	Il teorema di Stone-Weierstraß	77
	II.3.3	Il teorema di approssimazione trigonometrica di Weierstraß	79
	II.3.4	Completezza della base di Fourier	79
	II.3.5	Dimostrazione autonoma del lemma di densità	80
II.4		La somma diretta negli spazi di Hilbert	82
II.5		Isomorfismi di spazi di Hilbert	84
	II.5.1	Definizione di isomorfismo e relazione con la dimensione	84
	II.5.2	Isomorfismi e s.o.n.c.	85
II.6		Il duale	85
	II.6.1	Funzionali continui e norma operatoriale	85
	II.6.2	Il teorema di Riesz	88
II.7		I teoremi di Hahn-Banach	89

II.7.1	Premessa: il lemma di Zorn	89
II.7.2	Il teorema di Hahn-Banach negli spazi reali	90
II.7.3	Il teorema di Hahn-Banach negli spazi complessi	91
II.7.4	Il teorema di Hahn-Banach sugli spazi normati	92
II.7.5	Il biduale e la riflessività	93
III	Teoria degli operatori lineari	95
III.1	Operatori lineari	95
III.1.1	Operatori lineari	95
III.1.2	Operatori lineari continui	95
III.1.3	Norma operatoriale	97
III.1.4	Continuità delle applicazioni lineari in dimensione finita	100
III.1.5	Equivalenza delle norme in dimensione finita	101
III.2	I principi di Banach	102
III.2.1	Il teorema di Baire-Hausdorff	102
III.2.2	Il teorema della mappa aperta	103
III.2.3	Un'applicazione del teorema della mappa aperta: $GL(E)$	105
III.2.4	Il teorema del grafico chiuso	106
III.2.5	Il teorema di uniforme limitatezza o di Banach-Steinhaus	107
III.3	L'aggiunzione	108
III.3.1	Trasposizione negli spazi di Banach	108
III.3.2	Aggiunzione negli spazi di Hilbert	109
III.3.3	C^* -Algebre	111
III.3.4	Autoaggiunzione su $L(\mathcal{H})$	111
III.4	Operatori unitari	114
III.5	Operatori di proiezione	116
III.6	Convergenza forte e convergenza debole	121
III.7	Operatori definiti su una varietà lineare	122
III.7.1	Richiami alle definizioni e teorema di estensione per gli operatori continui	122
III.7.2	Operatori lineari chiudibili e chiusi	124
III.7.3	Operatori lineari aggiuntabili	126
III.7.4	Autoaggiunzione	129
III.7.5	Valori medi di un operatore	132

IV	Analisi complessa	135
IV.1	Cenni sulle forme differenziali di grado uno	135
IV.1.1	Definizione di forma differenziale di grado uno	135
IV.1.2	Forme chiuse e forme esatte	136
IV.1.3	Integrazione su cammini e primitive	137
IV.1.4	Omotopia tra circuiti e invarianza per omotopia	138
IV.2	Funzioni olomorfe	140
IV.2.1	Derivazione complessa	140
IV.2.2	Olomorfia	142
IV.2.3	Integrazione delle funzioni complesse	143
IV.2.4	Integrazione delle funzioni olomorfe: teoremi di Cauchy	145
IV.2.5	Analiticità delle funzioni olomorfe	149
IV.2.6	Serie di Taylor-Laurent	150
IV.2.7	Zeri di una funzione olomorfa	152
IV.3	Singularità di una funzione olomorfa	155
IV.3.1	Singularità isolate	155
IV.3.2	Singularità removibili	156
IV.3.3	Singularità polari	156
IV.3.4	Metodi per la classificazione delle singularità	157
IV.3.5	Residui	158
IV.3.6	Punto all'infinito	160
IV.3.7	Calcolo degli integrali con il metodo dei residui	162
IV.3.8	Tagli e punti di diramazione	164
IV.4	Funzioni olomorfe e potenziali in due dimensioni	167
IV.4.1	Applicazioni conformi	167
IV.4.2	Inversa di una funzione olomorfa	168
IV.4.3	Funzioni armoniche e funzioni olomorfe	169
IV.4.4	Problemi di potenziale in due dimensioni	169
V	Analisi di Fourier	173
V.1	Spazi di funzioni regolari	173
V.1.1	Topologizzazione degli spazi di funzioni lisce	173
V.1.2	Teoremi di densità	177

V.1.3	Lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$ delle funzioni a decrescenza rapida	180
V.2	Trasformata di Fourier in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$	183
V.2.1	La trasformata di Fourier	183
V.3	Trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R}^\ell)$	188
V.3.1	Estensione della trasformata di Fourier allo spazio $L^2(\mathbb{R}^\ell)$	188
V.3.2	Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R}^\ell)$	188
V.3.3	Il teorema di Payley-Wiener	192
V.3.4	Alcune proprietà della trasformata di Fourier	193
V.4	Trasformata di Laplace	194
V.4.1	Definizione e prime proprietà	194
V.4.2	Integrali dipendenti da parametri	197
V.4.3	Olomorfia della trasformata di Laplace	198
V.4.4	Inversione della trasformata di Laplace	200
V.5	Distribuzioni	200
V.5.1	Funzioni generalizzate	200
V.5.2	Supporto di una distribuzione	201
V.5.3	Convergenza debole e debole completezza	205
V.5.4	Prodotto tensoriale di distribuzioni e teoremi di densità	207
V.5.5	Derivazione delle distribuzioni	210
V.5.6	Moltiplicazione e convoluzione	211
V.5.7	Trasformata di Fourier delle distribuzioni temperate	216
VI	Complementi	225
VI.1	Operatori di derivazione e moltiplicazione in L^2	225
VI.1.1	Operatori di moltiplicazione	225
VI.1.2	L'operatore posizione della meccanica quantistica	228
VI.1.3	Operatori di derivazione in $L^2(a, b)$	228
VI.1.4	Equivalenza unitaria di posizione ed impulso	232
VI.2	Relazioni di dispersione	233
VI.2.1	Introduzione	233
VI.2.2	Teorema di Titchmarsh	235
VI.2.3	Le relazioni di Kramers e Kronig	237
VI.3	Autovalori e autovettori	240

VI.3.1	Autovalori e autovettori in dimensione finita	240
VI.3.2	Esempi in dimensione infinita	242
VI.3.3	Diagonalizzazione simultanea	248
VI.3.4	Operatori compatti	250
VI.4	Proprietà di simmetria: cenni alla teoria delle rappresentazioni	252
VI.4.1	Gruppi	252
VI.4.2	Rappresentazioni di un gruppo	254
VI.4.3	Cenni alla rappresentazione dei gruppi finiti	256
VI.4.4	I lemmi di Schur	259
VI.4.5	Gruppi di Lie	262
VI.4.6	Generatori infinitesimi di un gruppo di Lie	263
VI.4.7	Rappresentazioni differenziali di rotazioni e traslazioni	264
VI.4.8	Prodotto tensoriale di rappresentazioni	266
Bibliografia		269

Prefazione

Studiando Istituzioni di Fisica Teorica, mi sono reso conto di quanto siano importanti le basi dell'analisi funzionale per un fisico. In vista dello studio rigoroso della meccanica quantistica, il corso di Metodi Matematici della Fisica è veramente fondamentale. Per questa ragione ho raccolto in questa dispensa i miei appunti sulla teoria degli operatori, sull'analisi complessa e sull'analisi di Fourier. Questi appunti provengono, in misure diverse, dalle note prese durante le lezioni dei professori Giampaolo Cicogna e Giovanni Morchio, dalle mie ricerche sul web e su vari testi in materia. L'obiettivo che intendevo raggiungere è la presentazione rapida di un quadro piuttosto ampio di nozioni che potessero essere successivamente sviluppate per una trattazione matematicamente fondata della meccanica quantistica. In questa ottica ho ritenuto indispensabile presentare **tutte le dimostrazioni** dei teoremi esposti e riutilizzati in modo costruttivo. La mia convinzione è che le dimostrazioni, anche quando noiose, siano un laboratorio troppo ricco di aspetti e strutture basilari perché sia possibile ometterle.

La presenza delle dimostrazioni complica il cammino del lettore come dell'autore. Così sono stato *costretto* ad aprire con un capitolo di teoria della misura e, via via, ad aggiungere parti che inizialmente non intendevo includere (per esempio il lemma di Zorn o i teoremi di Baire e Hausdorff). Le divagazioni necessarie alla completezza del testo, mi hanno impedito di trattare la teoria spettrale e la teoria delle rappresentazioni dei gruppi. In merito, per il momento, mi sono accontentato di scrivere una appendice *divulgativa* nella quale le dimostrazioni (devo purtroppo dirlo) sono solo parziali o mancano del tutto. Spero mi sia possibile colmare queste lacune in seguito.

Ho accennato prima, al fatto che molte delle pagine che seguono sono frutto di una attenta ricerca su alcuni libri di testo. Per risolvere almeno in parte il debito che queste dispense hanno con gli autori di tali libri, annoto qui una bibliografia essenziale (estesa nella sezione **Bibliografia**). Il testo al quale mi sono riferito per le questioni teoriche più profonde e i per i problemi più sottili è *Functional Analysis* di Kosaku Yosida. La teoria della misura proviene soprattutto dagli appunti sul web di Paolo Caressa. Per quanto riguarda, però, il teorema di Riesz e Markov, il riferimento è a *Real and Functional Analysis*, di Serge Lang. La teoria degli operatori lineari viene dal testo *Metodi Matematici per la Fisica* di Abbati e Cirelli, così come la teoria della trasformata di Fourier su $\mathcal{S}$ e L^2 . Per l'analisi complessa, rimando ad *Analisi Due* di Giuseppe De Marco. La teoria delle distribuzioni, invece, proviene dal testo di Hirsch e Lacombe *Elements of Functional Analysis*, e da quello di Kirillov e Gvišiani *Teoremi e problemi dell'Analisi Funzionale*. Testo ispirazione è invece il celebre *Modern Methods of Mathematical Physics* di Barry Simon e Mike Reed. Molti sono poi gli articoli di Barry Simon che ho letto e che mi hanno aiutato.

Infine, non posso dimenticare di sottolineare come questo lavoro sia stato decisamente influenzato dal professor Giovanni Morchio.

Guasticce, 2 Giugno 2001

Cenni di teoria della misura

La filosofia di questo testo è quella di chiarire a fondo ogni argomento nella convinzione che solo dalla sistemazione metodica e rigorosa della matematica di base può scaturire uno studio della fisica che sia veramente penetrante. In questo senso, ho ritenuto indispensabile riportare in apertura di trattazione un capitolo in cui vengano esposte le nozioni basilari di teoria generale della misura. Per la migliore comprensione di quanto segue può risultare utile avere già acquisito i rudimenti della teoria di Lebesgue sugli spazi euclidei, per i quali rimandiamo al corso *Analisi II per fisici* (vedi bibliografia)

I.1 Algebre di insiemi e spazi di misura

I.1.1 Algebre di insiemi

Denoteremo il complementare di un insieme $A \subset X$, con il simbolo $A^c \doteq X \setminus A$. Detto questo, poniamo la prima

Definizione I.1 *Un'algebra di sottoinsiemi di un insieme X è una famiglia $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ che goda delle seguenti proprietà*

- (i) $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- (ii) (stabilità per unione) se $A, B \in \mathcal{A}$, allora $A \cup B \in \mathcal{A}$;
- (iii) (stabilità per complementazione) se $A \in \mathcal{A}$, allora $A^c \in \mathcal{A}$.

Esempio I.1 L'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$ è un'algebra di sottoinsiemi di X . Parimenti, è un'algebra

- $\{X, \emptyset\}$.

Osservazione I.1 Per le leggi di deMorgan, si ha che se $\mathcal{A}$ è un'algebra e $A, B \in \mathcal{A}$, allora anche $A \cap B$ appartiene ad $\mathcal{A}$, infatti

- ma $A^c, B^c \in \mathcal{A}$ da cui $A^c \cup B^c \in \mathcal{A}$, perciò anche $(A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{A}$.

Osservazione I.2 Un'algebra di insiemi è sempre dotata di un'**ordinamento parziale** indotto dalla relazione

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A.$$

- Inoltre, rispetto a tale ordinamento un'algebra è sempre un **reticolo**, per ogni coppia di insiemi $A, B \in \mathcal{A}$ ha un massimo e un minimo: $A \cup B, A \cap B$.

Non tutti le sottofamiglie dell'insieme delle parti formano un'algebra d'altra parte è sempre possibile associargliene una

Proposizione I.1 *Se $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}(X)$, allora esiste un'algebra minima $\mathcal{A}(\mathcal{X})$ contenente $\mathcal{X}$ (ogni algebra contenente $\mathcal{X}$ deve contenere $\mathcal{A}(\mathcal{X})$).*

Dimostrazione

Sia $\mathcal{F}$ la famiglia di tutti le algebre su X contenenti $\mathcal{X}$. Siccome l'insieme delle parti contiene $\mathcal{X}$ ed è un'algebra, allora $\mathcal{P}(\mathcal{X}) \in \mathcal{F}$ ed $\mathcal{F}$ è non vuoto. Consideriamo allora la famiglia

$$\mathcal{A}(\mathcal{X}) \doteq \bigcap_{\mathcal{A} \in \mathcal{F}} \mathcal{A}$$

essa è non vuota, contiene $\mathcal{X}$, è minima per definizione ed è un'algebra. Infatti, $\emptyset \in \mathcal{A}(\mathcal{X})$; siano $A, B \in \mathcal{A}(\mathcal{X})$, allora $A, B \in \mathcal{A}$ per ogni $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$, ne consegue che in ogni $\mathcal{A}$ è contenuto $A \cup B$ che perciò appartiene ad $\mathcal{A}(\mathcal{X})$. Analogamente si dimostra la stabilità (c.v.d.) per complementazione.

Definizione I.2 *L'algebra $\mathcal{A}(\mathcal{X})$ di cui nella proposizione precedente si dice algebra generata da $\mathcal{X}$.*

I.1.2 Sigma algebre di insiemi

Poniamo la seguente fondamentale

Definizione I.3 *Una σ -algebra è un'algebra $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di X tale che per ogni successione $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi di $\mathcal{A}$ l'insieme $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ appartiene ancora ad $\mathcal{A}$.*

Osservazione I.3 Ancora per le leggi di deMorgan si ha che anche le intersezioni numerabili di elementi di $\mathcal{A}$ appartengono ad $\mathcal{A}$. Si noti inoltre come sia sufficiente verificare la stabilità per unione numerabile su successioni di insiemi disgiunti. Infatti, data una successione di insiemi, si possono sempre partire gli insiemi dati in modo da produrre una sequenza di insiemi disgiunti

- la cui unione è ancora l'unione della successione di partenza.

Osservazione I.4 La proposizione precedente vale banalmente anche per le σ -algebre, sicché si può ancora

- parlare di σ -algebre generate.

Definizione I.4 *Si dice σ -algebra di Borel, la σ -algebra, $\beta(X)$, di uno spazio topologico X generata dalla collezione degli aperti di X . Gli elementi di $\beta(X)$ si dicono boreliani.*

Osservazione I.5 $\beta(X)$ è anche la σ -algebra generata dai chiusi di X , più in generale è la σ -algebra generata da una qualsiasi base per la topologia di X .

- Ne deriva che la σ -algebra di Borel sulla retta reale è quella generata dagli intervalli aperti.

Se X è uno spazio topologico, diremo che $A \subset X$ è F_σ se è unione numerabile di chiusi, mentre diremo che è G_δ se è intersezione numerabile di aperti. È chiaro che gli F_σ e i G_δ sono boreliani.

Fermiamoci un attimo a caratterizzare le σ -algebre dei boreliani sulla retta reale. In primo luogo abbiamo

Proposizione I.2 *Gli aperti di $\mathbb{R}$ sono unioni numerabili di intervalli aperti.*

Dimostrazione L'unione numerabile di intervalli aperti è, per definizione, un aperto. Sia A un aperto di $\mathbb{R}$. Allora consideriamo l'insieme numerabile di tutti gli intervalli aperti contenuti in A aventi estremi razionali. Adesso prendiamo l'unione B degli intervalli detti. Vogliamo vedere che $A = B$. Cominciamo col dimostrare che $B \subset A$. Sia $x \in B$ allora esistono $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ tali che $x \in]q_1, q_2[\subset A$ sicché $x \in A$. Vediamo che $A \subset B$: sia $x \in A$, esiste una palla di raggio δ e di centro x contenuta in A , sicché possiamo considerare l'intervallo chiuso $[x - \delta/2, x + \delta/2] \subset A$. Per il teorema di densità di $\mathbb{Q}$ esistono due razionali q_1, q_2 (contenuti uno in $(x - \delta/2, x)$ e uno in $(x, x + \delta/2)$) tali che $q_1 < x < q_2$ e $]q_1, q_2[\subset A$. Ne concludiamo che $A = B$.

(c.v.d.)

Corollario I.3 *I chiusi di $\mathbb{R}$ sono intersezioni numerabili di intervalli chiusi.*

Dalla proposizione segue che la σ -algebra generata da tutti gli intervalli aperti contiene tutti gli aperti e perciò tutti i boreliani. Quindi la σ -algebra di Borel su $\mathbb{R}$ è generata dagli intervalli aperti. Ma si può dire di più

Proposizione I.4 *La σ -algebra di Borel su $\mathbb{R}$ è generata*

- (i) *dagli aperti;*
- (ii) *dagli intervalli aperti;*
- (iii) *dalle semirette del tipo $]a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$;*
- (iv) *dalle semirette del tipo $[a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$;*
- (v) *dalle semirette del tipo $] -\infty, a[$, $a \in \mathbb{R}$;*
- (vi) *dalle semirette del tipo $] -\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$;*

Dimostrazione Il primo punto discende dalla definizione, mentre il secondo è già stato dimostrato. Dimostriamo ora il (iii) (gli altri essendo analoghi). La σ -algebra generata dalle semirette del tipo in (iii) contiene gli intervalli semiaperti, $]a, b[=]a, +\infty[\setminus]b, +\infty[$; ma allora contiene tutti gli intervalli aperti, perché sono unione numerabile dei semiaperti

$$(c.v.d.) \quad]a, b[= \bigcup_{j=1}^{\infty} \left] a, b - \frac{b-a}{j} \right[.$$

I.1.3 Spazi misurabili e misura esterna

Definizione I.5 *La coppia $(X, \mathcal{A})$ formata da un insieme X e da una σ -algebra di suoi sottoinsiemi $\mathcal{A}$ si dice spazio misurabile (o di misura) . Ciascun elemento $A \in \mathcal{A}$ si dice misurabile .*

Introduciamo ora la nozione di **misura esterna** con la seguente

Definizione I.6 *Una misura esterna μ^* su un insieme X è una funzione $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ tale che*

- (i) $\mu^*(\emptyset) = 0$;
- (ii) (monotonia) se $E \subset F$, allora $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$;
- (iii) (subadditività numerabile) se $\{E_n\}$ è una successione di sottoinsiemi di X , allora

$$\mu^* \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(E_n)$$

In analogia con quanto si fa nella teoria classica di Lebesgue, poniamo

Definizione I.7 *Se μ^* è una misura esterna su un insieme X , un sottoinsieme $Y \subset X$ tale che*

$$\forall Z \subset X \quad \mu^*(Z) = \mu^*(Y \cap Z) + \mu^*(Y^c \cap Z)$$

si dice misurabile rispetto a μ^ .*

Osservazione I.6 Notiamo che basta dimostrare che, per ogni Z , risulta $\mu^*(Z) \geq \mu^*(Y \cap Z) + \mu^*(Y^c \cap Z)$. Infatti,

$$\mu^*(Z) = \mu^*((Z \cap Y) \cup (Z \cap Y^c)) \leq \mu^*(Y \cap Z) + \mu^*(Y^c \cap Z)$$

■

È naturale ora dimostrare il seguente

Teorema I.5 *Se μ^* è una misura esterna su X , allora l'insieme $\mathcal{A}$ dei sottoinsiemi misurabili rispetto a μ^* di X è una σ -algebra di X .*

Inoltre, se E_i è una successione di insiemi di $\mathcal{A}$ disgiunti, allora

$$\mu^* \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(E_i)$$

Dimostrazione

Poniamo $\mathcal{A} \doteq \{Y \subset X \mid Y \text{ è misurabile rispetto a } \mu^*\}$. Abbiamo che $\emptyset \in \mathcal{A}$, infatti

$$\mu^*(\emptyset \cap Z) + \mu^*(X \cap Z) = \mu^*(Z).$$

Sia ora $Y \in \mathcal{A}$, per ogni $Z \subset X$ abbiamo

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Y \cap Z) + \mu^*(Y^c \cap Z) = \mu^*((Y^c)^c \cap Z) + \mu^*(Y^c \cap Z)$$

da cui $Y^c \in \mathcal{A}$. Vediamo ora la stabilità rispetto all'unione. Siano $Y_1, Y_2 \in \mathcal{A}$, per ogni $Z \subset X$ abbiamo

$$\begin{aligned} \mu^*(Z) &= \mu^*(Y_2 \cap Z) + \mu^*(Y_2^c \cap Z) \\ \mu^*(Z \cap Y_2^c) &= \mu^*(Y_1 \cap Z \cap Y_2^c) + \mu^*(Y_1^c \cap Z \cap Y_2^c) \end{aligned}$$

da cui

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Y_2 \cap Z) + \mu^*(Y_1 \cap Z \cap Y_2^c) + \mu^*(Y_1^c \cap Y_2^c \cap Z)$$

per la legge di de Morgan

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Y_2 \cap Z) + \mu^*(Y_1 \cap Z \cap Y_2^c) + \mu^*((Y_1 \cup Y_2)^c \cap Z)$$

per la subadditività di μ^* sussiste

$$\mu^*(Y_2 \cap Z) + \mu^*(Y_1 \cap Z \cap Y_2^c) \geq \mu^*((Y_2 \cap Z) \cup (Y_1 \cap Z \cap Y_2^c))$$

ma

$$(Y_2 \cap Z) \cup (Y_1 \cap Z \cap Y_2^c) = ((Y_1 \cap Y_2^c) \cup Y_2) \cap Z = (Y_1 \cup Y_2) \cap Z$$

perciò

$$\mu^*(Z) \geq \mu^*((Y_1 \cup Y_2) \cap Z) + \mu^*((Y_1 \cup Y_2)^c \cap Z)$$

per l'osservazione precedente si conclude che

$$\mu^*(Z) = \mu^*((Y_1 \cup Y_2) \cap Z) + \mu^*((Y_1 \cup Y_2)^c \cap Z)$$

e dunque $\mathcal{A}$ è un'algebra.

Siano ora due insiemi Y_1 e Y_2 **misurabili** e **disgiunti**. Allora preso $Y_1 \cup Y_2$ si ha

$$\mu^*(Y_1 \cup Y_2) = \mu^*((Y_1 \cup Y_2) \cap Y_1) + \mu^*((Y_1 \cup Y_2) \cap Y_1^c)$$

ma per la disgiunzione dei due insiemi si conclude

$$(Y_1 \cup Y_2) \cap Y_1 = Y_1$$

$$(Y_1 \cup Y_2) \cap Y_1^c = Y_2$$

da cui si conclude che $\mu^*(Y_1 \cup Y_2) = \mu^*(Y_1) + \mu^*(Y_2)$.

Dobbiamo mostrare adesso la stabilità per unione numerabile. Sia $E \doteq \bigcup_n E_n$ con E_n successione di misurabili disgiunti, i.e. $E_n \in \mathcal{A}$. Definiamo $F_n \doteq \bigcup_{i=0}^n E_i$, allora $F_n \in \mathcal{A}$. Per induzione abbiamo immediatamente che $F_n \in \mathcal{A}$, perciò

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap F_n) + \mu^*(Z \cap F_n^c)$$

Inoltre, $F_n \subset E$ e perciò $E^c \subset F_n^c$, quindi

$$\mu^*(Z \cap F_n) + \mu^*(Z \cap E^c) \leq \mu^*(Z \cap F_n) + \mu^*(Z \cap F_n^c) = \mu^*(Z)$$

Notiamo ora che $F_n \cap E_n = E_n \in \mathcal{A}$ e che $F_n \cap E_n^c = F_{n-1}$ (e qui entra l'ipotesi di disgiunzione) perciò

$$\mu^*(Z \cap F_n) = \mu^*((Z \cap F_n) \cap E_n) + \mu^*((Z \cap F_n) \cap E_n^c) = \mu^*(Z \cap E_n) + \mu^*(Z \cap F_{n-1})$$

dunque, per induzione,

$$\mu^*(Z \cap F_n) = \sum_{i=0}^n \mu^*(Z \cap E_i)$$

Riportando il risultato ottenuto nella disuguaglianza di sopra, troviamo

$$\sum_{i=0}^n \mu^*(Z \cap E_i) + \mu^*(Z \cap E^c) \leq \mu^*(Z)$$

da cui

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(Z \cap E_i) + \mu^*(Z \cap E^c) \leq \mu^*(Z)$$

Allora, siccome $Z \cap E = \bigcup_{i=0}^{\infty} Z \cap E_i$, vale, per la subadditività numerabile

$$\mu^*(Z \cap E^c) + \mu^*(Z \cap E) \leq \mu^*(Z \cap E^c) + \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(Z \cap E_i) \leq \mu^*(Z)$$

ancora per l'osservazione si ha la tesi. Si noti come si è pure ottenuto che

$$\mu^*(Z \cap E^c) + \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(Z \cap E_i) = \mu^*(Z)$$

se ora sostituiamo a Z l'insieme $Z \cap E$

$$\mu^*(Z \cap E) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(Z \cap E \cap E_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(Z \cap E_i)$$

Infine, sostituendo a Z l'insieme E stesso, si ottiene

$$\mu^*(E) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(E_i)$$

(c.v.d.)

I.1.4 Misura

Data la definizione di misura esterna vediamo adesso la

Definizione I.8 Si definisce misura μ su uno spazio misurabile $(X, \mathcal{A})$ una funzione $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ tale che

$$(i) \mu(\emptyset) = 0;$$

(ii) (additività numerabile) se $\{E_n\}$ è una successione di insiemi misurabili disgiunti allora

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

**Costruzione
di misure
tramite funzioni
da X in $\mathbb{R}^+$**

Ad esempio, sia X un insieme non vuoto e fissiamo $\mathcal{A} \doteq \mathcal{P}(X)$. Data una funzione $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ poniamo per ogni $E \in \mathcal{A}$

$$\mu(E) \doteq \sup_{x_1, \dots, x_n \in E; n \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

verifichiamo che si tratta di una misura. Se in E f assume un valore infinito allora la misura di E è infinita. Se questo non accade, fissata una successione $\{x_i\}$ in E , $\mu(E)$ risulta banalmente maggiore o eguale della somma della serie di $f(x_i)$, di cui ha senso parlare perché abbiamo a che fare con una serie a termini positivi. D'altra parte preso il sup delle somme dette al variare delle successioni in E , si trova un numero maggiore o eguale a $\mu(E)$ dunque

$$\mu(E) = \sup_{\{x_n\} \subset E} \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)$$

Questo implica immediatamente l'additività numerabile: se nell'unione degli E_n si trova un punto su cui f assume infinito la tesi è banalmente verificata. Altrimenti prendiamo la successione y_m a valori nell'unione E degli E_n . Consideriamo l'insieme E_n e numeriamo in senso crescente tutti gli y_m appartenenti a E_n giungendo a costruire la successione $x_{n,i} \in E_n$. Viceversa data $x_{n,i}$ costruiamo y_m . Allora

$$\sum_{m=1}^{\infty} f(y_m) = \sum_{i,n \in \mathbb{N}} f(x_{n,i})$$

siccome la serie è a termini positivi vale la proprietà commutativa e

$$\sum_{m=1}^{\infty} f(y_m) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} f(x_{n,i})$$

questo comporta

$$\mu(E) = \sup_{\{x_i\} \subset E_n; n \in \mathbb{N}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} f(x_{n,i}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{\{x_i\} \subset E_n} \sum_{i=1}^{\infty} f(x_{n,i}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

Infatti, è ovvio che $\mu(E) \leq \sum \mu(E_n)$. D'altra parte

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \mu(E_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \sup_{\{x_i\} \subset E_n} \sum_{i=1}^{\infty} f(x_{n,i}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{\{x_i\} \subset E_n} \sum_{n=1}^k \sum_{i=1}^{\infty} f(x_{n,i}) \leq \\ &\leq \sup_{\{x_i\} \subset E_n} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} f(x_{n,i}) = \mu(E) \end{aligned}$$

Misura di Dirac Notiamo allora che per $x_0 \in X$ fissato, posto $f(x) = \delta(x - x_0)$ otteniamo la **misura di Dirac concentrata in x_0** :

$$\delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Cominciamo ora a legare misura esterna e misura.

Teorema I.6 Se μ^* è una misura esterna su un insieme X e $\mathcal{A}$ è la σ -algebra degli insiemi misurabili secondo μ^* , allora $\mu \doteq \mu^*|_{\mathcal{A}}$, restrizione di μ^* ad $\mathcal{A}$, è una misura su $\mathcal{A}$.

Dimostrazione Abbiamo già provato la addittività numerabile dei misurabili disgiunti nel teorema precedente.
(c.v.d.) Il fatto che $\mu^*(\emptyset) = 0$ e che $\emptyset \in \mathcal{A}$ conclude la dimostrazione.

Consideriamo ancora la retta reale con la misura esterna l^* di Lebesgue definita sugli intervalli aperti (come loro lunghezza). l^* definisce per il teorema dimostrato una misura su $\mathcal{A}$. Siccome l'unione infinita di intervalli aperti è ancora appartenente a $\mathcal{A}$ si ha che i boreliani appartengono ad $\mathcal{A}$, perciò sono misurabili e $\beta(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}$.

Vediamo ora le proprietà salienti delle misure

Proposizione I.7 Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Allora

- (i) se $A \subset B$ sono misurabili, allora $\mu(A) \leq \mu(B)$;
- (ii) data una successione $\{E_n\}$ di insiemi misurabili incapsulati, $E_{n+1} \subset E_n$, con $\mu(E_1) < \infty$, si ha

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n);$$

- (iii) data una successione $\{E_n\}$ di insiemi misurabili vale

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Dimostrazione Vediamo (i). $\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$.
Vediamo (ii). Chiamiamo E l'intersezione di tutti gli E_n , allora

$$E_1 = E \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} (E_i \setminus E_{i+1})$$

dove l'unione è disgiunta. Per l'addittività numerabile

$$\mu(E_1) = \mu(E) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i \setminus E_{i+1}) = \mu(E) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \mu(E_i \setminus E_{i+1}) =$$

$$= \mu(E) + \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(E_1) - \mu(E_n)) = \mu(E) + \mu(E_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$$

da cui la tesi.

(iii) Definiamo la successione di insiemi disgiunti $F_n \doteq E_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i$. Allora $F_n \subset E_n$, dunque

$$(c.v.d.) \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

I.1.5 Misure complete e completamenti di spazi di misura

Torniamo a dare una

Definizione I.9 Una misura μ su uno spazio X si dice *finita* se $\mu(X) < \infty$. e σ -finita se è possibile ricoprire l'insieme X con insiemi misurabili $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di modo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ $\mu(X_n) < \infty$.

Un insieme misurabile E ha misura finita se $\mu(E) < \infty$ e misura σ -finita se è unione numerabile di misurabili di misura finita.

Definizione I.10 Uno spazio con misura $(X, \mathcal{A}, \mu)$ si dice *completo* se $\mathcal{A}$ contiene tutti i sottoinsiemi degli insiemi di misura nulla:

$$\forall E \in \mathcal{A}, \forall A \subset E, \mu(E) = 0 \Rightarrow A \in \mathcal{A}$$

Se $A \subset E$ è misurabile con $\mu(E) = 0$ per la monotonia di cui nella proposizione precedente abbiamo $\mu(A) \leq \mu(E) = 0$

Osservazione I.7 La misura indotta da una misura esterna è completa grazie alla monotonia. Sia E misurabile di misura nulla e sia A sottoinsieme di E . Siccome $\mu^*(E) = 0$ si ha $\mu^*(A) \leq \mu^*(E) = 0$. Ora, $\mu^*(Z \cap A) \leq \mu^*(A) = 0$ perciò

$$\mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \cap A^c) = \mu^*(Z \cap A^c) \leq \mu^*(Z)$$

- da cui A è misurabile.

Di ogni spazio di misura esiste il **completamento** :

Teorema I.8 (di completamento della misura)

Se $(X, \mu, \mathcal{A})$ è uno spazio di misura, allora esiste un secondo spazio di misura $(X, \tilde{\mu}, \tilde{\mathcal{A}})$ tale che

$$(i) \mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{A}};$$

$$(ii) \text{ se } E \in \mathcal{A} \text{ allora } \mu(E) = \tilde{\mu}(E);$$

$$(iii) E \in \tilde{\mathcal{A}} \text{ se e solo se esistono due insiemi } A \text{ e } B \text{ tali che } E = A \cup B \text{ con } A \subset C \in \mathcal{A} \text{ e } \mu(C) = 0, \text{ e con } B \in \mathcal{A}.$$

Dimostrazione

Sia $\mathcal{N} \doteq \{C \in \mathcal{A} \mid \mu(C) = 0\}$. Sia $\mathcal{A}_0$ la σ -algebra generata da $\mathcal{A} \cup \mathcal{P}(\mathcal{N})$. Dalla (iii) abbiamo che $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup \mathcal{P}(\mathcal{N})$, perciò, per definizione, $\tilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}_0$. Questo implica che se $\tilde{\mathcal{A}}$ è una σ -algebra, allora $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_0$. Dimostriamo dunque che $\tilde{\mathcal{A}}$ è una σ -algebra. Siccome C e B sono μ -misurabili anche $C \setminus B$ è misurabile, perciò ha μ -misura nulla. Allora $E = (A \setminus B) \cup B$ con B μ -misurabile e $A \setminus B$ sottoinsieme di $C \setminus B$ misurabile, di misura nulla e disgiunto da B . Possiamo allora modificare (iii) richiedendo che ogni elemento di $\tilde{\mathcal{A}}$ possa essere partito in due insiemi di cui uno μ -misurabile e un altro sottoinsieme di un misurabile di misura nulla e disgiunto dal primo. Detto questo, se $E \in \tilde{\mathcal{A}}$ si può senz'altro scrivere

$$E^c = (B \cup C)^c \cup (A^c \cap C)$$

da cui E^c si scrive come l'unione di un misurabile e di un sottoinsieme di un insieme misurabile a misura nulla (tutto secondo μ). Ne consegue che $E^c \in \tilde{\mathcal{A}}$. Ovviamente $\emptyset \in \tilde{\mathcal{A}}$. Resta da

vedere la stabilità per unione numerabile. Sia $\{E_n\} \subset \tilde{\mathcal{A}}$, allora

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

banalmente $B \doteq \bigcup B_n \in \mathcal{A}$, inoltre,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \doteq C \Rightarrow \mu(C) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) = 0$$

da cui $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup \mathcal{P}(\mathcal{N})$ è una σ -algebra.

Se ora $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è completo allora $\mathcal{P}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{A}$ e $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}$, perciò ci basta porre $\tilde{\mu} \doteq \mu$. Altrimenti, preso $E \in \tilde{\mathcal{A}}$ si ha $E = A \cup B$ e poniamo $\tilde{\mu}(E) \doteq \mu(B)$. Vediamo che si tratta di una definizione ben posta: sia $E = A' \cup B'$ con $A' \subset C'$ con $\mu(C') = 0$, abbiamo

$$B \subset A \cup B = A' \cup B' \subset C' \cup B'$$

con $C' \cup B'$ μ -misurabile: allora

$$\mu(B) \leq \mu(C') + \mu(B') = \mu(B')$$

scambiando B con B' si ha $\mu(B) = \mu(B') = \tilde{\mu}(E)$.

Verifichiamo che si tratta di una misura: $\mu(\emptyset) = \tilde{\mu}(\emptyset) = 0$. Adesso prendiamo una successione di elementi disgiunti di $\tilde{\mathcal{A}} \{E_n\}$, abbiamo

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

le unioni sono tutte disgiunte, inoltre $\bigcup A_n \subset \bigcup C_n$ a misura nulla, sicché

$$(c.v.d.) \quad \tilde{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mu}(E_n)$$

Osservazione I.8 Una nota immediata da fare al teorema precedente è che lo spazio $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ è uno spazio di misura completo. Infatti se E ha misura nulla secondo $\tilde{\mu}$ allora si ha $E = A \cup B$ con $B \in \mathcal{A}$ e $\mu(B) = 0$: preso $B \cup C$ si ha che $E = (A \cup B) \cup \emptyset$ con $A \cup B \subset B \cup C \in \mathcal{A}$ e $\mu(B \cup C) = 0$. Adesso, preso $Y \subset E$ si ha $Y = ((A \cup B) \cap Y) \cup \emptyset$ con $(A \cup B) \cap Y \subset B \cup C$ a μ -misura nulla.

■ Allora $Y \in \tilde{\mathcal{A}}$ e $\tilde{\mu}(Y) = 0$.

Ricordiamo che la misura di Lebesgue è il completamento della misura di Borel ottenuta restringendo la misura indotta dalla misura esterna di Lebesgue alla sola classe dei boreliani di $\mathbb{R}$.

I.1.6 Misure su algebre e teorema di estensione

Finora abbiamo introdotto misure solo su σ -algebre, adesso poniamo la seguente

Definizione I.11 Se $\mathcal{A}$ è un'algebra di insiemi, una misura su $\mathcal{A}$ è una applicazione $\bar{\mu} : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$. talché

(i) $\bar{\mu}(\emptyset) = 0$;

(ii) se $\{E_n\} \subset \mathcal{A}$ è una successione di elementi disgiunti tale che

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$$

allora

$$\bar{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(E_n).$$

Data una misura su una algebra di sottoinsiemi di X , $\mathcal{A}$, esiste su X una misura esterna μ^*

indotta da $\bar{\mu}$. A questo scopo basta porre

$$\mu^*(E) = \inf_{E \subset \bigcup_i A_i} \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_i)$$

dove l'inferiore viene calcolato al variare di tutte le successioni $\{A_i\} \subset \mathcal{A}$. Dimostriamo che μ^* è effettivamente una misura esterna

Lemma I.9 μ^* è una misura esterna e $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \bar{\mu}$.

Dimostrazione Evidentemente vale $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \bar{\mu}$ (l'inf diventa un minimo), perciò $\mu^*(\emptyset) = 0$. Vediamo la monotonia. Sia $E \subset F$, allora ogni successione che contiene F contiene anche E , perciò

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$$

Non ci resta che la subaddittività numerabile. Sia $E = \bigcup_n E_n$ con gli E_n disgiunti (a meno di ridefinire gli insiemi possiamo sempre supporli disgiunti). Se per qualche n risulta $\mu^*(E_n) = +\infty$ la tesi è ovvia. Supponiamo perciò che per ogni n e per ogni $\varepsilon > 0$ esista la successione $\{A_{n_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ per cui

$$E_n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{n_i}$$

e

$$\sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_{n_i}) < \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Ora, $A_{n_i} \in \mathcal{A}$ e

$$E \subset \bigcup_{n,i=1}^{\infty} A_{n_i}$$

per definizione dunque

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_{n_i}) < \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon$$

(c.v.d.) e per l'arbitrarietà di ε si deduce la tesi.

Teorema I.10
(di estensione di Carathéodory)

Se $\bar{\mu}$ è una misura su un'algebra $\mathcal{A}$ e μ^* è la misura esterna indotta da $\bar{\mu}$, allora la restrizione μ di μ^* alla σ -algebra dei suoi insiemi misurabili è una misura sulla σ -algebra (contenente $\mathcal{A}$) di questi insiemi. Se $\bar{\mu}$ è una misura finita, anche μ lo è, e se $\bar{\mu}$ è σ -finita allora μ è l'unica misura definita sulla σ -algebra generata da $\mathcal{A}$ tale che $\mu|_{\mathcal{A}} = \bar{\mu}$.

Dimostrazione La prima parte del teorema è già stata dimostrata: data $\bar{\mu}$ sappiamo costruire μ^* tale che $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \bar{\mu}$; adesso, gli insiemi misurabili secondo μ^* costituiscono una σ -algebra $\mathcal{B}$ sulla quale μ^* è una misura: $\mu^*|_{\mathcal{B}} = \mu$. Noi richiediamo che $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ di modo che $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \bar{\mu}$ da cui $\bar{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$. Per ogni $A \in \mathcal{A}$, preso un qualunque sottoinsieme di X , E , si abbia

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

Se E ha misura infinita la tesi è ovvia. Altrimenti, per ogni $\varepsilon > 0$, si trova una successione $\{A_i\} \subset \mathcal{A}$ talché $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, a meno di ridefinire la successione possiamo sempre supporre che essa sia formata da elementi tutti disgiunti, infine

$$\mu^*(E) + \varepsilon > \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_i)$$

inoltre, per la definizione di μ^* a partire da $\bar{\mu}$, visto che $A \in \mathcal{A}$,

$$\mu^*(E \cap A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_i \cap A)$$

$$\mu^*(E \cap A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_i \cap A^c)$$

sicché

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_i \cap A) + \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_i \cap A^c)$$

come detto gli A_i sono stati scelti tutti disgiunti, perciò, per additività,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_i \cap A) + \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_i \cap A^c) = \bar{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_i) < \mu^*(E) + \varepsilon$$

dunque, per arbitrarietà di ε , si conclude

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E).$$

Veniamo alla seconda parte della dimostrazione. Se $\bar{\mu}$ è finita allora μ è finita, essendo $\mu(X) = \bar{\mu}(X)$. Resta da dimostrare l'unicità di μ nel caso in cui $\bar{\mu}$ sia σ -finita.

Sia allora ν una misura definita sulla σ -algebra $\mathcal{C}$ generata da $\mathcal{A}$ che coincida con $\bar{\mu}$ - e perciò con μ - su $\mathcal{A}$. La nostra tesi è che su $\mathcal{C}$ sia $\nu = \mu|_{\mathcal{C}}$. Siccome $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ (σ -algebra dei μ^* -misurabili) si ha che, per definizione di σ -algebra generata, $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$. Ora, prendiamo $B \in \mathcal{C}$ che **abbia misura esterna finita**. Fissato $\varepsilon > 0$, troviamo allora un insieme $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, (con $A_i \in \mathcal{A}$ disgiunti), con $A \in \mathcal{C}$, tale che $B \subset A$ e

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \varepsilon$$

Ma A, B sono ν -misurabili, perciò

$$\nu(B) \leq \nu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_i) = \mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \varepsilon$$

per l'arbitrarietà di ε si conclude

$$B \in \mathcal{C}, \mu^*(B) < +\infty \Rightarrow \nu(B) \leq \mu^*(B)$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \mu^*(A) = \mu^*(B) + \mu^*(A \setminus B) \\ \nu(A) &= \mu^*(A) = \nu(B) + \nu(A \setminus B) \end{aligned}$$

ma

$$\nu(A \setminus B) \leq \mu^*(A \setminus B) = \mu^*(A) - \mu^*(B) \leq \varepsilon$$

da cui

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(A) \leq \nu(B) + \varepsilon$$

per l'arbitrarietà di ε vale

$$B \in \mathcal{C}, \mu^*(B) < +\infty \Rightarrow \nu(B) = \mu^*(B).$$

Adesso usiamo la σ -finitezza di $\bar{\mu}$: esiste una successione $\{X_i\} \subset \mathcal{A}$ di elementi disgiunti la cui unione è X con $\bar{\mu}(X_i) < \infty$. Allora per ogni $B \in \mathcal{C}$, si ha

$$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} (X_i \cap B)$$

unione disgiunta, per cui

$$\nu(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(X_i \cap B) \text{ e } \mu(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(X_i \cap B)$$

Ma gli insiemi $\mathcal{C} \ni (X_i \cap B) \subset X_i$ sono a misura finita, perciò $\nu(X_i \cap B) = \mu^*(X_i \cap B) = \mu(X_i \cap B)$ (perché $X_i \cap B \in \mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ e $\mu^*|_{\mathcal{B}} = \mu$), infine

(c.v.d.)

$$\nu(B) = \mu(B).$$

1.2 Integrazione

Nel seguito assumeremo di lavorare con misure **complete** (cosa sempre possibile a meno di completamento, come abbiamo visto). Inoltre adottiamo la seguente familiare terminologia: se una proprietà che si riferisce a uno spazio di misura si verifica su tutto lo spazio tranne

al più un insieme di misura nulla, si dice che tale proprietà vale **quasi ovunque** (*almost everywhere*, a.e.) .

I.2.1 Funzioni misurabili

Cominciamo col porre la seguente fondamentale

Definizione I.12 Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ sono spazi di misura, una funzione $f : X \rightarrow Y$ si dice *misurabile* se per ogni insieme $E \in \mathcal{B}$, l'insieme $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$, i.e. la controimmagine di insiemi misurabili è misurabile.

Osservazione I.9 Sia $\mathcal{B}$ generata dall'insieme $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(Y)$. Sia $\mathcal{T}'$ l'unione di $\mathcal{T}$ con l'insieme dei complementari degli elementi di $\mathcal{T}$, allora $\mathcal{B}$ è l'insieme che contiene tutte le unioni degli elementi di $\mathcal{T}'$. Ora, notiamo che $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Se ora ogni elemento di $\mathcal{T}'$ ha controimmagine misurabile, allora la controimmagine dell'unione, anche infinita, di elementi di $\mathcal{T}'$ è unione (anche infinita) di misurabili di X e perciò è misurabile. Se tutti gli elementi di $\mathcal{T}'$ hanno controimmagine misurabile, f è misurabile. D'altra parte, $f^{-1}(A^c) = [f^{-1}(A)]^c$, da cui se la controimmagine di A è misurabile tale è il suo complementare e perciò $f^{-1}(A^c)$. Infine, se $\mathcal{B}$ è generata da $\mathcal{T}$ la funzione $f : X \rightarrow Y$ è misurabile se e solo se la controimmagine di elementi di $\mathcal{T}$ è misurabile.

Ad esempio, se X e Y sono spazi topologici e li dotiamo della σ -algebra di Borel indotta dalla loro topologia si ha che le funzioni continue da X in Y sono misurabili. Ovviamente si ha pure che la composizione di funzioni misurabili è misurabile.

Le funzioni a valori reali si dicono misurabili se le controimmagini di boreliani sono misurabili. In forza della proposizione I.4 e dell'osservazione di sopra si ha la seguente

Proposizione I.11 Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio di misura, una funzione $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ è misurabile se e solo se vale una delle seguenti proprietà

- (i) per ogni $a \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in X \mid f(x) > a\}$ è misurabile;
- (ii) per ogni $a \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in X \mid f(x) \geq a\}$ è misurabile;
- (iii) per ogni $a \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in X \mid f(x) < a\}$ è misurabile;
- (iv) per ogni $a \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in X \mid f(x) \leq a\}$ è misurabile.

Ne abbiamo subito che le funzioni caratteristiche di insiemi misurabili sono misurabili, viceversa, se la funzione caratteristica di un insieme è misurabile, allora l'insieme è misurabile. Fissato uno spazio di misura $(X, \mathcal{A}, \mu)$ chiamiamo $\mathcal{M}$ l'insieme delle funzioni misurabili definite su X a valori reali. Usando la proposizione precedente si trova

Lemma I.12 Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni misurabili, l'insieme

$$E \doteq \{x \in X \mid f(x) > g(x)\}$$

è misurabile.

Dimostrazione Sia $x \in E$, allora risulta $f(x) > g(x)$ ed esisterà un razionale r per cui

$$f(x) > r > g(x)$$

da cui

$$E = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{x \in X \mid f(x) > r\} \cap \{x \in X \mid g(x) < r\}$$

(c.v.d.) poiché $\mathbb{Q}$ è numerabile, E , come unione numerabile di misurabili, è misurabile.

Teorema I.13 Valgono le seguenti proprietà per le funzioni misurabili a valori in $\mathbb{R}$:

(i) se $f \in \mathcal{M}$ è misurabile e $c \in \mathbb{R}$ allora $f + c$ e $cf \in \mathcal{M}$;

(ii) se $f, g \in \mathcal{M}$ allora $f + g$ e fg sono misurabili;

(iii) se $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ allora le funzioni

$$M(x) \doteq \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k(x), \quad m(x) \doteq \inf_{k \in \mathbb{N}} f_k(x)$$

sono misurabili;

(iv) se $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ e $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$ per ogni $x \in X$, allora la funzione

$$f(x) \doteq \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$$

è misurabile;

(v) se $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ le funzioni

$$\begin{aligned} f(x) &\doteq \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \\ g(x) &\doteq \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \end{aligned}$$

sono misurabili.

Dimostrazione Vediamo la (i). Per ogni reale $t \in \mathbb{R}$ l'insieme $F_t \doteq \{x \in X \mid f(x) > t\}$ è misurabile, perciò è misurabile l'insieme $F_{t/c} = \{x \in X \mid cf(x) > t\}$ per ogni t . Da cui cf è misurabile. Considerando F_{t-c} si ottiene che $f + c$ è misurabile.

Vediamo (ii). Si ha

$$\{x \in X \mid f(x) + g(x) > t\} = \{x \in X \mid f(x) > t - g(x)\}$$

per (i) e per il lemma quest'ultimo è misurabile per cui $f + g \in \mathcal{M}$.

Ora mostriamo che f^2 è misurabile: se $t \geq 0$

$$\{x \in X \mid f^2(x) > t\} = \{x \in X \mid f(x) > \sqrt{t}\} \cup \{x \in X \mid f(x) < -\sqrt{t}\}$$

che è un insieme misurabile. Se $t < 0$ allora l'insieme diviene X . In ogni caso si avrà misurabilità e perciò $f^2 \in \mathcal{M}$. D'altra parte per questo e per i punti precedenti fg è misurabile essendo

$$fg = \frac{1}{4}(f+g)^2 - \frac{1}{4}(f-g)^2$$

Veniamo a (iii). Per ogni t

$$\{x \in X \mid M(x) > t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in X \mid f_k(x) > t\}$$

se un punto appartiene al primo insieme, per le proprietà del sup, dovrà esistere un indice k per cui $f_k(x) > t$ e allora il punto apparterrà al secondo insieme. Se un punto appartiene al secondo insieme, ovviamente apparterrà al primo. Il secondo insieme è l'unione numerabile di insiemi misurabili, perciò è misurabile. Usando l'insieme

$$\{x \in X \mid m(x) < t\}$$

si deduce in modo del tutto analogo la misurabilità di $m(x)$.

Adesso (iv). Essa discende subito da (iii), in quanto $f(x) = \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k(x)$.

Per (v) si ha

$$M_k(x) = \sup_{j \geq k} f_j(x)$$

è misurabile per ogni k , perciò è misurabile anche

$$f(x) = \inf_{k \in \mathbb{N}} M_k(x) = \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$$

(c.v.d.) in modo completamente analogo si dimostra l'asserzione per il minimo limite.

Una conseguenza immediata di (v) è che se una successione di funzioni misurabili converge puntualmente alla funzione f , allora f (limite puntuale) è misurabile.

Prese ora due funzioni misurabili, $f(x)$ e $g(x)$, posto $f_1(x) \doteq f(x)$ e $f_k(x) \doteq g(x)$ per ogni

$k > 1$, allora

$$M(x) = \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k(x) = \max \{f(x), g(x)\} \equiv f(x) \vee g(x)$$

è misurabile, così come

$$m(x) = \inf_{k \in \mathbb{N}} f_k(x) = \min \{f(x), g(x)\} \equiv f(x) \wedge g(x)$$

in particolare sono misurabili $f^+(x)$ e $f^-(x)$. Viceversa se f^+ e f^- sono misurabili allora $f = f^+ - f^-$ è misurabile. Sarà misurabile anche $|f|$.

1.2.2 Funzioni semplici

Si definisce **funzione semplice** è una funzione misurabile da $(X, \mathcal{A}, \mu)$ in $\overline{\mathbb{R}}$ che assume un numero finito $\{c_i\}_{i \in J_N}$ di valori. Se ne ricava che una funzione semplice è

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{E_i}$$

dove, per ogni $i \in J_N$, gli E_i sono insiemi misurabili essendo φ misurabile. Si conviene di porre $\varphi(x) = 0$ fuori dall'unione degli E_i , perciò possiamo sempre supporre che i c_i siano non nulli e distinti. In questo modo la rappresentazione di φ come combinazione lineare di funzioni caratteristiche è unica. Sia infatti

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^M b_i \chi_{D_i}$$

allora, fissiamo $x \in E_i$, φ vale ivi c_i perciò deve esistere un indice j talché $x \in D_j$ e dunque $b_j = c_i$. Siccome $D_j = \varphi^{-1}(b_j) = \varphi^{-1}(c_i) = E_i$ si conclude che a meno di permutazioni la rappresentazione di φ è unica. Tale rappresentazione si dice **canonica**.

Teorema I.14 *Se $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ è una funzione misurabile a valori sulla retta reale, allora esiste una successione monotona $\{\varphi_n\}$ di funzioni semplici che converge puntualmente a f . Se lo spazio di misura è σ -finito possiamo scegliere le φ_n a supporto compatto.*

Dimostrazione Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $t \in \mathbb{R}$ esiste un unico $k_{t,n} \in \mathbb{N}$ talché

$$\frac{k_{t,n}}{2^n} \leq t \leq \frac{k_{t,n} + 1}{2^n}$$

definiamo la successione di funzioni

$$s_n(t) \doteq \begin{cases} 2^{-n} k_{t,n}, & \text{se } 0 \leq t < n \\ n, & \text{se } n \leq t \leq +\infty \end{cases}$$

Si tratta di una successione di funzioni semplici su boreliani, perciò è una successione di funzioni misurabili definite su $[0, +\infty]$. Inoltre, per ogni t si ha

$$0 \leq s_1(t) \leq s_2(t) \leq \dots \leq s_n(t) \leq \dots \leq t$$

Infatti, per ogni n si ha $s_n(t) \leq t$, e

$$2k_{t,n} \leq k_{t,n+1} \Rightarrow \frac{k_{t,n}}{2^n} \leq \frac{k_{t,n+1}}{2^{n+1}}.$$

Si ha poi che, in $[0, +\infty]$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(t) = t$$

Ponendo

$$\varphi_n(x) \doteq s_n(f(x))$$

troviamo una successione di funzioni semplici (essendo f misurabile gli insiemi $f^{-1}([0, n])$ e $f^{-1}([0, \infty])$ e $f^{-1}(\infty)$ sono misurabili) che soddisfa le richieste del teorema.

Per la seconda parte, sarà $X = \bigcup_{i=1}^{+\infty} X_i$ con X_i a misura finita. Per ottenere la tesi basterà definire φ_n solo su $\bigcup_{i=1}^n X_i$ (per ogni x da un certo n in poi varrà $\varphi_n(x) = s_n(f(x)) \rightarrow f(x)$ per $n \rightarrow \infty$).

(c.v.d.)

Siamo ora in grado di definire l'integrale di una funzione semplice: se $E \subset X$ è un insieme

misurabile poniamo

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{E_i} \Rightarrow \int_E \varphi(x) d\mu \doteq \sum_{i=1}^N c_i \mu(E_i \cap E)$$

Il risultato dell'integrazione operata su una qualsiasi rappresentazione è sempre lo stesso, perché ogni rappresentazione può essere ridotta in forma canonica.

Proposizione I.15 Se φ e ψ sono funzioni semplici i cui supporti hanno misura finita, allora, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ risulta

$$\int (a\varphi + b\psi) d\mu = a \int \varphi d\mu + b \int \psi d\mu$$

e se $\varphi \geq \psi$ quasi ovunque, allora

$$\int \varphi d\mu \geq \int \psi d\mu.$$

Dimostrazione Se gli insiemi che rappresentano canonicamente φ e ψ sono A_i e B_j rispettivamente, consideriamo tutte le loro intersezioni E_k . Sugli E_k abbiamo

$$\varphi = \sum_{k=1}^N a_k \chi_{E_k} \text{ e } \psi = \sum_{k=1}^N b_k \chi_{E_k}$$

quindi

$$a\varphi + b\psi = \sum_{k=1}^N (a a_k + b b_k) \chi_{E_k}$$

e per additività della misura si ha la tesi. Veniamo alla seconda parte. Consideriamo una funzione semplice che sia non negativa quasi ovunque, allora

$$\varphi = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{E_i}$$

$c_i < 0 \Rightarrow \mu(E_i) = 0$, dunque

$$\int \varphi d\mu = \sum_{i=1}^N c_i \mu(E_i) \geq 0$$

Si conclude perciò che se $\varphi \geq \psi$ a.e., allora $\varphi - \psi \geq 0$ a.e. e

$$(c.v.d.) \quad \int (\varphi - \psi) d\mu \geq 0 \Rightarrow \int \varphi d\mu - \int \psi d\mu \geq 0 \Rightarrow \int \varphi d\mu \geq \int \psi d\mu.$$

Proposizione I.16 Se f è una funzione reale limitata, definita su un insieme misurabile E di misura finita, allora

$$\inf_{f \leq \psi} \int_E \psi d\mu = \sup_{\varphi \leq f} \int_E \varphi d\mu$$

se e solo se f è misurabile.

Dimostrazione Sia f misurabile e valga $|f| \leq M$. Fissiamo $n \in \mathbb{N}$, definiamo, al variare di k in $-n \leq k \leq n$ gli insiemi

$$E_k \doteq \left\{ x \in X \left| \frac{k-1}{n} M < f(x) \leq \frac{k}{n} M \right. \right\}$$

Essi sono disgiunti, misurabili e hanno per unione E . Dunque

$$\mu(E) = \sum_{k=-n}^n \mu(E_k)$$

Consideriamo ora le funzioni semplici

$$\psi_n(x) \doteq \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^n k \chi_{E_k}, \quad \psi_n(x) \doteq \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^n (k-1) \chi_{E_k},$$

abbiamo $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$. Perciò

$$\inf_{f \leq \psi} \int_E \psi d\mu \leq \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^n k \mu_{E_k}$$

$$\sup_{\varphi \leq f} \int_E \varphi d\mu \geq \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^n (k-1) \mu_{E_k}$$

Quindi per ogni intero n si ha

$$0 \leq \inf_{f \leq \psi} \int_E \psi d\mu - \sup_{\varphi \leq f} \int_E \varphi d\mu \leq \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^n \mu_{E_k} = \frac{M}{n} \mu(E)$$

e passando al limite per $n \rightarrow \infty$ si conclude la tesi.

Viceversa, valga

$$\lambda \doteq \inf_{f \leq \psi} \int_E \psi d\mu = \sup_{\varphi \leq f} \int_E \varphi d\mu$$

allora, per ogni intero n , esistono funzioni semplici φ_n e ψ_n tali che $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ e

$$\int \psi_n d\mu - \frac{1}{2n} < \lambda < \int \varphi_n d\mu + \frac{1}{2n}$$

perciò

$$\int \psi_n d\mu - \int \varphi_n d\mu < \frac{1}{n}$$

D'altra parte anche le funzioni $\bar{\psi} \doteq \inf \psi_n$ e $\bar{\varphi} \doteq \sup \varphi_n$ sono misurabili con $\bar{\varphi} \leq f \leq \bar{\psi}$. Ora, l'insieme misurabile

$$D \doteq \{x \in X \mid \bar{\varphi}(x) < \bar{\psi}(x)\}$$

è dato dall'unione numerabile dei seguenti

$$D_\nu \doteq \left\{x \in X \mid \bar{\varphi}(x) < \bar{\psi}(x) - \frac{1}{\nu}\right\}$$

Ogni D_ν è contenuto nell'insieme

$$D_{\nu,n} \doteq \left\{x \in X \mid \varphi_n(x) < \psi_n(x) - \frac{1}{\nu}\right\}$$

vogliamo dimostrare che $\mu(D_{\nu,n}) \leq \nu/n$. A questo scopo notiamo che

$$\int_{D_{\nu,n}} (\psi_n - \varphi_n) d\mu \leq \int (\psi_n - \varphi_n) d\mu < \frac{1}{n}$$

essendo $\psi_n - \varphi_n \geq 0$. D'altra parte

$$\int_{D_{\nu,n}} (\psi_n - \varphi_n) d\mu \geq \mu(D_{\nu,n}) \inf_{D_{\nu,n}} (\psi_n - \varphi_n) \geq \frac{\mu(D_{\nu,n})}{\nu}$$

quindi

$$\frac{\mu(D_{\nu,n})}{\nu} \leq \frac{1}{n}$$

Ne deriva che

$$\mu(D_\nu) \leq \mu(D_{\nu,n}) \leq \frac{\nu}{n}$$

e passando al limite per $n \rightarrow \infty$ si trova

$$\mu(D_\nu) = 0 \Rightarrow \mu(D) = 0$$

Da cui $\bar{\psi} = \bar{\varphi} = f$ quasi ovunque: f è eguale a una funzione misurabile tranne al più su un insieme a misura nulla, perciò è misurabile (la controimmagine dell'insieme sul quale f è diversa dalla misurabile è, per ipotesi, un insieme misurabile di misura nulla: tutti i suoi sottoinsiemi sono misurabili per completezza, la tesi).

(c.v.d.)

Se una funzione è misurabile esistono due successioni (monotone) di funzioni misurabili superiori e inferiori a f i cui integrali convergono allo stesso limite (basta prendere la successione minimizzante e quella massimizzante nella proposizione precedente).

1.2.3 Definizione di integrale

Definizione I.13 Se $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ è misurabile sullo spazio di misura $(X, \mathcal{A}, \mu)$ allora definiamo l'integrale di f come

$$\int f d\mu \doteq \sup_{0 \leq \varphi \leq f} \int \varphi d\mu$$

con φ che varia tra le funzioni semplici inferiori a f .

Definizione I.14 Sia $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ misurabile sullo spazio di misura $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Se esistono finiti gli integrali della parte positiva e della parte negativa di f , allora f si dice integrabile e si pone

$$\int f d\mu \doteq \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

Se f è a valori complessi, si dice che è integrabile se e solo se sono integrabili parte reale e parte immaginaria, e si pone

$$\int f d\mu \doteq \int \operatorname{Re} f d\mu + i \int \operatorname{Im} f d\mu$$

Se f è a valori reali e $f \leq g$ integrabile, allora $f^+ \leq g^+$ e $f^- \leq g^-$. Per ogni φ funzione semplice minore o eguale a f^+ , esiste certamente ψ funzione semplice tale che

$$\varphi \leq \psi \leq g^+$$

perciò, per ogni φ ,

$$\int \varphi d\mu \leq \int \psi d\mu \leq \int g^+ d\mu$$

da cui

$$\sup_{\varphi \leq f} \int \varphi d\mu \leq \int g^+ d\mu$$

Ne consegue che sia parte positiva che parte negativa di f hanno integrale finito, perciò f è integrabile.

Sia ora f una funzione integrabile su $X \setminus E$ con $\mu(E) = 0$. Allora f è integrabile su X perché f ha integrale nullo su E . Dunque, abbiamo dimostrato il seguente

Teorema I.17 Siano f, g funzioni misurabili a valori reali e sia g è integrabile. Se $f \leq g$ quasi ovunque, allora f è integrabile.

Si ha, inoltre, il

Teorema I.18 Valgono le seguenti proprietà dell'integrazione

(i) se f e g sono integrabili e $\lambda \in \mathbb{C}$ allora anche $f + \lambda g$ è integrabile e vale

$$\int (f + \lambda g) d\mu = \int f d\mu + \lambda \int g d\mu;$$

(ii) se f e g sono funzioni integrabili a valori reali e $f \leq g$ allora

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu;$$

(iii) condizione necessaria e sufficiente affinché f sia integrabile è che $|f|$ sia integrabile. In questo caso

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu.$$

(iv) se $f = g$ quasi ovunque, allora $\int f d\mu = \int g d\mu$; se f è a valori reali e $f \geq 0$ e $\int f d\mu = 0$, allora $f = 0$ quasi ovunque.

Dimostrazione (i) e (ii) discendono direttamente dalla definizione di integrale. Vediamo (iv) sia $f = 0$ quasi ovunque, sia E l'insieme sul quale $f = 0$, allora E^c ha misura nulla. Ogni funzione semplice ha allora supporto in E^c , perciò è nulla quasi ovunque, dunque ha integrale nullo, così varrà per f .

Sia ora $f \geq 0$ e valga $\int f d\mu = 0$, ma, per assurdo esista $E \subset X$, $\mu(E) > 0$ sul quale $f \neq 0$ cioè $f > 0$. Consideriamo la funzione semplice $\varphi = (\inf_E f) \chi_E$: essa ha integrale maggiore di zero, perciò l'integrale di f deve essere positivo: assurdo.

In conclusione, occupiamoci di (iii). Consideriamo anzitutto una funzione integrabile a valori reali. f^+ e f^- sono integrabili, perciò tale è la loro somma, e dunque $|f| = f^+ + f^-$ è integrabile. Se ora $|f|$ è integrabile, essendo $f \leq |f|$ si ha che f è integrabile. Se f a valori complessi è integrabile si ha che $|\operatorname{Re} f|$ e $|\operatorname{Im} f|$ sono integrabili, perciò lo è anche $|f| \leq |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f|$. Viceversa, sono integrabili $|\operatorname{Re} f| \leq f$ e $|\operatorname{Im} f| \leq |f|$. Veniamo alla stima. Sia $z \doteq \int f d\mu$, allora esiste $\alpha \in \mathbb{C}$, con $|\alpha| = 1$ talché $\alpha z = |z|$, dunque

$$\left| \int f d\mu \right| = \int \alpha f d\mu = \int \operatorname{Re}(\alpha f) d\mu + i \int \operatorname{Im}(\alpha f) d\mu$$

ma allora, necessariamente, $\int \operatorname{Im} \alpha f = 0$ e $\operatorname{Re} \alpha f \leq |\alpha f| \leq |f|$ perciò

$$(c.v.d.) \quad \left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu.$$

Si consideri ora una funzione f non negativa e integrabile e sia $E \subset X$ la controimmagine di $+\infty$. Siccome E è misurabile, vogliamo determinare la misura di E . La funzione f maggiore la funzione semplice che vale $+\infty$ su E e 0 altrove, ne consegue che f ha integrale finito solo se E ha misura nulla. Se ora f ha segno qualsiasi ed è integrabile, la controimmagine di $\pm\infty$ ha ancora misura nulla:

Teorema I.19 *Una funzione integrabile a valori reali assume valore infinito solo su un insieme a misura nulla.*

I.3 Teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale

I.3.1 Il teorema di Beppo Levi

Cominciamo con il dimostrare il seguente

Teorema I.20 *Sia f_j una successione crescente di funzioni misurabili positive, tendente puntualmente alla funzione f . Allora*

$$\int f d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int f_j d\mu.$$

Dimostrazione Come sappiamo f è misurabile e positiva, perciò integrabile. Per la monotonia della successione vale

$$\int f_j d\mu \leq \int f d\mu$$

per ogni $j \in \mathbb{N}$; ancora per monotonia il limite degli integrali esiste sulla retta reale estesa. Si ha perciò

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int f_j d\mu = \sup_j \int f_j d\mu \leq \int f d\mu$$

Sia ora φ semplice, con $0 \leq \varphi \leq f$, proviamo che

$$\int \varphi d\mu \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \int f_j d\mu$$

il che concluderebbe la dimostrazione. Allo scopo dimostreremo che per ogni $0 < c < 1$

$$\int c\varphi d\mu \leq \sup_j \int f_j d\mu$$

da cui facendo tendere $c \rightarrow 1^-$ avremo

$$\int \varphi d\mu = \lim_{c \rightarrow 1^-} c \int \varphi d\mu \leq \sup_j \int f_j d\mu$$

Sia quindi

$$\varphi = \sum_{k=1}^m \alpha_k \chi_{A_k}$$

con gli $A_k \in \mathcal{A}$. φ non assuma il valore $+\infty$. Per ogni $j \in \mathbb{N}$ e $k = J_m$ poniamo

$$E_{j,k} \doteq \{x \in A_k \mid f_j(x) > c\alpha_k\}$$

Ora, per ogni $x \in A_k$ vale $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) = f(x) > \varphi(x) = \alpha_k > c\alpha_k$, perciò, pur di scegliere j abbastanza grande, varrà $f_j(x) > c\alpha_k$. Di conseguenza

$$A_k = \bigcup_j E_{j,k}$$

ma, per la monotonia, $E_{j,k} \subset E_{j+1,k}$, dunque

$$\mu(A_k) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(E_{j,k})$$

per ogni $k \in J_m$. Dunque

$$\int f_j d\mu \geq \int_{\bigcup_{k=1}^m A_k} f_j d\mu = \sum_{k=1}^m \int_{A_k} f_j d\mu \geq \sum_{k=1}^m \int_{E_{j,k}} f_j d\mu \geq \sum_{k=1}^m c\alpha_k \mu(E_{j,k})$$

facendo tendere $j \rightarrow \infty$ si ottiene

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int f_j d\mu \geq c \sum_{k=1}^m \alpha_k \mu(A_k) = c \int \varphi d\mu$$

Se φ assume valore infinito su un insieme a misura nulla, ciò non ha effetti sull'integrazione e dunque la dimostrazione fatta resta valida. Se invece φ assume il valore $+\infty$ su un insieme di misura non nulla E , $\mu(E) > 0$, si ha allora $\int \varphi d\mu = +\infty$ e dunque f ha integrale infinito. Dato c arbitrario (ma finito) sia $E_j \doteq \{x \in E \mid f_j(x) > c\}$; gli E_j formano nuovamente una successione crescente di insiemi misurabili con unione E (infatti, ogni $E_j \subset E$, perciò $\bigcup E_j \subset E$; sia ora $x \in E$, allora $\lim f_j = \infty$, esiste un j talché $f_j(x) > c$ e $x \in \bigcup E_j$); si ha perciò

$$\int f_j d\mu \geq \int_{E_j} f_j d\mu \geq c\mu(E_j) \quad \text{da cui} \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \int f_j d\mu \geq c\mu(E)$$

(c.v.d.) per l'arbitrarietà di c si ha $\lim_{j \rightarrow \infty} \int f_j = +\infty$.

Siamo ora in grado di dimostrare il teorema della convergenza monotona di Beppo Levi

**Teorema
I.21 (della
convergenza
monotona o di
Beppo Levi)**

Sia f_j una successione monotona di funzioni integrabili. La successione converge quasi ovunque ad una funzione f integrabile a valori in $\mathbb{R}$ se e solo se la successione degli integrali $\{\int f_j d\mu\}$ è limitata; in tal caso vale anche

$$\int f d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int f_j d\mu.$$

Dimostrazione

Se f_j è crescente poniamo $g_j \doteq f_j - f_0$; altrimenti $g_j \doteq f_0 - f_j$. Siamo così ricondotti al caso di una successione crescente di funzioni misurabili positive. Per monotonia di g_j esiste il limite puntuale g (eventualmente a valori estesi) di g_j . Come sappiamo g è misurabile e positiva: dal teorema precedente si ha allora che

$$\int g d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int g_j d\mu$$

Ora, se la successione degli integrali è limitata, g ha integrale finito, perciò l'insieme sul quale g assume valore infinito è a misura nulla. g coincide quasi ovunque con una funzione integrabile (a integrale finito) a valori sulla retta reale (definita ad arbitrio su $g^{-1}(\{\infty\})$). Ne consegue che quasi ovunque esiste in $\mathbb{R}$ il limite puntuale di g_j .

Ora, quasi ovunque $g_j \rightarrow \bar{g}$ a valori in $\mathbb{R}$ e integrabile con integrale finito. D'altra parte continua a valere il fatto che $\lim_{j \rightarrow \infty} g_j = g$ a valori in $\overline{\mathbb{R}}$ e che

$$\int g d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int g_j d\mu$$

Ma $g = \bar{g}$ quasi ovunque, ne consegue che

$$\mathbb{R} \ni \int \bar{g} d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int g_j d\mu = \sup_j \int g_j d\mu$$

(c.v.d.) da cui la successione degli integrali è limitata.

I.3.2 Il lemma di Fatou

Il lemma di Fatou stabilisce la semicontinuità (sequenziale) superiore dell'integrale:

Lemma I.22
(di Fatou)

Se f_j è una successione di funzioni misurabili positive si ha

$$\int \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j d\mu \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int f_j d\mu$$

Dimostrazione

L'enunciato è corretto essendo il minimo limite definito ovunque (a valori sulla retta estesa) e misurabile. Definita la successione

$$f_{*m} \doteq \inf_{p \in \mathbb{N}} f_{m+p}$$

si ha

$$f \doteq \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j = \lim_{m \rightarrow \infty} f_{*m}$$

Come sappiamo f_{*m} è misurabile ed è inoltre positiva e crescente. Si ha poi che $f_{*m} \leq f_{m+p}$ per ogni $p \in \mathbb{N}$. Ne deriva che

$$\int f_{*m} d\mu \leq \int f_{m+p} d\mu \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

da cui si ottiene

$$\int f_{*m} d\mu \leq \inf_{p \in \mathbb{N}} \int f_{m+p} d\mu$$

Se passiamo al limite per $m \rightarrow \infty$, il secondo membro tende al minimo limite della successione degli integrali. Il primo membro, come notato è una successione crescente di funzioni misurabili e positive che tende puntualmente a f : per il teorema della convergenza monotona

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int f_{*m} d\mu = \int \lim_{m \rightarrow \infty} f_{*m} d\mu = \int f d\mu,$$

(c.v.d.) la tesi.

I.3.3 Il teorema della convergenza dominata di Lebesgue

L'ultimo teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale è dovuto a Lebesgue:

Teorema
I.23 (della
convergenza
dominata o
di Lebesgue)

Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni (a valori in $\mathbb{C}$) misurabili su X , tutte dominate (i.e. maggiorate in modulo) da una stessa funzione g positiva e con integrale finito, convergente quasi ovunque ad una funzione misurabile f . Allora f è integrabile con integrale finito e vale

$$\int f d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int f_j d\mu.$$

Inoltre si ha

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int |f - f_j| d\mu = 0.$$

Dimostrazione

Dall'ipotesi si ha che, quasi ovunque in X ,

$$|f_j| \leq g$$

con g integrabile a integrale finito. Ne consegue che tutte le f_j sono integrabili e così vale anche per f , visto che pure f è dominata da g . Introducendo parte reale e parte immaginaria, possiamo supporre che tutte le funzioni in gioco siano reali. Alterando f_j , f e g su un insieme di misura nulla, la qual cosa lascia invariati gli integrali, possiamo supporre che la convergenza

sia **ovunque** e che, ovunque, $-g \leq f_j \leq g$. Applichiamo il lemma di Fatou a $g - f_j \geq 0$ abbiamo

$$\int \liminf_{j \rightarrow \infty} (g - f_j) d\mu \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int (g - f_j) d\mu$$

Il primo membro è l'integrale di $g - f$, mentre il secondo è

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \int (g - f_j) d\mu = \int g d\mu - \limsup_{j \rightarrow \infty} \int f_j d\mu$$

perciò

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \int f_j d\mu \leq \int f d\mu$$

Se ora applichiamo il lemma di Fatou a $f_j + g \geq 0$ troviamo

$$\int \liminf_{j \rightarrow \infty} (g + f_j) d\mu \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int (g + f_j) d\mu$$

$$\int f d\mu \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int f_j d\mu$$

da cui troviamo

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \int f_j d\mu \leq \int f d\mu \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int f_j d\mu$$

perciò esiste il limite della successione degli integrali ed è eguale all'integrale del limite puntuale.

La seconda parte, si dimostra applicando la prima a $|f - f_j|$ che è convergente quasi ovunque (c.v.d.) a 0 ed è dominata da $2g$.

I.4 Misure prodotto: i teoremi di Fubini e Tonelli

I.4.1 Misura prodotto

Siano dati due spazi di misura completi $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$. Consideriamo l'insieme $X \times Y$. Se $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$ chiamiamo l'insieme $A \times B$ **rettangolo misurabile**. La famiglia $\mathcal{R}$ dei rettangoli misurabili non è né un'algebra né tantomeno una σ -algebra, tuttavia

(i) l'intersezione di elementi di $\mathcal{R}$ appartiene a $\mathcal{R}$, dato che

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D);$$

(ii) il complementare di un elemento di $\mathcal{R}$ è unione disgiunta di elementi di $\mathcal{R}$:

$$(A \times B)^c = (A^c \times B) \cup (A \times B^c) \cup (A^c \times B^c)$$

Si dice allora che $\mathcal{R}$ è una **semialgebra** di insiemi. Definiamo su $\mathcal{R}$ la funzione

$$\lambda(A \times B) = \mu(A) \nu(B)$$

Abbiamo allora il seguente

Lemma I.24 Sia $\{(A_n \times B_n)\}$ una successione di elementi disgiunti di $\mathcal{R}$ la cui unione sia $A \times B \in \mathcal{R}$. Allora si ha

$$\lambda(A \times B) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n \times B_n)$$

Dimostrazione Sia $x \in A$, per ogni $y \in B$ esiste un unico $n_y \in \mathbb{N}$ tale che $(x, y) \in A_{n_y} \times B_{n_y}$. Infatti, fissato y deve esistere almeno un indice n talché $(x, y) \in A_n \times B_n$, d'altra parte gli elementi della successione sono tutti disgiunti, perciò l'indice è unico $n_y \doteq n$. Ne consegue che, se $x \in A$

$$\{y \mid (x, y) \in A \times B\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{y \mid (x, y) \in A \times B_n\}$$

dove, per quanto detto, l'unione è disgiunta. Per addittività di ν abbiamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n) \chi_{A_n} = \nu(B) \chi_A$$

Dal teorema di Levi

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n) \chi_{A_n} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int \nu(B_n) \chi_{A_n} d\mu = \int \nu(B) \chi_A d\mu$$

cioè

$$(c.v.d.) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n) \mu(A_n) = \nu(B) \mu(A).$$

Lemma I.25 *Esiste un'unica misura $\bar{\lambda}$ sull'algebra $\mathcal{A}$ generata dalla famiglia $\mathcal{R}$ che estende λ .*

Dimostrazione $\mathcal{A}$ contiene l'insieme vuoto, e ogni suo elemento è unione finita disgiunta di elementi di $\mathcal{R}$. Definiamo allora

$$\bar{\lambda}(A) \doteq \sum_{i=1}^n \lambda(R_i)$$

dove $A = R_1 \cup \dots \cup R_n$ con $R_i \in \mathcal{R}$. Dobbiamo vedere che la definizione è ben posta, sicché la $\bar{\lambda}$ è unica. Se $A = S_1 \cup \dots \cup S_m$ abbiamo $R_j = R_j \cap A = (R_j \cap S_1) + \dots + (R_j \cap S_m)$ sicché

$$\bar{\lambda}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda(R_i) = \sum_{i,j} \lambda(R_i \cap S_j)$$

da cui si ha l'indipendenza dalla scomposizione di A . Ancora per il lemma di sopra si ha che
(c.v.d.) $\bar{\lambda}$ è una misura su un'algebra.

Visto che abbiamo prodotto una misura su una σ -algebra, per il teorema di Carathéodory, abbiamo una misura completa sulla σ -algebra $\mathcal{S}$ generata da $\mathcal{A}$. La misura che abbiamo costruito si chiama **misura prodotto** di μ e ν e si indica con $\mu \otimes \nu$. Come sappiamo essa è finita (o σ -finita) se lo sono μ e ν .

I.4.2 Il teorema di Fubini

Prima di giungere al teorema di Fubini ci occorrono dei risultati preliminari.

Lemma I.26 *Se $\bar{\mu}$ è una misura su una algebra $\mathcal{A}$ e μ^* è la misura esterna da essa indotta, allora per ogni $E \subset X$ a misura finita e $\varepsilon > 0$, esiste $A \in \mathcal{A}_\sigma$ (l'insieme delle unioni numerabili di elementi di $\mathcal{A}$) tale che $E \subset A$ e*

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$$

ed esiste un $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ (l'insieme delle intersezioni numerabili di elementi di $\mathcal{A}_\sigma$) tale che $E \subset B$ e

$$\mu^*(E) = \mu^*(B).$$

Dimostrazione La prima parte del lemma è stata dimostrata nel corso della dimostrazione del teorema di estensione. Veniamo al secondo enunciato. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, consideriamo $A_n \in \mathcal{A}$, con $E \subset A_n$ e $\mu^*(A_n) \leq \mu^*(E) + 1/n$. Poniamo adesso $B \doteq \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Ovviamente $E \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = B$ e $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$. Infine,

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(B) \leq \mu^*(A_n) \leq \mu^*(E) + \frac{1}{n}$$

(c.v.d.) Per l'arbitrarietà di n , la tesi.

Sia ora $E \subset X \times Y$ e definiamo le **sezioni** di E in x e in y :

$$E_x \doteq \{y \in Y \mid (x, y) \in E\}; \quad E_y \doteq \{x \in X \mid (x, y) \in E\}$$

Sia $E_x \in \mathcal{R}_{\sigma\delta}$ allora è ν -misurabile. Se $E \in \mathcal{R}$ questo è ovvio. Se ora $\mathcal{R}_\sigma \ni E = \bigcup E_n$ allora

$$\chi_{E_x}(y) = \chi_E(x, y) = \sup_n \chi_{E_n}(x, y) = \sup_n \chi_{E_{nx}}(y)$$

e quest'ultima funzione è misurabile come inferiore di funzioni misurabili. Se ora $\mathcal{R}_{\sigma\delta} \ni E = \bigcap E_n$ (ora $E_n \in \mathcal{R}_\sigma$) si procede come sopra considerando

$$\chi_{E_x}(y) = \chi_E(x, y) = \inf_n \chi_{E_n}(x, y) = \inf_n \chi_{E_{nx}}(y).$$

Lemma I.27 Se $E \in \mathcal{R}_{\sigma\delta}$ e $\mu \otimes \nu(E) < \infty$ allora la funzione $g(x) = \nu(E_x)$ è misurabile in $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e

$$\int g(x) d\mu = \mu \otimes \nu(E)$$

Dimostrazione Se $E \in \mathcal{R}$ il lemma è banale, infatti, $E = A \times B$ e $g(x) = \nu(B) \chi_A(x)$

$$\int g(x) d\mu = \nu(B) \int \chi_A(x) d\mu = \mu(A) \nu(B) = \mu \otimes \nu(E)$$

Sia ora E l'unione degli elementi disgiunti di una successione $\{E_n\} \subset \mathcal{R}$. Poniamo

$$g_n(x) = \nu(E_{nx})$$

per quanto visto nel lemma I.24, vale

$$g(x) = \sum_n g_n(x)$$

Siccome le g_n sono misurabili, g è misurabile e per il teorema della convergenza monotona

$$\int g(x) d\mu = \sum_n \mu \otimes \nu(E_n) = \mu \otimes \nu(E)$$

Perciò il lemma è vero in $\mathcal{R}_\sigma$. Infine, se $E \in \mathcal{R}_{\sigma\delta}$ ha misura finita, allora esiste una successione $\{E_n\} \subset \mathcal{R}_\sigma$ con $E = \bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n$. Possiamo sempre supporre che gli E_n siano incapsulati e che E_1 abbia misura finita (lemma precedente). Poniamo

$$g_n(x) = \nu(E_{nx})$$

Per quanto visto

$$\int g_1 d\mu = \mu \otimes \nu(E_{1x}) < \infty$$

Si ha allora $g_1 < \infty$ quasi ovunque: se dunque x è tale che $g_1(x) < \infty$ si ha

$$g(x) = \nu(E_x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(E_{nx}) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$$

Allora g è misurabile e $g_n(x) \leq g_1(x)$, per il teorema di Lebesgue, abbiamo

$$(c.v.d.) \quad \int g d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu \otimes \nu(E_n) = \mu \otimes \nu(E).$$

Se indichiamo con $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ l'insieme delle funzioni integrabili a valori complessi identificando le funzioni eguali a parte un insieme di misura nulla, giungiamo al seguente

Teorema I.28
(di Fubini)

Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ sono spazi completi di misura e $f \in L^1(X \times Y, \mu \otimes \nu)$ allora

(i) per quasi ogni x la funzione $f_x(y) \doteq f(x, y)$ appartiene a $L^1(Y, \nu)$ e

$$\int_Y f_x(y) d\nu(y) \in L^1(X, \mu);$$

(ii) per quasi ogni y la funzione $f_y(x) \doteq f(x, y)$ appartiene a $L^1(X, \mu)$ e

$$\int_X f_y(x) d\mu(x) \in L^1(Y, \nu);$$

(iii) infine,

$$\int_Y d\nu(y) \int_X f_y(x) d\mu(x) = \int_X d\mu(x) \int_Y f_x(y) d\nu(y) = \int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \otimes \nu)$$

Dimostrazione Basta dimostrare (i) e l'ultima eguaglianza della (iii). Inoltre basta limitarsi a funzioni positive, il teorema varrà poi per combinazioni lineari e perciò per funzioni qualsiasi.

Dimostriamo la tesi nel caso di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili di misura finita. Sia E l'insieme che andiamo a considerare con $\mu \otimes \nu(E) < \infty$. Per il lemma I.26 esiste un insieme $F \in \mathcal{R}_{\sigma\delta}$ contenente E tale che $\mu \otimes \nu(E) = \mu \otimes \nu(F)$. L'insieme $G \doteq F \setminus E$ è misurabile e perciò

$$\mu \otimes \nu(F) = \mu \otimes \nu(E) + \mu \otimes \nu(G)$$

da cui G ha misura nulla. A sua volta, esiste $H \in \mathcal{R}_{\sigma\delta}$ contenente G e con $\mu \otimes \nu(H) = \mu \otimes \nu(G) = 0$. Dunque, per il lemma precedente $\nu(H_x) = 0$ per quasi ogni x . Questo comporta, per completezza, che $\nu(G_x) = 0$. Quindi, quasi ovunque,

$$g(x) = \nu(E_x) = \nu(F_x)$$

e, ancora, per il lemma precedente, g è misurabile e

$$\int g(x) d\mu = \mu \otimes \nu(F) = \mu \otimes \nu(E)$$

Ne segue che

$$\int g(x) d\mu = \int_X d\mu(x) \int_Y \chi_{E_x}(y) d\nu(y) = \int_{X \times Y} \chi_E(x, y) d(\mu \otimes \nu).$$

Il teorema è allora dimostrato per funzioni caratteristiche di insiemi misurabili di misura finita, perciò per linearità, per funzioni semplici nulle al di fuori di un insieme di misura finita. Ma per il teorema I.14 abbiamo che ogni f non negativa integrabile è limite puntuale di una successione crescente di funzioni semplici: $f(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x, y)$. Notato che le φ_n hanno integrale finito essendo dominate da f (questo comporta che sono nulle al di fuori di insiemi di misura finita), e che $f_x(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{nx}(y)$, per il teorema di Levi, si ha

$$\int_Y f_x(y) d\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Y \varphi_{nx}(y) d\nu$$

Ne consegue che l'integrale è una funzione misurabile della x (limite di una successione di funzioni misurabili), ancora per Levi

$$(c.v.d.) \quad \int_X d\mu \int_Y f_x(y) d\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X d\mu \int_Y \varphi_{nx}(y) d\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} \varphi_n d(\mu \otimes \nu) = \int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu)$$

I.4.3 Il teorema di Tonelli

Nel teorema di Fubini, usiamo l'ipotesi di integrabilità di f una volta sola, per mostrare che le funzioni semplici φ_n hanno supporto a misura finita. A questo scopo, se supponiamo che gli spazi di misura siano σ -finiti, abbiamo in forza del solo teorema I.14, che le φ_n sono nulle al di fuori di un insieme a misura finita e questo ci consente di richiedere la sola misurabilità per f .

Teorema I.29 (di Tonelli)

Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ sono spazi completi e σ -finiti di misura e f è una funzione misurabile definita su $X \times Y$, allora

(i) per quasi ogni x la funzione $f_x(y) \doteq f(x, y)$ è misurabile e

$$\int_Y f_x(y) d\nu(y) \in L^1(X, \mu);$$

(ii) per quasi ogni y la funzione $f_y(x) \doteq f(x, y)$ è misurabile e

$$\int_X f_y(x) d\mu(x) \in L^1(Y, \nu);$$

(iii) infine,

$$\int_Y d\nu(y) \int_X f_y(x) d\mu(x) = \int_X d\mu(x) \int_Y f_x(y) d\nu(y) = \int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \otimes \nu)$$

1.5 Gli spazi L^p

1.5.1 Definizione degli spazi $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$

Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura (supponiamo anche se adesso non sarebbe strettamente necessario che la misura sia σ -finita e completa) e sia $1 \leq p \leq \infty$. Cominciamo a considerare p finito. Allora lo spazio $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ è costituito dalle classi di equivalenza di funzioni misurabili $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ (la relazione di equivalenza è l'eguaglianza quasi ovunque), tali che

$$\int_X |f|^p d\mu < \infty.$$

Linearità degli spazi $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$

$L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio vettoriale, definite le operazioni di somma e prodotto per scalare su un elemento rappresentativo di ciascuna classe (la definizione è ovviamente ben posta).

Infatti, se $[x], [y] \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $[x + \alpha y] \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, poiché

$$|x(s) + y(s)|^p \leq 2^p (|x(s)|^p + |y(s)|^p).$$

Infatti, se $a, b \in \mathbb{C}$

$$|a + b| \leq |a| + |b| \leq 2 \max\{|a|, |b|\}$$

da cui

$$|a + b|^p \leq 2^p \max\{|a|^p, |b|^p\} \leq 2^p (|a|^p + |b|^p)$$

Norma $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$

Su $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ è anche possibile definire la norma L^p

$$\|[x]\|_{L^p} = \left(\int_S |x(s)|^p d\mu \right)^{1/p}$$

(che, ancora, si calcola su un elemento qualsiasi di ciascuna classe) essa, infatti, è tale che

(i) per ogni $[x] \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ vale $\|x\| \geq 0$, inoltre $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$ **quasi ovunque** in S , perciò $x \in [0]$;

(ii) per ogni $[x] \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, vale $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;

(iii) per ogni $[x], [y] \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ vale la **diseguaglianza triangolare** $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;

Dimostrare la diseguaglianza triangolare non è ovvio se $p > 1$. Ci occorrono dei risultati preliminari. Prima di procedere avvertiamo che, con abuso di notazione e di linguaggio, confonderemo, come è uso, le classi $[f] \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ con le funzioni $f \in [f]$.

Lemma I.30
(diseguaglianza di Young)

Se $1 < p < \infty$ e q , coniugato di p , è tale che

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

allora, se $a, b \in [0, +\infty[$, vale

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

dove l'eguaglianza è soddisfatta se e solo se $a = b^{1/(p-1)}$.

Dimostrazione

Definita la funzione

$$f(c) \doteq \frac{c^p}{p} + \frac{1}{q} - c, \quad c \in [0, +\infty[$$

essa ha un unico minimo, 0, che è ottenuto per $c = 1$, sicché posto $c = ab^{-1/(p-1)}$

$$\frac{a^p}{p} b^{-p/(p-1)} + \frac{1}{q} \geq ab^{-1/(p-1)}$$

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^{p/(p-1)}}{q} \geq ab$$

(c.v.d.) essendo $p/(p-1) = q$.

Lemma I.31
(diseguaglianza di Hölder)

Se $x \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $y \in L^q(X, \mathcal{A}, \mu)$ con p e q coniugati,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

allora

$$\int_X |x(s)y(s)| d\mu \leq \left(\int_X |x(s)|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X |y(s)|^q d\mu \right)^{1/q}$$

Dimostrazione Assumiamo che $A \doteq \|x\|_{L^p}$ e $B \doteq \|y\|_{L^q}$ sono ambedue diverse da 0, altrimenti la tesi è ovvia essendo q.o. $x = 0$ e $y = 0$. Prendiamo $a \doteq |x|/A$ e $b \doteq |y|/B$

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

e integriamo ottenendo la tesi,

$$(c.v.d.) \quad \frac{\int_X |x(s)y(s)| d\mu}{AB} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Infine dimostriamo la disuguaglianza triangolare

Teorema I.32
(disuguaglianza di Minkowski)

Se $x, y \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ allora

$$\left(\int_X |x(s) + y(s)|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int_X |x(s)|^p d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_X |y(s)|^p d\mu \right)^{1/p}$$

Dimostrazione Abbiamo

$$|x + y|^p = |x + y|^{p-1} |x + y| \leq |x + y|^{p-1} (|x| + |y|)$$

sfruttiamo questo e la disuguaglianza di Hölder per scrivere

$$\begin{aligned} \int_X |x(s) + y(s)|^p d\mu &\leq \int_X |x(s) + y(s)|^{p-1} |x(s)| d\mu + \int_X |x(s) + y(s)|^{p-1} |y(s)| d\mu \leq \\ &\left(\int_X |x(s) + y(s)|^{(p-1)q} d\mu \right)^{1/q} \left(\int_X |x(s)|^p d\mu \right)^{1/p} \\ &+ \left(\int_X |x(s) + y(s)|^{(p-1)q} d\mu \right)^{1/q} \left(\int_X |y(s)|^p d\mu \right)^{1/p} \end{aligned}$$

(c.v.d.) da cui, essendo $1 - 1/q = 1/p$ si ottiene la disuguaglianza cercata.

Lo spazio $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ Lo spazio $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ è l'unico spazio $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ per cui la norma può essere considerata come indotta da un prodotto scalare. Si consideri infatti

$$(x, y) \doteq \int_S x^* y d\mu$$

la cui norma è

$$\|x\| = (x, x)^{1/2} = \left(\int_S |x|^2 d\mu \right)^{1/2} = \|x\|_{L^2}$$

Dunque, lo spazio $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio pre-hilbertiano. Gli altri spazi $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ sono spazi normati. Vedremo tra poco che gli spazi $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ sono di Banach, perciò sono completi. Ne consegue che lo spazio $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio di Hilbert (ovviamente a dimensione infinita).

Convergenza uniforme ed L^p

Alcune considerazioni sulla convergenza. Sia x_n una successione di funzioni continue in X . Se supponiamo X compatto di misura finita, allora $x_n \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Se x_n converge uniformemente a x_∞ allora la convergenza avviene anche in norma L^p , infatti

$$\begin{aligned} \left(\int_X |x_\infty - x_n|^p d\mu \right)^{1/p} &\leq \left(\int_X \left(\max_X |x_\infty - x_n| \right)^p d\mu \right)^{1/p} \leq \\ \mu(X) \max_X |x_\infty - x_n| &= \mu(X) \|x_\infty - x_n\|_\infty \end{aligned}$$

Convergenza L^2 ed L^1 Siccome poi $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ è pre-hilbertiano vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz e dunque

$$|(|x|, 1)| = \int_S |x| d\mu = \|x\|_{L^1} \leq \|x\|_{L^2}$$

perciò la convergenza L^2 implica la convergenza L^1 e inoltre $L^2(S) \subset L^1(S)$. Facile vedere che non vale il contrario, basta prendere $1/\sqrt{x}$ in $[0, 1]$.

1.5.2 Completezza degli spazi $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$

Richiamiamo alcuni risultati sugli spazi completi.

Lemma I.33 *Una successione di Cauchy, avente una sottosuccessione convergente, è convergente.*

Dimostrazione Sia $\{x_n\}$ di Cauchy e sia $\{x_{k_n}\}$ una sottosuccessione, mappata dalla $k_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ crescente, convergente ad a . Fissato $\varepsilon > 0$ sia $\mu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\|x_j - x_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

se $j, n \geq \mu$. Sia poi $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\|x_{k_m} - a\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

se $m \geq \nu$. Fissiamo $\lambda \doteq \max\{\mu, \nu\}$, allora $m \geq \nu$ e $k_m \geq m \geq \mu$, perciò, scelto $n \geq \lambda$, valgono contemporaneamente

$$\begin{aligned} \|x_{k_m} - x_n\| &< \frac{\varepsilon}{2} \\ \|x_{k_m} - a\| &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

dalla disuguaglianza triangolare

$$\|x_n - a\| \leq \|x_{k_m} - x_n\| + \|x_{k_m} - a\| < \varepsilon$$

(c.v.d.) sicché $x_n \rightarrow a$.

Lemma I.34 *Ogni successione di Cauchy ha una sottosuccessione a variazione finita.*

Dimostrazione Sia $\varepsilon_j \doteq 1/2^{j+1}$, sicché

$$\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j < \infty$$

Presa la assegnata x_n , definiamo la seguente successione in $\mathbb{N}$

$$\nu'(i) \doteq \min\{m \in \mathbb{N} \mid \sup\{\|x_{k+m} - x_m\|\} < \varepsilon_i\},$$

la definizione data è ben posta perché

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup\{\|x_{k+m} - x_m\|\} = 0$$

essendo la x_n di Cauchy.

Tramite la ν' definiamo

$$\nu(j) \doteq \max\{\nu'(i) \mid i \leq j\}$$

quest'ultima è crescente e definisce una sottosuccessione della x_n . Ora la quantità

$$\|x_{\nu(m+1)} - x_{\nu(m)}\| \leq \sup\{\|x_{k+m} - x_m\|\} < \varepsilon_m$$

(c.v.d.) perciò la sottosuccessione costruita è a variazione finita.

Teorema I.35 $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio di Banach, se $p \leq 1 < \infty$.

Dimostrazione Sia $\{x_n\} \subset L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ di Cauchy. Esiste allora la mappa n_k tale che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \infty$$

Definiamo ora la successione

$$y_t(s) = |x_{n_1}(s)| + \sum_{k=1}^t |x_{n_{k+1}}(s) - x_{n_k}(s)|$$

perciò, dalla disuguaglianza triangolare

$$\|y_t\| \leq \|x_{n_1}(s)\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}}(s) - x_{n_k}(s)\|$$

da cui segue che $y_t \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. La successione $y_t(s)$ è monotona crescente e positiva, così sarà $(y_t(s))^p$ che è pure sommabile. Grazie al teorema di Beppo Levi possiamo concludere che quasi ovunque in S esiste il limite puntuale di $y_t(s)$ e, inoltre,

$$\int_X \lim_{t \rightarrow \infty} (y_t(s))^p d\mu = \lim_{t \rightarrow \infty} \|y_t\|^p \leq \left(\|x_{n_1}(s)\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}}(s) - x_{n_k}(s)\| \right)^p$$

Si ha dunque che $y(s) \doteq \lim_{t \rightarrow \infty} (y_t(s)) \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Consideriamo ora la successione x_{n_t} , siccome

$$x_{n_t}(s) = x_{n_1}(s) + \sum_{k=1}^t (x_{n_{k+1}}(s) - x_{n_k}(s))$$

essa converge quasi ovunque, poichè la serie a secondo membro è assolutamente convergente (essendo $y_t(s)$ convergente). Abbiamo che la successione in t

$$|x_{n_t}(s) - x_{n_k}(s)|^p$$

è data da funzioni sommabili e positive. Applicando quindi il lemma di Fatou, otteniamo

$$\begin{aligned} \|x_{\infty} - x_{n_k}\|^p &= \int_X \lim_{t \rightarrow \infty} |x_{n_t}(s) - x_{n_k}(s)|^p d\mu \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \|x_{n_t} - x_{n_k}\|^p \leq \\ &\leq \left(\sum_{m=k}^{\infty} \|x_{n_{m+1}}(s) - x_{n_m}(s)\| \right)^p \end{aligned}$$

Passando al limite per $k \rightarrow \infty$, siccome il secondo membro va a zero, si ricava che x_{n_k} converge a x_{∞} in norma L^p . Inoltre la disuguaglianza provata mostra che x_{∞} appartiene allo spazio $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Dal secondo lemma di sopra si conclude che x_n converge in norma L^p a $x_{\infty} \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Abbiamo così concluso.

Per completezza dell'esposizione, giustifichiamo gli (ovvi!) passaggi di cui sopra

$$\|x_{n_t} - x_{n_k}\| \leq \sum_{m=k}^{t-1} \|x_{n_{m+1}}(s) - x_{n_m}(s)\|$$

da cui elevando alla p e passando al limite inferiore in t di ambo i membri si ottiene l'ultima disuguaglianza scritta. Per quello che riguarda il passaggio al limite per $k \rightarrow \infty$ notiamo che se $b = \sum a_m$ si ha

$$(c.v.d.) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=k}^{\infty} a_m = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(b - \sum_{m=1}^{k-1} a_m \right) = b - b = 0.$$

Incidentalmente abbiamo provato che

Corollario I.36 Una successione di Cauchy $\{x_n\}$ a valori in uno spazio $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ contiene una sottosuccessione tale che esiste quasi ovunque $x_{\infty}(s) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}(s)$, $x_{\infty} \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $x_n \rightarrow x_{\infty}$ in norma L^p .

1.5.3 Lo spazio $L^{\infty}(X, \mathcal{A}, \mu)$

**Funzioni
essenzialmente
limitate**

Una funzione misurabile $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ si dice **essenzialmente limitata** se esiste $K > 0$ tale che

$$\mu\{s \in X \mid |f(s)| > K\} = 0$$

Un tale K è detto **maggiorante essenziale**. Lo spazio $L^{\infty}(X, \mathcal{A}, \mu)$ è lo spazio delle classi di equivalenza di funzioni misurabili essenzialmente limitate. Anche per $L^{\infty}(X, \mathcal{A}, \mu)$ adotteremo

la convenzione di chiamare con f la classe di equivalenza cui f appartiene.

Linearità di $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ Evidentemente $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio vettoriale: siano f e g in $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$, allora esistono K_f e K_g tali che fuori da A_f e A_g (di misura nulla) $|f| \leq K_f$ e $|g| \leq K_g$, ora

$$|f + g| \leq |f| + |g| \leq K_f + K_g, \text{ per } s \in A_f \cup A_g$$

ma per subadditività $\mu(A_f \cup A_g) = 0$, da cui $f + g \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$. Con un analogo ragionamento si ottiene che $f \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) \Rightarrow \lambda f \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Superiore essenziale $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ può essere normato da

$$\|f\|_\infty \doteq \inf \{K \mid K \text{ è maggiorante essenziale di } f\}$$

La norma di f si dice anche **superiore essenziale** e si indica con $\text{ess sup } |f|$. Vediamo la disuguaglianza triangolare. Fuori da A_f (intersezione di insiemi a misura nulla, perciò sottoinsiemi di insiemi a misura nulla, perciò a misura nulla) di misura nulla vale $|f| \leq \text{ess sup } |f|$ e fuori da A_g di misura nulla $|g| \leq \text{ess sup } |g|$ dunque

$$|f + g| \leq |f| + |g| \leq \text{ess sup } |f| + \text{ess sup } |g|$$

perciò, per le proprietà dell'inferiore

$$\text{ess sup } |f + g| \leq \text{ess sup } |f| + \text{ess sup } |g|$$

Veniamo a dimostrare la completezza di $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$

Teorema I.37 *Lo spazio $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ è completo.*

Dimostrazione Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy in $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$; sia $A_k \doteq \{s \in X \mid |x_k(s)| \geq \|x_k\|_\infty\}$ e sia $B_{n,m} \doteq \{s \in X \mid |x_n(s) - x_m(s)| \geq \|x_n - x_m\|_\infty\}$. Ora, gli A_k e i $B_{n,m}$ sono insiemi misurabili di misura nulla, perciò la loro unione E ha misura nulla. Nel complementare di E la successione data è di Cauchy rispetto alla norma uniforme per costruzione ed è formata da funzioni limitate a valori in uno spazio completo ($\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$). Come sappiamo da Analisi II per Fisici, questo implica che la successione converge uniformemente a una funzione limitata sul complementare di E . Se estendiamo la funzione limite a X , ponendola nulla fuori da E^c , otteniamo un elemento $x_\infty \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ cui la successione converge in norma L^∞ . Infatti, se

$$\sup_{s \in E^c} |x_\infty(s) - x_n(s)| = \lambda_n$$

allora λ_n è un maggiorante essenziale di $x_\infty(s) - x_n(s)$, dunque

$$\text{ess sup } |x_\infty(s) - x_n(s)| < \lambda_n$$

(c.v.d.) siccome per $n \rightarrow \infty$ $\lambda_n \rightarrow 0$, si ha la tesi.

Presa x_n di Cauchy in $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ essa converge quasi ovunque puntualmente (uniformemente) a una funzione limitata che è il limite in norma L^∞ di x_n .

Possiamo allora ricapitolare

Teorema I.38
(di completezza
degli spazi
 $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$)

Lo spazio $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, è completo.

Corollario I.39

Una successione di Cauchy $\{x_n\}$ a valori in uno spazio $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, contiene una sottosuccessione tale che esiste quasi ovunque $x_\infty(s) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}(s)$, $x_\infty \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $x_n \rightarrow x_\infty$ in norma L^p .

1.5.4 Il lemma di Urysohn

Proposizione I.40 *Uno spazio compatto X è normale, nel senso che, per ogni coppia di chiusi disgiunti F_1 e F_2 , esistono due aperti disgiunti G_1 e G_2 , tali che $F_1 \subset G_1$ e $F_2 \subset G_2$.*

Dimostrazione Siano dati due punti x, y appartenenti, rispettivamente, a F_1 e F_2 . Allora esistono due aperti disgiunti $G(x, y)$ e $G(y, x)$ per cui $x \in G(x, y)$ e $y \in G(y, x)$. Al variare di y in F_2 la famiglia

$G(y, x)$ ricopre F_2 . D'altra parte F_2 è compatto essendo sottoinsieme chiuso di un compatto, perciò, fissato x , esiste un numero finito $n(x)$ di insiemi $G(y_i, x)$, $i \leq n(x)$, che ricoprono F_2 . Ne consegue che

$$F_2 \subset G_x \doteq \bigcup_{i=1}^{n(x)} G(y_i, x)$$

Consideriamo inoltre

$$G(x) \doteq \bigcap_{i=1}^{n(x)} G(x, y_i)$$

che è aperto e disgiunto da G_x . Ora, anche F_1 è completo perciò esiste un numero finito di punti $x_1, \dots, x_k$ tali che

$$F_1 \subset G_1 \doteq \bigcup_{i=1}^k G(x_i).$$

Per la tesi, basterà scegliere

$$(c.v.d.) \quad G_2 \doteq \bigcap_{i=1}^k G_{x_i}.$$

Dato $A \subset X$, X spazio topologico, denoteremo con A^a la **chiusura** di A , ossia l'intersezione di tutti i chiusi contenenti A (l'apice a sta per *abgeschlossene Hülle*).

Corollario I.41 *Uno spazio normale X è regolare, nel senso che, per ogni aperto non vuoto G'_1 , esiste un aperto non vuoto G'_2 talché $(G'_2)^a \subset G'_1$.*

Dimostrazione Si prenda $F_1 = (G'_1)^c$ e $F_2 = \{x\} \in G'_1$. Allora per G'_2 basta prendere l'insieme G_2 costruito nella proposizione precedente, con ciò avremo l'esistenza di un chiuso tra G'_2 e G'_1 di modo che

$$(G'_2)^a \subset G'_1.$$

L'esistenza del chiuso si mostra così: esiste G_1 aperto tale che $(G'_1)^c \subset G_1$, allora $A \doteq (G_1)^c \subset G'_1$ ed A è chiuso. Inoltre, G_2 è un aperto disgiunto da G_1 e contenente un punto di G'_1 , x . Allora $x \notin G_1$ e perciò $x \in A$, ma allora

$$A \cap G_2 \neq \emptyset$$

$$A^c \cap G_2 = \emptyset$$

(c.v.d.) dunque $G_2 = G'_2 \subset A \subset G'_1$.

Corollario I.42 *Sia X uno spazio normale e siano $A \subset B$ due aperti in X . Allora esiste sempre un aperto G tale che*

$$A^a \subset G \subset G^a \subset B$$

Dimostrazione Sia $F_1 = A^a$ e sia $F_2 = B^c$, allora F_1 e F_2 sono nelle ipotesi della proposizione precedente ed esistono gli aperti disgiunti G_1 e G_2 contenenti A^a e B^c . Ora, $G_2^c \subset B$ e G_1^c interseca G_2 , poiché $G_1^c \subset A^c$, $B^c \subset A^c$ con $B^c \subset G_2$. Ma allora,

$$G_1^c \cap G_2 \neq \emptyset$$

$$G_1 \cap G_2^c = \emptyset$$

da cui $G_1 \subset G_2^c \subset B$, esistendo un chiuso tra G_1 e B

(c.v.d.) $A \subset G_1 \subset (G_1)^a \subset B$

Lemma I.43
(di Urysohn)

Siano A e B chiusi disgiunti in uno spazio topologico normale. Allora esiste una funzione a valori reali continua in X tale che

$$\begin{aligned} f(X) &= [0, 1]; \\ f(A) &= \{0\}, f(B) = \{1\}. \end{aligned}$$

Dimostrazione Assegniamo a ogni numero razionale del tipo $r = k/2^n$, con $k \in \{0, 1, \dots, 2^n\}$, un aperto $G(r)$ tale che

- (i) $A \subset G(0)$ e $B = (G(1))^c$;
- (ii) $(G(r))^a \subset G(r')$ se $r < r'$.

Conduciamo la dimostrazione dell'esistenza di tali insiemi per induzione su n . Per $n = 0$, dalla normalità di X , si ha l'esistenza di due aperti disgiunti G_0 e G_1 tali che $A \subset G_0$ e $B \subset G_1$. Dobbiamo solo porre $G_0 = G(0)$.

Supponiamo di aver costruito $G(r)$ per r della forma $k/2^{n-1}$. Sia k un intero dispari. Siccome $(k-1)/2^n$ e $(k+1)/2^n$ sono del tipo $k'/2^{n-1}$ con $0 \leq k' \leq 2^{n-1}$, abbiamo che

$$G\left(\frac{k-1}{2^n}\right) \subset G\left(\frac{k+1}{2^n}\right).$$

Per la normalità di X , esiste un aperto G tale che

$$\begin{aligned} \left(G\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right)^a &\subset G \\ G^a &\subset G\left(\frac{k+1}{2^n}\right) \end{aligned}$$

Basterà porre $G(k/2^n) = G$ per completare l'induzione.

Definiamo $f(x)$ come segue

$$f(x) = 0, x \in G(0), \text{ e } f(x) = \sup_{x \in G(r)} r \text{ se } x \in (G(0))^c$$

da cui $f(A) = \{0\}$ e $f(B) = \{1\}$. Passiamo alla continuità di f . Sia $x_0 \in X$ e sia n un intero positivo.

(c.v.d.)

1.5.5 Teoremi di densità

Cominciamo con il seguente semplice

Teorema I.44 *L'insieme Σ delle funzioni semplici di $(X, \mathcal{A}, \mu)$ a supporto in un insieme di misura finita è denso in $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.*

Dimostrazione Anzitutto, notiamo che possiamo limitarci a dimostrare il teorema per il caso di funzioni positive (usando parte positiva, negativa, reale e immaginaria si conclude il teorema). Ovviamente, poi, $\Sigma \subset L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Ora, ogni funzione positiva $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ si approssima con una successione crescente di funzioni semplici dominate da f a supporto in un insieme di misura finita (teorema I.14). Dunque, esiste $\varphi_n \in \Sigma$, tale che $0 \leq f - \varphi_n \leq f$, allora

$$|f - \varphi_n|^p \leq f^p$$

quindi, dal teorema di Lebesgue,

$$(c.v.d.) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \varphi_n\|_{L^p}^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f - \varphi_n|^p d\mu = \int_X \left(\lim_{n \rightarrow \infty} |f - \varphi_n| \right)^p d\mu = 0.$$

Sia ora X uno spazio di Hausdorff localmente compatto, $\mathcal{A}$ una σ -algebra contenente i boreliani e μ una misura su X .

Vogliamo ora approssimare ogni elemento di Σ con una funzione semplice che sia generata da funzioni caratteristiche di insiemi compatti. Per far questo dobbiamo supporre che la misura μ sia **regolare**. Allora dato l'insieme E misurabile di misura finita si trova per ogni $\varepsilon > 0$ fissato, un compatto $K_\varepsilon \subset E$, talché $\mu(E \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$. Allora

$$\|\chi_E - \chi_{K_\varepsilon}\|_{L^p} = \mu^{1/p}(E \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon^{1/p}$$

ma $p \geq 1$, sicché ogni funzione caratteristica di insiemi misurabili si approssima con la funzione caratteristica di un compatto. Dunque, ogni funzione in Σ (combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche) si approssima con una funzione semplice generata da funzioni caratteristiche di compatti.

Lemma I.45 *Per ogni $1 \leq p < \infty$, se μ è regolare, ogni funzione semplice non nulla su un insieme a misura finita è approssimabile in norma L^p con una funzione semplice che sia combinazione lineare di funzioni caratteristiche su insiemi compatti. Σ_c è denso in Σ*

Se adesso dimostriamo che ogni funzione semplice in Σ_c si approssima con una funzione continua a supporto compatto, abbiamo la densità di $\mathcal{C}_c(X)$ in $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Per vedere quest'ultima cosa, ci basta dimostrare che ogni funzione caratteristica su un compatto si approssima con una continua a supporto compatto. A questo scopo ci occorre il lemma di Urysohn (che vale perché se X è di Hausdorff e localmente compatto, allora è normale, vedi **Singer-Thorpe**, pagina 53). Infatti, sia K compatto e consideriamo χ_K . Per regolarità della misura, per ogni $\varepsilon > 0$, troviamo un aperto A contenente K , tale che $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$. Ora, consideriamo i due chiusi disgiunti A^c e K . Per il lemma di Urysohn troviamo una funzione continua g a valori in $[0, 1]$ che vale 1 su K e 0 in A^c . g differirà da χ_K solo su $A \setminus K$ allora

$$\|g - \chi_K\|_{L^p} = \left(\int_{A \setminus K} |g|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \mu^{1/p}(A \setminus K) < \varepsilon^{1/p}$$

Teorema I.46
(di densità
di $\mathcal{C}_c$ in L^p)

Sia $1 \leq p < \infty$, e consideriamo lo spazio L^p su uno spazio di Hausdorff localmente compatto X , dotato della σ -algebra contenente i boreliani $\mathcal{A}$ e della misura regolare μ . Allora l'insieme delle funzioni continue a supporto compatto $\mathcal{C}_c(X)$ è denso in $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.

I.5.6 Spazi $\ell^p(\mathbb{C})$

Lo spazio $\ell^p(\mathbb{C})$, $1 \leq p < +\infty$ contiene le successioni a valori in $\mathbb{C}$ tali che

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty$$

Ora, posto $X \doteq \mathbb{N}$, $\mathcal{A} \doteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ e $\mu(E) \doteq \#E$, è facile vedere che $\ell^p(\mathbb{C}) = L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \#)$ e che

$$\int a_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Lo spazio ℓ^∞ è invece costituito dalle successioni limitate ed è normato dal sup. La norma sugli spazi ℓ^p è invece

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p}$$

Ne consegue che il teorema di completezza dimostrato prima si estende agli spazi ℓ^p .

I.6 Spazi localmente compatti

In questa sezione ci occuperemo dell'integrazione sugli spazi topologici localmente compatti. D'ora in avanti, con X indicheremo uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto. Prima di procedere ci occorre un corollario al lemma di Urysohn

Corollario I.47 *Sia X uno spazio di Hausdorff localmente compatto e sia K un suo sottoinsieme compatto. Allora esiste una funzione continua g su X che vale 1 su K ed è nulla al di fuori di un compatto.*

Dimostrazione Ogni $x \in K$ ha un intorno aperto V_x con chiusura compatta. Un numero finito di tali intorni ricopre K . Siano tali intorni $V_{x_1}, \dots, V_{x_n}$. Definiamo

$$V \doteq V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_n}$$

allora V ha chiusura compatta. V^a è compatto e di Hausdorff, dunque normale. Possiamo allora applicare il lemma di Urysohn a V^a . Esiste una funzione continua $g \geq 0$ definita su V^a che è 1 su K e 0 su $V^a \cap V^c$ (visto che $K \subset V$, si ha $K \cap V^c = \emptyset$). Adesso non ci resta che

(c.v.d.) porre $g = 0$ su $X \setminus V^a$ per completare la dimostrazione.

1.6.1 Funzionali positivi e limitati su $\mathcal{C}_c(X)$

Mappe lineari limitate Denotiamo con $\mathcal{C}_c(X)$ lo spazio vettoriale delle funzioni continue su X , a supporto compatto (nulle al di fuori di un compatto). Normiamo tale spazio con la norma del sup. Una mappa lineare λ definita su $\mathcal{C}_c(X)$ a valori in $\mathbb{C}$ si dice **limitata** se esiste $C \geq 0$ talché, per ogni $f \in \mathcal{C}_c(X)$

$$|\lambda(f)| \leq C \|f\|$$

Risulta chiaro (lo dimostreremo più volte in seguito a proposito di spazi normati qualunque) che una mappa lineare è limitato se e solo se è continuo. Una mappa lineare si dice anche **funzionale**.

Mappe lineari positive Una mappa lineare λ da $\mathcal{C}_c(X)$ sul campo complesso si dice **positiva** se per ogni f a valori reali positivi in $\mathcal{C}_c(X)$ si ha

$$\mathbb{R} \ni \lambda(f) \geq 0$$

Denotiamo con $\mathcal{C}_K$ l'insieme delle funzioni continue a supporto in $K \subset X$. Troviamo il seguente

Lemma I.48 Sia $\lambda : \mathcal{C}_c(X) \rightarrow \mathbb{C}$ una mappa lineare positiva. Allora λ è limitata su $\mathcal{C}_K$ per ogni $K \subset X$ compatto.

Dimostrazione Grazie al corollario I.47 esiste una funzione reale e continua $g \geq 0$ definita su X e che vale 1 su K e 0 fuori da K . Sia ora $f \in \mathcal{C}_K(X)$ a valori reali. Abbiamo

$$\sup_K |f| \geq |f| \Rightarrow \sup_K |f| g \geq |f| \Rightarrow \|f\| g \pm f \geq 0$$

Per ipotesi,

$$\lambda(\|f\| g \pm f) \geq 0$$

ma λ è lineare, dunque

$$\lambda(\|f\| g) \pm \lambda(f) \geq 0$$

cioè

$$|\lambda(f)| \leq \lambda(g) \|f\|$$

Se ora f è a valori complessi, possiamo ripetere il ragionamento per parte reale e parte immaginaria, essendo

$$|f| \geq \operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f)$$

sicché

$$(c.v.d.) \quad |\lambda(f)| = |\lambda(\operatorname{Re} f) + i \lambda(\operatorname{Im} f)| \leq |\lambda(\operatorname{Re} f)| + |\lambda(\operatorname{Im} f)| \leq 2 \lambda(g) \|f\|$$

Definiamo una mappa lineare su $\mathcal{C}_c(X)$ a valori in $\mathbb{C}$, che sia limitata su $\mathcal{C}_K(X)$ per ogni $K \subset X$ compatto, $\mathcal{C}_c$ -**funzionale** su $\mathcal{C}_c(X)$. Chiaramente, una mappa lineare limitata sull'intero spazio è un $\mathcal{C}_c$ -**funzionale**.

Teorema I.49 Sia λ un funzionale reale limitato definito su $\mathcal{C}_c(X; \mathbb{R})$. Allora λ è esprimibile come differenza di due funzionali positivi limitati.

Dimostrazione Sia $f \geq 0$ in $\mathcal{C}_c(X)$, definiamo

$$\lambda^+(f) \doteq \sup \lambda(g), \quad 0 \leq g \leq f, \quad g \in \mathcal{C}_c(X; \mathbb{R})$$

Allora

$$\lambda^+(f) = \sup \lambda(g) \leq \sup C \|g\| \leq C \|f\|$$

dove C è la costante positiva per cui

$$|\lambda(g)| \leq C \|g\|$$

Inoltre, $\lambda^+(f) \geq 0$, essendo

$$\lambda^+(f) = \sup \lambda(g) \geq \lambda(0) = 0.$$

Sia $c \in \mathbb{R}$ con $c > 0$. Allora

$$\lambda^+(cf) = \sup \lambda(cg), \quad 0 \leq g \leq f, \quad g \in \mathcal{C}_c(X; \mathbb{R})$$

da cui

$$\lambda^+(cf) = c\lambda^+(f)$$

Siano ora $f_1, f_2 \in \mathcal{C}_c(X; \mathbb{R})$ funzioni non negative. Prese $0 \leq g_1 \leq f_1$ e $0 \leq g_2 \leq f_2$, abbiamo

$$\begin{aligned} \lambda^+(f_1) + \lambda^+(f_2) &= \sup \lambda(g_1) + \sup \lambda(g_2) = \sup [\lambda(g_1) + \lambda(g_2)] = \\ &= \sup \lambda(g_1 + g_2) \leq \lambda^+(f_1 + f_2) \end{aligned}$$

Viceversa, se $0 \leq g \leq f_1 + f_2$, allora

$$\begin{aligned} 0 &\leq \inf(g, f_1) \leq f_1 \\ 0 &\leq g - \inf(g, f_1) \leq f_2 \end{aligned}$$

e dunque

$$\lambda(g) = \lambda(\inf(g, f_1)) + \lambda(g - \inf(g, f_1)) \leq \lambda^+(f_1) + \lambda^+(f_2)$$

Passando al sup,

$$\lambda^+(f_1 + f_2) \leq \lambda^+(f_1) + \lambda^+(f_2)$$

Estendiamo ora la definizione di λ^+ a tutto lo spazio $\mathcal{C}_c(X; \mathbb{R})$, esprimendo ciascuna funzione f come differenza di due funzioni positive (parte positiva e parte negativa):

$$\lambda^+ f = \lambda^+ f^+ - \lambda^+ f^-$$

Si ha subito che λ^+ è lineare. Se $f \geq 0$ si ha che $\lambda^+ f \geq \lambda f$, perciò definiamo la mappa lineare positiva

$$\lambda^- f = \lambda^+ f - \lambda f$$

Infine,

$$\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$$

(c.v.d.) con $\lambda^\pm$ positivi e limitati (essendo λ, λ^+ limitati, tale deve essere λ^-).

Teorema I.50
(di Dini)

Sia Φ una famiglia di funzioni positive in $\mathcal{C}_c(X)$ che sono minori o eguali a f e tali che

$$\sup_{\varphi \in \Phi} \varphi = f \in \mathcal{C}_c(X)$$

e, se $\varphi, \psi \in \Phi$, allora $\sup(\varphi, \psi) \in \Phi$. In queste ipotesi, si ha che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\varphi \in \Phi$ talché

$$\|f - \varphi\| < \varepsilon$$

e, se λ è un funzionale positivo su $\mathcal{C}_c(X)$, allora

$$\lambda(f) = \sup_{\varphi \in \Phi} \lambda(\varphi)$$

Dimostrazione

f sia nulla fuori del compatto K . Per ogni $x \in K$, possiamo trovare una funzione $\varphi_x \in \Phi$ tale che

$$f(x) - \varphi(x) < \varepsilon$$

Allora esiste un intorno V_x di x per cui

$$f(y) - \varphi_x < \varepsilon$$

per la permanenza del segno. Se ricopriamo K con un numero finito di V_{x_i} , $i \in J_n$ e poniamo

$$\varphi = \sup(\varphi_{x_1}, \dots, \varphi_{x_n})$$

allora

$$\|f - \varphi\| < \varepsilon$$

Questo prova la prima parte del teorema. Inoltre, è dimostrato che f è il limite uniforme di

una successione φ_n a valori in Φ . Dal lemma precedente che λ è continuo su $\mathcal{C}_K$ perciò

$$\lambda(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\varphi_n)$$

Ora, ovviamente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\varphi_n) \leq \sup_{\varphi} \lambda(\varphi)$$

d'altra parte,

$$\lambda(\varphi) \leq \lambda(f)$$

perciò

$$\sup_{\varphi} \lambda(\varphi) \leq \lambda(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\varphi_n)$$

da cui

$$(c.v.d.) \quad \sup_{\varphi} \lambda(\varphi) = \lambda(f)$$

I.6.2 Il teorema di Riesz-Markov

**Misura come
funzionale
positivo**

Il risultato principale della teoria della misura sugli spazi localmente compatti è l'interpretazione di ogni funzionale su $\mathcal{C}_c(X)$ come integrale: la dimostrazione di questo fatto sta nel teorema di Riesz-Markov che ci apprestiamo a studiare.

Sia $\mathcal{M}$ l'algebra degli insiemi di Borel su X . Se μ è una misura definita su $\mathcal{M}$, finita sui compatti, allora μ genera un funzionale positivo che denotiamo con $d\mu$ dato da

$$\langle f, d\mu \rangle \doteq \int_X f d\mu$$

Il teorema di Riesz-Markov ci consente di affermare anche l'inverso.

Notazione Nel seguito indicheremo con $\text{supp } f$ il **supporto** (la chiusura dell'insieme dei punti sui quali $f \neq 0$) di f . Se V è un insieme aperto scriveremo

$$f \prec V$$

per significare che f è reale, $f \in \mathcal{C}_c(X)$, $f \in [0, 1]$ e $\text{supp } f \subset V$. Similmente, se K è un compatto, la scrittura

$$K \prec f$$

denoterà f reale, $\chi_K \leq f \leq 1$ e $f \in \mathcal{C}_c(X)$.

Lemma I.51 Dato K compatto, $K \subset V$ aperto, esiste f talché

$$K \prec f \prec V$$

Dimostrazione Ovviamente dobbiamo usare il lemma di Urysohn. Infatti, è sufficiente prendere un aperto W che ammetta chiusura compatta W^a tale che

$$K \subset W \subset W^a \subset V$$

Allora, W^a è normale e perciò esisterebbe f reale a valori in $[0, 1]$ pari a 1 su K e nulla in $W^a \cap W^c$. f si prolunga a 0 ed è continua in X .

(c.v.d.)

Lemma I.52 Se V è aperto, allora

$$\chi_V(x) = \sup_{f \prec V} f(x)$$

Dimostrazione Dato $x \in V$, esiste un intorno aperto W di x avente chiusura compatta, tale che $x \in W \subset W^a \subset V$. Ora, possiamo trovare una funzione continua f a valori in $[0, 1]$ pari a 1 su W^a e nulla al di fuori di un compatto contenente W^a e contenuto in V . Perciò, troviamo $f \prec V$ con

$$f(x) = 1$$

e dunque

$$\sup_{f \prec V} f(x) = 1 = \chi_V(x)$$

(c.v.d.) per ogni $x \in V$.

Enunciamo il teorema di Riesz-Markov e poi passiamo a dimostrarlo in steps successivi.

Teorema I.53 (di Riesz-Markov)

Sia λ un funzionale positivo su $\mathcal{C}_c(X)$. Allora esiste un'unica misura di Borel tale che

[(i)]

(i) se V è aperto, allora

$$\mu(V) = \sup \lambda(g), \quad g \prec V;$$

(ii) se A è un boreliano, allora

$$\mu(A) = \inf \mu(V)$$

al variare degli aperti V contenenti A .

La misura μ soddisfa anche le proprietà seguenti

[(iii)]

(iii) se K è compatto, allora $\mu(K)$ è finita;

(iv) se A è un boreliano σ -finito, o A è aperto, allora

$$\mu(A) = \sup \mu(K)$$

al variare dei compatti K contenuti in A .

Infine, per ogni $f \in \mathcal{C}_c(X)$, si ha

$$\lambda(f) = \int_x f d\mu$$

Osservazione I.10

Notiamo, in primo luogo, che l'unicità della misura di Borel è immediatamente discendente dalla (ii), dal momento che μ è univocamente definita sui boreliani.

Se K è compatto, allora, dalla (ii), si ha

$$\mu(K) = \inf \mu(V)$$

con $K \subset V$ e V aperto, cioè

$$\mu(K) = \inf_{K \subset V} \sup_{f \prec V} \lambda(f) = \inf_{K \subset V} \sup_{K \prec f \prec V} \lambda(f) = \inf_{K \prec f} \lambda(f)$$

dove il secondo passaggio è dovuto al fatto che se $g \prec K$ esiste comunque una funzione f a supporto esterno a K tale che

$$\lambda(g) \leq \lambda(f)$$

visto che basta prendere $f = g + h$ continua con $h \geq 0$ fuori dal supporto di g .

Fissiamo la notazione che useremo fino alla fine della sottosezione: f, g, h sono funzioni continue a supporto compatto, reali e non negative. Una misura per cui valgano (ii), (iii) e (iv) si dice **misura di Borel regolare** (abbiamo già incontrato la nozione di misura regolare quando abbiamo trattato la densità di $\mathcal{C}_c$ in L^p).

Lemma I.54 Sia λ un funzionale positivo su $\mathcal{C}_c(X)$. Per ogni aperto V definiamo

$$\mu(V) = \sup_{g \prec V} \lambda(g)$$

Per ogni sottoinsieme Y di X definiamo

$$\mu(Y) = \inf \mu(V)$$

al variare di V , aperto contenente Y . Allora μ è una misura esterna sulla σ -algebra dell'insieme delle parti di X .

Dimostrazione

Chiaramente $\mu(\emptyset) = 0$ e se $A \subset B$ allora $\mu(A) \leq \mu(B)$. Per convenienza di notazione scriveremo

$$\sup(f, g) \doteq f \vee g, \quad \inf(f, g) \doteq f \wedge g$$

Cominciamo col provare la subaddittività finita per gli aperti. Siano V_1 e V_2 due aperti. Sia $h \prec V_1 \cup V_2$. Sia Φ la famiglia di tutte le funzioni $\sup(g_1, g_2)$ con $g_i \prec V_i, i \in J_2$. Allora Φ è chiuso per sup e abbiamo

$$\sup_{g \in \Phi} g = \chi_{V_1 \cup V_2}$$

Sia ora Φ_h la famiglia di tutte le funzioni del tipo

$$h \wedge (g_1 \vee g_2), g_i \prec V_i, i \in J_2$$

Allora h è il sup di tutte le funzioni contenute in Φ_h , allora, dal teorema di Dini

$$\lambda(h) = \sup_{g_1, g_2} \lambda(h \wedge (g_1 \vee g_2)) \leq \sup_{g_1, g_2} \lambda(h \wedge g_1 + h \wedge g_2) \leq \mu(V_1) + \mu(V_2)$$

passando al sup su h si ha

$$\mu(V_1 \cup V_2) \leq \mu(V_1) + \mu(V_2).$$

Ora, prendiamo $\{A_n\}$, successione di sottoinsiemi di X tale che

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$$

Sia V_n aperto con $A_n \subset V_n$ e

$$\mu(V_n) \leq \mu(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Sia V l'unione numerabile dei V_n . Allora $A \subset V$. Sia $g \prec V$. Dato che g ha supporto compatto, esiste un n per cui

$$g \prec V_1 \cup \dots \cup V_n$$

e usando la subaddittività finita degli aperti per induzione,

$$\lambda(g) \leq \mu(V_1) + \dots + \mu(V_n)$$

$$\lambda(g) \leq \mu(V_1) + \dots + \mu(V_n) \leq \sum_n \mu(A_n) + \varepsilon$$

Passando al sup su g si ha

$$\mu(A) \leq \mu(V) \leq \sum_n \mu(A_n) + \varepsilon$$

(c.v.d.) da cui si ha la tesi.

Osservazione I.11 Vogliamo costruire la μ del teorema tramite la μ del lemma. Il fatto principale che riguarda quest'ultima è che

$$K \prec f \prec V \Rightarrow \mu(K) \leq \lambda(f) \leq \mu(V)$$

dove K è un compatto e V un aperto. La seconda disuguaglianza è ovvia. Vediamo la prima. Definiamo l'aperto

$$W \doteq \{x \in X \mid f(x) > 1 - \varepsilon\}$$

Se $x \in K$ allora $1 = \chi_K(x) \leq f(x)$ perciò $x \in W$ e dunque $K \subset W$. Per ogni ε , essendo W aperto, esiste $g \prec W$ per cui

$$\mu(W) \leq \lambda(g) + \varepsilon$$

Abbiamo

$$(1 - \varepsilon)g \leq (1 - \varepsilon)f < f$$

perciò

$$(1 - \varepsilon)\lambda(g) \leq \lambda(f)$$

e dunque

$$\mu(K) \leq \mu(W) \leq \frac{\lambda(f)}{1 - \varepsilon} + \varepsilon \leq \lambda(f) + \varepsilon$$

da cui

$$\mu(K) \leq \lambda(f) \leq \mu(V)$$

D'ora in poi chiameremo la misura costruita nel lemma precedente, la **misura esterna determinata** da λ .

Lemma I.55 Sia $\mathcal{A}$ la collezione di tutti i sottoinsiemi A di X tali che $\mu(A) \in \mathbb{R}$ e

$$\mu(A) = \sup \mu(K)$$

al variare dei compatti $K \subset A$. Allora $\mathcal{A}$ è un'algebra contenente tutti i compatti e tutti gli aperti di misura finita. Inoltre, μ è una misura positiva su $\mathcal{A}$; se $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ è una successione di insiemi disgiunti e $A = \bigcup A_n$, allora

$$\mu(A) = \sum_n \mu(A_n)$$

Infine, se $\mu(A) \in \mathbb{R}$ allora $A \in \mathcal{A}$.

Dimostrazione Se K è compatto, allora esiste un aperto V contenente K tale che V^a è compatto. Sia $V^a \prec g$. Per ogni $f \prec V$, abbiamo $f \leq g$, di conseguenza $\lambda(f) \leq \lambda(g)$ e $\mu(V) \leq \lambda(g)$, sicché $\mu(K) \leq \lambda(g)$ è finito. Ne ricaviamo che $K \in \mathcal{A}$.

Sia V aperto. Proveremo che

$$\mu(V) = \sup \mu(K)$$

al variare dei compatti $K \subset V$. Possiamo assumere che $\mu(V) > 0$. Per coprire anche il caso $\mu(V) = \infty$, sia $r \in \mathbb{R}$ di modo che $0 < r < \mu(V)$. Esiste f per cui

$$r < \lambda(f) \leq \mu(V)$$

Sia K il supporto di f . Se W è un aperto contenente K , allora $f \prec W$, sicché

$$r < \lambda(f) \leq \mu(W)$$

passando all'inf all'ultimo membro riusciamo a mostrare che

$$r \leq \mu(K)$$

In definitiva,

$$\mu(V) = \sup \mu(K)$$

e se $\mu(V) < \infty$ allora $V \in \mathcal{A}$.

Vediamo l'additività finita. Cominciamo con il prendere due compatti disgiunti K_1 e K_2 . Mostriamo allora che

$$\mu(K_1) + \mu(K_2) = \mu(K_1 \cup K_2)$$

Siano V_1 e V_2 due aperti disgiunti contenenti, rispettivamente, K_1 e K_2 . Sia W un aperto tale che

$$\mu(W) \leq \mu(K_1 \cup K_2) + \varepsilon$$

Sia $g_i \prec W \cap V_i$ con $i \in J_2$, talché

$$\mu(W \cap V_i) \leq \lambda(g_i) + \varepsilon$$

allora

$$\begin{aligned} \mu(K_1) + \mu(K_2) &\leq \mu(W \cap V_1) + \mu(W \cap V_2) \leq \lambda(g_1) + \lambda(g_2) + 2\varepsilon = \\ &= \lambda(g_1 + g_2) + 2\varepsilon \leq \mu(W) + 2\varepsilon \leq \mu(K_1 \cup K_2) + 3\varepsilon \end{aligned}$$

perciò

$$\mu(K_1) + \mu(K_2) \leq \mu(K_1 \cup K_2)$$

Siccome μ è una misura esterna, vale la disuguaglianza opposta e perciò si ottiene l'eguaglianza, come preannunciato.

Data una sequenza di insiemi disgiunti $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ e $A = \bigcup A_n$, si considerino i compatti (disgiunti) $K_n \subset A_n$ per cui

$$\mu(A_n) \leq \mu(K_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Allora per ogni n

$$\sum_{i=1}^n \mu(A_i) \leq \sum_{i=1}^n \mu(K_i) + \varepsilon = \mu(K_1 \cup \dots \cup K_n) + \varepsilon \leq \mu(A) + \varepsilon$$

Passando al limite per $n \rightarrow \infty$ e $\varepsilon \rightarrow 0$ e tenendo conto del fatto che μ è una misura esterna, si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$$

Ciò dà la additività numerabile e prova anche che se $\mu(A)$ è finito, $A \in \mathcal{A}$.

Proviamo, adesso, che $\mathcal{A}$ è un'algebra. Chiaramente $\emptyset \in \mathcal{A}$. Se $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, possiamo

trovare K_1, K_2 compatti e V_1, V_2 aperti, tali che

$$K_i \subset A_i \subset V_i, i \in J_2$$

e tali che

$$\mu(K_i) \leq \mu(A_i) \leq \mu(V_i) < \mu(K_i) + \varepsilon$$

In particolare, grazie alla addittività finita di μ

$$\mu(V_i \setminus K_i) < \varepsilon$$

Dal momento che

$$(V_1 \cup V_2) \setminus (K_1 \cup K_2) \subset (V_1 \setminus K_1) \cup (V_2 \setminus K_2)$$

si ha

$$\mu(A_1 \cup A_2) < \mu((V_1 \cup V_2) \setminus (K_1 \cup K_2)) + \mu(K_1 \cup K_2) < \mu(K_1 \cup K_2) + 2\varepsilon$$

da cui $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$.

Poi notiamo che $K_1 \setminus V_2$ è compatto e $V_1 \setminus K_2$ è aperto e

$$K_1 \setminus V_2 \subset A_1 \setminus A_2 \subset V_1 \setminus K_2$$

da cui

$$(V_1 \setminus K_2) \setminus (K_1 \setminus V_2) \subset (V_1 \setminus K_1) \cup (V_2 \setminus K_2)$$

cosicché si ha

$$\mu(A_1 \setminus A_2) < \mu((V_1 \setminus K_2) \setminus (K_1 \setminus V_2)) + \mu(K_1 \setminus V_2) < \mu(K_1 \setminus V_2) + 2\varepsilon$$

(c.v.d.) e anche $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A}$. Infine, $A_1 \cap A_2 = A_2 \setminus (A_2 \setminus A_1) \in \mathcal{A}$ e $\mathcal{A}$ è un'algebra.

Veniamo così al seguente risultato che prova la prima parte del teorema di Riesz-Markov:

Teorema I.56 *Sia λ un funzionale positivo su $\mathcal{C}_c(X)$. Sia μ la misura esterna determinata da λ , e sia $\mathcal{A}$ l'algebra degli insiemi di misura finita tali che*

$$\mu(A) = \sup \mu(K)$$

al variare dei compatti $K \subset A$. Sia $\mathcal{M}$ la collezione di tutti i sottoinsiemi Y di X tali che, per ogni compatto K , $Y \cap K$ appartiene a $\mathcal{A}$, allora $\mathcal{M}$ è una σ -algebra contenente i boreliani e μ è una misura su $\mathcal{M}$. Inoltre, $\mathcal{A}$ consiste di tutti gli insiemi di misura finita in $\mathcal{M}$.

Dimostrazione Siccome i compatti appartengono banalmente ad $\mathcal{A}$, si ha che $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$. Denotiamo con $\mathcal{M}_K$ la collezione di tutti gli insiemi $Y \cap K$ per $Y \in \mathcal{M}$; con analogia denotiamo $\mathcal{A}_K$. Allora $\mathcal{M}_K = \mathcal{A}_K$. Mostriamo che $\mathcal{A}_K$ è una σ -algebra. Per il lemma precedente $\mathcal{A}$ è un'algebra contenente K , da cui $\mathcal{A}_K$ è un'algebra. Sia ora $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una famiglia di insiemi contenuti in $\mathcal{A}_K$, allora, per ogni n , $A_n = B_n \cap K$ con $B_n \in \mathcal{A}$. Siccome $\mu(K)$ è finito (lemma precedente) si ha che

$$\mu(B_n \cap K) = \sup_{K' \subset B_n \cap K} \mu(K') \leq \mu(K) < \infty$$

perciò, ancora dal lemma precedente, $\bigcup B_n \in \mathcal{A}$ e - dunque - $\bigcup A_n = \bigcup B_n \cap K \in \mathcal{A}_K$.

Ne viene che $\mathcal{M}_K$ è una σ -algebra per ogni compatto K in X . Mostriamo che da questo segue che $\mathcal{M}$ è una σ -algebra. Cominciamo a vedere che $\mathcal{M}$ è un'algebra. $\emptyset \in \mathcal{M}_K$ per ogni compatto K , dunque, $\emptyset \in \mathcal{M}$. Siano $A, B \in \mathcal{M}$, allora $A' = A \cap K \in \mathcal{M}_K$ e $B' = B \cap K \in \mathcal{M}_K$. Dunque, $A' \cap B' \in \mathcal{M}_K$, ma

$$A' \cap B' = (A \cap K) \cap (B \cap K) = (A \cap B) \cap K \in \mathcal{M}_K$$

perciò $A \cap B \in \mathcal{M}$. Vediamo la stabilità per complementazione: sia $A \in \mathcal{M}$, allora

$$A^c \cap K = K \setminus (A \cap K)$$

ma $K \in \mathcal{M}$, $K \in \mathcal{M}_K$ e $A \cap K \in \mathcal{M}_K$, perciò

$$A^c \cap K \in \mathcal{M}_K$$

e, infine, $A^c \in \mathcal{M}$. Resta da vedere l'unione numerabile. Sia $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$, allora

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap K) \in \mathcal{M}_K$$

perciò

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap K) = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \cap K \in \mathcal{M}_K$$

dunque,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}.$$

$\mathcal{M}$ contiene tutti i chiusi, perciò i boreliani. Infatti, se A è chiuso, allora $A \cap K$ è compatto, perciò appartiene a $\mathcal{A}$ e dunque a $\mathcal{M}$.

Sia A contenuto in $\mathcal{M}$ e tale che $\mu(A) < \infty$. Sia V un aperto di misura finita contenente A . Sia $K \subset V$ compatto talché

$$\mu(V) < \mu(K) + \varepsilon$$

(che esiste essendo $\mu(K)$ l'inf delle misure degli aperti che lo contengono). Siccome $A \cap K$ appartiene a $\mathcal{A}$ esiste un compatto K' per cui

$$\mu(A \cap K) < \mu(K') + \varepsilon$$

ma $A \subset (A \cap K) \cup (V \setminus K)$ per cui

$$\mu(A) \leq \mu(A \cap K) + \mu(V \setminus K) < \mu(K') + 2\varepsilon$$

la qualcosa prova che $A \in \mathcal{A}$. Ne segue che $\mathcal{A}$ è precisamente la collezione degli insiemi di $\mathcal{M}$ che hanno misura finita.

Infine, sia $\{A_n\} \subset \mathcal{M}$. Se tra gli A_n ve n'è uno di misura infinita, l'additività numerabile è (c.v.d.) ovvia, altrimenti, $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ e si applica il lemma precedente.

Con quest'ultimo teorema abbiamo completato la dimostrazione della prima parte del teorema di Riesz-Markov.

Seconda parte Veniamo alla dimostrazione della seconda parte del teorema di Riesz-Markov, secondo cui, per ogni $f \in \mathcal{C}_c(X)$, si ha

$$\lambda(f) = \int_x f d\mu$$

se μ è la misura determinata da λ secondo il teorema di Riesz-Markov.

Anzitutto notiamo che $f \in \mathcal{C}_c(X)$ implica che f è misurabile poiché continua, essendo μ una misura boreliana. Poi, il supporto di f è compatto ed ha, perciò, misura finita. Inoltre, sul suo supporto (compatto) f è limitata, grazie al teorema di Weierstraß. ne segue che

$$\int_x |f| d\mu \leq M\mu(\text{supp } f) < \infty$$

cioè $f \in L^1(X, \mu)$.

Per proseguire ci occorre il seguente lemma

Lemma I.57
(partizione
dell'unità)

di partizione dell'unità Sia K un compatto e sia $\{U_1, \dots, U_n\}$ un suo ricoprimento aperto finito. Allora esistono n funzioni f_i tali che $f_i \prec U_i$ e tali che

$$\sum_{i=1}^n f_i(x) = 1, \forall x \in K.$$

Dimostrazione Per ogni $x \in K$ sia W_x un intorno aperto di x tale che $W_x^a \subset U_{i(x)}$ con $i(x) \in J_n$. Possiamo ricoprire K con un numero finito di aperti $W_{x_1}, \dots, W_{x_m}$. Sia V_i l'unione di tutti gli aperti W_{x_j} tali che

$$W_{x_j}^a \subset U_i$$

Allora $\{V_1, \dots, V_n\}$ è un ricoprimento aperto di K , dove

$$V_i^a \subset U_i$$

con V_i^a compatto (poiché intersezione di un chiuso con un compatto). Siano g_i funzioni tali che

$$V_i^a \prec g_i \prec U_i$$

Adesso definiamo

$$\begin{aligned} f_1 &\doteq g_1 \\ f_2 &\doteq g_2(1 - g_1) \\ &\vdots \\ f_n &\doteq g_n(1 - g_{n-1}) \dots (1 - g_1) \end{aligned}$$

Allora, banalmente, $f_i \prec U_i$. Inoltre, per induzione, si ha

$$f_1 + \dots + f_n = 1 - (1 - g_n) \dots (1 - g_1)$$

Sia $x \in K$, allora $x \in V_{i(x)}^a$ perciò $g_{i(x)}(x) = 1$ e

$$f_1 + \dots + f_n = 1 - (1 - g_n) \dots (1 - g_1) = 1$$

(c.v.d.) la tesi.

La sequenza di funzioni $\{f_i\}$ si dice **partizione dell'unità su K , subordinata al ricoprimento $\{U_i\}$** .

**Dimostrazione
della seconda
parte del
teorema di
Riesz-Markov**

Siamo adesso in grado di terminare la dimostrazione del teorema di Riesz-Markov. È sufficiente operare la dimostrazione per f reale non nulla. Anzi, ci si può limitare a provare la disuguaglianza

$$\lambda(f) \leq \int_X f d\mu$$

visto che la disuguaglianza inversa, segue da questa, per $-f$.

Sia K il supporto di f . Per $\varepsilon < \|f\|$, troviamo una partizione di K in n insiemi misurabili, una funzione semplice

$$\varphi = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}$$

tale che

$$f \leq \varphi \leq f + \varepsilon,$$

e n aperti V_i per cui $A_i \subset V_i$ e

$$\mu(V_i) \leq \mu(A_i) + \frac{\varepsilon}{n \|f\|}$$

Infatti, tagliamo un intervallo contenente l'immagine di f (teorema di Weierstraß) in $\varepsilon/2$ -sottointervalli chiusi-aperti di modo che siano disgiunti. Sia c'_i l'estremo superiore di ciascun sottointervallo. Sia A_i la controimmagine in K dell' i -esimo sottointervallo. Sia $c_i = c'_i + \varepsilon/2$. Per ogni i , sia W_i aperto contenente A_i tale che $f \leq c_i$ su W_i . Infine restringiamo V_i di modo che valga la disuguaglianza di sopra (il che è possibile essendo la misura di A_i (che è un boreliano) data dall'inf degli aperti che lo contengono).

Sia $h_1, \dots, h_n$ una partizione dell'unità su K , subordinata al ricoprimento $V_1, \dots, V_n$. Allora fh_i ha supporto in V_i e $fh_i \leq c_i h_i$. Inoltre,

$$K \prec \inf \left(1, \sum_{i=1}^n h_i \right)$$

sicché

$$\mu(K) \leq \lambda \left(\sum_{i=1}^n h_i \right) = \sum_{i=1}^n \lambda(h_i)$$

Sia $c = \max |c_i|$, allora $c \leq f + \varepsilon$, abbiamo

$$f = f \sum_{i=1}^n h_i = \sum_{i=1}^n h_i f$$

da cui

$$\lambda(f) = \sum_{i=1}^n \lambda(h_i f) \leq \sum_{i=1}^n \lambda(h_i c_i) \leq \sum_{i=1}^n c_i \lambda(h_i) = \sum_{i=1}^n (c_i + c) \lambda(h_i) - c \sum_{i=1}^n \lambda(h_i)$$

Ora, $h_i \prec V_i$ dunque

$$\lambda(h_i) \leq \mu(V_i)$$

da cui, ricordando che $\mu(K) \leq \sum \lambda(h_i)$ si ha

$$\begin{aligned} \lambda(f) &\leq \sum_{i=1}^n (c_i + c) \mu(V_i) - c\mu(K) \leq \sum_{i=1}^n (c_i + c) \left(\mu(A_i) + \frac{\varepsilon}{n\|f\|} \right) - c\mu(K) \leq \\ &\leq \int_K \varphi d\mu + c\mu(K) + 2c\frac{\varepsilon}{\|f\|} - c\mu(K) \leq \int_K f d\mu + \varepsilon\mu(K) + 2c\frac{\varepsilon}{\|f\|} \end{aligned}$$

Ora, valutiamo $c/\|f\|$ dove $\|f\| = \sup |f|$. Per ogni $x \in A_i$ abbiamo

$$c_i - \varepsilon \leq f \leq c_i$$

da cui

$$|c_i| - \varepsilon \leq |f|$$

perciò

$$c \leq \|f\| + \varepsilon \Rightarrow \frac{c}{\|f\|} \leq 1 + \frac{\varepsilon}{\|f\|} \leq 2$$

sicché

$$\lambda(f) \leq \int_K f d\mu + \varepsilon\mu(K) + 4\varepsilon$$

passando al limite per ε che tende a zero abbiamo la tesi.

Corollario I.58 Sia M_0 l'insieme delle misure di Borel σ -regolari. La mappa

$$\mu \mapsto d\mu$$

è una biiezione tra M_0 e l'insieme dei funzionali positivi su $\mathcal{C}_c(X)$.

Dimostrazione Il teorema di Riesz-Markov mostra che la mappa è suriettiva. Vediamo l'iniettività. Siano μ_1 e μ_2 misure σ -regolari, cioè soddisfacenti (ii), (iii) e (iv) del teorema di Riesz-Markov. Assumiamo che i funzionali $d\mu_1$ e $d\mu_2$ siano eguali e mostriamo che $\mu_1 = \mu_2$. A questo scopo basta mostrare la tesi sui compatti, infatti, grazie a (iv) esse coincideranno sugli aperti, e per (ii) saranno eguali su ogni boreliano. Dunque, sia K un compatto e sia V un aperto contenente K tale che

$$\mu_2(V) < \mu_2(K) + \varepsilon$$

Sia $K \prec f \prec V$, allora $\chi_K \leq f \leq \chi_V$ e quindi

$$\mu_1(K) \leq \int_X f d\mu_1 = \int_X f d\mu_2 \leq \mu_2(V) < \mu_2(K) + \varepsilon$$

sicché

$$\mu_1(K) \leq \mu_2(K)$$

su ogni compatto. Invertendo i ruoli di μ_1 e μ_2 si ottiene la disuguaglianza opposta e si conclude l'iniettività. (c.v.d.)

Alcune osservazioni

Abbiamo dimostrato che a ogni funzionale corrisponde una e una sola **misura di Borel** (definita sui boreliani e tale che i compatti abbiano misura finita) **regolare** tale da soddisfare il teorema di Riesz-Markov. A volte si introduce la nozione di misura di Baire e si dimostra che a ogni funzionale positivo si può associare una e una sola misura di Baire tale da verificare il teorema di Riesz-Markov. D'altra parte, si dimostra che ogni misura di Baire ammette una e una sola estensione a una misura di Borel regolare, perciò noi non abbiamo perso nulla ignorando le misure di Baire (anzi, usando la corrispondenza tra misure di Baire e misure di Borel regolari, abbiamo l'asserto di Riesz-Markov per le misure di Baire).

Ad ogni modo, le misure di Baire sono definite sulla più piccola σ -algebra tale che le funzioni $\mathcal{C}_c(X)$ risultino misurabili. Si mostra facilmente che tale σ -algebra è quella generata dagli insiemi G_δ compatti.

Spazi di Hilbert e spazi di Banach

Lo scopo di questo capitolo sarà lo studio degli spazi di Hilbert e di Banach di dimensione infinita e in particolare dello spazio L^2 .

II.1 Spazi di Banach e spazi di Hilbert

II.1.1 Spazi normati e spazi di prodotto scalare

Uno spazio vettoriale dotato di norma si dice **normato**. Poniamo allora la

Definizione II.1 Sia V un $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale. L'applicazione

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : V &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\| \end{aligned}$$

si dice norma di V , se, per ogni $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$, risulta

$$(i) \quad \|x\| \geq 0 \text{ e } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$(ii) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|;$$

$$(iii) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|;$$

Uno spazio di prodotto scalare è uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare secondo la seguente

Definizione II.2 Sia V un $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale. L'applicazione

$$\begin{aligned} (\cdot, \cdot) : V \times V &\rightarrow \mathbb{C} \\ x, y &\mapsto (x, y) \end{aligned}$$

si dice prodotto scalare in V , se, per ogni $x, y, z \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$, risulta

$$(i) \quad (x, y)^* = (y, x);$$

$$(ii) \quad \mathbb{R} \ni (x, x) \geq 0 \text{ e } (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$(iii) \quad (x, \lambda y) = \lambda (x, y);$$

$$(iv) \quad (x, y + z) = (x, y) + (x, z);$$

Uno spazio di prodotto scalare è normato in modo naturale dal prodotto scalare, essendo l'applicazione $\sqrt{(x, x)}$ una norma. Per dimostrare questo occorre vedere preliminarmente il seguente

Lemma II.1
(disuguaglianza
di Cauchy-
Schwartz)

Se $x, y \in V$ spazio di prodotto scalare, allora vale la seguente disuguaglianza

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$$

Dimostrazione

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$, poniamo $\|x\|^2 = (x, x)$

$$\|x + \lambda (y, x) y\| \geq 0$$

d'altra parte la quantità a primo membro vale

$$\|x\|^2 + 2\lambda |(x, y)|^2 + \lambda^2 |(x, y)|^2 \|y\|^2 \geq 0$$

siccome questo deve valere per ogni λ , il discriminante del polinomio in λ deve essere negativo

$$|(x, y)|^4 - |(x, y)|^2 \|y\|^2 \|x\|^2 \leq 0$$

(c.v.d.) da cui si ottiene la tesi.

Grazie alla disuguaglianza di Cauchy-Schwartz possiamo mostrare la disuguaglianza triangolare. Notato che, se $\alpha \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \alpha \leq |\alpha|$, si ha

$$\|x + y\|^2 = (x, x) + 2 \operatorname{Re} (x, y) + (y, y) \leq \|x\|^2 + 2 \|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

da cui $\sqrt{(x, x)} = \|x\|$ è una norma di V .

Continuità La disuguaglianza di Schwarz può essere usata pure per dimostrare la continuità del prodotto scalare

Teorema II.2
(passaggio
del limite
sotto prodotto
scalare)

Sia V uno spazio di prodotto scalare e $a \in V$, allora l'applicazione $(a, \cdot)$ è continua. Perciò se $\{b_n\}$ è convergente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a, b_n) = \left(a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right)$$

Dimostrazione Sia $\{b_n\} \subset V$ una successione convergente a $b \in V$, allora

$$|(a, b) - (a, b_n)| = |(a, b - b_n)| \leq \|a\| \|b - b_n\|$$

perciò

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a, b_n) = \left(a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right)$$

(c.v.d.) dal teorema di collegamento, la tesi.

La norma è una applicazione continua come discende immediatamente dalla disuguaglianza

$$|||a| - |b|| \leq \|a - b\|.$$

La somma di due vettori in uno spazio normato V è una applicazione da $V \times V \rightarrow V$, vediamo che è continua. Fissiamo allora $a_0, b_0 \in V$ e consideriamo due qualsiasi successioni a_n, b_n a valori in V che convergano ad a_0 e b_0 rispettivamente. Vogliamo vedere che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(a_0 + b_0) - (a_n + b_n)\| = 0$$

a questo scopo è ancora sufficiente notare che

$$\|(a_0 + b_0) - (a_n + b_n)\| \leq \|a_0 - a_n\| + \|b_0 - b_n\|$$

Anche la moltiplicazione per uno scalare è un'operazione continua da $\mathbb{C} \times V \rightarrow V$. Fissati k e u , sia k_n a valori in $\mathbb{C}$ convergente a k , e u_n a valori in V convergente a u , allora

$$\|ku - k_n u_n\| = \|ku - k_n u + k_n u - k_n u_n\| \leq |k - k_n| \|u\| + |k_n| \|u - u_n\|$$

passando al limite, la tesi.

Teorema II.3 In uno spazio normato, sono operazioni continue somma, moltiplicazione per scalare e norma.

Infine, occupiamoci del prodotto scalare. Consideriamo ancora a_n, b_n a valori in V che convergano ad a_0 e b_0 :

$$\begin{aligned} |(a_n, b_n) - (a_0, b_0)| &= |(a_n - a_0 + a_0, b_n - b_0 + b_0) - (a_0, b_0)| = \\ &= |(a_n - a_0, b_n - b_0) + (a_n - a_0, b_0) + (a_0, b_n - b_0)| \leq \\ &\leq |(a_n - a_0, b_n - b_0)| + |(a_n - a_0, b_0)| + |(a_0, b_n - b_0)| \leq \\ &\leq \|a_n - a_0\| \|b_n - b_0\| + \|a_n - a_0\| \|b_0\| + \|a_0\| \|b_n - b_0\|. \end{aligned}$$

In particolare,

Teorema II.4
(passaggio
del limite
sotto prodotto
scalare)

Sia V uno spazio di prodotto scalare e $a \in V$, allora l'applicazione $(a, \cdot)$ è continua. Perciò se $\{b_n\}$ è convergente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a, b_n) = \left(a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right)$$

Dimostrazione Ridimostriamo il risultato. Sia $\{b_n\} \subset V$ una successione convergente a $b \in V$, allora

$$|(a, b) - (a, b_n)| = |(a, b - b_n)| \leq \|a\| \|b - b_n\|$$

perciò

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a, b_n) = \left(a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right)$$

(c.v.d.) dal teorema di collegamento, la tesi.

II.1.2 Spazi di Banach

Spazi di Banach e di Hilbert Richiamiamo la seguente

Definizione II.3 *Uno spazio normato si dice completo quando le successioni di Cauchy a valori in tale spazio convergono a un elemento dello spazio stesso. Ricordiamo che una successione $\{x_n\} \subset V$ è di Cauchy se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero $\nu = \nu(\varepsilon)$ per cui se $n > m \geq \nu$ allora $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.*

Definizione II.4 *Uno spazio normato completo si dice di Banach.*

Insiemi densi Prima di procedere richiamiamo anche la nozione di insieme denso. Del tutto in generale, se X è uno spazio topologico, allora $M \subset X$ si dice **denso** in X , se $M^a = X$. Sia ora X uno spazio metrico, allora

$$M^a = \left\{ x \in X \mid d(x, M) \doteq \inf_{y \in M} d(x, y) = 0 \right\}$$

La cosa è ovvia se si considera che $M^a = M \cup \mathcal{DM}$ (dove $\mathcal{DM}$ è il **derivato** di M , cioè l'insieme dei suoi punti di accumulazione): se $x \in M$ allora $d(x, M) = 0$, se $x \in \mathcal{DM}$ allora per ogni ε esiste un $y \in M$ tale che $d(x, y) < \varepsilon$, visto che x è punto di accumulazione per M . Ne deriva che $\inf d(x, y) = 0$. Viceversa, se x dista 0 da M allora l'intersezione di ogni palla centrata in x con M è non vuota: se l'inf è un minimo, $x \in M$, altrimenti $x \in \mathcal{DM}$.

Detto questo, sia M denso in X spazio metrico. Allora ogni punto $x \in X$ dista 0 da M , perciò per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un punto di M talché $d(x, y) < \varepsilon$.

Infine,

Proposizione II.5 *Dato (X, d) spazio metrico e $M \subset X$, si ha che M è denso in X se e solo se vale una delle seguenti proprietà*

- (i) $M^a = X$, cioè ogni punto di x è di accumulazione per M ;
- (ii) per ogni $x \in X$, vale $d(x, M) = 0$;
- (iii) per ogni $x \in X$ e $\varepsilon > 0$ esiste $y \in M$, talché $d(x, y) < \varepsilon$;
- (iv) per ogni $x \in X$ esiste una successione a valori in M che tende a x .

Il teorema di completamento Torniamo a concentrarci sugli spazi normati. Ha un rilevante peso teorico il teorema di completamento che mima la costruzione di Cantor dei reali a partire dai razionali. Dimostreremo che ogni spazio normato ha un unico completamento nei termini che seguono

Teorema II.6 (di completamento) *Sia X uno spazio normato non completo. Allora X è isomorfo e isometrico a un sottospazio lineare denso in uno spazio di Banach $\tilde{X}$. Esiste cioè una corrispondenza uno a uno $x \leftrightarrow \tilde{x}$ da X in un sottospazio di $\tilde{X}$ talché*

$$\widetilde{(x + y)} = \tilde{x} + \tilde{y}, \quad \widetilde{(\alpha x)} = \alpha \tilde{x}, \quad \|\tilde{x}\| = \|x\|.$$

Lo spazio $\tilde{X}$ è univocamente determinato a meno di un isomorfismo isometrico.

Dimostrazione

Consideriamo l'insieme delle successioni di Cauchy a valori in X e su di esso definiamo la relazione

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0.$$

Tale relazione è banalmente riflessiva e simmetrica. Inoltre, grazie alla disuguaglianza triangolare è pure transitiva, dunque è di equivalenza. Sia allora $\tilde{X}$ l'insieme delle successioni di Cauchy modulo $\sim$. Denotiamo con $\{x_n\}'$ la classe di equivalenza cui appartiene $\{x_n\}$ e che è $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Definiamo allora

$$\{x_n\}' + \{y_n\}' \doteq \{x_n + y_n\}', \quad \alpha \{x_n\}' = \{\alpha x_n\}'.$$

Vediamo che si tratta di buone definizioni. Se $x_n, \bar{x}_n \in \{x_n\}'$ e $y_n, \bar{y}_n \in \{y_n\}'$ allora

$$\{x_n + y_n\}' = \{\bar{x}_n + \bar{y}_n\}'$$

infatti

$$\|x_n + y_n - (\bar{x}_n + \bar{y}_n)\| \leq \|x_n - \bar{x}_n\| + \|y_n - \bar{y}_n\|$$

da cui

$$\{x_n + y_n\} \sim \{\bar{x}_n + \bar{y}_n\}.$$

Passiamo a definire la norma. Anzitutto $\|\{x_n\}' - \{x_m\}'\| \leq \|x_n - x_m\|$ perciò la successione a valori in $\mathbb{R}$ $\{\|x_n\|\}$ è di Cauchy, ma $\mathbb{R}$ è completo perciò converge. Dunque è lecito porre

$$\|\tilde{x}\| = \|\{x_n\}'\| \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$$

Vediamo ancora che si tratta di una definizione ben posta. Sia $\{\bar{x}_n\} \sim \{x_n\}$ allora

$$\|\bar{x}_n\| \leq \|x_n\| + \|x_n - \bar{x}_n\|$$

passando al limite si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{x}_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|.$$

Vediamo ora se quella che abbiamo definito su $\tilde{X}$ è effettivamente una norma.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \geq 0$$

per ogni $\{x_n\} \subset X$. D'altra parte valga

$$\|\tilde{x}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0$$

Sia $\tilde{y} \in \tilde{X}$ e calcoliamo $\tilde{x} + \tilde{y} = \{x_n + y_n\}'$ se $\{y_n\} \in \{y_n\}' = \tilde{y}$, d'altra parte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(x_n + y_n) - y_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0$$

da cui $\{x_n + y_n\}' = \tilde{y}$ cioè $\tilde{x} + \tilde{y} = \tilde{y}$ per ogni $\tilde{y} \in \tilde{X}$. Ne deriva che $\tilde{x} = 0$. È facile poi notare che $\|\alpha \tilde{x}\| = |\alpha| \|\tilde{x}\|$ e che $\|\tilde{x} + \tilde{y}\| \leq \|\tilde{x}\| + \|\tilde{y}\|$.

Veniamo alla completezza di $\tilde{X}$. Sia

$$\tilde{X} \supset \{\tilde{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \left\{ \left\{ x_n^{(k)} \right\}_{n \in \mathbb{N}}' \right\}_{k \in \mathbb{N}}$$

di Cauchy. Fissiamo ora k troviamo allora $\nu \doteq n_k$ talché se $m > n_k$ si ha

$$\left\| x_m^{(k)} - x_{n_k}^{(k)} \right\| < \frac{1}{k}$$

Detto questo, vogliamo dimostrare che $\tilde{x}_k$ converge alla classe di equivalenza contenente

$$\left\{ x_{n_k}^{(k)} \right\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X.$$

Mostriamo anzitutto che quest'ultima è effettivamente una successione di Cauchy: Sia $\bar{x}_{n_k}^{(k)}$ l'elemento di $\tilde{X}$ nella cui classe di equivalenza si trova la successione di X identicamente eguale a $x_{n_k}^{(k)}$, allora

$$\left\| \tilde{x}_k - \bar{x}_{n_k}^{(k)} \right\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| x_m^{(k)} - x_{n_k}^{(k)} \right\| \leq \frac{1}{k}$$

dunque

$$\begin{aligned} \left\| x_{n_m}^{(m)} - x_{n_k}^{(k)} \right\| &= \left\| \bar{x}_{n_m}^{(m)} - \bar{x}_{n_k}^{(k)} \right\| \leq \left\| \bar{x}_{n_m}^{(m)} - \tilde{x}_m \right\| + \left\| \tilde{x}_k - \tilde{x}_m \right\| + \left\| \bar{x}_{n_k}^{(k)} - \tilde{x}_k \right\| \leq \\ &\leq \left\| \tilde{x}_k - \tilde{x}_m \right\| + \frac{1}{m} + \frac{1}{k}. \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Ne consegue che $\{x_{n_k}^{(k)}\}$ è di Cauchy come avevamo detto. Vediamo allora la convergenza alla sua classe di equivalenza, che chiameremo $\tilde{x} \in \tilde{X}$, di $\tilde{x}_k$. Abbiamo

$$\|\tilde{x} - \tilde{x}_k\| \leq \|\tilde{x} - \bar{x}_{n_k}^{(k)}\| + \|\bar{x}_{n_k}^{(k)} - \tilde{x}_k\| \leq \|\tilde{x} - \bar{x}_{n_k}^{(k)}\| + \frac{1}{k}$$

d'altra parte, abbiamo, per la (II.1)

$$\|\tilde{x} - \bar{x}_{n_k}^{(k)}\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|x_{n_m}^{(m)} - x_{n_k}^{(k)}\| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|\tilde{x}_k - \tilde{x}_m\| + \frac{1}{k}$$

perciò

$$\|\tilde{x} - \tilde{x}_k\| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|\tilde{x}_k - \tilde{x}_m\| + \frac{2}{k}$$

passando al limite per k che tende a ∞ e sapendo che $\tilde{x}_k$ è di Cauchy abbiamo la tesi.

Ora, la corrispondenza

$$X \ni x \leftrightarrow \tilde{x} \doteq \{x, x, \dots, x, \dots\}' \in \tilde{X}$$

è un isomorfismo isometrico, infatti:

$$\begin{aligned} \widetilde{(x + \alpha y)} &= \{x + \alpha y, \dots, x + \alpha y, \dots\}' = \{x, \dots, x, \dots\}' + \alpha \{y, \dots, y, \dots\}' = \tilde{x} + \alpha \tilde{y} \\ \|\tilde{x}\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x\| = \|x\|. \end{aligned}$$

Infine, si tratta di vedere che X è mandato dall'isomorfismo isometrico trovato in un sottoinsieme $\bar{X}$ denso in $\tilde{X}$. Ma questo è ovvio: si prenda un elemento $\tilde{x}$ in $\tilde{X}$ e si prenda un elemento $\{x_n\} \subset X$ della classe di equivalenza che $\tilde{x}$ rappresenta. Allora $x_n \leftrightarrow \bar{x}_n = \{x_n, x_n, \dots, x_n, \dots\}', \{\bar{x}_n\} \subset \bar{X}$

$$(c.v.d.) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \|\tilde{x} - \bar{x}_m\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\| = 0.$$

Se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$, sappiamo che $\mathcal{C}_c(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$ con la misura di Lebesgue (capitolo I). Siccome $L^p(\Omega)$ è completo e $\mathcal{C}_c(\Omega)$ è un sottospazio lineare (normato dalla norma L^p) di $L^p(\Omega)$, per il teorema di completamento si ottiene che $L^p(\Omega)$ è il completamento di $\mathcal{C}_c(\Omega)$ normato L^p .

Teorema II.7 (di Riesz-Frechet)

Lo spazio delle funzioni continue a supporto compatto contenuto in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ normato dalla norma L^p ha per completamento lo spazio $L^p(\Omega)$.

II.1.3 Esempi di spazi di Banach

È già noto al lettore che gli spazi $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ sono di Banach nella norma euclidea, perciò, data l'equivalenza delle norme in dimensione finita, si ha che rispetto a qualsiasi norma $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ sono spazi completi.

Nel capitolo I abbiamo dimostrato che gli spazi $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ sono completi per $1 \leq p \leq \infty$. Nel seguito esaminiamo alcuni altri semplici esempi di spazi di Banach.

Esempio II.1 ($B(\tilde{X})$)

Con $\mathcal{B}(X)$ denotiamo lo spazio vettoriale delle funzioni **limitate** definite su X a valori in $\mathbb{C}$, e X è uno spazio di misura. Possiamo normare lo spazio $\mathcal{B}(X)$ con la **norma uniforme** o norma del sup:

$$\|f\|_\infty \doteq \sup_{x \in X} |f(x)|$$

non è neanche il caso di mostrare che si tratta di una norma (dovrebbe essere già nota dal corso di Analisi I). Mostriamo che lo spazio in questione è di Banach.

Sia $\{f_n\}$ una successione di Cauchy a valori in $\mathcal{B}(X)$. Allora per ogni $x \in X$ abbiamo

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$$

dunque $\{f_n(x)\} \subset \mathbb{C}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{C}$ completo perciò ammette limite $f(x)$. Abbiamo, intanto, che f_n ammette limite puntuale f . Vogliamo dimostrare che la convergenza a f è uniforme. Vale

$$|f(x) - f_n(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_m(x) - f_n(x)| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m - f_n\|_\infty$$

Ma per ogni ε fissato esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che se $m, n > \nu$ allora $\|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon$, perciò preso $n > \nu$ si ha, per ogni x ,

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

da cui la convergenza è uniforme. Ora, f_m è limitata perciò dominata da $K \in \mathbb{R}^+$

$$\sup_{x \in X} |f(x)| \leq \sup_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| + \sup_{x \in X} |f_m(x)| \leq \varepsilon + K$$

dunque $f \in \mathcal{B}(X)$, la tesi.

D'ora in poi X sarà uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto secondo numerabile. Ricordiamo, una volta per tutte, che uno spazio è **di Hausdorff** se ogni coppia di punti distinti ammette due intorni (uno per ciascun punto) disgiunti; è **localmente compatto** se ogni punto possiede un intorno compatto ed è **secondo numerabile** se esiste una collezione numerabile di aperti tale che ogni aperto si possa esprimere come unione di elementi della collezione.

Esempio II.2 ($\mathcal{C}_B(X)$)

Lo spazio $\mathcal{C}_B(X)$ è lo spazio vettoriale delle funzioni continue e limitate definite in X a valori in $\mathbb{C}$ (o in un qualsiasi altro spazio di Banach, normato da $|\cdot|$). Su $\mathcal{C}_B(X) \subset \mathcal{B}(X)$ definiamo ancora la norma uniforme

$$\|f\|_\infty \doteq \sup_{x \in X} |f(x)|$$

e vediamo che così si ottiene uno spazio di Banach.

Se $\{f_n\} \subset \mathcal{C}_B(X)$ è di Cauchy allora converge uniformemente a una funzione limitata $f \in \mathcal{B}(X)$. Ci basta allora mostrare che f è continua. Abbiamo

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|$$

ora, pur di scegliere n abbastanza grande abbiamo, per convergenza puntuale,

$$|f(x) - f_n(x)|, |f(y) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

poi, siccome, f_n è continua, pur di scegliere y sufficientemente vicino a x abbiamo

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

da cui la continuità.

Si è incidentalmente dimostrato che *il limite uniforme di una successione di funzioni continue è continuo*.

Esempio II.3

Un altro esempio di spazio che si può normare con la norma uniforme è l'insieme delle funzioni continue a supporto compatto, $\mathcal{C}_c(X) \subset \mathcal{C}_B(X)$ (per il teorema di Weierstraß). Stavolta però lo spazio non è di Banach. Consideriamo la seguente successione in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$

$$f_n(x) \doteq \begin{cases} (\sin x)/x - 1, & |x| < 2n\pi, \ x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \text{ e } |x| \geq 2n\pi \end{cases}$$

Siccome da un certo n in poi in ogni punto $f_n(x) = (\sin x)/x$, la successione converge in $\mathcal{C}_B(\mathbb{R})$

$$f_n(x) \doteq \begin{cases} (\sin x)/x - 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

che **non** è a supporto compatto.

Esempio II.4 ($\mathcal{C}_\infty(X)$)

Con $\mathcal{C}_\infty(X)$ si indica lo spazio delle funzioni continue che vanno a 0 all'infinito: tali cioè che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un compatto K_ε tale che per le x al di fuori di K_ε $|f(x)| < \varepsilon$. Ovviamente $\mathcal{C}_\infty(X) \subset \mathcal{C}_B(X)$. Vogliamo mostrare che si tratta di uno spazio completo. Se f_n è di Cauchy, allora converge a una continua limitata f . Dunque, fissiamo $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$, per cui $\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon/2$ e $|f_n(x)| < \varepsilon/2$ per $x \in K_{\varepsilon/2}^c$, allora, per gli stessi x

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \leq \|f - f_n\|_\infty + |f_n(x)| < \varepsilon.$$

Consideriamo ora $f \in \mathcal{C}_\infty(X)$ e fissiamo $\varepsilon > 0$. Fuori da K_ε la funzione è dominata da ε . Passiamo a considerare la funzione **continua** g che sia eguale a f su $K_{\varepsilon'}$ e nulla al di fuori di

$K_{\varepsilon'}$, quest'ultimo sia un compatto con $K_{\varepsilon} \subset K_{\varepsilon'}$. Allora $g \in \mathcal{C}_c(X)$ e

$$\|f - g\|_{\infty} = \sup_{x \in K_{\varepsilon'}} |f(x) - g(x)| < 2\varepsilon$$

Ne deriva che $\mathcal{C}_c$ è denso in $\mathcal{C}_{\infty}$.

Esempio
II.5 ($\mathcal{C}(K)$)

Consideriamo infine lo spazio delle funzioni continue definite su un compatto $\mathcal{C}(K)$. Allora $\mathcal{C}(K) = \mathcal{C}_c(K) = \mathcal{C}_B(K)$ perciò i tre spazi sono completi.

II.1.4 Spazi di Hilbert

Si ha la seguente

Definizione II.5 *Uno spazio di prodotto scalare, completo nella norma indotta dal prodotto scalare stesso si dice di Hilbert.*

Esempi di spazi di Hilbert sono $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ dotati del prodotto scalare standard. Nel capitolo I, abbiamo visto che $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio di Hilbert e tale è $\ell^2(\mathbb{C})$. Quest'ultimo risultato è ridimostrato autonomamente nel seguente

Esempio
II.6 ($\ell^2(\mathbb{C})$)

Consideriamo l'insieme ℓ^2 delle successioni a valori complessi $a \doteq \{a_n\} \subset \mathbb{C}$ tali che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$$

Notiamo che ℓ^2 è uno spazio vettoriale, siano $a = \{a_n\}, b = \{b_n\} \in \ell^2$, allora

$$|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| \leq 2 \max\{|a_n|, |b_n|\}$$

$$|a_n + b_n|^2 \leq 4 \max\{|a_n|^2, |b_n|^2\} \leq 4(|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

per il teorema di confronto delle serie numeriche $a + b \in \ell^2$. Analogamente per $\alpha a, \alpha \in \mathbb{C}$. Dotiamo ℓ^2 di un prodotto scalare

$$(a, b) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* b_n,$$

la definizione è ben posta, infatti, dalla disuguaglianza di Schwartz in $\mathbb{C}^m$,

$$\left| \sum_{n=1}^m a_n^* b_n \right|^2 \leq \sum_{n=1}^m |a_n|^2 \sum_{n=1}^m |b_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 < \infty$$

passando al limite per $m \rightarrow \infty$ si ottiene

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* b_n \right| < \infty$$

Passiamo a verificare che si tratta effettivamente di un prodotto scalare:

(i) antisimmetria:

$$(a, b) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* b_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n^* = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (b_n^* a_n) \right)^* = (b, a)^*$$

(ii) ovviamente $\|a\| \geq 0$, inoltre $\|a\| = 0 \Leftrightarrow a_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}$, poiché la successione delle somme parziali S_N è monotona crescente e non negativa:

$$0 \leq S_N \leq \sup_{\mathbb{N}} S_N = 0 \Rightarrow S_N = 0 \Rightarrow a_n = 0;$$

(iii) linearità nella seconda variabile (alla moda dei fisici!):

$$\begin{aligned} (a, b + \lambda c) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* (b_n + \lambda c_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* b_n + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* c_n = \\ &= (a, b) + \lambda (a, c) \end{aligned}$$

Notiamo che il prodotto scalare definito in ℓ^2 è il limite per $n \rightarrow \infty$ del prodotto scalare standard di $\mathbb{C}^n$. I vettori di ℓ^2 possono essere visti come vettori di $\mathbb{C}^n$ con $n \rightarrow \infty$

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$$

Mostriamo adesso che lo spazio ℓ^2 è completo, sicché è di Hilbert. Consideriamo la successione di elementi di ℓ^2 $\{a^{(m)}\} \subset \ell^2$, $a^{(m)} = \{a_l^{(m)}\}_{l \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$. $a^{(m)}$ sia di Cauchy, allora fissato ε esiste $\nu(\varepsilon)$ per cui

$$\|a^{(n)} - a^{(m)}\|^2 = \sum_{l=1}^{\infty} |a_l^{(n)} - a_l^{(m)}|^2 < \varepsilon^2 \text{ se } n, m > \nu(\varepsilon)$$

siccome per ogni $l \in \mathbb{N}_0$

$$|a_l^{(n)} - a_l^{(m)}|^2 \leq \sum_{l=1}^{\infty} |a_l^{(n)} - a_l^{(m)}|^2$$

per ogni l la successione numerica $\{a_l^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ è di Cauchy ed essendo $\mathbb{C}$ completo, esiste il limite

$$\mathbb{C} \ni a_l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_l^{(n)}$$

Consideriamo allora la successione $a = \{a_l\}_{l \in \mathbb{N}_0}$, facciamo vedere che appartiene a ℓ^2 ed inoltre $a^{(n)} \rightarrow a$ in norma ℓ^2 . Dalla condizione di Cauchy troviamo che per ogni M

$$\sum_{l=1}^M |a_l^{(n)} - a_l^{(m)}|^2 < \varepsilon^2 \text{ se } n, m > \nu(\varepsilon)$$

passando al limite per $m \rightarrow \infty$

$$\sum_{l=1}^M |a_l^{(n)} - a_l|^2 < \varepsilon^2 \text{ se } n > \nu(\varepsilon)$$

e al limite per $M \rightarrow \infty$

$$\|a^{(n)} - a\|^2 = \sum_{l=1}^{\infty} |a_l^{(n)} - a_l|^2 < \varepsilon^2 \text{ se } n > \nu(\varepsilon)$$

- dunque $a^{(n)}$ converge in norma ℓ^2 ad a . Inoltre, $a^{(n)} - a \in \ell^2$, sicché $a = a^{(n)} - (a^{(n)} - a) \in \ell^2$.

II.2 Ortogonalità

Con la prima sezione abbiamo esaurito le proprietà topologiche salienti degli spazi di Banach e di Hilbert. Adesso intendiamo concentrarci sulle proprietà geometriche degli spazi di prodotto scalare e dunque degli spazi di Hilbert. Tali proprietà ruotano tutte attorno al concetto di ortogonalità che esamineremo, dapprima in uno spazio di prodotto scalare, e poi, in tutto il suo fulgore, in uno spazio di Hilbert.

II.2.1 Ortogonalità e relazione del parallelogramma

Definizione II.6 *In uno spazio di prodotto scalare due vettori si dicono ortogonali se hanno prodotto scalare nullo.*

Notiamo che la stretta positività del prodotto scalare (che abbiamo assunto per ipotesi) garantisce il fatto che il prodotto scalare è non degenere. Infatti, sia dato un vettore x ortogonale a tutti i vettori dello spazio, in particolare $(x, x) = 0$, perciò $x = 0$. L'unico vettore ortogonale a tutti i vettori dello spazio è il vettore nullo.

Un risultato elementare, ma di fondamentale importanza è il seguente

Teorema II.8
(di Pitagora)

Siano dati due vettori ortogonali x, x' in uno spazio di prodotto scalare, allora

$$\|x + x'\|^2 = \|x\|^2 + \|x'\|^2$$

Più in generale vale il seguente

Teorema II.9
(del parallelogramma)*In uno spazio di prodotto scalare vale*

$$\|x + x'\|^2 + \|x - x'\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|x'\|^2$$

Dimostrazione È un semplice calcolo

$$\begin{aligned} \|x + x'\|^2 + \|x - x'\|^2 &= (x, x) + (x', x') + 2\operatorname{Re}(x, x') + (x, x) + (x', x') - 2\operatorname{Re}(x, x') = \\ &= 2(x, x) + 2(x', x') = 2\|x\|^2 + 2\|x'\|^2 \end{aligned}$$

(c.v.d.)

Siccome nel teorema compaiono solo le norme, può sorgere il dubbio che la tesi sia valida anche su spazi sui quali non sia definito il prodotto scalare. D'altra parte, nella dimostrazione abbiamo usato pesantemente il fatto che la norma fosse esprimibile come prodotto scalare. Cominciamo col porre la seguente

Definizione II.7 Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato. La norma è detta *hilbertiana* se esiste un prodotto scalare su X tale che

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}, \quad \forall x \in X$$

Vale allora il seguente

Teorema II.10 Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato. La norma è *hilbertiana* se e solo se soddisfa la relazione del parallelogramma

$$\|x + x'\|^2 + \|x - x'\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|x'\|^2, \quad \forall x, x' \in X$$

Dimostrazione Se X ha norma hilbertiana abbiamo già mostrato che questo implica la relazione del parallelogramma. Il viceversa è più complicato. Supponiamo che X sia uno spazio vettoriale complesso. Definiamo allora la mappa $\phi : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ come segue

$$\phi(x, x') \doteq \frac{1}{4} \left(\|x + x'\|^2 - \|x - x'\|^2 \right) + \frac{1}{4i} \left(\|x + ix'\|^2 - \|x - ix'\|^2 \right)$$

È banale dimostrare a questo punto che

$$(i) \quad \phi(x', x)^* = \phi(x, x');$$

$$(ii) \quad \phi(x, ix') = i\phi(x, x');$$

$$(iii) \quad \phi(x, x) = \|x\|^2.$$

Dalla relazione del parallelogramma si ottiene poi, per ogni $x, x', x'' \in X$

$$\|x + x' + x''\|^2 + \|x\|^2 + \|x'\|^2 + \|x''\|^2 = \|x + x'\|^2 + \|x + x''\|^2 + \|x' + x''\|^2$$

da cui si ottiene

$$\phi(x, x' + x'') = \phi(x, x') + \phi(x, x'')$$

Perciò, per ogni intero n si ha

$$\phi(x, nx') = n\phi(x, x')$$

Ora, sia $x' = n(x'/n)$ allora

$$\phi(x, x') = \phi\left(x, n\frac{x'}{n}\right) = n\phi\left(x, \frac{x'}{n}\right) \Rightarrow \frac{1}{n}\phi(x, x') = \phi\left(x, \frac{x'}{n}\right)$$

dunque la relazione sarà vera per ogni $q \in \mathbb{Q}$. Per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ e poiché la norma è continua, si ha

$$\phi(x, kx') = k\phi(x, x')$$

per ogni $k \in \mathbb{R}$. Ma visto che si ha anche $\phi(x, ix') = i\phi(x, x')$ la relazione di sopra resta valida per ogni $k \in \mathbb{C}$. Resta perciò dimostrata la linearità nella seconda variabile. La positività è ovvia, se poi $\phi(x, x) = 0$ allora $\|x\| = 0$ e $x = 0$. ϕ è dunque un prodotto scalare.

Se X fosse stato reale si sarebbe ragionato allo stesso modo usando

$$\phi(x, x') = \frac{1}{4} \left(\|x + x'\|^2 - \|x - x'\|^2 \right).$$

(c.v.d.)

Per inciso, uno spazio in cui valga la relazione del parallelogramma si dice **prehilbertiano**, perciò il teorema dimostrato asserisce che uno spazio è di prodotto scalare se e solo se è prehilbertiano.

Esempio II.7 Consideriamo in $\ell^p(\mathbb{C})$ i due elementi

$$\begin{aligned}\{h_n\} &\doteq (1, 1, 0, 0, \dots), \\ \{k_n\} &\doteq (1, -1, 0, 0, \dots);\end{aligned}$$

abbiamo

$$\begin{aligned}\{h_n\} + \{k_n\} &= (2, 0, 0, \dots), \\ \{h_n\} - \{k_n\} &= (0, 2, 0, \dots);\end{aligned}$$

inoltre $\|\{h_n\}\|_p = \|\{k_n\}\|_p = 2^{1/p}$, $\|\{h_n + k_n\}\|_p = \|\{h_n - k_n\}\|_p = 2$ dunque

$$\begin{aligned}\|\{h_n + k_n\}\|_p^2 + \|\{h_n - k_n\}\|_p^2 &= 8 \\ 2\|\{h_n\}\|_p^2 + 2\|\{k_n\}\|_p^2 &= 4 \cdot 2^{2/p} = 2^{2(1+1/p)}\end{aligned}$$

allora la relazione del parallelogramma vale se e solo se

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{p} \Leftrightarrow p = 2$$

Solo se $p = 2$ $\ell^p(\mathbb{C})$ ha norma hilbertiana. Ne consegue che l'unico spazio sul quale la norma ℓ^p è indotta da un prodotto scalare è ℓ^2 . Siccome gli ℓ^p sono casi particolari di spazi $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, si ha in generale che su $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, per $p \neq 2$, la norma non è indotta da alcun prodotto scalare.

Prima di concludere, una semplice

Proposizione II.11 *Un insieme di vettori ortogonali non nulli in uno spazio di prodotto scalare, forma un sistema linearmente indipendente.*

Dimostrazione Ricordiamo che una famiglia anche infinita di vettori si dice linearmente indipendente se preso ad arbitrio un numero finito di vettori della famiglia si ottiene un sistema indipendente. Siano allora $\{u_1, \dots, u_m\}$ ortogonali e non nulli. Sia

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i = 0$$

moltiplichiamo scalarmente ambo i membri per u_j otteniamo

$$0 = \sum_{i=1}^m \alpha_i (u_i, u_j) = \alpha_j (u_j, u_j)$$

(c.v.d.) ma essendo $u_j \neq 0$ si ottiene $\alpha_j = 0$, la tesi.

II.2.2 Ortocomplemento

Definita la nozione di ortogonalità è piuttosto naturale introdurre l'ortocomplementazione

Definizione II.8 *Dato uno spazio prehilbertiano H , sia M un sottoinsieme non vuoto di H . Si chiama **complemento ortogonale** di M , e si indica con $M^\perp$, il sottoinsieme di H costituito dai vettori ortogonali a M .*

**Proprietà
dell'ortocom-
plemento**

In simboli si ha

$$M^\perp \doteq \{x \in H \mid (u, x) = 0, \forall u \in M\}$$

Notiamo anzitutto che $M^\perp$ è non vuoto, contenendo il vettore nullo. 0 è l'unico vettore ortogonale a tutti i vettori di H e come tale $\{0\} = H^\perp$. Inoltre, siccome tutti i vettori sono ortogonali a 0 $\{0\}^\perp = H$.

$M^\perp$ come varietà lineare chiusa Si ha poi che $M^\perp$ è un sottospazio: $0 \in M^\perp$; se $x, y \in M^\perp$ allora $\forall u \in M$ $(u, x) = (u, y) = 0$ sicché

$$(u, x + \lambda y) = (u, x) + \lambda (u, y) = 0.$$

Sia adesso $\{x_n\} \subset M^\perp$ convergente a $\bar{x} \in H$ e sia $u \in M$, allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, vale

$$(u, x_n) = 0$$

passando al limite per $n \rightarrow \infty$ per continuità del prodotto scalare, si ha

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (u, x_n) = (u, \bar{x})$$

perciò $\bar{x} \in M^\perp$. Ne consegue che $M^\perp$ è chiuso. D'ora in poi con la parola **sottospazio** indicheremo, salvo avviso contrario, **varietà lineare chiusa**. In ogni caso,

$$(M^\perp)^a = M^\perp$$

$M \cap M^\perp$ Calcoliamo adesso l'intersezione di M con $M^\perp$; sia $x \in M \cap M^\perp$ allora per ogni $u \in M$ si ha $(u, x) = 0$, in particolare $(x, x) = 0$ perciò $x = 0$. Perciò, se $0 \in M$ allora l'intersezione è il vettore nullo, altrimenti l'intersezione è vuota.

Relazioni di inclusione Sia ora $M \subset N$, e sia $x \in N^\perp$, allora per ogni $u \in N$ vale $(x, u) = 0$, ma se u descrive tutto N , descrive tutto M , perciò $x \in M^\perp$: allora $N^\perp \subset M^\perp$. Allargando M si aumentano le condizioni per l'appartenenza all'ortocomplemento, di conseguenza l'ortocomplemento si restringe.

Ortocomplemento dell'ortocomplemento Consideriamo adesso $M^{\perp\perp} \doteq (M^\perp)^\perp$. Sia $u \in M$, allora per ogni $x \in M^\perp$ vale $(u, x) = 0$, ne consegue che $u \in M^{\perp\perp}$ e dunque

$$M \subset M^{\perp\perp}.$$

Da quest'ultima relazione si trova, ortocomplementando, che $M^{\perp\perp\perp} \subset M^\perp$ tramite la relazione di inclusione di prima; se invece sostituiamo a $M^\perp$ $M^{\perp\perp}$ diventa $M^{\perp\perp\perp}$ e allora $M^\perp \subset M^{\perp\perp\perp}$, da cui

$$M^\perp = M^{\perp\perp\perp}.$$

Ortocomplemento della chiusura Consideriamo M^a , siccome $M \subset M^a$ si ha $(M^a)^\perp \subset M^\perp$. Sia ora $x \in M^\perp$ e consideriamo un qualsiasi elemento $u \in M^a$, allora esiste una successione di vettori di M , u_n , convergente a u , ne consegue che, per continuità,

$$(u, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, x) = 0$$

allora $x \in (M^a)^\perp$. Infine,

$$(M^a)^\perp = M^\perp$$

Varietà lineari generate Prima di proseguire vogliamo stabilire un risultato che riguarda le varietà lineari generate da un insieme di vettori. Consideriamo una famiglia qualsiasi di varietà lineari W_α aventi intersezione non vuota $W \doteq \bigcap_\alpha W_\alpha$. Vogliamo dimostrare che W è ancora una varietà lineare. Anzitutto abbiamo che $0 \in W$. Inoltre, se $x, y \in W$, allora per ogni α $x, y \in W_\alpha$, sicché $x + \lambda y \in W_\alpha$ per ogni α . Dunque anche $x + \lambda y \in W$. Se i W_α sono sottospazi, allora sono tutti chiusi e perciò la loro intersezione è ancora chiusa e perciò W è un sottospazio. Detto questo poniamo

Definizione II.9 Dato un sottoinsieme M in uno spazio normato, si dice **varietà lineare generata da M** , $\mathcal{VM}$, la più piccola varietà lineare contenente M . Si dice **sottospazio generato da M** , $\text{Span} \langle M \rangle$, il più piccolo sottospazio contenente M .

La definizione è ben posta in forza delle considerazioni precedenti e del fatto che

$$\begin{aligned} \mathcal{VM} &\doteq \bigcap_{M \subset W \text{ varietà lineari}} W \\ \text{Span} \langle M \rangle &\doteq \bigcap_{M \subset W \text{ sottospazi}} W \end{aligned}$$

Uno dei risultati più importanti sulle varietà e sui sottospazi generati è dato dal seguente

Teorema II.12 Dato un sottoinsieme M in uno spazio normato, si ha che il sottospazio generato da M è la

chiusura della varietà lineare generata da M stesso:

$$(\mathcal{V}M)^a = \text{Span} \langle M \rangle$$

Dimostrazione Anzitutto è banale constatare che $\mathcal{V}M \subset \text{Span} \langle M \rangle$. Infatti, sia $x \in \mathcal{V}M$, allora x appartiene a ogni varietà contenente M . Dunque, x apparterrà a tutti i sottospazi (che in particolare sono varietà lineari) contenenti M . Infine, $x \in \text{Span} \langle M \rangle$. Ora, $(\mathcal{V}M)^a$ è un chiuso contenente $\mathcal{V}M$ e quindi M . Se mostriamo che è una varietà lineare, abbiamo che è un sottospazio, per definizione, allora

$$\text{Span} \langle M \rangle = (\mathcal{V}M)^a.$$

Il fatto che la chiusura di una varietà lineare è ancora una varietà lineare è attestato dal lemma (c.v.d.) che segue.

Lemma II.13 *In uno spazio normato la chiusura di una varietà lineare è una varietà lineare.*

Dimostrazione Sia W una varietà lineare e consideriamone la chiusura W^a . $0 \in W \subset W^a$. Siano $x, y \in W$, allora esistono due successioni a valori in W , $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, che convergono, rispettivamente, a x e y . Abbiamo allora che, se $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$x + \lambda y = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

ma per la continuità della somma e della moltiplicazione per uno scalare si ha

$$x + \lambda y = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \lambda y_n)$$

(c.v.d.) per linearità di W , la successione $\{x_n + \lambda y_n\}$ è a valori in W , dunque $x + \lambda y \in W^a$.

Concentriamoci ancora un attimo sulle varietà lineari generate. Anzitutto mostriamo la seguente (ovvia!)

Proposizione II.14 *Sia W un sottoinsieme non vuoto di uno spazio normato. W è una varietà lineare se e solo se presi ad arbitrio $\{u_1, \dots, u_n\} \in W$ e $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \in \mathbb{C}$, si ha che $\sum \lambda_i u_i \in W$*

Dimostrazione Sia W una varietà lineare, allora, per induzione, essa contiene le combinazioni lineari finite dei suoi vettori. Viceversa, ponendo tutti i coefficienti eguali a 0 si ha che $0 \in W$. Poi, preso

(c.v.d.) $n = 1$, si ha che $\lambda u \in W$ se $u \in W$ e, posto $n = 2$, si ha che $u_1 + u_2 \in W$ se $u_1, u_2 \in W$.

Siamo adesso in grado di caratterizzare $\mathcal{V}M$

Proposizione II.15 *Dato un sottoinsieme M di uno spazio normato, la varietà lineare $\mathcal{V}M$ generata da M è l'insieme delle combinazioni lineari finite dei vettori di M .*

Dimostrazione Sia $\mathcal{S}$ l'insieme delle combinazioni lineari finite di M . Se $M = \{\emptyset\}$ si ha che $\mathcal{S} = \{0\} = \mathcal{V}M$. Sia ora M non vuoto. Presa una combinazione lineare a coefficienti tutti nulli si ha subito che $0 \in \mathcal{S}$. Prendiamo ora due vettori $u, v \in \mathcal{S}$, allora esistereanno $u_1, \dots, u_n \in M$ e $v_1, \dots, v_m \in M$ tali che

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i, \quad v = \sum_{j=1}^m \kappa_j v_j$$

allora è immediato verificare che $u + \alpha v \in \mathcal{S}$. Dunque $\mathcal{S}$ è una varietà lineare contenente M . Perciò $\mathcal{V}M \subset \mathcal{S}$. Sia ora W una varietà lineare contenente M . Per la proposizione precedente W contiene tutte le combinazioni lineari finite dei suoi vettori, ma W contiene M , perciò tutte

(c.v.d.) le combinazioni di vettori di M . Infine, $\mathcal{S} \subset W$ e perciò $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}M$. La tesi.

Ortocomplemento e sottospazi generati

Sia $x \in M^\perp$, consideriamo un qualunque vettore $w \in \mathcal{VM}$, allora esistono $u_1, \dots, u_n \in M$ tali che

$$w = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \Rightarrow (x, w) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x, u_i) = 0$$

dunque, per ogni $w \in \mathcal{VM}$ si ha $(x, w) = 0$. Ne deriva che $M^\perp \subset (\mathcal{VM})^\perp$. D'altra parte, siccome $M \subset \mathcal{VM}$ vale anche $(\mathcal{VM})^\perp \subset M^\perp$ perciò

$$M^\perp = (\mathcal{VM})^\perp$$

D'altra parte

$$\text{Span} \langle M \rangle^\perp = ((\mathcal{VM})^a)^\perp = M^\perp$$

dunque

$$M^\perp = (\mathcal{VM})^\perp = \text{Span} \langle M \rangle^\perp.$$

Riassumiamo quanto trovato

Teorema II.16
(proprietà dell'ortocomplemento)

Sia M un sottoinsieme non vuoto di uno spazio prehilbertiano H , allora si ha

- (i) $\{0\}^\perp = H$ e $H^\perp = \{0\}$;
- (ii) $M^\perp$ è un sottospazio (una varietà lineare chiusa) di H ;
- (iii)

$$M \cap M^\perp = \begin{cases} \{0\}, & \text{se } 0 \in M \\ \emptyset, & \text{altrimenti} \end{cases};$$

- (iv) $M \subset N \subset H$ implica $N^\perp \subset M^\perp$;

- (v) $M \subset M^{\perp\perp}$;

- (vi) $(M^a)^\perp = M^\perp$;

- (vii) $M^{\perp\perp\perp} = M^\perp$;

- (viii) $M^\perp = (\mathcal{VM})^\perp = \text{Span} \langle M \rangle^\perp$.

Ortocomplemento negli spazi di Hilbert

Vogliamo adesso vedere che cosa si può aggiungere se assumiamo che lo spazio prehilbertiano sia completo, cioè sia uno spazio di Hilbert. Come è d'uso denotiamo lo spazio di Hilbert con una H maiuscola calligrafica: $\mathcal{H}$. Stabiliamo il seguente

Lemma II.17

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e sia W un suo sottospazio. Allora

- (i) per ogni $x \in \mathcal{H}$ fissato, posto

$$d(x, W) \doteq \inf_{w \in W} \|x - w\|,$$

esiste $w_0 \in W$ tale che

$$d(x, W) = \|x - w_0\|;$$

- (ii) se W è un sottospazio proprio, esiste in $W^\perp$ un elemento non nullo, cioè $W^\perp$ non è banale.

Dimostrazione

Consideriamo la successione $\{w_n\} \subset W$ minimizzante, tale cioè che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - w_n\| = d(x, W)$$

Mostriamo che si tratta di una successione di Cauchy: usando la regola del parallelogramma abbiamo

$$\|(x - w_n) + (x - w_m)\|^2 + \|(x - w_n) - (x - w_m)\|^2 = 2 \left(\|x - w_n\|^2 + \|x - w_m\|^2 \right)$$

ne consegue che

$$\|(x - w_n) - (x - w_m)\|^2 = \|w_m - w_n\|^2 = 2 \left(\|x - w_n\|^2 + \|x - w_m\|^2 \right) - 4 \left\| x - \frac{w_n + w_m}{2} \right\|^2$$

Ora, $(w_n + w_m)/2$ appartiene a W e dunque

$$d^2(x, W) \leq \left\| x - \frac{w_n + w_m}{2} \right\|^2$$

dunque

$$\begin{aligned} \|w_m - w_n\|^2 &\leq 2 \left(\|x - w_n\|^2 + \|x - w_m\|^2 \right) - 4d^2(x, W) = \\ &= 2 \left(\|x - w_n\|^2 - d^2(x, W) \right) + 2 \left(\|x - w_m\|^2 - d^2(x, W) \right) \end{aligned}$$

da cui la condizione di Cauchy. Ora, W è un sottospazio, perciò è chiuso. $\mathcal{H}$ è **completo**, perciò W , chiuso in un completo, è **completo** (prendiamo una successione di Cauchy in W essa converge a un elemento di $\mathcal{H}$, ma questo, essendo limite di una successione a valori in W , appartiene alla chiusura di W e dunque a W). Dunque esiste il limite $w_0 \in W$ di $\{w_n\}$. Abbiamo allora per continuità di somma e norma

$$\|x - w_0\| = \left\| x - \lim_{n \rightarrow \infty} w_n \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - w_n\| = d(x, W).$$

Veniamo alla seconda parte. Certamente esiste $x \in H$ con $x \notin W$ e, dunque, $x \neq 0$. Consideriamo $w_0 \in W$ tale che

$$\|x - w_0\| = d(x, W)$$

Poniamo $u \doteq x - w_0$. Siccome $x \notin W$ sarà certamente u non nullo. Vogliamo vedere che $u \in W^\perp$. Sia $k \in \mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$ se il campo è reale), abbiamo, se $w \in W$

$$\|u + kw\| = \|x - (w_0 - kw)\| \geq d(x, W) = \|u\|$$

da cui, essendo le norme non negative,

$$\|u + kw\|^2 - \|u\|^2 \geq 0$$

prendiamo ora $k \doteq (w, u)t$ con $t \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$\|u + t(w, u)w\|^2 - \|u\|^2 \geq 0$$

Calcoliamo il primo membro

$$\begin{aligned} \|u + t(w, u)w\|^2 &= \|u\|^2 + t^2 |(w, u)|^2 \|w\|^2 + 2 \operatorname{Re} [t(w, u)(u, w)] = \\ &= \|u\|^2 + t^2 |(w, u)|^2 \|w\|^2 + 2t |(w, u)|^2 \end{aligned}$$

perciò

$$|(w, u)|^2 (t^2 \|w\|^2 + 2t) \geq 0, \quad \forall w \in W, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

se fosse $|(w, u)|^2 \neq 0$, dovrebbe allora risultare per tutti i w

$$1 - \|w\|^2 < 0$$

da cui $\|w\|^2 > 1$, il che è assurdo, dunque

$$(c.v.d.) \quad \forall w \in W \quad |(w, u)|^2 = 0 \Rightarrow (w, u) = 0 \Rightarrow u \in W^\perp.$$

La conseguenza più importante del lemma è la seguente

$$\operatorname{Span} \langle M \rangle^{\perp\perp} = \operatorname{Span} \langle M \rangle$$

Già sappiamo che risulta $\operatorname{Span} \langle M \rangle \subset \operatorname{Span} \langle M \rangle^{\perp\perp}$. Ora, supponiamo per assurdo che $\operatorname{Span} \langle M \rangle$ sia diverso da $\operatorname{Span} \langle M \rangle^{\perp\perp}$. Ora $\operatorname{Span} \langle M \rangle^{\perp\perp}$ è uno spazio di Hilbert essendo un sottospazio di uno spazio di Hilbert, perciò, dal lemma, esiste un vettore u non nullo di $\operatorname{Span} \langle M \rangle^{\perp\perp}$ che è ortogonale a tutti i vettori di $\operatorname{Span} \langle M \rangle$. Perciò

$$0 \neq u \in \operatorname{Span} \langle M \rangle^\perp \cap \operatorname{Span} \langle M \rangle^{\perp\perp}$$

il che nega la (iii) del teorema precedente.

Ora, sappiamo che $M^\perp = \operatorname{Span} \langle M \rangle^\perp$, riapplicando l'ortogonale

$$M^{\perp\perp} = \operatorname{Span} \langle M \rangle^{\perp\perp} = \operatorname{Span} \langle M \rangle.$$

Se M è una varietà lineare, si ha $\operatorname{Span} \langle M \rangle = M^a$ (è ovvio M^a è il più piccolo chiuso contenente M perciò $M^a \subset \operatorname{Span} \langle M \rangle$, ma la chiusura di una varietà è un sottospazio, perciò $\operatorname{Span} \langle M \rangle \subset M^a$) dunque se M è una varietà lineare

$$M^{\perp\perp} = M^a$$

se poi $M^\perp$ è un sottospazio $M^\perp = M$ e $M^{\perp\perp} = M$.

Notiamo, infine, che se risulta $M^{\perp\perp} = M$ allora M è un sottospazio perché l'ortogonale di un qualsiasi insieme è un sottospazio (proposizione (ii) del teorema precedente). Concludiamo con il seguente teorema riassuntivo:

Teorema II.18
(proprietà
dell'ortocom-
plemento in
uno spazio
di Hilbert)

Se $M \subset \mathcal{H}$, spazio di Hilbert, allora risulta

- (i) $\text{Span} \langle M \rangle^{\perp\perp} = M^{\perp\perp} = \text{Span} \langle M \rangle$;
- (ii) se M è una varietà lineare allora $M^{\perp\perp} = M$;
- (iii) M è un sottospazio se e solo se $M = M^{\perp\perp}$.

II.2.3 Il teorema della proiezione

Continuiamo a lavorare in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ e consideriamo un sottospazio $W \subset \mathcal{H}$. Come sappiamo anche $W^\perp$ è un sottospazio, ma c'è di più: $\mathcal{H}$ si ottiene come somma diretta di W e di $W^\perp$, cioè ogni sottospazio di uno spazio di Hilbert ammette un supplementare canonico. Vale cioè il

Teorema II.19
(della
proiezione)

Sia W un sottospazio di $\mathcal{H}$ spazio di Hilbert, allora

$$\mathcal{H} = W \oplus W^\perp.$$

Dimostrazione

Chiamiamo $S \doteq W \oplus W^\perp$. In primo luogo, mostriamo che si tratta di un sottospazio di $\mathcal{H}$. Il fatto che sia una varietà lineare è ovvio. Vediamo che è chiusa. Sia $\{x_n\} \subset S$ convergente a $x \in \mathcal{H}$. Essa definisce allora due successioni $\{w_n\} \subset W$ e $\{w'_n\} \subset W^\perp$ tali che, per ogni intero n , sia

$$x_n = w_n + w'_n.$$

Ora, usando il teorema di Pitagora

$$\|x_n - x_m\|^2 = \|(w_n - w_m) + (w'_n - w'_m)\|^2 = \|w_n - w_m\|^2 + \|w'_n - w'_m\|^2$$

Ne deriva che, siccome $\{x_n\}$ è di Cauchy, sono di Cauchy anche $\{w_n\}$ e $\{w'_n\}$. Dunque, essendo W e $W^\perp$ chiusi e perciò completi (dalla completezza di $\mathcal{H}$), si ha che esistono

$$W \ni w = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$$

$$W^\perp \ni w' = \lim_{n \rightarrow \infty} w'_n$$

di modo che, per unicità del limite e per continuità della somma,

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (w_n + w'_n) = w + w'$$

perciò $x \in S$.

Adesso, $W \subset S$ e $W^\perp \subset S$, da cui, passando all'ortogonale

$$S^\perp \subset W^\perp, \quad S^\perp \subset W^{\perp\perp} = W$$

ne consegue che

$$S^\perp \subset W \cap W^\perp = \{0\}$$

dunque $S^\perp = \{0\}$ e passando nuovamente all'ortogonale, essendo S un sottospazio,

$$S = S^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = \mathcal{H}$$

(c.v.d.) cioè $W \oplus W^\perp = \mathcal{H}$.

**Unicità della
decomposizione**

In forza del teorema, ogni vettore x di $\mathcal{H}$ si decompone nella somma $x = w + w'$ con $w \in W$ e $w' \in W^\perp$. La decomposizione è unica, siano $u \in W$ e $u' \in W^\perp$ tali che $x = u + u'$, allora, sottraendo membro a membro si ha $0 = (w - u) + (w' - u')$, da cui $v = w - u \in W$ e $v' = w' - u' \in W^\perp$ sono linearmente dipendenti, perciò $v, v' \in W \cap W^\perp$ e, infine, $v = v' = 0$.

**Operatori di
proiezione**

L'unicità della decomposizione comporta la possibilità di associare a ogni sottospazio W la mappa

$$\text{se } x = w + w', \quad w \in W, \quad w' \in W^\perp \Rightarrow \quad P_W : \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \rightarrow & \mathcal{H} \\ x & \mapsto & w \end{array}$$

Si ha subito che P_W è lineare, perciò prende il nome di **operatore di proiezione ortogonale** (o proiettore) su W .

Proprietà di P_W Vediamo le proprietà più semplici di P_W . Ogni vettore di $\mathcal{H}$ viene mandato in un vettore di W , e ogni vettore di W viene mandato in sé, sicché

$$R(P_W) = W$$

$$P_W|_W = \mathbb{I}_W$$

dove R denota l'immagine dell'applicazione (o **range**), mentre con $\mathbb{I}$ intendiamo l'applicazione identica.

Ogni vettore di $W^\perp$ viene mandato in 0, siccome tutti gli altri vettori sono mandati in sé, si ha

$$\ker(P_W) = W^\perp$$

Infine, si ha che P_W è idempotente: $P_W^2 = P_W$ e che

$$P_W + P_{W^\perp} = \mathbb{I}$$

L'ultima proprietà che rileviamo è legata direttamente (a differenza delle precedenti) all'ortogonalità. Vogliamo cioè dimostrare che

$$\{x \in \mathcal{H} \mid P_W x = x\} = \{x \in \mathcal{H} \mid \|P_W x\| = \|x\|\}$$

Una inclusione è ovvia. Sia ora x nel secondo insieme, allora, per ipotesi

$$\|P_W(w + w')\|^2 = \|w + w'\|^2 = \|w\|^2 + \|w'\|^2$$

ma

$$\|P_W(w + w')\|^2 = \|w\|^2$$

sicché $\|w'\|^2 = 0$ e $w' = 0$ e $x = w \in W$. In definitiva

$$R(P_W) = \{x \in \mathcal{H} \mid P_W x = x\} = \{x \in \mathcal{H} \mid \|P_W x\| = \|x\|\}$$

Sia $x \in \mathcal{H}$ e sia W un sottospazio di $\mathcal{H}$. Allora esiste ed è unico $w = P_W x$. Notiamo che ovviamente $x - P_W x = w'$ è ortogonale a W e che, per il lemma II.17, $d(x, W) = \|x - P_W x\|$.

II.2.4 Sistemi ortonormali

Introduciamo la naturale

Definizione II.10 In uno spazio prehilbertiano H , si chiama **sistema ortonormale** (brevemente **s.o.n.**) un sottoinsieme non vuoto di H i cui elementi siano tali che

$$(x, x') = \delta_{x, x'} \doteq \begin{cases} 1, & x = x' \\ 0, & x \neq x' \end{cases}$$

Come abbiamo già mostrato nella proposizione II.11 ogni s.o.n. è **libero**, cioè linearmente indipendente.

Separabilità e s.o.n. Ricordiamo che uno spazio topologico X è separabile se esiste un sottoinsieme $A \subset X$ tale che

(i) $A^a = X$, cioè A è denso in X ;

(ii) A è numerabile.

Ad esempio $\mathbb{R}$ è separabile per il teorema di densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Negli spazi di Hilbert si ha

Proposizione II.20 Se H è separabile ogni suo s.o.n. è al più numerabile.

Dimostrazione Sia M un s.o.n. di H , allora se $x \neq x'$ vale

$$\|x - x'\|^2 = \|x\|^2 + \|x'\|^2 = (x, x) + (x', x') = 2 \Rightarrow \|x - x'\| = \sqrt{2}$$

Sia ora A un sottoinsieme denso e numerabile di H e x, x' una coppia di elementi di M . Fissato $\varepsilon > 0$ esistono $u_x, u_{x'} \in A$ tali che

$$\|u_x - x\| < \varepsilon \quad \|u_{x'} - x'\| < \varepsilon$$

allora

$$\|x - x'\| = \|x - u_x + u_x - x' + x' - u_{x'} + u_{x'} - u_x\| < 2\varepsilon + \|u_x - u_{x'}\|$$

se ne deduce che

Scegliamo $\varepsilon = \sqrt{2}/3$ di modo che $\|u_x - u_{x'}\| > \sqrt{2} - 2\varepsilon$ e cioè $u_x \neq u_{x'}$. Stabiliamo allora una corrispondenza iniettiva tra M e A ($x \mapsto u_x$), il che comporta che la cardinalità di M è al più quella di A , cioè M è al più numerabile.

(c.v.d.)

D'ora in avanti considereremo solo **spazi separabili**, salvo avviso contrario. Ciò detto ogni s.o.n. sarà d'ora in avanti indicizzato sugli interi, perciò $M = \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ o, se il s.o.n. è finito, $M = \{u_n\}_{n \in J_N}$.

Prima di proseguire dimostriamo il seguente

Teorema II.21 (di Gram-Schmidt)

In uno spazio di prodotto scalare, dato un sistema finito o numerabile, $\{x_n\}$, linearmente indipendente, è sempre possibile costruire un sistema $\{e_n\}$ ortonormale di vettori costituiti da combinazioni lineari dei vettori di partenza e avente la stessa cardinalità di $\{x_n\}$.

Dimostrazione

Certamente $x_1 \neq 0$, perciò definiamo i due seguenti set di vettori

$$\begin{aligned} y_1 &\doteq x_1, & e_1 &\doteq y_1 / \|y_1\| \\ y_2 &\doteq x_2 - (e_1, x_2) e_1, & e_2 &\doteq y_2 / \|y_2\| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n+1} &\doteq x_{n+1} - \sum_{j=1}^n (e_j, x_{n+1}) e_j, & e_{n+1} &\doteq y_{n+1} / \|y_{n+1}\| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{aligned}$$

Il processo ha un termine solo se il sistema $\{x_n\}$ è finito. In ogni caso, si noti come ciascun y_n è combinazione lineare dei primi n vettori, sicché il sistema $\{y_n\}$ è linearmente indipendente e il sistema $\{e_n\}$ è ben definito. Si ha perciò che il sistema $\{e_n\}$ è indipendente e che per ogni N

$$\mathcal{V}\{e_n\}_{n \leq N} = \mathcal{V}\{x_n\}_{n \leq N}$$

I vettori e_n hanno norma 1. Proviamo per induzione che i vettori y_n sono tutti ortogonali a $y_1 = x_1$ e perciò che gli e_n formano un sistema ortonormale:

$$(x_1, y_2) = (x_1, x_2) - (e_1, x_2) (x_1, e_1) = (x_1, x_2) - \frac{(x_1, x_1)}{\|x_1\|^2} (x_1, x_2) = 0$$

supposto y_1 ortogonale a tutti i vettori y_j (e perciò e_j) con $1 < j \leq n$, abbiamo

$$\begin{aligned} (x_1, y_{n+1}) &= \left(x_1, x_{n+1} - \sum_{j=1}^n (e_j, x_{n+1}) e_j \right) = (x_1, x_{n+1}) - (e_1, x_{n+1}) (x_1, e_1) = \\ &= (x_1, x_{n+1}) - \frac{(x_1, x_1)}{\|x_1\|^2} (x_1, x_{n+1}) = 0. \end{aligned}$$

(c.v.d.)

II.2.5 Disuguaglianza di Bessel e identità di Parseval negli spazi prehilbertiani

Avvertenza

In questa sottosezione ci occuperemo della serie di Fourier negli spazi prehilbertiani. Nella prossima sottosezione lavoreremo invece su spazi di Hilbert, semplificando e arricchendo la trattazione. Siccome ridimostreremo tutti i risultati che ci occorrono, questa sottosezione può anche essere saltata, almeno in prima lettura.

Avvertiamo inoltre che, ultimata questa sottosezione, abbandoneremo definitivamente gli spazi di prodotto scalare di modo da fissare l'ipotesi di completezza.

Proiezione ortogonale

Negli spazi di Hilbert, abbiamo visto che la proiezione ortogonale di x sul sottospazio W è tale che

$$d(x, W) = \|x - P_W x\|$$

Vogliamo definire la proiezione ortogonale per varietà lineari in uno spazio prehilbertiano tenendo conto di quanto accade negli spazi di Hilbert:

Proposizione II.22 Sia H uno spazio di prodotto scalare.

(i) Sia $x \in H$, e sia $r \doteq \{c + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$, la retta affine per c parallela a $v \neq 0$, entrambi in H . Allora esiste ed è unico $a \in r$, tale che $\|x - a\| = d(x, r)$, tale punto è tale che $x - a \in V^\perp$.

(ii) $V \subset H$, sottospazio vettoriale. Sia $x \in H$, allora

$$\|x - y\| = d(x, V), y \in V \Leftrightarrow \|x - y\| \in V^\perp$$

se esiste y è unico e si dice proiezione ortogonale di x su V .

Dimostrazione Vediamo (i). Sia $a \in r$

$$0 = (x - a, v) \Leftrightarrow 0 = (x - c - \lambda v, v) \Leftrightarrow 0 = (x - c, v) - \lambda \|v\|^2 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = \frac{(x - c | v)}{\|v\|^2}$$

da cui l'unicità di a . Il fatto che $d(x, a) \leq d(x, w)$ per ogni $w \in r$ si ha notando che $w = a + \alpha v$

$$d(x, w) = \|x - a - \alpha v\|^2 = \|(x - a) - \alpha v\|^2 = \|x - a\|^2 + \|\alpha v\|^2 \geq d(x, a)$$

Vediamo (ii). Sia $(x - y) \in V^\perp$ allora per ogni $v \in V$, $x - y$ è ortogonale a v , usando ancora Pitagora

$$\|x - (y + v)\|^2 = \|(x - y) + v\|^2 = \|x - y\|^2 + \|v\|^2$$

questa è minima se e solo se $\|v\|^2 = 0$, cioè se e solo se $v = 0$. Viceversa risulti $y \in V$ e $d(x, y) = d(x, V)$. Se y realizza la minima distanza da V , realizza la minima distanza da ogni sottoinsieme di V contenente y , ad esempio ciascuna retta affine per y parallela a $v \in V$,

(c.v.d.) allora per quanto detto sopra $x - y$ è ortogonale a v . Dunque, $x - y \in V^\perp$.

Sia allora V un sottospazio di dimensione finita m , preso un sistema ortonormale di m vettori di V , allora la proiezione di x su V vale

$$P_V(x) = \sum_{k=1}^m (u_k, x) u_k$$

infatti $(x - P_V(x)) \in V^\perp$. Per vedere questo è sufficiente che il vettore x meno la sua proiezione è ortogonale a ciascun u_k (infatti il sistema è una base di V : è linearmente indipendente e ha cardinalità eguale alla dimensione di V). Abbiamo

$$(u_i, x - P_V(x)) = (u_i, x) - \sum_{k=1}^m (u_k, x) (u_k, u_i) = (u_i, x) - (u_i, x) = 0$$

Diseguaglianza di Bessel

Consideriamo ora una famiglia numerabile di vettori ortonormali, $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Per ogni $m \in \mathbb{N}$, definiamo

$$V_m = \mathcal{V}\{u_i\}_{i \in J_m}$$

allora

$$P_{V_m}(x) = \sum_{k=1}^m (u_k, x) u_k \doteq p_m(x)$$

vale anche

$$\begin{aligned} \|x - p_m(x)\|^2 &= d^2(x, V_m) \geq 0 \\ \|x\|^2 &= \|x - p_m\|^2 + \|p_m\|^2 \end{aligned}$$

da cui si ottiene $\|p_m\|^2 \leq \|x\|^2$ e

$$\|x\|^2 \geq \|p_m\|^2 = \sum_{k=1}^m |(u_k, x)|^2$$

passando al limite per $m \rightarrow \infty$, si ottiene la **diseguaglianza di Bessel**

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(u_k, x)|^2 \leq \|x\|^2$$

Identità di Parseval

Adesso mostreremo quando vale l'eguaglianza (**identità di Parseval**). Sia W la varietà lineare generata da un s.o.n. $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ in H . Allora, definiti gli spazi V_m come gli spazi generati dai primi m vettori del s.o.n., si ha

$$W = \mathcal{V} \{u_i\}_{i \in \mathbb{N}} = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$$

dimostriamo che nella disuguaglianza di Bessel vale l'eguaglianza se e solo se x appartiene alla chiusura di W , cioè al sottospazio generato dal s.o.n..

Dalla disuguaglianza di Bessel si ha che la serie è limitata e a termini positivi, perciò convergente. Altre considerazioni. $V_m \subset V_{m+1}$, perciò la successione $\{d(x, V_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ è decrescente e ammette limite nel suo estremo inferiore che è maggiore o eguale a 0. Vediamo che

$$\xi \doteq \inf_{m \in \mathbb{N}} d(x, V_m) = d(x, W),$$

infatti, per ogni m , $d(x, V_m) \leq d(x, W)$ per cui $\xi \leq d(x, W)$. Ora, fissiamo $\varepsilon > 0$, troviamo un $\bar{m}$ per cui

$$\xi + \frac{\varepsilon}{2} > d(x, V_{\bar{m}})$$

ma esiste $v \in V_{\bar{m}} \subset W$ per cui

$$d(x, V_{\bar{m}}) > d(x, v) - \frac{\varepsilon}{2}$$

infine, per ogni ε si trova $v \in W$ talché

$$\xi + \varepsilon > d(x, v)$$

la tesi. Si ha perciò che

$$d(x, W) = \lim_{m \rightarrow \infty} d(x, V_m)$$

D'altra parte,

Lemma II.23 Se $W \subset X$ spazio metrico si ha che

$$(i) \ d(x, W) = d(x, W^a);$$

$$(ii) \text{ se } W \text{ è chiuso, } x \in W \text{ se e solo se } d(x, W) = 0.$$

Dimostrazione $W \subset W^a$ perciò $d(x, W) \geq d(x, W^a)$. D'altra parte, per ogni $z \in W^a$ e $y \in W$

$$d(x, W) \leq d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$$

ma fissato $\varepsilon > 0$ esiste $y \in W$ tale che $d(y, z) < \varepsilon$, per cui, per ogni z

$$d(x, W) - \varepsilon < d(x, z)$$

per massimalità dell'inf

$$d(x, W) < d(x, W^a) + \varepsilon \Rightarrow d(x, W) \leq d(x, W^a).$$

Vediamo (ii). $x \in W$ se e solo se esiste $\{x_n\} \subset W$ con $x_n \rightarrow x$, siccome d è continua

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = 0$$

cioè per ogni ε esiste un punto $x_\nu \in W$ tale che

$$d(x, x_\nu) < \varepsilon$$

da cui

$$(c.v.d.) \quad \inf_{w \in W} d(x, w) = 0.$$

Per il lemma $x \in W^a$ se e solo se $d(x, W^a) = 0$ (essendo W^a chiuso), cioè se e solo se $d(x, W^a) = d(x, W) = \lim_{m \rightarrow \infty} d(x, V_m) = 0$, cioè se e solo se

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|x - p_m(x)\| = 0 \Leftrightarrow x = \lim_{m \rightarrow \infty} p_m(x)$$

cioè

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (u_k, x) u_k$$

Ancora, $x \in W^a$ se e solo se $\lim_{m \rightarrow \infty} d^2(x, V_m) = 0$, se e solo se

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|x - p_m(x)\|^2 = 0$$

ma $\|x - p_m(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_m(x)\|^2$, perciò, il tutto vale se e solo se

$$\|x\|^2 - \lim_{m \rightarrow \infty} \|p_m(x)\|^2 = 0$$

infine, essendo

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|p_m(x)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(u_k, x)|^2$$

$x \in W^a$ se e solo se

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(u_k, x)|^2$$

Abbiamo quindi dimostrato i seguenti

Teorema II.24
(disuguaglianza di Bessel)

Sia $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ un sistema ortonormale nello spazio prehilbertiano H , allora vale la disuguaglianza di Bessel

$$\|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} |(u_k, x)|^2$$

Teorema II.25
(identità di Parseval)

Sia $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ un sistema ortonormale nello spazio prehilbertiano H . Vale l'identità di Parseval se e solo se x appartiene alla chiusura dello spazio generato dal sistema ortonormale:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(u_k, x)|^2 = \|x\|^2 \Leftrightarrow x \in \text{Span} \langle u_k \rangle_{k \in \mathbb{N}}$$

Inoltre

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (u_k, x) u_k \Leftrightarrow x \in \text{Span} \langle u_k \rangle_{k \in \mathbb{N}}$$

Chiudiamo ricordando che i numeri $\{(x, u_k)\}$ sono chiamati **coefficienti di Fourier** di x relativi al s.o.n. $\{u_k\}$. La serie di cui nell'identità di Parseval,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x, u_k) u_k$$

è la serie di Fourier, e si ha che un elemento di H è sviluppabile in serie di Fourier del s.o.n. $\{u_k\}$ (i.e. la sua serie di Fourier converge a esso nella norma indotta dal prodotto scalare) se e solo se esso appartiene al sottospazio generato dal s.o.n. $\{u_k\}$.

II.2.6 Disuguaglianza di Bessel e identità di Parseval negli spazi di Hilbert

Torniamo a considerare le proprietà dei s.o.n. negli spazi di Hilbert. Vale il seguente

Teorema II.26
(disuguaglianza di Bessel)

Dato un s.o.n. $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ di $\mathcal{H}$ si ha

$$\|x\|^2 \geq \sum_{k \in \mathbb{N}} |(u_k, x)|^2, \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Dimostrazione

Abbiamo che, usando anche il teorema di Pitagora (gli u_k sono ortonormali)

$$0 \leq \left\| x - \sum_{k=0}^N (u_k, x) u_k \right\|^2 = \|x\|^2 + \sum_{k=0}^N |(u_k, x)|^2 - 2 \sum_{k=0}^N |(u_k, x)|^2$$

da cui la tesi, passando al limite per $N \rightarrow \infty$ (che esiste ed è reale essendo la successione delle somme parziali crescente e limitata superiormente). Siccome la serie è a termini positivi

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} |(u_k, x)|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |(u_k, x)|^2.$$

(c.v.d.)

Dalla disuguaglianza di Bessel si ricava che la successione dei coefficienti di Fourier di x appartiene a $\ell^2(\mathbb{C})$. Dimostriamo, infine, il seguente

Teorema
II.27 (di
Fischer-Riesz)

Dato uno spazio $\mathcal{H}$ di Hilbert, sia $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un suo s.o.n. e sia $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di scalari. Allora

(i) *la serie*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} k_n u_n$$

converge se e solo se $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$;

(ii) *in caso di convergenza, posto*

$$x \doteq \sum_{n \in \mathbb{N}} k_n u_n$$

vale

$$k_n = (u_n, x), \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} |k_n|^2 = \|x\|^2$$

Dimostrazione Se il s.o.n. ha cardinalità finita, la (i) è superflua e per la (ii)

$$(u_m, x) = \left(u_m, \sum_{n \in J_N} k_n u_n \right) = \sum_{n \in J_N} k_n (u_m, u_n) = k_m.$$

Sia ora il s.o.n. numerabile. Dimostriamo intanto la tesi per la serie ordinata come segue

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_n u_n$$

(l'ordinamento della serie dei moduli quadri di k_n è invece ininfluente, perché si tratta di una serie reale a termini positivi). Consideriamo la successione delle somme parziali s_n della serie di sopra. Il resto di Cauchy di s_n vale, se $m < n$

$$\|s_n - s_m\|^2 = \left\| \sum_{i=m+1}^n k_i u_i \right\|^2 = \sum_{i=m+1}^n |k_i|^2$$

la serie dei $|k_n|^2$ converge se e solo se è di Cauchy, se e solo se s_n è di Cauchy, se e solo se s_n converge (sia il campo scalare che $\mathcal{H}$ sono completi). In caso di convergenza, la (ii) discende dalla continuità del prodotto scalare

$$(u_m, x) = \left(u_m, \sum_{n=0}^{\infty} k_n u_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n (u_m, u_n) = k_m$$

Infine,

$$\|x\|^2 = \left(\sum_{m=0}^{\infty} k_m u_m, \sum_{n=0}^{\infty} k_n u_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} k_n k_m^* (u_m, u_n) = \sum_{n=0}^{\infty} |k_n|^2.$$

Vogliamo ora vedere che per ogni biiezione $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_n u_n = \sum_{n=0}^{\infty} k_{\sigma(n)} u_{\sigma(n)}$$

Notiamo che ambedue convergono se ne converge una (poiché la serie dei $|k_n|^2$ è eguale a quella dei $|k_{\sigma(n)}|^2$). Sia x la somma della prima serie, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero ν_ε tale che, se $m \geq \nu_\varepsilon$, vale

$$\left\| x - \sum_{n=0}^m k_n u_n \right\| < \varepsilon$$

ma, allora,

$$\left\| x - \sum_{n=0}^m k_n u_n \right\|^2 = \left\| \sum_{n=m+1}^{\infty} k_n u_n \right\|^2 = \sum_{n=m+1}^{\infty} |k_n|^2 < \varepsilon^2$$

Se prendiamo $N \in \mathbb{N}$ per cui $\sigma(k) \geq \nu_\varepsilon$ se $k \geq N$ (gli indici minori ν_ε sono finiti) allora

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |k_{\sigma(n)}|^2 \leq \sum_{n=\nu_\varepsilon+1}^{\infty} |k_n|^2 < \varepsilon^2$$

visto che la prima serie contiene meno termini positivi della seconda e tutti quelli nella prima sono nella seconda. Allora siccome anche la serie degli $k_{\sigma(n)} u_{\sigma(n)}$ converge, si ha

$$\left\| x - \sum_{n=0}^N k_{\sigma(n)} u_{\sigma(n)} \right\| < \varepsilon$$

(c.v.d.) e perciò si ha la tesi.

L'identità di Parseval

Consideriamo ancora uno spazio di Hilbert e un suo s.o.n. $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Prendiamo ora $x \in \mathcal{H}$ e costruiamo la successione dei suoi coefficienti di Fourier $k_n = (u_n, x)$. Per la disuguaglianza di Bessel essa è ℓ^2 , perciò, per il teorema di Fischer-Riesz esiste $y \in \mathcal{H}$ tale che

$$y = \sum_{n \in \mathbb{N}} (u_n, x) u_n$$

Sempre dal teorema di Fischer-Riesz abbiamo

$$(u_n, y) = (u_n, x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

cioè

$$(u_n, y - x) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

da cui

$$y - x \in \{u_n\}^\perp = (\mathcal{V}\{u_n\})^\perp = \text{Span}\langle u_n \rangle^\perp$$

Ora, $y \in \text{Span}\langle u_n \rangle$ esistendo una successione a valori in $\mathcal{V}\{u_n\}$ che converge a y . Perciò se scegliamo $x \in \text{Span}\langle u_n \rangle$, troviamo

$$y - x \in \text{Span}\langle u_n \rangle^\perp \cap \text{Span}\langle u_n \rangle = \{0\}$$

cioè $y = x$. Viceversa se

$$x = \sum_{n \in \mathbb{N}} (u_n, x) u_n$$

allora $x \in \text{Span}\langle u_n \rangle^\perp$. Abbiamo così dimostrato il seguente

Teorema II.28
(identità di Parseval)

Dato uno spazio $\mathcal{H}$ di Hilbert, sia $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un suo s.o.n. allora

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n \in \mathbb{N}} (u_n, x) u_n \Leftrightarrow x \in \text{Span}\langle u_n \rangle \\ \|x\|^2 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} |(u_n, x)|^2 \Leftrightarrow x \in \text{Span}\langle u_n \rangle \end{aligned}$$

II.2.7 Sistemi ortonormali completi

Riconsideriamo il teorema di Parseval, se $\text{Span}\langle u_n \rangle = \mathcal{H}$ allora per ogni $x \in \mathcal{H}$

$$x = \sum_{n \in \mathbb{N}} (u_n, x) u_n$$

I s.o.n. che godono della proprietà di generare $\mathcal{H}$ si dicono **completi**. Tuttavia è preferibile introdurre i sistemi completi tramite la seguente

Definizione II.11 *Dato uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, un s.o.n. di $\mathcal{H}$ si dice completo se non è sottoinsieme proprio di alcun altro s.o.n. di $\mathcal{H}$.*

Vale allora il

Teorema II.29 *Dato uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, sia $\{u_n\}$ un suo s.o.n., allora i seguenti fatti sono equivalenti*

- (i) $\{u_n\}$ è completo;
- (ii) $(u_n, x) = 0$ se e solo se $x = 0$;

(iii) $\text{Span} \langle u_n \rangle = \mathcal{H}$, i.e. lo spazio delle combinazioni lineari finite di vettori del s.o.n. è denso in $\mathcal{H}$;

(iv) per ogni $x \in \mathcal{H}$ vale

$$x = \sum_{n \in \mathbb{N}} (u_n, x) u_n;$$

(v) per ogni $x, x' \in \mathcal{H}$ risulta

$$(x, x') = \sum_{n \in \mathbb{N}} (x, u_n) (u_n, x');$$

(vi) per ogni $x \in \mathcal{H}$ vale l'identità di Parseval

$$\|x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |(u_n, x)|^2.$$

Dimostrazione Vediamo che (i) $\Rightarrow$ (ii). Per assurdo, se (ii) non fosse vera, esisterebbe $0 \neq x_0 \in \mathcal{H}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $(u_n, x_0) = 0$. Consideriamo allora $v_0 \doteq x_0 / \|x_0\|$, l'insieme $\{v_0\} \cup \{u_n\}$ è un s.o.n. che contiene $\{u_n\}$ ed essendo $(u_n, v_0) \neq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'inclusione è propria: assurdo.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). La (ii) significa che $\{u_n\}^\perp = \text{Span} \langle u_n \rangle^\perp = \{0\}$, passando di nuovo all'ortogonale abbiamo $\text{Span} \langle u_n \rangle = \text{Span} \langle u_n \rangle^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = \mathcal{H}$.

Il fatto che (iii) $\Rightarrow$ (iv) discende dal teorema sull'identità di Parseval.

(iv) $\Rightarrow$ (v). Abbiamo

$$(x, x') = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} (u_n, x) u_n, \sum_{m \in \mathbb{N}} (u_m, x') u_m \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} (x, u_n) (u_m, x') \delta_{nm} = \sum_{n \in \mathbb{N}} (x, u_n) (u_n, x')$$

(v) $\Rightarrow$ (vi) sostituendo a x' , x .

(vi) $\Rightarrow$ (i), procediamo per assurdo. Esiste allora almeno un vettore v_0 di norma 1 ortogonale a tutti i vettori u_n , applichiamo a questo l'identità di Parseval

$$1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |(u_n, v_0)|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} 0 = 0$$

(c.v.d.) assurdo.

Separabilità e s.o.n.c. Adesso si pone il problema di mostrare (eventualmente sotto certe ipotesi) che i s.o.n.c. esistono. Un'altra questione sui s.o.n.c. è data dalla loro cardinalità.

Teorema II.30 Uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ è separabile se e solo se ammette un s.o.n.c. $\{u_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. In questo caso,

(i) la cardinalità del s.o.n.c. è finita se e solo se la dimensione di $\mathcal{H}$ è finita e vale

$$\dim \mathcal{H} = \#\Lambda;$$

(ii) se la dimensione di $\mathcal{H}$ non è finita, allora la cardinalità di ogni suo s.o.n.c. è eguale alla potenza del numerabile.

Dimostrazione ($\Rightarrow$) Infatti, sia $\{u_n\}$ un s.o.n.c. in $\mathcal{H}$, l'insieme $\mathcal{V}\{u_n\}$ delle combinazioni lineari finite degli u_n è denso in $\mathcal{H}$, d'altra parte l'insieme F delle combinazioni lineari finite degli u_n a coefficienti razionali (con parte reale e immaginaria razionali) è denso in $\mathcal{V}\{u_n\}$ ed è numerabile. In definitiva $\mathcal{H}$ è separabile.

($\Leftarrow$) Sia $\mathcal{H}$ separabile, allora esiste A numerabile e denso in $\mathcal{H}$. Poniamo perciò $A = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Da A possiamo ottenere un sottoinsieme O (di cardinalità al più numerabile) formato da elementi ortonormali O si ottiene esaminando successivamente gli elementi $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ e selezionando quelli indipendenti e, quindi, ortonormalizzando alla Gram-Schmidt. Ne abbiamo che $\mathcal{V}O = \mathcal{V}A$, ma A è denso in $\mathcal{H}$, perciò $\text{Span} \langle A \rangle = (\mathcal{V}A)^a = \mathcal{H}$. Chiudendo, $\text{Span} \langle O \rangle = \text{Span} \langle A \rangle = \mathcal{H}$.

Veniamo all'asserto sulla cardinalità del s.o.n.c. Come sappiamo essa è al più pari alla potenza del numerabile. Se $\dim \mathcal{H}$ è finita allora esistono al più $\dim \mathcal{H}$ vettori indipendenti e perciò $\#O$ è finita. Dal punto (iv) si ha poi che gli elementi di O generano $\mathcal{H}$ e perciò O è una base di $\mathcal{H}$ e dunque

$$\#O = \dim \mathcal{H}.$$

Se viceversa la cardinalità di O è finita anche la dimensione di O è finita, essendo O una base per $\mathcal{H}$. Sia ora $\dim \mathcal{H}$ non finita. La cardinalità di O non può superare la potenza del numerabile, ma non può neppure essere finita, altrimenti avremmo $\dim \mathcal{H}$ finita. Ne concludiamo che la (c.v.d.) cardinalità di O deve avere la potenza del numerabile.

In dimensione finita tutti gli spazi di Hilbert sono separabili.

S.o.n.c. e basi Nell'ambiente hilbertiano finito-dimensionale, cardinalità (comune a tutti) dei s.o.n.c. e dimensione coincidono. Nell'ambito infinito-dimensionale, si ha che la cardinalità (comune) dei s.o.n.c. diviene numerabile, mentre non è semplice capire cosa avviene della dimensione (cardinalità comune a tutte le **basi** dello spazio). Si potrebbe dimostrare che in queste condizioni la dimensione di $\mathcal{H}$ diviene almeno pari alla potenza del continuo, ma a noi il concetto di base non interesserà nel caso infinito-dimensionale. D'ora in poi parlando di dimensione conveniamo di riferirci sempre alla **dimensione ortogonale**, cioè alla cardinalità comune di tutti i s.o.n.c.

Prima di concludere un

Esempio II.8 Consideriamo nello spazio ℓ^2 l'insieme di vettori e_n tali che

$$e_n = \left\{ e_j^{(n)} \right\}_{j \in \mathbb{N}_0}, \quad e_j^{(n)} \doteq \delta_{j,n}$$

Il set dato è evidentemente ortonormale. Vediamo se è completo. Sia allora $x \in \ell^2$ talché, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$0 = (e_n, x_0) = \sum_{j=1}^{\infty} e_j^{(n)} x_j = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{j,n} x_j = x_n$$

- da cui $x = 0$. Il set standard $\{e_n\}$ è completo in ℓ^2 .

II.3 Serie di Fourier in L^2 sugli intervalli reali

In questa sezione facciamo una digressione per applicare quanto appreso allo spazio di Hilbert $L^2(I, m) \doteq L^2(I)$, cioè lo spazio delle funzioni Lebesgue- L^2 definite su un intervallo reale limitato e chiuso, a valori in $\mathbb{C}$. Vogliamo determinare un sistema completo di $L^2(I)$ e mostrare, dunque, che quest'ultimo è separabile.

A questo scopo ci occorrono alcuni risultati preliminari. Avvertiamo che la prenderemo un po' alla larga!

II.3.1 Il teorema di approssimazione polinomiale di Weierstraß

Cominciamo col dimostrare il seguente

Teorema II.31
(dell'approssimazione polinomiale)

Sia f una funzione a valori reali (o complessi) continua e definita sull'intervallo chiuso $[0, 1]$. Allora esiste una successione di polinomi P_n che converge uniformemente a f . Possiamo costruire P_n nel modo seguente

$$P_n(t) = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} f\left(\frac{p}{n}\right) x^p (1-x)^{n-p}$$

Dimostrazione Differenziando rispetto a x

$$(x+y)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x^p y^{n-p}$$

e moltiplicando quanto si ottiene per x si ricava

$$nx(x+y)^{n-1} = \sum_{p=0}^n p \binom{n}{p} x^p y^{n-p},$$

analogamente differenziando due volte e moltiplicando per x^2 si ha

$$n(n-1)x^2(x+y)^{n-1} = \sum_{p=0}^n p(p-1) \binom{n}{p} x^p y^{n-p}.$$

Posto $y \doteq 1-x$ e

$$r_p(x) \doteq \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p},$$

abbiamo

$$\sum_{p=0}^n r_p(x) = 1, \quad \sum_{p=0}^n p r_p(x) = nx, \quad \sum_{p=0}^n p(p-1) r_p(x) = n(n-1)x^2,$$

Ne consegue che

$$\sum_{p=0}^n (p-nx)^2 r_p(x) = n^2 x^2 (1-x) - 2nx(nx) + \sum_{p=0}^n p^2 r_p(x)$$

ora,

$$\sum_{p=0}^n p^2 r_p(x) = \sum_{p=0}^n p(p-1) r_p(x) + \sum_{p=0}^n p r_p(x) = n(n-1)x^2 + nx$$

da cui

$$\sum_{p=0}^n (p-nx)^2 r_p(x) = nx(1-x).$$

Dal teorema di Weierstraß possiamo assumere $|f(x)| \leq M \in \mathbb{R}$. Dall'uniforme continuità di f , esiste, per ogni $\varepsilon > 0$, $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon, \text{ se } |x - x'| < \delta, x, x' \in [0, 1]$$

Ora,

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{p=0}^n f\left(\frac{p}{n}\right) r_p(x) \right| &= \left| \sum_{p=0}^n \left[f(x) - f\left(\frac{p}{n}\right) \right] r_p(x) \right| \leq \sum_{|p-nx| \leq \delta n} \left| f(x) - f\left(\frac{p}{n}\right) \right| r_p(x) \\ &\quad + \sum_{|p-nx| > \delta n} \left| f(x) - f\left(\frac{p}{n}\right) \right| r_p(x) \end{aligned}$$

per il primo addendo, siccome $r_p(x) \geq 0$

$$\sum_{|p-nx| \leq \delta n} \left| f(x) - f\left(\frac{p}{n}\right) \right| r_p(x) \leq \varepsilon \sum_{p=0}^n r_p(x) = \varepsilon$$

per il secondo

$$\sum_{|p-nx| > \delta n} \left| f(x) - f\left(\frac{p}{n}\right) \right| r_p(x) \leq 2M \sum_{|p-nx| > \delta n} r_p(x)$$

d'altra parte si deve sommare per $p \leq n$

$$|p-nx| > \delta n \Rightarrow \left(\frac{p-nx}{\delta n} \right)^2 > 1$$

per cui

$$2M \sum_{|p-nx| > \delta n} r_p(x) \leq \frac{2M}{(\delta n)^2} \sum_{p=0}^n (p-nx)^2 r_p(x) = \frac{2M}{(\delta n)^2} nx(1-x) \leq \frac{2M}{\delta^2} \frac{1}{n}$$

(c.v.d.) la tesi.

II.3.2 Il teorema di Stone-Weierstraß

Teorema II.32 Sia X uno spazio compatto e consideriamo l'insieme delle funzioni continue reali definite in esso $\mathcal{C}(X)$. Sia B un sottoinsieme di X tale che

- (i) se $f, g \in B$ allora fg e $\alpha f + \beta g$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, appartengono a B ;
- (ii) la funzione costante 1 appartiene a B ;
- (iii) il limite uniforme di successioni di funzioni a valori in B appartiene a B .

Allora $B = \mathcal{C}(X)$ se e solo se B separa i punti di X , cioè se e solo se per ogni coppia di punti (s_1, s_2) di punti distinti di X , esiste una funzione $x \in B$ per cui $x(s_1) \neq x(s_2)$.

Dimostrazione Se $B = \mathcal{C}(X)$, allora, presi i punti s_1 e s_2 la funzione

$$x(s) \doteq \frac{d(x, s_1)}{d(x, s_1) + d(x, s_2)}$$

è continua (poiché $s_1 \neq s_2$) e vale 0 in s_1 e 1 in s_2 (si tratta della versione negli spazi metrici del lemma di Urysohn).

Passiamo a dimostrare che la condizione è sufficiente. Dal teorema dell'approssimazione polinomiale abbiamo che esiste la successione di polinomi $\{P_n\}$ talché

$$|t| - P_n(t) < \frac{1}{n}, \quad -n \leq t \leq n$$

sicché

$$|f(s) - P_n(f(s))| < \frac{1}{n}, \quad -n \leq f(s) \leq n$$

Ora, $P_n(f)$, per (i), appartiene a B . D'altra parte, dal teorema di Weierstraß, funzioni continue su un compatto sono limitate, perciò, preso $n > \max_X |f(s)|$ si ha, definitivamente,

$$|f(s) - P_n(f(s))| < \frac{1}{n}, \quad \forall s \in X$$

Questo prova, grazie a (iii), che $|f| \in B$ se $f \in B$. Ne consegue che anche $f_1 \wedge f_2$ e $f_1 \vee f_2$ appartengono a B se $f_1, f_2 \in B$.

Sia $h(x) \in \mathcal{C}(X)$. Siano s_1 e s_2 due punti arbitrari distinti di X . Esiste allora $f_{s_1 s_2} \in B$ talché

$$f_{s_1 s_2}(s_1) = h(s_1) \text{ e } f_{s_1 s_2}(s_2) = h(s_2).$$

Infatti, per ipotesi esiste in B la funzione g che separa s_1 e s_2 , cioè per cui $g(s_1) \neq g(s_2)$. Prendiamo allora $f_{s_1 s_2}(s) = \alpha g(s) + \beta$ con α, β determinati dalle condizioni

$$\alpha g(s_1) + \beta = h(s_1)$$

$$\alpha g(s_2) + \beta = h(s_2)$$

Dati $\varepsilon > 0$ e $t \in X$, per ogni $s \in X$ esiste un intorno $U(s)$ di s in cui $f_{st}(u) > h(u) - \varepsilon$ per $u \in U(s)$, poiché la funzione $f_{st} - h$ è continua e vale 0 in s . Sia poi $\{U(s_i), i \leq n\}$, un ricoprimento finito di X compatto, definiamo

$$f_t = f_{s_1} \vee \dots \vee f_{s_n}$$

perciò $f_t \in B$ e $f_t(u) > h(u) - \varepsilon$ per ogni $u \in X$. Abbiamo poi $f_{s_j t}(t) = h(t)$, da cui $f_t(t) = h(t)$. Di conseguenza, esiste un intorno $V(t)$ di t tale che $f_t(u) < h(u) + \varepsilon$ per $u \in V(t)$. Estratto di nuovo un ricoprimento finito $\{V(t_i), i \leq k\}$ di X , definita la funzione

$$f = f_{t_1} \wedge \dots \wedge f_{t_k},$$

troviamo che $f \in B$ e, siccome $f_{t_i}(u) > h(u) - \varepsilon$ per ogni $u \in X$, $f(u) > h(u) - \varepsilon$, per ogni $u \in X$. Inoltre, per $u \in X$ troviamo $j \in J_k$ per cui $u \in V(t_j)$, dunque $f(u) \leq f_{t_j}(u) < h(u) + \varepsilon$. In definitiva, per ogni $h \in \mathcal{C}(X)$ esiste $f \in B$

$$|h(u) - f(u)| < \varepsilon, \quad \forall u \in X$$

ne deriva che, scelto $\varepsilon = 1/n$, h è il limite uniforme di una successione di funzioni in B e perciò (c.v.d.) $h \in B$.

Il teorema può essere esteso ai complessi in modo ovvio se, data una funzione $f \in B$ ci è possibile estrarne parte reale e parte immaginaria in B . In questo caso, queste ultime

soddisfano le ipotesi del teorema di sopra e perciò appartengono a $\mathcal{C}(X)$, la loro combinazione $\operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$ appartiene a $\mathcal{C}(X)$. Affinché $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$ appartengano a B è sufficiente richiedere la condizione

$$f \in B \Rightarrow f^* \in B.$$

Corollario II.33 *Sia X un compatto e $\mathcal{C}(X)$ l'insieme delle funzioni continue a valori complessi definite in X . Sia B un sottoinsieme di X tale che*

- (i) *se $f, g \in B$ allora fg e $\alpha f + \beta g$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, appartengono a B ;*
- (ii) *la funzione costante 1 appartiene a B ;*
- (iii) *il limite uniforme di successioni di funzioni a valori in B appartiene a B .*

Allora $B = \mathcal{C}(X)$ se e solo se B separa X e per ogni $f \in B$ si ha $f^ \in B$.*

II.3.3 Il teorema di approssimazione trigonometrica di Weierstraß

Consideriamo il circolo unitario di $\mathbb{R}^2$, denotiamolo con X . Tale spazio è compatto perciò in esso vale il teorema di Stone-Weierstraß per le funzioni complesse, cioè nell'enunciato del corollario precedente. Sia $f \in \mathcal{C}(X)$, parametrizzato X mediante la coordinata angolo $\theta \in [0, 2\pi]$, $\mathcal{C}(X)$ diviene l'insieme delle funzioni continue su $[0, 2\pi]$ alle quali va aggiunta la condizione $f(0) = f(2\pi)$, per garantire la continuità nel punto singolare della parametrizzazione, $(1, 0)$.

Consideriamo allora l'insieme seguente

$$\mathcal{F} \doteq \{e^{in\theta}, \theta \in [0, 2\pi] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

che si definisce **base di Fourier**. Posto B l'insieme delle funzioni ottenute come combinazioni lineari degli elementi di $\mathcal{F}$ unito con l'insieme delle funzioni che sono limite uniforme di tali combinazioni, si ha che $B = \mathcal{C}(X)$. In altre parole, vale il seguente

Teorema II.34
(dell'approssimazione
trigonometrica)

Ogni funzione continua a valori complessi definita in $[0, 2\pi]$ tale da assumere eguale valore agli estremi dell'intervallo di definizione è approssimabile uniformemente da una successione di polinomi trigonometrici del tipo

$$\sum_n c_n e^{in\theta}.$$

Ovviamente il teorema risulta verificato per f continua e fissa agli estremi di un qualunque intervallo $[a, a+T]$, stavolta però gli elementi di $\mathcal{F}$ hanno la forma

$$\exp\left(in\frac{2\pi}{T}t\right)$$

e posto $\omega \doteq 2\pi/T$ si ha

$$\mathcal{F}_T \doteq \{e^{in\omega t}, t \in [a, a+T] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

avendo effettuato la sostituzione

$$\theta = \omega t.$$

II.3.4 Completezza della base di Fourier

**Ortonormalità
della base
di Fourier**

Consideriamo un intervallo reale di lunghezza T e la relativa base di Fourier che ridefiniamo nel seguente modo

$$\mathcal{F}_T \doteq \left\{ \mathbf{e}_n = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{in\omega t}, t \in [a, a+T] \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Denotato con I l'intervallo in questione abbiamo che $L^2(I)$ è uno spazio di Hilbert per il teorema di completezza. Vogliamo dimostrare che la base di Fourier è un set ortonormale completo. Cominciamo a vedere che il sistema è ortonormale

$$(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m) = \int_a^{a+T} \frac{1}{\sqrt{T}} e^{in\omega t} \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-im\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(n-m)\omega t} dt$$

dove abbiamo cambiato gli estremi di integrazione grazie alla periodicità di $e^{ik\omega t}$, $k \doteq n - m$. Abbiamo

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{ik\omega t} dt = 1, \text{ se } k = 0$$

altrimenti

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{ik\omega t} dt = \frac{1}{T} \frac{1}{ik\omega} [e^{ik\omega t}]_0^T = 0$$

da cui

$$(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m) = \delta_{n,m}.$$

Densità dei polinomi trigonometrici in L^2

Per mostrare la completezza della base di Fourier dobbiamo vedere che l'insieme delle sue combinazioni lineari è denso in $L^2(I)$. Grazie al secondo teorema di Weierstraß dimostrato, ogni funzione continua è approssimabile uniformemente tramite polinomi trigonometrici; siccome la convergenza uniforme implica quella L^2 , troviamo che, **in norma L^2** , l'insieme delle combinazioni lineari finite degli elementi della base di Fourier, cioè l'insieme dei polinomi trigonometrici, è denso nelle funzioni continue sul circolo. Non è difficile vedere che queste ultime sono dense in $\mathcal{C}(I)$. Per quanto abbiamo visto nel capitolo I, abbiamo che le funzioni $\mathcal{C}(I)$ sono dense in $L^2(I)$ e questo completa la dimostrazione del teorema di Fourier. Nondimeno possiamo dimostrare il lemma di densità nel caso reale per la misura di Lebesgue in maniera autonoma (e lasciamo questa istruttiva alternativa al lettore che non si sia soffermato sul primo capitolo).

Teorema II.35
(completezza della base di Fourier)

In $L^2(I)$, il set dei caratteri

$$\mathbf{e}_n \doteq \frac{1}{\sqrt{T}} e^{in\omega t}, \quad t \in [a, a+T], \quad n \in \mathbb{Z}$$

è ortonormale completo.

Dimostrazione

L'abbiamo praticamente già fatta. L'insieme dei polinomi trigonometrici è denso sulle funzioni continue sul circolo. Queste però sono banalmente dense (in norma L^2) su $\mathcal{C}(I)$. Basta scegliere un valore eguale agli estremi e unire rapidamente, con un segmento, la funzione all'estremo fissato in modo da avere un errore piccolo in norma integrale. D'altra parte $\mathcal{C}(I)$, per il lemma di densità, è denso in $L^2(I)$. Allora l'insieme delle combinazioni lineari finite dei caratteri ortonormali $\mathbf{e}_n$ è denso in $L^2(I)$ e perciò $\{\mathbf{e}_n\}$ è un set ortonormale completo.

(c.v.d.)

Siccome ogni funzione $L^2(I)$ può ora essere approssimata con la troncata della sua serie di Fourier che è somma finita di funzioni differenziabili quante volte si vuole troviamo il

Corollario II.36

$\mathcal{C}^k(I)$, $k \leq \infty$, è denso in $L^2(I)$.

Un'altra conseguenza del lemma di densità è data dal seguente

Esempio II.9

L'insieme $\{1, t, t^2, \dots\}$ è un insieme completo (non ortonormale) di $L^2(I)$. Dal teorema di Weierstraß sull'approssimazione polinomiale, ogni funzione è approssimabile in norma sup, e

- perciò L^2 , con una successione di polinomi, ma $\mathcal{C}(I)$ è denso in $L^2(I)$, perciò il set è completo.

II.3.5 Dimostrazione autonoma del lemma di densità

Vogliamo dimostrare che $\mathcal{C}(I)$ è denso in L^2 . Quest'ultimo aspetto non è semplice e lo otterremo attraverso la dimostrazione dei seguenti risultati:

- (i) le funzioni a scalino sono dense in L^1 ;
- (ii) le funzioni L^2 possono essere approssimate (in norma L^2) con funzioni limitate;
- (iii) le funzioni a scalino sono dense in L^2 ;
- (iv) le funzioni a scalino possono essere approssimate (in norma L^2) con funzioni continue.

Ammettiamo di sapere i fatti (iii) e (iv), allora, data una funzione $f \in L^2(I)$ e fissato lo standard $\varepsilon > 0$, troviamo una funzione a scalino φ che dista da f per meno di $\varepsilon/2$ e una continua g che dista da φ per meno di $\varepsilon/2$, allora

$$\|f - g\| \leq \|f - \varphi\| + \|\varphi - g\| < \varepsilon$$

da cui conseguirebbe il seguente

Lemma II.37 (di densità) *L'insieme $\mathcal{C}(I)$ delle funzioni continue definite sul compatto I è denso su $L^2(I)$.*

Dimostrazione (c.v.d.) La dimostrazione verrà fatta passo per passo nel corso della sottosezione, secondo il programma specificato nell'elenco di sopra.

Cominciamo dal risultato più complicato e teoricamente rilevante, la densità delle funzioni a scalino in $L^1(I)$. Per questo risultato dobbiamo sfruttare la definizione di misurabilità di un insieme e di integrale di Lebesgue.

Lemma II.38 *Per ogni $f \in L^1$ a dominio limitato in $\mathbb{R}^n$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione φ a scalino e a supporto compatto a valori in $\mathbb{C}$ tale che*

$$\|f - \varphi\|_{L^1} = \int |f - \varphi| \, d\mathbf{x} < \varepsilon$$

Dimostrazione Basta limitarsi a f positiva e reale, usando poi f^+ , f^- , parte reale e parte immaginaria, determiniamo la tesi nel caso generale.

Se $f \geq 0$, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $0 \leq \phi \leq f$, $\phi = \sum_{k=1}^m c_k \chi_{E_k}$ con $c_k > 0$, semplice per cui

$$\int (f - \phi) \, d\mathbf{x} < \frac{\varepsilon}{2}$$

basta ora trovare φ a scalini per cui

$$\int |\varphi - \phi| \, d\mathbf{x} < \frac{\varepsilon}{2}$$

prendiamo per ciascun E_k un plurirettangolo $A_k \subset E_k$, tale che

$$m(E_k \triangle A_k) \leq a\varepsilon$$

ove $a \equiv \min \{1/2mc_k | k \in J_m\}$, posto

$$\varphi = \sum_{k=1}^m c_k \chi_{A_k}$$

essa avrà supporto compatto e inoltre

$$(c.v.d.) \quad \int (\phi - \varphi) \, d\mathbf{x} = \sum_{k=1}^m c_k m(E_k \triangle A_k) \leq \sum_{k=1}^m c_k a\varepsilon \leq \sum_{k=1}^m \frac{\varepsilon}{2m} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Lemma II.39 *Le funzioni $L^2(S)$, S misurabile, possono essere approssimate in norma L^2 mediante funzioni limitate.*

Dimostrazione Consideriamo $f \in L^2(S)$ non limitata (altrimenti la tesi è ovvia) e positiva (se f non è positiva si ragiona prendendo parte positiva e negativa e usando poi la disuguaglianza triangolare), e sia f_N la troncata N -esima della funzione f , cioè valga

$$f_N(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \text{se } f(\mathbf{x}) \leq N \\ N, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Adesso consideriamo l'integrale

$$\int_S |f - f_N|^2 \, d\mathbf{x} = \int_S |f - N|^2 \chi_{R_N} \, d\mathbf{x}$$

dove χ_{R_N} è la funzione caratteristica dell'insieme R_N dei punti sui quali $f(\mathbf{x}) > N$. Abbiamo dunque una successione di funzioni definite in S ,

$$F_N(\mathbf{x}) \doteq |f(\mathbf{x}) - N|^2 \chi_{R_N}(\mathbf{x})$$

la successione è certamente puntualmente decrescente perché gli insiemi R_N sono incapsulati e perché f è positiva. Ciasuna funzione F_N è sommabile come prodotto di sommabili (f è L^2 perciò è misurabile, tale è allora l'insieme R_N : la sua funzione caratteristica è allora sommabile). Inoltre,

$$|f(\mathbf{x}) - N| \leq |f(\mathbf{x})| + N$$

ma sugli insiemi R_N , si ha $N < |f(\mathbf{x})|$ da cui

$$|f(\mathbf{x}) - N|^2 \leq 4|f(\mathbf{x})|^2$$

e perciò vale il teorema di Beppo Levi

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_S |f - f_N|^2 d\mathbf{x} = \int_S \lim_{N \rightarrow \infty} (|f - N|^2 \chi_{R_N}) d\mathbf{x}$$

Calcoliamo il limite (puntuale) entro integrale: sia $\mathbf{x} \in S$ se $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ allora $\mathbf{x} \in S \setminus R_N$, ne deriva che il limite per $N \rightarrow \infty$ di $F_N(\mathbf{x})$ è nullo. Si conclude perciò che l'insieme sul quale la funzione limite è certamente nulla è il complementare dell'insieme su cui f assume valore infinito. Ma tale insieme è a misura nulla. La funzione limite è dunque nulla su S tranne al più un insieme di misura nulla, essendo una funzione pari a 0 quasi ovunque essa avrà integrale 0:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - f_N\|_{L^2} = 0$$

(c.v.d.) Fissato un ε esiste sempre un N tale che $\|f - f_N\|_{L^2} < \varepsilon$, la tesi.

Lemma II.40 Per ogni $f \in L^2$ a dominio limitato in $\mathbb{R}^n$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione φ a scalino e a supporto compatto a valori in $\mathbb{C}$ tale che

$$\|f - \varphi\|_{L^2} = \left(\int |f - \varphi|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Le funzioni a scalino sono dense in L^2 .

Dimostrazione Data $f \in L^2$ e fissato $\varepsilon > 0$ troviamo una funzione limitata g tale che

$$\|f - g\|_{L^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

ma se g è limitata allora è sommabile, cioè L^1 , perciò troviamo una funzione a scalino tale che

$$\|g - \varphi\|_{L^1} < \left(\frac{\varepsilon}{2M} \right)^2$$

D'altra parte $(g - \varphi)$ è una funzione limitata

$$\|g - \varphi\|_{L^2}^2 = \int_S |g - \varphi|^2 d\mathbf{x} \leq \sup |g - \varphi| \int_S |g - \varphi| d\mathbf{x} = \sup |g - \varphi| \|g - \varphi\|_{L^1}$$

posto $M \doteq (\sup |g - \varphi|)^{1/2}$ si ha

$$(c.v.d.) \quad \|f - \varphi\|_{L^2} < \|f - g\|_{L^2} + \|g - \varphi\|_{L^2} < \varepsilon$$

Concludiamo dunque che le funzioni a scalino sono dense in L^2 (in tutti gli spazi L^p). D'altra parte unendo i salti delle funzioni a scalino con segmenti obliqui abbastanza ripidi si approssimano le funzioni a scalino con funzioni continue, perciò si è dimostrato il lemma di densità, senza far uso di concetti generali di teoria della misura.

II.4 La somma diretta negli spazi di Hilbert

**Somma diretta
di due spazi
di Hilbert**

Siano dati due spazi di Hilbert, $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$. Consideratane la somma diretta $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ vogliamo dotarla della struttura di spazio di Hilbert. Se $x_1, x_2 \in \mathcal{H}_1$ e $y_1, y_2 \in \mathcal{H}_2$ consideriamo $(x_1 \oplus y_1), (x_2 \oplus y_2) \in \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ e poniamo

$$(x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2) = (x_1, x_2)_1 + (y_1, y_2)_2$$

Il fatto che si tratti di un prodotto scalare è ovvio. Vediamo la completezza, si ha

$$\|x_n \oplus y_n - x_m \oplus y_m\|^2 = \|(x_n - x_m) \oplus (y_n - y_m)\|^2 = \|x_n - x_m\|_1^2 + \|y_n - y_m\|_2^2$$

da cui se la successione $x_n \oplus y_n$ è di Cauchy, tali sono le x_n e y_n inoltre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x \oplus y - x_n \oplus y_n\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\|_1^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \|y - y_n\|_2^2 = 0.$$

Analogamente si definisce la somma diretta di un numero finito di spazi di Hilbert.

**Somma diretta
numerabile**

Per concludere vediamo come si effettua la costruzione della somma diretta di una infinità numerabile di spazi di Hilbert. Siano dati gli spazi di Hilbert $\{\mathcal{H}_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ e definiamo

$$\mathcal{H} \doteq \bigoplus_{p=0}^{\infty} \mathcal{H}_p$$

l'insieme dei vettori $\mathbf{x} \doteq (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $x_n \in \mathcal{H}_n$ tali che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|_n^2 < \infty.$$

Su $\mathcal{H}$ definiamo il prodotto scalare (ovvio verificare che di prodotto scalare si tratta effettivamente)

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} (x_n, y_n)_n$$

notiamo che la definizione è ben posta, valendo la disuguaglianza di Schwartz in $\bigoplus_{n=0}^m \mathcal{H}_n$

$$\left| \sum_{n=0}^m (x_n, y_n)_n \right|^2 \leq \sum_{n=0}^m |(x_n, x_n)_n|^2 \sum_{n=0}^m |(y_n, y_n)_n|^2 = \sum_{n=0}^m \|x_n\|_n^2 \sum_{n=0}^m \|y_n\|_n^2 < \infty$$

passando al limite per $m \rightarrow \infty$ si trova la finitezza del prodotto scalare definito.

**Completezza
della somma
diretta**

Vediamo la completezza, sia $\{\mathbf{x}_k\}$ di Cauchy, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste k_ε talché se $k, k' > k_\varepsilon$

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k'}\|^2 = \sum_{p=0}^{\infty} \|x_{k,p} - x_{k',p}\|_p^2 < \varepsilon^2$$

da cui, per ogni $p \in \mathbb{N}$ la successione $\{x_{k,p}\}_{k \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy e perciò converge a $x_p \in \mathcal{H}_p$. Consideriamo allora $\mathbf{x} \doteq \{x_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ e vediamo se appartiene a $\mathcal{H}$. A questo scopo abbiamo

$$\sum_{p=0}^N \|x_{k,p}\|_p^2 < \infty \quad \forall N, k$$

passando al limite per $k \rightarrow \infty$, per continuità della norma

$$\sum_{p=0}^N \|x_p\|_p^2 < \infty \quad \forall N$$

e di nuovo passando al limite per $N \rightarrow \infty$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \|x_p\|_p^2 < \infty$$

Non ci resta che mostrare la convergenza di $\mathbf{x}_k$ a $\mathbf{x}$, fissato $\varepsilon > 0$ abbiamo che se $k, k' > k_\varepsilon$

$$\forall N \sum_{p=0}^N \|x_{k,p} - x_{k',p}\|_p^2 = \sum_{p=0}^{\infty} \|x_{k,p} - x_{k',p}\|_p^2 < \varepsilon^2$$

passiamo al limite per $k' \rightarrow \infty$ abbiamo, se $k > k_\varepsilon$

$$\forall N \sum_{p=0}^N \|x_{k,p} - x_p\|_p^2 < \varepsilon^2$$

ora mandiamo $N \rightarrow \infty$,

$$\sum_{p=0}^{\infty} \|x_{k,p} - x_p\|_p^2 = \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\|^2 < \varepsilon^2.$$

Si sarà notato nel corso della dimostrazione l'analogia che si ha con il caso di $\ell^2(\mathbb{C})$ che risulta

$$\ell^2(\mathbb{C}) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \mathbb{C}.$$

II.5 Isomorfismi di spazi di Hilbert

II.5.1 Definizione di isomorfismo e relazione con la dimensione

Dati due spazi vettoriali, un'isomorfismo tra essi è un'applicazione lineare biunivoca, sugli spazi di Hilbert conviene richiedere anche l'isometria (cioè la preservazione del prodotto scalare).

Definizione II.12 *Dati due spazi di Hilbert $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$, si dice isomorfismo di $\mathcal{H}_1$ in $\mathcal{H}_2$ l'applicazione lineare*

$$U : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$$

tale che

(i) *U sia suriettiva;*

(ii) *per ogni $x, x' \in \mathcal{H}_1$ risulta*

$$(x, x')_1 = (Ux, Ux')_2$$

Equivalentemente a (ii) si può richiedere che per ogni $x \in \mathcal{H}_1$ sia

$$\|x\|_1 = \|Ux\|_2$$

Inoltre, (i) e (ii) implicano che U sia biunivoca. (i) implica la suriettività, da (ii) si ha

$$Ux_1 = Ux_2 \Rightarrow 0 = \|Ux_1 - Ux_2\|_2 \Rightarrow 0 = \|U(x_1 - x_2)\|_2 = \|x_1 - x_2\|_1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Se U è un isomorfismo, allora esiste U^{-1} (U è infatti biunivoco) che è un isomorfismo tra $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_1$. Per vedere questo ci basta mostrare l'isometria

$$(U^{-1}y, U^{-1}y')_1 = (UU^{-1}y, UU^{-1}y')_2 = (y, y')_2.$$

La nozione di isomorfismo allargata all'isometria comporta la seguente condizione necessaria e sufficiente

Teorema II.41 *Due spazi di Hilbert, $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$, sono isomorfi se e solo se hanno eguali dimensioni (ortogonali).*

Dimostrazione Siano $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ isomorfi secondo l'isomorfismo U . Sia dato un sistema ortonormale completo $\{u_n\}$ in $\mathcal{H}_1$ e sia $v_n = Uu_n \in \mathcal{H}_2$. L'insieme $\{v_n\}$ ha la stessa cardinalità dell'insieme $\{u_n\}$ essendo U biunivoca, vediamo che si tratta di un s.o.n.c. Per isometria è un s.o.n., sia ora $y \in \mathcal{H}_2$ tale che

$$(y, v_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

allora, sempre per ogni intero n , essendo U^{-1} un isomorfismo

$$0 = (y, Uu_n)_2 = (U^{-1}y, u_n)_1$$

da cui

$$U^{-1}y = 0$$

cioè $y \in \ker U^{-1}$, ma U^{-1} è iniettivo, perciò $y = 0$, da cui la completezza.

Ora, sia $\dim \mathcal{H}_1 = \dim \mathcal{H}_2$. Siano $\{u_n\}$ e $\{v_n\}$ due s.o.n.c. nei due spazi, rispettivamente. Essi hanno la stessa cardinalità, perciò sono correttamente indicizzati dal medesimo indice. Definiamo allora la mappa

$$x \mapsto Ux \doteq \sum_{n=0}^{\infty} (u_n, x)_1 v_n$$

essa è ben definita, per il teorema di Fischer-Riesz, essendo $\{(u_n, x)\} \in \ell^2(\mathbb{C})$ per la disuguaglianza di Bessel. La linearità segue dalla linearità nella seconda variabile del prodotto scalare, dalla continuità della somma e della moltiplicazione scalare. Vediamo l'invertibilità,

sia $y \in \mathcal{H}_2$, allora

$$U^{-1}y = \sum_{m=0}^{\infty} (v_m, y)_2 u_m$$

infatti, usando ortogonalità, completezza e continuità

$$U(U^{-1}y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(u_n, \sum_{m=0}^{\infty} (v_m, y)_2 u_m \right)_1 v_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (v_m, y)_2 (u_n, u_m)_1 v_n = \sum_{n=0}^{\infty} (v_n, y)_2 v_n = y$$

Per l'isometria, usando ancora il teorema di Fischer-Riesz e l'identità di Parseval

$$\|Ux\|_2^2 = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} (u_n, x)_1 v_n \right\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |(u_n, x)_1|^2 = \|x\|_1^2.$$

(c.v.d.)

II.5.2 Isomorfismi e s.o.n.c.

Spazi finito-dimensionali

Dato uno spazio di Hilbert finito-dimensionale esso è isomorfo a $\mathbb{C}^{\dim \mathcal{H}}$ tramite l'isomorfismo citato nella dimostrazione

$$Tx \doteq \sum_{n=0}^{\dim \mathcal{H}} (u_n, x) \mathbf{e}_n$$

dove $\{\mathbf{e}_n\}_{n \in J_{\dim \mathcal{H}}}$ è la base canonica di $\mathbb{C}^{\dim \mathcal{H}}$.

Spazi infinito-dimensionali

Per gli spazi a dimensione infinita, lo stesso isomorfismo si deve invece ambientare su $\ell^2(\mathbb{C})$, come consentito dalla disuguaglianza di Bessel e dal teorema di Fischer-Riesz

$$Tx \doteq \sum_{n=0}^{\infty} (u_n, x) \mathbf{e}_n = \{(u_n, x)\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

II.6 Il duale

II.6.1 Funzionali continui e norma operatoriale

In generale, sappiamo che il duale di uno spazio vettoriale V è l'insieme delle mappe lineari

$$\alpha : V \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto \alpha(x) \doteq \langle \alpha, x \rangle$$

Sugli spazi lineari topologici appare naturale richiedere in aggiunta la continuità e noi faremo senz'altro così. Se V è normato abbiamo che α è continuo in x_0 se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ per cui

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |\langle \alpha, x \rangle - \langle \alpha, x_0 \rangle| < \varepsilon$$

La linearità di α consente di dire qualcosa in più, infatti

$$\begin{aligned} \|x\| < \delta &\Rightarrow |\langle \alpha, x \rangle| < \varepsilon \\ &\Updownarrow \\ \|x - x_0\| < \delta &\Rightarrow |\langle \alpha, x \rangle - \langle \alpha, x_0 \rangle| < \varepsilon \end{aligned}$$

questo perché $\langle \alpha, x \rangle - \langle \alpha, x_0 \rangle = \langle \alpha, x - x_0 \rangle$. Ne consegue la seguente

Proposizione II.42 *La continuità di α , funzionale lineare di V , nel punto 0 equivale alla continuità e alla uniforme continuità di α su V .*

La continuità nell'origine può essere vista anche come segue

Proposizione II.43 *Dato un funzionale lineare di V , α sono equivalenti i seguenti fatti*

- (i) α è continuo nell'origine;
- (ii) esiste un reale positivo M , tale che $\langle \alpha, x \rangle \leq M \|x\|$ per ogni $x \in V$.

Dimostrazione La (ii) implica banalmente la (i) (basta porre $\delta_\varepsilon = \varepsilon/M$). Vediamo che (i) implica (ii). Posto $\varepsilon = 1$ esiste δ_1 tale che

$$\|x\| \leq \delta_1 \Rightarrow |\langle \alpha, x \rangle| < 1$$

sia ora $x \in V$ con $x \neq 0$, allora

$$x = \frac{\|x\|}{\delta_1} \frac{\delta_1}{\|x\|} x$$

perciò

$$\left| \left\langle \alpha, \frac{\delta_1 x}{\|x\|} \right\rangle \right| < 1$$

da cui

$$|\langle \alpha, x \rangle| = \frac{\|x\|}{\delta_1} \left| \left\langle \alpha, \frac{\delta_1 x}{\|x\|} \right\rangle \right| < \frac{\|x\|}{\delta_1}$$

(c.v.d.) e basta porre $M \doteq 1/\delta_1$.

Definizione II.13 Un funzionale lineare di V si dice *limitato* se trasforma sottoinsiemi limitati di V in sottoinsiemi limitati di $\mathbb{C}$.

Sia α tale che $\langle \alpha, x \rangle \leq M \|x\|$ per ogni $x \in V$. Sia $A \subset V$ limitato, cioè esiste $a > 0$ per cui se $x \in A$ allora $\|x\| \leq a$, allora

$$\forall x \in A \quad |\langle \alpha, x \rangle| \leq M \|x\| \leq Ma$$

cioè $\alpha(A)$ è limitato. Viceversa, α sia limitato, allora manda la palla $\mathcal{S}$ di centro l'origine e raggio 1 in un insieme limitato contenuto nella palla di centro l'origine e raggio M sulla retta reale, cioè

$$\|x\| = 1 \Rightarrow |\langle \alpha, x \rangle| \leq M$$

preso $x \in V$ qualsiasi si ha

$$|\langle \alpha, x \rangle| = \|x\| \left| \left\langle \alpha, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \right| \leq M \|x\|.$$

**Proprietà
equivalenti alla
continuità di α**

In definitiva sono equivalenti i seguenti fatti

- (i) α è continuo su V ;
- (ii) α è uniformemente continuo su V ;
- (iii) α è continuo nell'origine;
- (iv) α è limitato (i.e. manda limitati in limitati).

Norma di α

Dunque, se α è continuo l'insieme

$$L_\alpha \doteq \{M \in \mathbb{R}^+ \mid |\langle \alpha, x \rangle| \leq M \|x\|, \forall x \in V\}$$

è non vuoto e banalmente limitato inferiormente. Ne deriva che esiste

$$\|\alpha\| \doteq \inf L_\alpha$$

che chiameremo **norma** di α , tra poco capiremo il perché.

**Proprietà della
norma di α**

Per ogni $M \in L_\alpha$ e per ogni $0 \neq x \in V$ si ha

$$\frac{|\langle \alpha, x \rangle|}{\|x\|} \leq M$$

per massimalità dell'inf si ha

$$\frac{|\langle \alpha, x \rangle|}{\|x\|} \leq \|\alpha\| \Leftrightarrow |\langle \alpha, x \rangle| \leq \|\alpha\| \|x\| \quad \forall x \in V$$

per cui l'inf è in realtà un minimo.

Consideriamo adesso la quantità

$$m \doteq \sup_{x \in V \setminus \{0\}} \frac{|\langle \alpha, x \rangle|}{\|x\|}$$

per definizione di sup si ha

$$L_\alpha \ni m = \min \{M \in \mathbb{R}^+ \mid |\langle \alpha, x \rangle| \leq M \|x\|, \forall x \in V\} = \min L_\alpha$$

da cui

$$\sup_{x \in V \setminus \{0\}} \frac{|\langle \alpha, x \rangle|}{\|x\|} = \|\alpha\|.$$

Inoltre, se $x \in V$

$$\|\alpha\| = \sup_{x \in V \setminus \{0\}} \frac{|\langle \alpha, x \rangle|}{\|x\|} = \sup_{x \in V \setminus \{0\}} \left| \left\langle \alpha, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \right| = \sup_{\|x\|=1} |\langle \alpha, x \rangle|$$

siccome poi

$$|\langle \alpha, x \rangle| \leq \|\alpha\| \quad \forall x : \|x\| < 1$$

abbiamo

$$\|\alpha\| = \sup_{x \in V \setminus \{0\}} \frac{|\langle \alpha, x \rangle|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |\langle \alpha, x \rangle| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle \alpha, x \rangle|$$

Completezza del duale

Teorema II.44 *Sia V uno spazio normato. L'insieme dei funzionali lineari su V continui, munito delle operazioni (definite puntualmente)*

$$\begin{aligned} \langle \alpha + \beta, x \rangle &\doteq \langle \alpha, x \rangle + \langle \beta, x \rangle \\ \langle k\alpha, x \rangle &\doteq k^* \langle \alpha, x \rangle \end{aligned}$$

è uno spazio lineare che normato con

$$\|\alpha\| \doteq \inf L_\alpha$$

è completo.

Dimostrazione Siano α e β due funzionali lineari e continui su V , per ogni x abbiamo

$$\langle \alpha + k\beta, x \rangle = \langle \alpha, x \rangle + k^* \langle \beta, x \rangle$$

da cui

$$|\langle \alpha + k\beta, x \rangle| \leq |\langle \alpha, x \rangle| + |k| |\langle \beta, x \rangle| \leq (\|\alpha\| + |k| \|\beta\|) \|x\|$$

perciò $\alpha + k\beta$ è continuo ed appartiene ancora allo spazio considerato. Ne deriva la linearità di tale spazio. Incidentalmente abbiamo pure provato che

$$\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|.$$

Inoltre,

$$\|k\alpha\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|\langle k\alpha, x \rangle|}{\|x\|} = |k| \sup_{x \neq 0} \frac{|\langle \alpha, x \rangle|}{\|x\|} = |k| \|\alpha\|.$$

Per provare che $\|\alpha\|$ è una norma resta da provare che si annulla solo in 0. Per questo si ha

$$\|\alpha\| = 0 \Leftrightarrow \forall x \in V \quad |\langle \alpha, x \rangle| \leq 0 \Leftrightarrow \forall x \in V \quad \langle \alpha, x \rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0.$$

Resta da vedere la completezza. Sia $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzionali lineari continui su V . Siccome

$$|\langle \alpha_n, x \rangle - \langle \alpha_m, x \rangle| \leq \|\alpha_n - \alpha_m\| \|x\|$$

da cui la successione numerica $\{\langle \alpha_n, x \rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy. La completezza del campo scalare implica dunque che, per ogni x , esista il limite puntuale

$$\langle \alpha, x \rangle \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \alpha_n, x \rangle.$$

Si ha subito che α è un funzionale lineare. La continuità di α si ottiene come segue: la successione $\{\alpha_n\}$ è di Cauchy perciò è limitata, dunque, esiste $k \in \mathbb{R}^+$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\|\alpha_n\| \leq k$$

sicché, per ogni n , $|\langle \alpha_n, x \rangle| \leq k \|x\|$

$$|\langle \alpha, x \rangle| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \alpha_n, x \rangle \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\langle \alpha_n, x \rangle| \leq k \|x\|$$

Dunque, α è un funzionale lineare e continuo.

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un N_ε tale che

$$n, m > N_\varepsilon \Rightarrow \|\alpha_n - \alpha_m\| < \varepsilon$$

allora, per ogni $x \in V$

$$|\langle \alpha_n, x \rangle - \langle \alpha_m, x \rangle| \leq \varepsilon \|x\|$$

Passiamo al limite per $m \rightarrow \infty$, se $n > N_\varepsilon$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |\langle \alpha_n, x \rangle - \langle \alpha_m, x \rangle| = \left| \langle \alpha_n, x \rangle - \lim_{m \rightarrow \infty} \langle \alpha_m, x \rangle \right| = |\langle \alpha_n, x \rangle - \langle \alpha, x \rangle| \leq \varepsilon \|x\| \quad \forall x \in V$$

da cui

$$\|\alpha_n - \alpha\| < \varepsilon$$

(c.v.d.) la tesi.

Definizione II.14 Dato uno spazio normato V lo spazio di Banach dei suoi funzionali lineari continui si dice duale di tale spazio e si indica con V^* .

II.6.2 Il teorema di Riesz

Recuperando la struttura di spazio di Hilbert, si trova il seguente

**Teorema
II.45 (di
rappresentazione
di Riesz)**

Dato uno spazio $\mathcal{H}$ di Hilbert, sia $\mathcal{H}^*$ il suo duale. La mappa

$$T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*, x \mapsto Tx : \langle Tx, x' \rangle \doteq (x, x')$$

è un isomorfismo lineare isometrico (i.e. un'applicazione biunivoca lineare che conserva le norme).

Dimostrazione

Cominciamo a vedere che T è ben definito, cioè che $Tx \in \mathcal{H}^*$. La linearità è garantita dalla linearità nella seconda variabile del prodotto scalare. Per la continuità si ha, dalla disuguaglianza di Schwarz

$$|\langle Tx, x' \rangle| = |(x, x')| \leq \|x\| \|x'\|.$$

Ne abbiamo che $\|Tx\| \leq \|x\|$, d'altra parte posto $x' = x$, vale l'uguaglianza nella disuguaglianza di Schwarz, sicché

$$|\langle Tx, x' \rangle| = \|x\|^2$$

ne consegue che $\|Tx\| = \|x\|$ (e il sup è un massimo). D'altra parte, la relazione trovata vale per ogni $x \in \mathcal{H}$, perciò T è una isometria. Vediamo la linearità di T :

$$\langle T(x + ky), x' \rangle = (x + ky, x') = (x, x') + k^* (y, x') = \langle Tx, x' \rangle + k^* \langle Ty, x' \rangle$$

Isometria e linearità implicano l'iniettività. Resta da vedere allora la suriettività di T , c'è cioè da mostrare che per **ogni elemento α del duale** di $\mathcal{H}$ esiste un elemento $x \in \mathcal{H}$, tale che

$$\langle \alpha, x' \rangle = (x, x').$$

Il nucleo di α è la controimmagine di un chiuso, perciò, essendo α continuo, è chiuso. D'altra parte il nucleo è una varietà lineare, infine, è un sottospazio. Se $\ker \alpha = \mathcal{H}$ allora $\alpha = 0$ e basta prendere $x = 0$. Sia invece $\ker \alpha \neq \mathcal{H}$, allora l'ortogonale al nucleo è non banale, $(\ker \alpha)^\perp \neq \{0\}$ e per il teorema della proiezione,

$$\mathcal{H} = \ker \alpha \oplus (\ker \alpha)^\perp$$

Detto questo, vogliamo vedere che l'ortogonale al nucleo ha dimensione unitaria: siano allora $x_1, y_1 \in (\ker \alpha)^\perp$ abbiamo

$$\alpha(x_1) = a_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$\alpha(y_1) = b_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

perciò

$$\alpha(b_1 x_1 - a_1 y_1) = b_1 a_1 - a_1 b_1 = 0$$

da cui

$$b_1 x_1 - a_1 y_1 \in \ker \alpha$$

ma come combinazione lineare di elementi di $(\ker \alpha)^\perp$ si ha

$$b_1 x_1 - a_1 y_1 \in (\ker \alpha)^\perp$$

da cui

$$b_1 x_1 - a_1 y_1 = 0$$

con b_1 e a_1 diversi da zero. Ne segue che ogni coppia di elementi dell'ortogonale al nucleo è linearmente dipendente, perciò esso ha dimensione pari a 1. Se $u_1 \in (\ker \alpha)^\perp$ e $\|u_1\| = 1$ allora

$$\mathcal{H} = \ker \alpha \oplus \text{Span} \langle u_1 \rangle$$

$$x' = z + \lambda u_1$$

perciò

$$\langle \alpha, x' \rangle = \langle \alpha, z + \lambda u_1 \rangle = \langle \alpha, z \rangle + \lambda \langle \alpha, u_1 \rangle = \lambda \langle \alpha, u_1 \rangle$$

ne deriva che l'azione di α su x' è una sorta di proiezione su u_1 , proviamo allora a porre $x = \xi u_1$ ne abbiamo

$$(\xi u_1, x') = (\xi u_1, z + \lambda u_1) = \lambda \xi^*$$

e basta porre

$$x = \langle \alpha, u_1 \rangle^* u_1$$

(c.v.d.) per ottenere la tesi.

Un sottoprodotto della dimostrazione è il seguente: *un funzionale lineare su uno spazio di Hilbert è continuo se e solo se è esprimibile nella forma $\alpha(x') = \langle x, x' \rangle$ (e un tale x è unico).* L'isomorfismo T tra $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}^*$ è naturale (**canonico**) e identifica $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}^*$ come spazi di Banach. D'altra parte, proprio usando T , si può dotare $\mathcal{H}^*$ di un prodotto scalare naturale

$$\alpha, \alpha' \in \mathcal{H}^* \Rightarrow (\alpha, \alpha')_{\mathcal{H}^*} = (T^{-1}\alpha, T^{-1}\alpha')_{\mathcal{H}}$$

dopodiché T è un isomorfismo tra $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}^*$ come **spazi di Hilbert**. Il teorema di rappresentazione attesta che *ogni spazio di Hilbert è autoduale*.

II.7 I teoremi di Hahn-Banach

II.7.1 Premessa: il lemma di Zorn

Per poter procedere alla dimostrazione del teorema di Hahn-Banach, ci occorrono alcuni risultati preliminari. Intanto, poniamo la seguente lista di definizioni.

Definizione II.15 Sia P un insieme e si la relazione su P espressa da $\preceq$ che goda delle seguenti proprietà

- (i) (riflessiva) per ogni $a \in P$, vale $a \preceq a$;
- (ii) (antisimmetrica) se $a, b \in P$ sono tali che $a \preceq b$ e $b \preceq a$ allora $a = b$;
- (iii) (transitiva) se $a, b, c \in P$ sono tali che $a \preceq b$ e $b \preceq c$ allora $a \preceq c$.

Allora si dice che P è parzialmente ordinato dalla relazione $\preceq$.

Definizione II.16 Si chiama confine superiore di $A \subset P$ un elemento $M \in P$ tale che per ogni $a \in A$ vale $a \preceq M$. Si chiama massimo di A un confine superiore di A che appartenga ad A . Analoghe definizioni per confine inferiore e minimo.

Si chiama estremo superiore di A il minimo confine superiore di A (analogamente si definisce l'estremo inferiore).

Si chiama massimale di P un elemento m di P talché se $p \in P$ e $m \preceq p$ allora $m = p$.

La definizione di massimale si può riformulare tramite la contronominale, $m \in P$ è un massimale se

$$m \neq p \Rightarrow m \not\preceq p \text{ oppure } m \not\preceq p$$

Definizione II.17 Un insieme parzialmente ordinato si dice totalmente ordinato se per ogni coppia (a, b) di elementi di P risulta necessariamente $a \preceq b$ o $b \preceq a$.

Definizione II.18 Un insieme P si dice induttivamente ordinato se ogni suo sottoinsieme totalmente ordinato ammette confine superiore.

Si stabilisce, infine, il seguente assioma (si può dimostrare che è equivalente all'assioma della scelta)

**Assioma
II.1 (Lemma
di Zorn)**

Sia P un insieme induttivamente ordinato, allora P contiene almeno un elemento massimale.

Adesso vedremo una applicazione del lemma di Zorn, in modo da renderne più familiare l'uso

**Teorema II.46
(base di Hamel)**

Sia V un $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale non banale, allora esiste una base di V .

Dimostrazione Sia S l'insieme formato dai sottoinsiemi linearmente indipendenti di V . Siccome V è non banale esiste $v \neq 0$ in V , di modo che $\{v\}$ è linearmente indipendente e perciò appartiene a S che risulta non vuoto.

Su S è definito l'ordinamento parziale indotto da $\mathcal{P}(V)$, $\subset$. Vediamo che S è induttivamente ordinato. Sia $T \subset S$ un sottoinsieme totalmente ordinato di S , mostriamo che allora

$$U \doteq \bigcup_{B \in T} B$$

è un confine superiore per T . Sicuramente, per ogni $B \in T$ risulta $B \subset U$. Dobbiamo vedere che $U \in S$. Sia $N \in \mathbb{N}$ un intero qualsiasi e prendiamo ad arbitrio i vettori $v_1, \dots, v_N \in U$ vogliamo vedere che essi sono indipendenti. Siano $B_1, \dots, B_n$ con $n \in \mathbb{N}$ gli elementi di T che contengono i vettori scelti. Siccome T è totalmente ordinato, abbiamo

$$\exists! j \in J_n : \bigcup_{i=1}^n B_i = B_j$$

come è facile vedere per induzione ($B_1 \cup B_2 = B_1$ o B_2), da cui

$$v_1, \dots, v_N \in B_j$$

e perciò sono indipendenti.

Siccome S è induttivamente ordinato, vale il lemma di Zorn, perciò sia M un massimale di S . Sia ora $v \notin M$, consideriamo allora $\{v\} \cup M$. Per costruzione esso è diverso da M e contiene M , per definizione di massimale, non appartiene a S . Dunque $\{v\} \cup M$ è dipendente. Questo significa che esiste $N \in \mathbb{N}$ ed esistono N vettori in tale insieme aventi una combinazione lineare a coefficienti $\{a_i\}_{i \in J_N}$ non tutti nulli per cui

$$a_1 v_1 + \dots + a_N v_N = 0$$

Tra tali vettori deve esserci v e con coefficiente non nullo, altrimenti M sarebbe dipendente, perciò possiamo porre $v_1 \doteq v$ e $a_1 \neq 0$. Ne consegue che

$$v = -\frac{1}{a_1} (a_2 v_2 + \dots + a_N v_N).$$

(c.v.d.) Questo comporta che $V = \mathcal{VM}$ e che M è indipendente. Ne deriva che M è una base di V .

II.7.2 Il teorema di Hahn-Banach negli spazi reali

Dobbiamo anzitutto introdurre la seguente

Definizione II.19 Una seminorma su uno $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale X è una applicazione $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ che goda delle seguenti proprietà

- (i) per ogni $x, y \in X$ vale $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$;
- (ii) per ogni $x \in X$ e $a > 0$ vale $p(ax) = ap(x)$.

Teorema II.47 (di Hahn-Banach)

Se p è una seminorma su un $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale X e f è un funzionale lineare definito su una varietà lineare $S \subset X$ tale che per ogni $s \in S$, $f(s) \leq p(s)$ allora esiste un funzionale lineare F definito su tutto lo spazio X per cui

- (i) per ogni $x \in X$ vale $F(x) \leq p(x)$;
- (ii) per ogni $s \in S$ vale $F(s) = f(s)$.

Dimostrazione Sia $\mathcal{F}$ l'insieme dei funzionali lineari definiti su una varietà lineare di X contenente S , pari a f su S , e sul dominio minori o eguali alla seminorma. $\mathcal{F}$ è parzialmente ordinato dalla relazione

$$g \preceq g' \Leftrightarrow g' \text{ estende } g$$

Chiaramente $\mathcal{F}$ è non vuoto, dato che contiene f . Sia ora l'insieme $\{f_\alpha\}_\alpha$ un sottoinsieme totalmente ordinato di $\mathcal{F}$ (l'indicizzazione può essere effettuata sull'insieme stesso). Vogliamo determinare un confine superiore per tale sottoinsieme. Sia allora g la funzione definita su

$$\bigcup_{\alpha} D(f_{\alpha})$$

tale che $g(x) = f_{\alpha}(x)$ se $x \in D(f_{\alpha})$. L'ordinamento totale garantisce che g è ben definito. Ora, l'unione di una infinità di varietà lineari è, come sappiamo, una varietà lineare, inoltre, sul dominio g è dominato dalla seminorma e su S è pari a f . Infine, ogni elemento di $\{f_{\alpha}\}_\alpha$ è minore o eguale di g . Si ha perciò che $\{f_{\alpha}\}_\alpha$ ammette confine superiore, e che $\mathcal{F}$ è induttivamente ordinato.

Per il lemma di Zorn $\mathcal{F}$ ammette elemento massimale F . $F \in \mathcal{F}$ perciò se ha dominio su X dimostra il teorema. Resta cioè da mostrare che $L \div D(F) = X$.

Ragioniamo per assurdo. Esista $x \in X \setminus L$, certamente $x \neq 0$, essendo $0 \in S \subset L$. Dimostriamo allora che su $L_1 \div L \oplus x\mathbb{R}$ è possibile costruire un'estensione F_1 di F appartenente a $\mathcal{F}$, ciò negherebbe la massimalità di F . Siccome $F_1 = F$ su L e ogni vettore di L_1 si scrive come $l + ax$ con $l \in L$ e $a \in \mathbb{R}$ ricaviamo

$$F_1(l + ax) = F_1(l) + aF_1(x)$$

ma $F_1(l) = F(l)$ perciò

$$F_1(l + ax) = F(l) + aF_1(x)$$

e resta da determinare $c \div F_1(x) \in \mathbb{R}$ in modo che $F_1 \in \mathcal{F}$, cioè che

$$F_1(y) \leq p(y) \quad \forall y \in L_1$$

La richiesta si traduce nel seguente modo

$$F(l) + ac \leq p(l + ax) \quad \forall l \in L, a \in \mathbb{R}$$

Sia $a > 0$ allora la richiesta diviene

$$F(l/a) + c \leq p(l/a + x)$$

se, invece, $a < 0$, si ha

$$F(-l/a) - c \leq p(-l/a - x)$$

cioè, deve essere

$$p(l' - x) + F(l') \leq c \leq p(l'' + x) - F(l'') \quad \forall l', l'' \in L$$

la cosa è consistente essendo

$$F(l') + F(l'') \leq p(l' + l'') = p(l' - x + x + l'') \leq p(l' - x) + p(l'' + x)$$

da cui per ogni $l', l'' \in L$

$$p(l' - x) + F(l') \leq p(l'' + x) - F(l'')$$

(c.v.d.) e basterà scegliere c tra il sup della prima quantità e l'inf della seconda che sono reali.

II.7.3 Il teorema di Hahn-Banach negli spazi complessi

Dimostriamo il teorema di Hahn-Banach per gli spazi complessi, usando il teorema valido negli spazi reali. Premettiamo la

Definizione II.20 Sia X un $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale. Una seminorma su X è una applicazione da $X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

- (i) per ogni $x, y \in X$ vale $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$;
- (ii) per ogni $x \in X$ e $a \in \mathbb{C}$ si ha $p(ax) = |a|p(x)$.

Il seguente teorema è la versione complessa del teorema di Hahn-Banach

Teorema II.48
(di Bohnenblust-Sobczyk)

Se p è una seminorma sul $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale X e f è un funzionale lineare definito su una varietà lineare S contenuta in X dominato dalla seminorma, i.e. $|f(s)| \leq p(s)$, se $s \in S$, allora esiste un funzionale lineare F definito su tutto X tale che

- (i) per ogni $x \in X$ si ha $|F(x)| \leq p(x)$;
- (ii) per ogni $s \in S$ vale $F(s) = f(s)$.

Dimostrazione X è un $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale sul quale semplicemente si ignora la moltiplicazione per scalari complessi (per esempio se ix non è il vettore x moltiplicato per i , ma un nuovo vettore di X). Anche $\mathbb{C}$ è un $\mathbb{R}$ -spazio, per cui un funzionale lineare di X è un $\mathbb{R}$ -omomorfismo lineare tra $\mathbb{R}$ -spazi. Infatti, possiamo riscrivere

$$f(x) = \operatorname{Re} f(x) + i \operatorname{Im} f(x) \doteq g(x) + ih(x)$$

dove g, h sono banalmente funzionali lineari da $X \rightarrow \mathbb{R}$. Inoltre

$$g(x) = \operatorname{Re} f(x) \leq |f(x)| \leq p(x)$$

perciò g rispetta le ipotesi del teorema di Hahn-Banach reale. Esiste una estensione $G : X \rightarrow \mathbb{R}$ di g , lineare e tale che

$$G(x) \leq p(x)$$

Ora, vediamo la relazione che corre tra g e h si ha

$$f(ix) = if(x)$$

$$g(ix) + ih(ix) = ig(x) - h(x)$$

da cui, eguagliando le parti reali, si ottiene

$$h(x) = -g(ix).$$

Poniamo allora

$$F(x) \doteq G(x) - iG(ix)$$

abbiamo subito che F estende f . Vediamo che è $\mathbb{C}$ -lineare. Siccome è $\mathbb{R}$ -lineare, basta mostrare che $F(ix) = iF(x)$, abbiamo

$$F(ix) = G(ix) - iG(i^2x) = G(ix) + iG(x) = i[-iG(ix) + G(x)] = iF(x).$$

Per ogni $x \in X$ esiste $z_x \in \mathbb{C}$ tale che $|z_x| = 1$ e $z_x F(x) = |F(x)|$, allora

$$|F(x)| = z_x F(x) = F(z_x x)$$

ma allora $F(z_x x)$ è reale perciò è eguale a $G(z_x x)$ essendo G a valori reali, sicché

$$(c.v.d.) \quad |F(x)| = G(z_x x) \leq p(z_x x) = |z_x| p(x) = p(x).$$

II.7.4 Il teorema di Hahn-Banach sugli spazi normati

Finora abbiamo dimostrato il teorema di Hahn-Banach su spazi dotati di una seminorma. Vediamo che accade sugli spazi normati

Teorema II.49 *Sia X uno spazio normato, S una varietà lineare in X e f un funzionale lineare continuo definito su S . Allora esiste un funzionale continuo F definito su X e tale che*

- (i) per ogni $s \in S$ vale $\langle F, s \rangle = \langle f, s \rangle$;
- (ii) F e f hanno la stessa norma, $\|F\| = \|f\|$.

Dimostrazione Sia $p(x) = \|f\| \|x\|$, allora p è una seminorma e $|f(x)| \leq \|f\| \|x\| = p(x)$. Siamo quindi nelle ipotesi del teorema di Hahn-Banach complesso. Esiste dunque un funzionale lineare F definito sull'intero spazio X , tale che

$$\langle F, s \rangle = \langle f, s \rangle$$

e, per ogni x ,

$$|\langle F, x \rangle| \leq \|f\| \|x\|$$

Allora $\|F\| \leq \|f\|$, d'altra parte F è una estensione di f , perciò

$$\|F\| = \sup_{x \in X} \frac{|\langle F, x \rangle|}{\|x\|} \geq \sup_{x \in S} \frac{|\langle f, x \rangle|}{\|x\|} = \|f\|$$

(c.v.d.) da cui la tesi.

La versione del teorema di Hahn-Banach appena dimostrata, consente di dire qualcosa in più sul duale degli spazi normati, precisamente

Teorema II.50 *Sia X uno spazio normato e sia x un elemento di X diverso da 0. Allora esiste $\alpha_x \in X^*$ talché*

- (i) $\|\alpha_x\| = 1$;
- (ii) $\langle \alpha_x, x \rangle = \|x\|$

Dunque, X^ , duale di X , è separante per X , i.e. per ogni coppia distinta (x, x') di elementi di X esistono due funzionali lineari continui α, α' di X tali che $\langle \alpha, x \rangle \neq \langle \alpha', x' \rangle$.*

Dimostrazione Consideriamo il sottospazio $\text{Span} \langle x \rangle$ generato da x . Per ogni $x' \in \text{Span} \langle x \rangle$ esiste un unico $k_{x'} \in \mathbb{K}$ tale che $x' = k_{x'} x$. Risulta allora ben definita la mappa

$$\bar{\alpha}_x : \text{Span} \langle x \rangle \rightarrow \mathbb{K}, \quad \bar{\alpha}_x(x') \doteq k_{x'} \|x\|$$

essa è chiaramente un funzionale lineare su $\text{Span} \langle x \rangle$, inoltre

$$|\bar{\alpha}_x(x')| = |k_{x'}| \|x\| = \|x'\|$$

(c.v.d.) sicché $\bar{\alpha}_x$ è continua e ha norma unitaria. Applicando il teorema precedente si ottiene la tesi.

II.7.5 Il biduale e la riflessività

Per terminare la lunga discussione sul duale (che ci ha costretti alla digressione sul teorema di Hahn-Banach, che è comunque un risultato fondamentale dell'analisi funzionale) dobbiamo accennare al biduale. Come è noto (dal corso di Geometria) se V è uno spazio vettoriale finito-dimensionale, il biduale V^{**} è canonicamente isomorfo a V tramite l'isomorfismo

$$\begin{aligned} \hat{} & : V \rightarrow V^{**} & x & \mapsto \hat{x} \\ \hat{x} & : V^* \rightarrow \mathbb{K} & \alpha & \mapsto \langle \hat{x}, \alpha \rangle \doteq \langle \alpha, x \rangle^* \end{aligned}$$

Tutto quello che rimane per gli spazi normati in dimensione infinita è il seguente

Teorema II.51 *Sia X uno spazio normato e X^{**} il biduale di X . La mappa*

$$\begin{aligned} \hat{} & : V \rightarrow V^{**} & x & \mapsto \hat{x} \\ \hat{x} & : V^* \rightarrow \mathbb{K} & \alpha & \mapsto \langle \hat{x}, \alpha \rangle \doteq \langle \alpha, x \rangle^* \end{aligned}$$

è una iniezione lineare isometrica (cioè $\|\hat{x}\| = \|x\|$, per ogni $x \in X$)

Dimostrazione La mappa è ben definita essendo $\hat{x}$ (per ogni $x \in X$) un funzionale lineare e continuo su X^* , infatti

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}, \alpha + \beta \rangle &= \langle \alpha + \beta, x \rangle^* = \langle \alpha, x \rangle^* + \langle \beta, x \rangle^* = \langle \hat{x}, \alpha \rangle + \langle \hat{x}, \beta \rangle \\ \langle \hat{x}, k\alpha \rangle &= \langle k\alpha, x \rangle^* = k \langle \alpha, x \rangle^* = k \langle \hat{x}, \alpha \rangle \\ |\langle \hat{x}, \alpha \rangle| &= |\langle \alpha, x \rangle^*| = |\langle \alpha, x \rangle| \leq \|x\| \|\alpha\| \end{aligned}$$

perciò $\|\hat{x}\| \leq \|x\|$. Vediamo che la mappa $\hat{}$:

$$\langle \widehat{x + ky}, \alpha \rangle = \langle \alpha, x + ky \rangle^* = \langle \alpha, x \rangle^* + k^* \langle \alpha, y \rangle = \langle \hat{x}, \alpha \rangle + \langle k\hat{y}, \alpha \rangle$$

Vediamo che la mappa è isometrica. Come abbiamo già notato $\|\hat{x}\| \leq \|x\|$, inoltre, se $x \neq 0$, allora, dal teorema precedente, esiste $\alpha_x \in E^*$ per cui $\|\alpha_x\| = 1$, con $\langle \alpha_x, x \rangle = \|x\|$, perciò

$$\|x\| = \langle \alpha_x, x \rangle = |\langle \alpha_x, x \rangle^*| = |\langle \hat{x}, \alpha_x \rangle| \leq \|\hat{x}\|$$

(c.v.d.) la tesi, visto che l'iniettività è implicata dall'isometria.

Consideriamo ora uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ siano T l'isomorfismo di Riesz tra $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}^*$ e T^* l'isomorfismo di Riesz tra $\mathcal{H}^*$ e $\mathcal{H}^{**}$. Come composizione di isomorfismi $T^* \circ T$ è un isomorfismo, canonico, tra $\mathcal{H}$ e il suo duale, vediamo come opera:

$$x \mapsto \alpha_x \doteq (x, \cdot) \mapsto (\alpha_x, \cdot) = (T^{-1}\alpha_x, T^{-1}\cdot) = (x, T^{-1}\cdot)$$

Ora, sia $\alpha \in \mathcal{H}^*$ allora $\langle \alpha, x \rangle = (T^{-1}\alpha, x)$ dunque,

$$T^*Tx \in \mathcal{H}^{**} : \langle T^*Tx, \alpha \rangle = (x, T^{-1}\alpha) = (T^{-1}\alpha, x)^* = \langle \alpha, x \rangle^* \quad \forall \alpha \in \mathcal{H}^*$$

allora

$$T^*T = \hat{}$$

e per gli spazi di Hilbert come per gli spazi a dimensione finita, biduale e duale sono canonicamente isomorfi tramite $\hat{}$. Gli spazi normati per cui $\hat{}$ è un isomorfismo isometrico si dicono **riflessivi**. Condizione necessaria per la riflessività è la completezza (il biduale è sempre completo), la condizione non è però sufficiente come mostra l'esempio (nel quale non ci addentreremo di L^1).

Teoria degli operatori lineari

In questo capitolo, si entra nel cuore della trattazione di questo quaderno. Lo studio degli operatori lineari viene effettuato negli spazi di Hilbert, ma non si rinuncia a una sua presentazione negli spazi di Banach (in particolare vengono dimostrati i tre principi di Banach: teorema della mappa aperta, del grafico chiuso e della uniforme limitatezza).

III.1 Operatori lineari

III.1.1 Operatori lineari

È ovvia la seguente

Definizione III.1 Siano X e Y due spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbb{K}$. Una funzione $T : D \rightarrow Y$ definita su una varietà lineare $D \subset X$ si dice *lineare* (od *operatore lineare* o *trasformazione lineare*) se

$$T(x_1 + \lambda x_2) = Tx_1 + \lambda Tx_2, \quad \forall x_1, x_2 \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

Dominio, range e kernel

La varietà lineare D si chiama **dominio** di T e si indica con $D(T)$, l'immagine di D tramite T si indica con $R(T)$ (dall'inglese **range**), mentre il **nucleo** di T (l'insieme dei punti di $D(T)$ sui quali T si annulla) si indica con $\ker(T)$ (dall'inglese **kernel**).

Range e kernel sono varietà lineari. Siano y_1 e $y_2 \in R(T)$, allora esistono x_1 e $x_2 \in D(T)$ tali che

$$y_1 = Tx_1, \quad y_2 = Tx_2 \Rightarrow y_1 + \lambda y_2 = Tx_1 + \lambda Tx_2 = T(x_1 + \lambda x_2)$$

siccome, per ipotesi, $x_1 + \lambda x_2 \in D(T)$ si ha che $y_1 + \lambda y_2 \in R(T)$. Per quello che riguarda il kernel, siano $x_1, x_2 \in \ker(T)$, allora

$$0 = Tx_1 + \lambda Tx_2 = T(x_1 + \lambda x_2)$$

da cui $x_1 + \lambda x_2 \in \ker(T)$.

Operatore inverso

Se T è biunivoca, tra $D(T)$ e $R(T)$, allora esiste $T^{-1} : R(T) \rightarrow D(T)$, vediamo che T^{-1} è ancora lineare: siano y_1 e $y_2 \in R(T)$, allora esistono $x_1, x_2 \in D(T)$ per cui $y_1 = Tx_1$ e $y_2 = Tx_2$, da cui

$$T^{-1}(y_1 + \lambda y_2) = T^{-1}(Tx_1 + \lambda Tx_2) = T^{-1}T(x_1 + \lambda x_2) = \mathbb{I}(x_1 + \lambda x_2) = T^{-1}y_1 + \lambda T^{-1}y_2.$$

Kernel ed iniettività

Ricordiamo, infine, che T è iniettiva se e solo se ha kernel banale. Infatti, sia T iniettiva, allora per ogni $x_1, x_2 \in D(T)$ si ha che $Tx_1 = Tx_2 \Rightarrow x_1 = x_2$, cioè, ponendo $x_2 = 0$ vale la seguente implicazione $T(x_1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, da cui $\ker T = \{0\}$. Viceversa, sia $\ker T$ banale, allora se $Tx_1 = Tx_2$, allora $x_1 - x_2 \in \ker T$, perciò $x_1 - x_2 = 0$.

III.1.2 Operatori lineari continui

Siano X, Y spazi normati e consideriamo l'insieme $\text{hom}(X, Y)$ delle funzioni lineari da X in Y . Vogliamo considerarne il sottoinsieme $L(X, Y)$ costituito dalle funzioni lineari continue a dominio su X . Procederemo come già per il duale nel capitolo II.

Ricordiamo che T è continua se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ per cui

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$$

Proposizione III.1 Sia T un operatore lineare tra gli spazi normati X e Y . T è continuo sul dominio $D(T)$ se e solo se è continuo nell'origine.

Dimostrazione Una implicazione è ovvia. Sia ora T continuo nell'origine di X , allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta(\varepsilon) > 0$ talché

$$\|x\| < \delta \Rightarrow \|Tx\| < \varepsilon$$

Sia ora $x_0 \in D(T)$ qualsiasi, fissato $\varepsilon > 0$, troviamo $\delta(\varepsilon) > 0$ per cui

$$\|z - x_0\| < \delta \Rightarrow \|T(z - x_0)\| = \|Tz - Tx_0\| < \varepsilon$$

(c.v.d.) da cui T è continuo in $x_0 \in D(T)$. La tesi segue dall'arbitrarietà di x_0 .

Ne abbiamo subito, ripercorrendo la dimostrazione

Corollario III.2 Sia T un operatore lineare tra gli spazi normati X e Y . T è uniformemente continuo sul dominio $D(T)$ se e solo se è continuo nell'origine.

La continuità nell'origine equivale alla lipschitzianità

Proposizione III.3 Sia T un operatore lineare tra gli spazi normati X e Y . T è continuo nell'origine se e solo se è ivi lipschitziano, cioè se e solo se esiste $M > 0$ tale che

$$\|Tx\| \leq M \|x\|$$

Dimostrazione Se T è lipschitziano nell'origine è ivi continuo: basta porre $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/M$. Vediamo il viceversa. Posto $\varepsilon = 1$ esiste $\delta(1)$ tale che

$$\|x\| \leq \delta(1) \Rightarrow \|Tx\| < 1$$

sia ora $x \in D(T)$ con $x \neq 0$, allora

$$x = \frac{\|x\|}{\delta(1)} \frac{\delta(1)}{\|x\|} x$$

perciò

$$\left\| T \frac{\delta(1)x}{\|x\|} \right\| < 1$$

da cui

$$\|Tx\| = \frac{\|x\|}{\delta(1)} T \left(\frac{\delta(1)x}{\|x\|} \right) < \frac{\|x\|}{\delta(1)}$$

(c.v.d.) e basta porre $M \doteq 1/\delta(1)$.

Si noti come la lipschitzianità nell'origine è equivalente alla lipschitzianità di T sul suo intero dominio.

Definizione III.2 Un operatore lineare da X in Y si dice limitato se trasforma sottoinsiemi limitati di X in sottoinsiemi limitati di Y .

Proposizione III.4 Un operatore lineare T , a dominio in X , da X in Y è lipschitziano nell'origine se e solo se è limitato.

Dimostrazione Se T è limitato, allora manda il bordo della palla unitaria di X , $\mathcal{S}_X$, in un sottoinsieme limitato di Y , perciò esiste $M > 0$ tale che

$$\|x\| = 1 \Rightarrow \|Tx\| \leq M$$

preso ora $z \in D(T)$

$$\|Tz\| = \left\| T \left(\frac{z}{\|z\|} \|z\| \right) \right\| \leq M \|z\|.$$

Viceversa, sia $A \subset X$ limitato, allora esiste m tale che $x \in A \Rightarrow \|x\| \leq m$, allora

$$\|Tx\| \leq M \|x\| \leq Mm$$

(c.v.d.) perciò $T(A)$ è limitato.

**Proprietà
equivalenti alla
continuità di α**

In definitiva sono equivalenti i seguenti fatti

- (i) T è continuo su $D(T)$;
- (ii) T è uniformemente continuo su $D(T)$;
- (iii) T è continuo nell'origine;
- (iv) T è lipschitziano (nell'origine);
- (v) T è limitato (i.e. manda limitati in limitati).

III.1.3 Norma operatoriale

L'insieme degli operatori lineari (continui) è chiaramente uno spazio vettoriale. Vogliamo trasformare $L(X, Y)$ in uno spazio normato. Per far questo dobbiamo premettere la seguente

Proposizione III.5 Siano X, Y spazi normati. $T \in \text{hom}(X, Y)$, è continuo se e solo se esiste $\ell > 0$ talché

$$\|Tx\| \leq \ell \|x\|, \quad \forall x \in X$$

Esiste una minima costante $\ell > 0$ per cui questo accade (migliore costante di Lipschitz) ed è tale che

$$\begin{aligned} \ell &= \sup \{ \|Tx\| \mid x \in B_X(0, 1] \cap D(T) \} = \sup \{ \|Tx\| \mid x \in \mathcal{S}_X \cap D(T) \} = \\ &= \sup \left\{ \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \mid x \in D(T) \setminus \{0\} \right\} \end{aligned}$$

Dimostrazione La prima parte è già stata dimostrata. Vediamo la seconda. Banalmente si ha che tutte gli $l \in \mathbb{R}^+$ costanti di Lipschitz per T sono maggioranti della quantità definita su $D(T) \setminus \{0\}$

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

perciò, il loro inf (che esiste per l'assioma di continuità e appartiene a $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$) è in realtà un minimo che per definizione vale

$$\ell = \sup \left\{ \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \mid x \in D(T) \setminus \{0\} \right\}$$

D'altra parte la condizione di Lipschitz deve valere in particolare su $B(0, 1] \cap D(T)$ perciò, per ogni costante di Lipschitz di T

$$\|Tx\| \leq l, \quad \forall x \in B(0, 1] \cap D(T)$$

ne consegue che

$$\ell' \doteq \sup \{ \|Tx\| \mid x \in B_X(0, 1] \cap D(T) \} \leq \ell$$

D'altra parte, ℓ' è una costante di Lipschitz, sicché $\ell \leq \ell'$. Infatti, se $z \in D(T) \setminus \{0\}$ si ha

$$\|Tx\| = \|x\| \left\| T \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq \ell' \|x\|$$

Analogamente si procede sulla sfera unitaria di X (notiamo che se $D(T)$ non è banale (c.v.d.) l'intersezione di $D(T)$ con palla e sfera è non vuota, essendo $D(T)$ lineare).

Osservazione III.1 Dalla proposizione discende che una funzione lineare è continua se e solo se è limitata sulla sfera unitaria. D'altra parte è limitata sulla sfera unitaria se e solo se è limitata sulla palla aperta di centro l'origine. Infatti, se per ogni versore $\|Tu\| \leq \ell$ si ha per ogni $x \in B(0, 1)$, $\|Tx\| \leq \ell \|x\| < \ell$. D'altra parte se per ogni $x \in B(0, 1)$ si ha $\|Tx\|_Y \leq \ell'$, si ha che, posto $u = x/\|x\|$, per ogni intero $n > 0$

$$\left\| T \left(u - \frac{1}{n} u \right) \right\| = \|Tu\| \left(1 - \frac{1}{n} \right) \leq \ell'$$

- da cui, passando al limite per $n \rightarrow \infty$, $\|Tu\|_Y \leq \ell'$.

Norma operatoriale

Consideriamo $L(X, Y)$, lo spazio degli operatori continui a dominio su X . Vogliamo normare tale spazio con la migliore costante di Lipschitz, che certo esiste in forza della proposizione precedente. Verifichiamo che

$$\begin{aligned}\|T\| &= \inf \{l \geq 0 \mid l \text{ costante di Lipschitz di } T\} = \sup \{\|Tx\| \mid x \in B_X(0, 1)\} = \\ &= \sup \{\|Tx\| \mid x \in S_X\} = \sup \left\{ \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \mid x \in X \setminus \{0\} \right\}\end{aligned}$$

è una norma su $L(X, Y)$:

$$\|T\| \geq 0 \quad \forall T \in L(X, Y)$$

se $\|T\| = 0$ allora tutti i vettori di X sono mandati in 0, perciò

$$T(x) = \frac{1}{\|x\|} T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = 0.$$

Se poi $T, S \in L(X, Y)$ abbiamo, sulla sfera

$$\|(T + S)x\| = \|Tx + Sx\| \leq \|Tx\| + \|Sx\| \leq (\|T\| + \|S\|)$$

da cui

$$\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|.$$

Infine, sempre sulla sfera unitaria

$$\|(kT)x\| = \|kTx\| = |k| \|Tx\|$$

da cui

$$\|kT\| = \sup \|(kT)x\| = \sup |k| \|Tx\| = |k| \sup \|Tx\| = |k| \|T\|.$$

La norma costruita si chiama **norma operatoriale**.

Esempio III.1

Consideriamo ora gli spazi normati a dimensione finita $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^m$ con le norme euclidee. Vediamo anzitutto che $L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m) = \text{hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$. Sia infatti $T \in \text{hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$, allora T è identificato da una matrice $T \in \mathcal{M}(m, n; \mathbb{C})$. Sia $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, per la disuguaglianza di Cauchy e Schwarz

$$\|Tx\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (T_i, x)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m \|T_i\|_n^2 \|x\|^2} \leq \|x\|^2 \sqrt{\sum_{i \in J_m, j \in J_n} T_{i,j}^2} = \sqrt{\sum_{i \in J_m, j \in J_n} T_{i,j}^2}$$

da cui la limitatezza.

Vogliamo adesso calcolare esattamente quanto vale la norma di T . Per far questo procediamo per gradi. Sia $T \in \mathcal{M}(n, n; \mathbb{C})$ diagonale, allora

$$\|Tx\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (T_i, x)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^m T_{ii}^2 x_i^2} \leq \max_{i \in J_n} T_{ii} \|x\|$$

preso poi $x = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ con l'unica componente non nulla nell'indice al quale si realizza il massimo degli autovalori di T , si trova che $\|T\|$ è il massimo degli autovalori di T . Sia ora T qualsiasi. Consideriamo la matrice quadrata T^+T dove T^+ è la trasposta coniugata di T , cioè $T^+ = T^{t*}$. Come è noto

$$(x, Tx') = x^{t*} T x' = (T^+ x)^{t*} x' = (T^+ x, x')$$

In quanto hermitiana essa è diagonalizzabile, perciò $\|T^+T\|$ è il massimo dei suoi autovalori. Tuttavia, preso $x \in \mathbb{S}^{n-1}$

$$\|Tx\|^2 = |(Tx, Tx)| = |(x, T^+Tx)| \leq \|T^+T\|$$

si trova

$$\|T\|^2 \leq \|T^+T\|$$

D'altronde, se $x, x' \in \mathbb{S}^{n-1}$ abbiamo

$$|(x, T^+Tx')| = |(Tx, Tx')| \leq \|T\|^2$$

da cui

$$\|T^+Tx\| \leq \|T\|^2$$

perciò $\|T\|^2 = \|T^+T\|$ e

$$\|T\| = \sqrt{\max \{|\lambda_i| \mid \lambda_i \text{ autovalore di } T^+T\}}$$

■

Osservazione III.2 Siano X, Y spazi normati con $T \in \text{hom}(X, Y)$ iniettiva e perciò invertibile da $R(T)$ in X . Sia S l'inversa di T , essa è continua se e solo se vale

$$\inf \{ \|Tx\| \mid x \in S_X \cap D(T) \} = \alpha > 0$$

infatti, sia $y \in R(T)$, con $y \neq 0$, allora esiste ed è unico $x \neq 0$, tale che $y = Tx$, si ha

$$\|y\| = \|Tx\| \geq \alpha \|x\|$$

perciò

$$\|Sy\| \leq \frac{1}{\alpha} \|y\|$$

da cui la continuità di S .

Notiamo, in conclusione, che la condizione

$$\|Tx\| \geq \alpha \|x\|, \forall x \in D(T)$$

implica l'iniettività di T . Infatti, se $Tx = 0$, allora

$$0 \leq \alpha \|x\| \leq 0$$

■ da cui $\|x\| = 0$ cioè $x = 0$.

Completezza di $L(X, Y)$

Teorema III.6 Siano X uno spazio normato e Y uno spazio di Banach, allora lo spazio normato $L(X, Y)$ è esso stesso di Banach.

Dimostrazione Bisogna dimostrare la completezza di $L(X, Y)$. Sia $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di operatori lineari continui. Siccome

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\|$$

abbiamo che la successione $\{T_n x\}_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$ è di Cauchy per ogni $x \in X$. La completezza di Y implica dunque che, per ogni x , esiste il limite puntuale in Y

$$Tx \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x.$$

Si ha subito che T è lineare. La continuità di T si ottiene come segue: la successione $\{T_n\}$ è di Cauchy perciò è limitata, dunque, esiste $k \in \mathbb{R}^+$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\|T_n\| \leq k$$

sicché, per ogni n , $\|T_n x\| \leq k \|x\|$

$$\|Tx\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n x\| \leq k \|x\|$$

Dunque, T è un operatore lineare e continuo.

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un N_ε tale che

$$n, m > N_\varepsilon \Rightarrow \|T_n - T_m\| < \varepsilon$$

allora, per ogni $x \in X$

$$\|T_n x - T_m x\| < \varepsilon \|x\|$$

Passiamo al limite per $m \rightarrow \infty$, se $n > N_\varepsilon$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|T_n x - T_m x\| = \left\| T_n x - \lim_{m \rightarrow \infty} T_m x \right\| = \|T_n x - Tx\| < \varepsilon \|x\| \quad \forall x \in X$$

da cui

$$\|T_n - T\| < \varepsilon$$

(c.v.d.) la tesi.

Siano $X = Y \doteq E$ spazio di Banach, nell'insieme $L(E)$ possiamo introdurre la composizione: $A, B \in L(E)$ definiamo

$$AB \doteq A \circ B$$

allora

$$\|ABx\| \leq \|A\| \|Bx\| \leq \|A\| \|B\| \|x\|$$

da cui $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$. Le operazioni di addizione, moltiplicazione scalare e composizione fanno dello spazio di Banach $L(E)$ un'algebra associativa non commutativa (non appena $\dim L(E) > 1$). La composizione in $L(E)$ è un'operazione (come addizione, moltiplicazione e norma) continua da $L(E) \times L(E)$ in $L(E)$. Sia $(A, B) \in L(E) \times L(E)$ e siano $\{A_n\}$ e $\{B_n\}$ a valori in $L(E)$ tendenti ad A e B rispettivamente, allora

$$\|AB - A_n B_n\| = \|AB - A_n B + A_n B - A_n B_n\| \leq \|A - A_n\| \|B\| + \|A_n\| \|B - B_n\|$$

Siccome la successione A_n converge, essa è di Cauchy, perciò limitata e quindi $\|A_n\| \leq |k|$ perciò la successione $\{A_n B_n\}$ converge alla $\{AB\}$.

Infine, $L(E)$ è un'algebra associativa di Banach con identità essendo l'identità $id_E \doteq \mathbb{I}$.

III.1.4 Continuità delle applicazioni lineari in dimensione finita

Vogliamo indagare il comportamento delle funzioni lineari in dimensione finita, vedremo che esse sono sempre continue

Lemma III.7 *Siano X un $\mathbb{K}$ -spazio normato e $T : \mathbb{K}^n \rightarrow X$ un'applicazione lineare. Normato $\mathbb{K}^n$ con la norma del massimo $\|v\|_\infty \doteq \max_{k \in J_n} \{|v^k|\}$, si ha che T è continua.*

Dimostrazione Prendiamo $v \in \mathbb{K}^n$, sulla base standard $\{e_k\}$ di $\mathbb{K}^n$, si ha che T è univocamente determinata dalle $T(e_k) = w_k \in X$, $k \in J_n$

$$\|Tv\| = \left\| \sum_{k=1}^n v^k w_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n |v^k| \|w_k\| \leq L \|v\|_\infty$$

(c.v.d.) perciò T è continua.

Lemma III.8 *Siano X un $\mathbb{K}$ -spazio normato di dimensione finita e $\omega : \mathbb{K}^n \rightarrow X$ un isomorfismo lineare. Normato $\mathbb{K}^n$ con la norma del massimo $\|v\|_\infty \doteq \max_{k \in J_n} \{|v^k|\}$, si ha che ω è un omeomorfismo.*

Dimostrazione Per il lemma precedente ci basta vedere che ω^{-1} è continua. A tale scopo utilizziamo l'osservazione III.2. La sfera dei versori di $\mathbb{K}^n$ è ovviamente chiusa e limitata, perciò compatta. La funzione $\|\omega\|_X : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^+$ è continua (come composizione di funzioni continue) e perciò ammette minimo in un versore. D'altra parte tale minimo è certo diverso da 0 poiché ω è un isomorfismo e si annulla solo sullo 0, se ne ricava che $\inf \{\|\omega \mathbf{v}\|_X \mid \mathbf{v} \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}^n}\} = \alpha > 0$.

(c.v.d.)

Un esempio di applicazione dei due lemmi mostrati è il

Teorema III.9 (di Heine, Pincherle, Borel) *In uno spazio normato di dimensione finita, un sottoinsieme è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

Dimostrazione Sia X lo spazio normato, esso è, in ogni caso, un $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale, perciò è isomorfo secondo ω (isomorfismo di passaggio alle coordinate) a $\mathbb{R}^n \doteq \mathbb{R}^{\dim_{\mathbb{R}} X}$. ω è un omeomorfismo da $\mathbb{R}^n$ in X , perciò manda compatti in compatti e chiusi in chiusi; limitati in limitati per lipschitzianità, dal teorema di Heine, Pincherle e Borel nel caso reale (noto senz'altro dall'Analisi II) si perviene alla conclusione.

(c.v.d.)

Più importante, è però il seguente

Teorema III.10 (della continuità deà) *dominio sia in dimensione finita è continua.*

Dimostrazione

Sia X normato di dimensione finita e, preso Y normato, consideriamo $T \in \text{hom}(X, Y)$. Prendiamo $\omega : \mathbb{K}^n \rightarrow X$ isomorfismo. Allora $T \circ \omega : \mathbb{K}^n \rightarrow Y$ è continua per il lemma III.7, ma per il lemma precedente $\omega^{-1} : X \rightarrow \mathbb{K}^n$ è continua, sicché risulta continua

$$(c.v.d.) \quad T = (T \circ \omega) \circ \omega^{-1}$$

III.1.5 Equivalenza delle norme in dimensione finita

Prima di proseguire, riteniamo utile una digressione sull'equivalenza delle norme in dimensione finita. La trattazione dell'argomento applica infatti quanto appreso nelle precedenti sottosezioni.

Norme più fini Consideriamo due norme definite sullo stesso spazio vettoriale X , $\|\cdot\|_\alpha, \|\cdot\|_\beta$. Ognuna genera una famiglia di aperti in X , la topologia indotta. Siano τ_α e τ_β le topologie generate da $\|\cdot\|_\alpha$ e $\|\cdot\|_\beta$ rispettivamente. Diciamo che τ_α è **più fine** di τ_β se ogni aperto di τ_β appartiene a τ_α (τ_α ha più aperti di τ_β), cioè se $\tau_\beta \subset \tau_\alpha$. Equivalentemente, per ogni punto $\xi \in X$, se U è un τ_β -intorno, allora esso è un τ_α -intorno, e questo è vero se e solo se ogni palla della norma β contiene una palla nella norma α (e per traslazione è sufficiente considerare palle centrate nell'origine). In termini intuitivi, la condizione di vicinanza e convergenza imposta dalla $\|\cdot\|_\alpha$ è più stringente di quella imposta dalla $\|\cdot\|_\beta$.

Un secondo modo equivalente per esprimere il fatto che la topologia indotta dalla α -norma è più fine di quella indotta dalla β -norma è il seguente

Proposizione III.11 *Date due norme $\|\cdot\|_\alpha, \|\cdot\|_\beta$ definite sullo spazio X , la topologia τ_α indotta dalla prima è più fine di quella indotta dalla seconda, τ_β , se e solo se*

(i) *l'applicazione identica*

$$I : (X, \|\cdot\|_\alpha) \rightarrow (X, \|\cdot\|_\beta)$$

è continua;

(ii) *esiste una costante $\ell > 0$ per cui, per ogni $\xi \in X$*

$$\|\xi\|_\beta \leq \ell \|\xi\|_\alpha$$

Dimostrazione I è continua se e solo se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : B_\alpha(0, \delta) \subseteq B_\beta(0, \varepsilon)$, la qual cosa equivale ad affermare che la topologia τ_α è più fine della τ_β .

D'altra parte la continuità di I , lineare, sussiste se e solo esiste la costante ℓ per cui

$$(c.v.d.) \quad \|\xi\|_\beta \leq \ell \|\xi\|_\alpha$$

Norme equivalenti La nozione di convergenza sarà equivalente nelle due norme se le rispettive topologie saranno l'una più fine dell'altra, cioè se e solo se $\tau_\alpha = \tau_\beta$. Per quanto detto, l'equivalenza delle norme si ha se e solo se esistono due costanti $\lambda, \ell > 0$, per cui

$$\lambda \|\xi\|_\alpha \leq \|\xi\|_\beta \leq \ell \|\xi\|_\alpha$$

Infine, diremo che una norma è **strettamente più fine** di un'altra se l'applicazione identica da X normato con la più fine, in X normato dalla meno fine, è continua, ma la sua inversa non è continua.

Equivalenza delle norme in dimensione finita Il teorema della continuità degli omomorfismi in dimensione finita consente di concludere il seguente fondamentale

Teorema III.12 *Su uno spazio di dimensione finita tutte le norme sono equivalenti.*

Dimostrazione Infatti, per il teorema della continuità degli omomorfismi in dimensione finita, l'identità da X con una norma, in X con un'altra norma, come applicazione lineare, sarà continua nei due

(c.v.d.) sensi.

Consideriamo ancora uno spazio normato X di dimensione finita. Certamente esso è isomorfo a $\mathbb{R}^n \doteq \mathbb{R}^{\dim_{\mathbb{R}} X}$. Fissiamo una base $\mathcal{B}$ su X . Resta univocamente definito l'isomorfismo di passaggio alle coordinate $[\cdot]_{\mathcal{B}} : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ e che a ogni elemento di X associa il vettore di $\mathbb{R}^n$ formato dalle sue componenti sulla base $\mathcal{B}$. Su X definiamo la norma (verificare che si tratta di una norma è immediato)

$$x \in X \mapsto \|x\|_n \doteq \|[x]_{\mathcal{B}}\|_{\infty}$$

Allora $[\cdot]_{\mathcal{B}}$ è un isomorfismo isometrico di spazi normati. Se ora $\{x_n\} \subset X$ è di Cauchy, la successione $\{[x_n]_{\mathcal{B}}\} \subset \mathbb{R}^n$ è essa stessa di Cauchy, perciò, per completezza di $\mathbb{R}^n$, converge. Dunque, $[x_n]_{\mathcal{B}} \rightarrow v \in \mathbb{R}^n$. Preso $x \doteq [v]_{\mathcal{B}}^{-1} \in X$ (che esiste ed è unico) si ha che

$$\|x - x_n\|_n = \|v - [x_n]_{\mathcal{B}}\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Allora $(X, \|\cdot\|_n)$ è completo. Ma siccome tutte le norme sono equivalenti, X è completo quale che sia la norma scelta

Teorema III.13 *Uno spazio normato di dimensione finita è completo.*

III.2 I principi di Banach

In questa sezione ci occupiamo di tre teoremi fondamentali dovuti a Banach e che riguardano gli operatori lineari sugli spazi di Banach. Tutti i risultati che otterremo sono conseguenza di un teorema tipicamente topologico del quale ci occupiamo nella prima sottosezione: il teorema di Baire-Hausdorff

III.2.1 Il teorema di Baire-Hausdorff

Richiamiamo la seguente

Definizione III.3 *Sia X uno spazio topologico e sia $M \subset X$. M si dice non denso se la sua chiusura M^a non contiene aperti (non vuoti) di X . M si dice denso se $M^a = X$. Inoltre, M si dice della prima categoria se è unione numerabile di insiemi non densi, altrimenti, si dice della seconda categoria.*

È naturale chiedersi la relazione che sussiste tra la nozione di densità e quella di non densità. Ora, se M è non denso, allora M^c è denso. Infatti

$$X = M^c \cup M$$

perciò bisogna mostrare che $M \subset \mathcal{DM}^c$, cioè che i punti di M sono di accumulazione per il suo complementare. Infatti, sia $x \in M$ e sia U un qualsiasi aperto contenente x . Allora U non può essere contenuto in M e perciò interseca M^c , dunque $x \in \mathcal{DM}$:

Proposizione III.14 *Sia X uno spazio topologico e sia $M \subset X$ un sottoinsieme non denso. Allora M^c è denso in X .*

Ebbene, sussiste il seguente

Teorema III.15
(di Baire-Hausdorff) *Uno spazio metrico completo non vuoto è della seconda categoria.*

Dimostrazione Sia X uno spazio metrico completo. Sia $\{M_n\}$ una successione di chiusi la cui unione è X . Se assumiamo che nessun M_n contenga aperti (non vuoti) di X , dobbiamo derivarne un assurdo. Consideriamo l'insieme M_1 . Allora M_1^c è un aperto e, per la proposizione precedente, è denso in X , cioè $(M_1^c)^a = X$. Ora, preso un qualsiasi punto $x_1 \in M_1^c$ esiste una sfera chiusa di centro x_1 tutta contenuta in M_1^c , $S_1 \doteq B(x_1, r_1]$. Notiamo che x_1 può essere scelto arbitrariamente vicino a un qualsiasi punto di X (per densità) e che è sempre possibile supporre (a meno di restrizione) che $r_1 < 1/2$. Proprio in forza di quanto detto, è possibile trovare una palla $S_2 \doteq B(x_2, r_2]$ tutta contenuta in M_2^c e in S_1 (infatti, anche M_2^c è denso in X , perciò possiamo prendere x_2 sufficientemente vicino a x_1) di raggio $r_2 < 1/4$. Procedendo per induzione,

otteniamo una successione $\{S_n\}$ di palle chiuse di raggi $r_n < 1/2^n$, tali che $S_{n+1} \subset S_n$ e $S_n \cap M_n = \emptyset$. Ne deriva che la successione dei centri $\{x_n\} \subset X$ è di Cauchy: se $m > n$

$$d(x_n, x_m) < r_n < \frac{1}{2^n}$$

Ne deriva che esiste il limite $x_\infty \in X$ per $n \rightarrow \infty$ di x_n . D'altra parte

$$d(x_n, x_\infty) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, x_\infty) < r_n + d(x_m, x_\infty) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} r_n$$

Ne consegue che per ogni n $x_\infty \in S_n$, da cui per ogni n $x_\infty \notin M_n$ e, in definitiva, l'assurdo
(c.v.d.) $x_\infty \notin X$.

III.2.2 Il teorema della mappa aperta

Prima di cominciare la trattazione del teorema della mappa aperta, vogliamo ricordare alcuni fatti fondamentali sulle serie negli spazi di Banach. Vogliamo dimostrare la semplice

Proposizione III.16 *In uno spazio di Banach ogni serie assolutamente convergente è convergente.*

Dimostrazione Sia

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

assolutamente convergente. Ne segue che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste K_ε tale che

$$n \geq m \geq K_\varepsilon \Rightarrow \sum_{i=m+1}^n \|u_i\| < \varepsilon$$

se s_n è la successione delle somme parziali della serie si ha

$$\|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{i=m+1}^n u_i \right\| \leq \sum_{i=m+1}^n \|u_i\| < \varepsilon$$

(c.v.d.) perciò la serie è di Cauchy ed essendo lo spazio completo converge a un elemento dello spazio.

Il primo principio di Banach che mostreremo è il teorema della mappa aperta. per la sua dimostrazione ci occorre ancora un

Lemma III.17 *Sia $A \in L(X, Y)$ un operatore lineare suriettivo tra gli spazi di Banach X e Y . Allora l'immagine tramite A della palla unitaria di X contiene una palla di centro l'origine di Y .*

Dimostrazione Consideriamo la successione delle palle aperte

$$S_n \doteq B_X(0, 1/2^n)$$

Ora, certamente

$$X = \bigcup_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} kS_1$$

allora

$$Y = \bigcup_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} kA(S_1)$$

Infatti, l'unione è banalmente contenuta in Y . Vediamo il viceversa. Sia $y \in Y$, siccome A è suriettivo, esiste un x talché $y = Ax$. Allora, scelto $k \in \mathbb{N}$ tale che (principio di Archimede)

$$k > 2\|x\|$$

si ha

$$y = kA\left(\frac{x}{k}\right)$$

dove

$$\left\| \frac{x}{k} \right\| < \frac{1}{2}.$$

Ora, Y è completo, perciò, per il teorema di Baire-Hausdorff, deve esistere almeno un $k_0 \in \mathbb{N}$ per cui l'insieme $[k_0 A(S_1)]^a$ deve contenere una palla. Esistono cioè $z \in Y$ e $r \in \mathbb{R}^+$ per cui

$$B_Y(z, r) \subset [k_0 A(S_1)]^a$$

ne consegue che per ogni $y : \|y - z\| < r$ esiste una successione $\{x_n\} \subset S_1$ tale che

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} k_0 A x_n$$

allora per ogni $y' : \|y' - z/k_0\| < r/k_0$ esiste una successione $\{x_n\} \subset S_1$ tale che

$$y' = \lim_{n \rightarrow \infty} A x_n$$

infatti $k_0 y' \in B_Y(z, r)$. Ne consegue che esiste una palla tutta contenuta in $A(S_1)^a$, chiamiamola preventivamente $B_Y(z, \eta)$.

Questo comporta che

$$B_Y(0, \eta) \subset A(S_1)^a - z \subset A(S_0)^a$$

dimostriamo la seconda inclusione. Sia $y \in A(S_1)^a - z$, allora esistono $\{x_n\}, \{w_n\} \subset S_1$ tale che

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} A x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} A w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n - w_n)$$

Ora

$$\|x_n - w_n\| \leq \|x_n\| + \|w_n\| < 1.$$

Dunque $B_Y(0, \eta) \subset A(S_0)^a$. La linearità di A consente ancora di avere

$$B_Y\left(0, \frac{\eta}{2^n}\right) \subset A(S_n)^a$$

sia $y' \in B_Y(0, \eta/2^n)$ allora $y \div 2^n y' \in B_Y(0, \eta)$. Esiste allora una successione $\{x_m\} \subset S_0$ tale che

$$2^n y' = \lim_{m \rightarrow \infty} A x_m \Rightarrow y' = \lim_{m \rightarrow \infty} A\left(\frac{x_m}{2^n}\right)$$

con $\{x_m/2^n\} \subset S_n$.

Prendiamo ora $y \in Y$ con $\|y\| < \eta/2$, allora $y \in A(S_1)^a$ e perciò esiste $x_1 \in S_1$ tale che

$$\|y - A x_1\| < \frac{\eta}{4}$$

Ma allora $(y - A x_1) \in A(S_2)^a$ perciò esiste x_2 tale che

$$\|y - A x_1 - A x_2\| < \frac{\eta}{8}$$

Per induzione si costruisce una successione $\{x_n\} \subset X$ con $\|x_n\| < 1/2^n$ tale che

$$\left\| y - \sum_{k=1}^n A x_k \right\| < \frac{\eta}{2^{n+1}}$$

Ora, siccome A è continuo e la serie degli x_k converge assolutamente a un elemento v di S_0

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n \|x_k\| < \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

si ha che $y = A v$ con $v \in B_X(0, 1)$. Ne deriva che

$$(c.v.d.) \quad B_Y\left(0, \frac{\eta}{2}\right) \subset A(B_X(0, 1)).$$

Siamo infine in grado di dimostrare il

**Teorema
III.18 (della
mappa aperta)**

Un operatore lineare continuo suriettivo tra gli spazi di Banach X e Y , mappa aperti di X in aperti di Y .

Dimostrazione

Sia S un aperto di X e sia $y \in A(S)$. Allora esiste $x \in S$ tale che $y = A x$. Consideriamo la palla di centro x tutta contenuta in S , $B_X(x, r)$. Siccome $B_X(x, r) \subset S$, allora $A_X(B(x, r)) \subset A(S)$. Ora, dal lemma precedente, esiste una palla $B_Y(0, r')$ contenuta in $A(B_X(0, 1))$, allora

$$\begin{aligned} B_Y(y, r') &\subset A(B_X(x, 1)) \\ B_Y(y, r r') &\subset A(B_X(x, r)) \subset A(S) \end{aligned}$$

(c.v.d.) da cui $A(S)$ è aperto.

III.2.3 Un'applicazione del teorema della mappa aperta: $GL(E)$

Inversa di un'applicazione lineare

Dall'osservazione III.2 sappiamo che un'applicazione lineare è invertibile sulla propria immagine con inversa continua se e solo se esiste $\mu > 0$ tale che

$$\|Ax\| \geq \mu \|x\|, \forall x \in D(A)$$

D'altra parte, se $D(A) = X$ e A è iniettivo e suriettivo, cioè biunivoco, per il teorema della mappa aperta A^{-1} è continuo. Infatti, la controimmagine tramite A^{-1} di un aperto S di X è $A(S)$ che è aperto.

Ne ricaviamo il seguente

Teorema III.19
(dell'inverso limitato)

Siano X e Y spazi di Banach e sia $A \in L(X, Y)$ invertibile. Se A è suriettivo allora ammette inverso continuo, cioè $A^{-1} \in L(Y, X)$.

Da cui si ha subito il seguente

Corollario III.20 Sia X uno spazio di Banach rispetto alle norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ ed esista una costante $\ell \in \mathbb{R}^+$ talché

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &\leq \ell \|x\|_2 \quad \forall x \in X \\ \text{allora le due norme sono equivalenti, i.e. esiste } \ell' \in \mathbb{R}^+ \text{ per cui} \\ \|x\|_2 &\leq \ell' \|x\|_1 \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

Dimostrazione
(c.v.d.)

L'identità tra $(X, \|\cdot\|_1)$ e $(X, \|\cdot\|_2)$ è un'applicazione invertibile e, per ipotesi, continua, perciò ammette inversa continua, da qui la tesi.

Se ora poniamo $X = Y \doteq E$, abbiamo che il sottoinsieme di $L(E)$ formato dagli elementi **regolari** di $L(E)$, cioè continui e tali che l'inversa continua ad appartenere a $L(E)$, forma un gruppo rispetto alla composizione: grazie al teorema precedente tale gruppo è formato dagli operatori lineari continui e biunivoci. Il gruppo degli elementi regolari di $L(E)$ si indica con $GL(E)$ cioè **gruppo lineare generale** dello spazio di Banach E .

Prima di proseguire oltre, vogliamo dimostrare che $GL(E)$ è aperto in $L(E)$. Poniamo intanto la

Proposizione III.21 Se E è uno spazio di Banach e $A \in L(E)$ allora sono equivalenti le seguenti affermazioni

- (i) $A \in GL(E)$;
- (ii) $\exists B \in \text{end}(E) : BA = AB = \mathbb{I}$;

se un tale B esiste allora è unico.

Dimostrazione

(i) implica (ii) per definizione, preso $B \doteq A^{-1}$. Si supponga vera (ii). A è invertibile: $BA = \mathbb{I}$ implica che $\ker(BA) = \{0\}$ da cui $\ker(A) = \{0\}$; $AB = \mathbb{I}$ implica $R(A) = E$. Dal teorema dell'inverso limitato, essendo A per ipotesi continuo, si deduce che A^{-1} è continuo.

Vediamo l'unicità di B . Sia B' tale che $B'A = AB' = \mathbb{I}$. Allora $A^{-1} = A^{-1}BA$ e $A^{-1} = A^{-1}AB'$ ne segue

$$\begin{aligned} B &= AA^{-1}A^{-1} = A^{-1} \\ B' &= AA^{-1}A^{-1} = A^{-1} \end{aligned}$$

(c.v.d.)

Teorema III.22

Dato uno spazio di Banach E , sia $A \in L(E)$. Se $\|A\| < 1$ allora

- (i) la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n$ è assolutamente convergente, perciò è convergente;

(ii) $(\mathbb{I} - A) \in GL(E)$ e $(\mathbb{I} - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n$;

(iii) infine,

$$\|(\mathbb{I} - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Dimostrazione (i) Come sappiamo

$$\|A^n\| \leq \|A\|^n$$

perciò se $\|A\| < 1$ la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n$ è assolutamente convergente e perciò convergente: si ha inoltre

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|A^n\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1 - \|A\|}$$

(ii) Poniamo $B \doteq \sum_{n=0}^{+\infty} A^n$ Abbiamo

$$AB = BA = \sum_{n=0}^{+\infty} A^{n+1}$$

Da ciò si ha

$$(\mathbb{I} - A)B = B(\mathbb{I} - A)$$

e

$$(\mathbb{I} - A)B = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n - \sum_{n=0}^{+\infty} A^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n - \sum_{n=1}^{+\infty} A^n = \mathbb{I}$$

Allora, per la proposizione di sopra, $B = (\mathbb{I} - A)^{-1}$ e dunque

$$(\mathbb{I} - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n.$$

(iii) Si ha subito

$$\|(\mathbb{I} - A)^{-1}\| = \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} A^n \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1 - \|A\|}$$

(c.v.d.)

**$GL(E)$ aperto
in $L(E)$**

Dimostriamo ora che $GL(E)$ è aperto. Prendiamo un qualsiasi $A \in GL(E)$. Fissata una costante ℓ si trova sempre T tale che $\|T\| \leq \ell$, basta scegliere per T l'operatore $\ell T/2 \|T\|$. Allora esiste B in $L(E)$ tale che

$$\|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

allora

$$\|\mathbb{I} - A^{-1}B\| = \|A^{-1}A - A^{-1}B\| \leq \|A^{-1}\| \|A - B\| \leq 1$$

dal teorema precedente applicato all'operatore $\mathbb{I} - A^{-1}B$, abbiamo che $A^{-1}B \in GL(E)$, allora $B = AA^{-1}B$ appartiene a $GL(E)$ cioè la palla $B(A, 1/\|A^{-1}\|)$ è tutta contenuta in $GL(E)$ che perciò è aperto.

III.2.4 Il teorema del grafico chiuso

**Grafico di
un operatore**

Sia A un operatore lineare sugli spazi normati X, Y , il suo grafico è l'insieme

$$\mathcal{G}(A) = \{x \oplus Ax \in X \times Y \mid x \in D(A)\}$$

L'insieme $X \times Y$ è uno spazio normato dalla norma

$$\|x \oplus y\|^2 = \|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2$$

ed è banale verificare (lo abbiamo già fatto nel capitolo II) che

$$x \oplus y = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \oplus y_n \Leftrightarrow x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ e } y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Operatori chiusi

Ora, sia $\mathcal{G}(A)$ chiuso, questo equivale a supporre che ogni successione convergente a valori in $\mathcal{G}(A)$ converge a un punto di $\mathcal{G}(A)$, risulta cioè

$$\{x_n \oplus y_n\} \in \mathcal{G}(A) : x \oplus y = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \oplus y_n \Rightarrow y = Tx$$

perciò, $\mathcal{G}(A)$ è chiuso se e solo se per ogni successione $\{x_n\}$ a valori in $D(A)$ che converga a

$x \in D(A)$ e tale che la successione $\{Ax_n\}$ converge a un valore $y \in Y$, si ha che $y = Tx$.
Un operatore per cui $\mathcal{G}(A)$ è chiuso si dice **chiuso**. Dunque, come detto

Proposizione III.23 *Un operatore A è chiuso se e solo se per ogni successione $\{x_n\}$ a valori in $D(A)$ che converga a un valore $x \in D(A)$ e tale che la successione $\{Ax_n\}$ converge a un valore y , risulta $y = Ax$.*

Il secondo principio di Banach si rivolge proprio agli operatori chiusi

**Teorema
III.24 (del
grafico chiuso)**

Sia $A : X \rightarrow Y$ un operatore lineare chiuso tra gli spazi di Banach X e Y , avente dominio in X , allora A è continuo.

Dimostrazione In X definiamo la norma

$$\|x\|_A \doteq \|x\| + \|Ax\|$$

Vediamo che si tratta effettivamente di una norma

$$\|x\|_A = 0 \Rightarrow \|x\| + \|Ax\| = 0$$

da cui, essendo la norma $\|\cdot\|$ positiva

$$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$$

La linearità garantisce che

$$\|kx\|_A = |k| \|x\| + \|kAx\| = |k| (\|x\| + \|Ax\|) = |k| \|x\|_A$$

Infine, ancora grazie alla linearità

$$\|x + y\|_A = \|x + y\| + \|Ax + Ay\| \leq \|x\| + \|Ax\| + \|y\| + \|Ay\| \leq \|x\|_A + \|y\|_A$$

Vediamo che $(X, \|\cdot\|_A)$ è completo. Sia $\{x_n\} \subset X$, una successione di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_A$, allora,

$$\|Ax_n - Ax_m\|, \|x_n - x_m\| \leq \|x_n - x_m\|_A$$

perciò sono successioni di Cauchy anche $\{x_n\}$ rispetto alla norma usuale e $\{Ax_n\}$. Dunque, x_n converge a x e Ax_n converge a y . Siccome A è chiuso allora

$$y = Ax \Rightarrow \|Ax - Ax_n\| \rightarrow 0$$

allora

$$\|x - x_n\|_A = \|x - x_n\| + \|Ax - Ax_n\| \rightarrow 0.$$

Ora, siccome X è di Banach rispetto a $\|\cdot\|_A$ e a $\|\cdot\|$, e siccome

$$\|x\| \leq \|x\|_A \quad \forall x \in X$$

allora, per il corollario precedente, esiste $\ell' \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$\|x\|_A \leq \ell' \|x\|$$

cioè

$$\|Ax\| \leq (\ell' - 1) \|x\|$$

(c.v.d.) da cui A è continuo.

III.2.5 Il teorema di uniforme limitatezza o di Banach-Steinhaus

Anche il terzo principio di Banach deriva dal teorema di Baire-Hausdorff, e in particolare dal seguente

Lemma III.25 *Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni continue, reali, definite su uno spazio metrico completo X , tali che per ogni $x \in X$ esista una costante positiva M_x per cui*

$$\forall f \in \mathcal{F} \quad |f(x)| \leq M_x.$$

Allora esistono un aperto non vuoto $S \subset X$ e una costante positiva M per cui

$$\forall f \in \mathcal{F}, \forall s \in S \quad |f(s)| \leq M.$$

Dimostrazione Per ogni $m \in \mathbb{N}$ definiamo l'insieme

$$E_f^m \doteq \{x \in X \mid |f(x)| \leq m\}$$

e definiamo poi

$$E^m \doteq \bigcap_{f \in \mathcal{F}} E_f^m.$$

Ora, E_f^m è chiuso, essendo $|f|$ continua, perciò anche E^m è chiuso. Vediamo che

$$X = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} E^m$$

infatti, sia $x \in X$, allora $|f(x)| \leq M_x$ per ogni $f \in \mathcal{F}$, preso $N > M_x$ con $N \in \mathbb{N}$, abbiamo che $x \in E^N$.

Siccome X è completo, per il teorema di Baire-Hausdorff, esiste un indice m per cui E^m contiene un aperto S su tale aperto

$$(c.v.d.) \quad \forall f \in \mathcal{F}, \forall s \in S \quad |f(s)| \leq m$$

Siamo così all'ultimo principio di Banach, dovuto a Banach-Steinhaus

Teorema III.26
(di uniforme limitatezza)

Sia X uno spazio di Banach e sia Y uno spazio normato. Sia $\mathcal{F} \subset L(X, Y)$ una famiglia di operatori lineari limitati da X in Y per cui, per ogni $x \in X$ esiste $M_x > 0$ tale che

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad \|Ax\| \leq M_x$$

allora esiste una costante M tale che

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad \|A\| \leq M$$

Dimostrazione

Consideriamo la famiglia $\mathcal{F}'$ di applicazioni continue da X sulla retta reale definite da

$$f(x) \doteq \|Ax\|, \quad x \in X$$

Per il lemma esistono un aperto $S \subset X$ e una costante $M > 0$ per cui

$$\forall A \in \mathcal{F}, \forall s \in S \quad \|As\| \leq M$$

Sia ora $y \in S$ e sia $B(y, \delta) \subset S$. Se $\|z\| < \delta$ allora $Az = A(z+y) - Ay$, abbiamo $z+y \in B(y, \delta)$ allora

$$\|Az\| \leq \|A(z+y)\| + \|Ay\| \leq M + M_y \quad \forall A \in \mathcal{F}, \forall z \in B(0, \delta)$$

Sia ora $x \in X$ allora

$$\|Ax\| = \left\| A \left(\frac{x}{\|x\|} \frac{\delta}{2} \right) \right\| \frac{2\|x\|}{\delta} \leq \frac{2}{\delta} (M + M_y) \|x\|$$

da cui, per ogni $A \in \mathcal{F}$

$$(c.v.d.) \quad \|A\| \leq \frac{2}{\delta} (M + M_y).$$

III.3 L'aggiunzione

III.3.1 Trasposizione negli spazi di Banach

Consideriamo uno spazio lineare X e un'applicazione lineare A definita da X in Y , anch'essa lineare. Ora, ad A possiamo associare il suo **trasposto** A^t che è un operatore lineare tra Y^* e X^* definito da

$$\langle A^t \alpha, x \rangle \doteq \langle \alpha, Ax \rangle, \quad \forall \alpha \in Y^*, \forall x \in X$$

Verifichiamo che $A^t \in \text{hom}(Y^*, X^*)$, dobbiamo cioè vedere che si tratta effettivamente di un'applicazione lineare

$$\begin{aligned} \langle A^t(\alpha + k\beta), x \rangle &= \langle \alpha + k\beta, Ax \rangle = \langle \alpha, Ax \rangle + k^* \langle \beta, Ax \rangle = \langle A^t \alpha, Ax \rangle + k^* \langle A^t \beta, x \rangle = \\ &= \langle A^t \alpha, Ax \rangle + \langle k A^t \beta, x \rangle = \langle A^t \alpha + k A^t \beta, x \rangle \end{aligned}$$

Abbiamo allora una applicazione

$$\begin{array}{ccc} {}^t : & \text{hom}(X, Y) & \rightarrow & \text{hom}(Y^*, X^*) \\ & A & \mapsto & A^t \end{array}$$

$$A^t \alpha \doteq \alpha \circ A, \quad \forall \alpha \in Y^*$$

Ci chiediamo come vada interpretata la definizione se ipotizziamo che X e Y siano spazi di Banach. Infatti, appare naturale sostituire al duale algebrico quello topologico e agli spazi hom semplicemente i relativi sottoinsiemi L . Per poter conservare la vecchia definizione dobbiamo allora dimostrare che A^t e $A^t\alpha$ sono continui, cioè $A^t \in L(Y^*, X^*)$ e $A^t\alpha \in X^*$. Si ha subito

$$\begin{aligned} |\langle A^t\alpha, x \rangle| &= |\langle \alpha, Ax \rangle| \leq \|\alpha\| \|A\| \|x\| \\ \|A^t\alpha\| &\leq \|A\| \|\alpha\| \end{aligned}$$

perciò $\|A^t\| \leq \|A\|$ e si ha allora ben definita l'applicazione

$$\begin{aligned} {}^t : L(X, Y) &\rightarrow L(Y^*, X^*) \\ A &\mapsto A^t \\ A^t\alpha &\doteq \alpha \circ A, \forall \alpha \in Y^* \end{aligned}$$

Dobbiamo adesso mostrare la seguente

Proposizione III.27 *Siano X e Y spazi di Banach, allora, per ogni $A, B \in L(X, Y)$ $k \in \mathbb{C}$ si hanno le seguenti relazioni*

- (i) $(A + B)^t = A^t + B^t$;
- (ii) $(kA)^t = k^* A^t$;
- (iii) $\|A^t\| = \|A\|$.

Se poi $X = Y \doteq E$, allora se $A, B \in L(E)$ si ha $(BA)^t = A^t B^t$. Infine, se $A \in GL(E)$ allora $A^t \in GL(E^*)$ e $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Dimostrazione La linearità di t dimostra (i) e (ii). Veniamo a (iii), sappiamo già che $\|A^t\| \leq \|A\|$. Ora, applichiamo il teorema di separazione di Y tramite Y^* di cui al capitolo II. Sia $x \in X$ con $Ax \neq 0$, esiste allora $\alpha_x \in Y^*$ tale che

$$\|\alpha_x\| = 1 \text{ e } \langle \alpha_x, Ax \rangle = \|Ax\|$$

perciò

$$\|Ax\| = \langle \alpha_x, Ax \rangle = |\langle A^t\alpha_x, x \rangle| \leq \|A^t\alpha_x\| \|x\| \leq \|A^t\| \|x\|$$

cioè

$$\|Ax\| \leq \|A^t\| \|x\|$$

questa vale per ogni x per l'arbitrarietà di x , perciò

$$\|A\| \leq \|A^t\|.$$

Sia ora $X = Y \doteq E$. Se $\alpha \in Y^*$ allora

$$\langle (BA)^t \alpha, x \rangle = \langle \alpha, BAx \rangle = \langle B^t \alpha, Ax \rangle = \langle A^t B^t \alpha, x \rangle$$

Ora, sia $A \in GL(E)$ allora anche $A^{-1} \in GL(E)$

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{I}$$

perciò, passando alla trasposta

$$(A^{-1})^t A^t = A^t (A^{-1})^t = \mathbb{I}$$

essendo $\mathbb{I}^t = \mathbb{I}$. Ma allora per la proposizione III.21 si ha che $A^t \in GL(E^*)$ e che

$$(c.v.d.) \quad (A^{-1})^t = (A^t)^{-1}.$$

III.3.2 Aggiunzione negli spazi di Hilbert

L'associazione di A^t ad $A \in L(E)$ diviene particolarmente significativa nel caso in cui lo spazio E sia uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Infatti, ogni spazio di Hilbert può essere identificato con il suo duale via l'isomorfismo di Riesz. In questo modo l'applicazione A^t viene essa stessa identificata con una applicazione che appartiene a $L(E)$.

Sia $\alpha \in E^*$ allora esiste $x \in \mathcal{H}$ tale che $\langle \alpha, \cdot \rangle = (x, \cdot)$ e si pone $\alpha = Tx$

$$\langle A^t \alpha, x' \rangle = \langle \alpha, Ax' \rangle = (x, Ax')$$

ma il primo membro

$$\langle A^t \alpha, x' \rangle = (T^{-1} (A^t \alpha), x')$$

se definiamo $A^\dagger \doteq T^{-1} A^t T$ abbiamo

$$(A^\dagger x, x') = (x, Ax') \quad \forall x, x' \in \mathcal{H}.$$

Siccome T è un isomorfismo bicontinuo si ha che $A^\dagger \in L(\mathcal{H})$. L'operatore $A^\dagger$ si dice **aggiunto** e l'applicazione, chiaramente continua $^\dagger : L(\mathcal{H}) \rightarrow L(\mathcal{H})$ si chiama **aggiunzione**.

Proposizione III.28 *Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e siano $A, B \in L(\mathcal{H})$ e $k \in \mathbb{C}$ allora valgono le seguenti proprietà*

$$(i) (A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger;$$

$$(ii) (kA)^\dagger = k^* A^\dagger;$$

$$(iii) (BA)^\dagger = A^\dagger B^\dagger;$$

$$(iv) (A^\dagger)^\dagger \doteq A^{\dagger\dagger} = A;$$

$$(v) \|A^\dagger A\| = \|A\|^2;$$

$$(vi) \|A\| = \|A^\dagger\|.$$

Dimostrazione Siccome $A^\dagger = T^{-1} A^t T$ si hanno subito, dalla proposizione precedente, i punti (i), (ii) e (iii). Veniamo a (iv). Per ogni $x, x' \in \mathcal{H}$ abbiamo

$$(A^{\dagger\dagger} x, x') = (x, A^\dagger x') = (A^\dagger x', x)^* = (x', Ax)^* = (Ax, x')$$

da cui

$$((A^{\dagger\dagger} - A)x, x') = 0$$

cioè

$$(A^{\dagger\dagger} - A)x = 0 \Rightarrow A^{\dagger\dagger} = A.$$

Abbiamo per definizione che $(A^\dagger x, x') = (x, Ax')$, sicché

$$(A^{\dagger\dagger} x, x') = (x, A^\dagger x')$$

ma siccome $A^{\dagger\dagger} = A$ si conclude che vale anche

$$(x, A^\dagger x') = (Ax, x').$$

(v) Per ogni $x \in \mathcal{H}$, abbiamo

$$\|Ax\|^2 = |(Ax, Ax)| = |(x, A^\dagger Ax)| \leq \|A^\dagger A\| \|x\|^2$$

se scegliamo $\|x\| = 1$ abbiamo

$$\|Ax\| \leq \|A^\dagger A\|^{1/2} \Rightarrow \|A\|^2 \leq \|A^\dagger A\|$$

D'altra parte, se $\|x\| = \|x'\| = 1$

$$|(x, A^\dagger Ax')| = |(Ax, Ax')| \leq \|A\|^2$$

perciò

$$\|A^\dagger Ay\| = \left| \left(\frac{A^\dagger Ay}{\|A^\dagger Ay\|}, \frac{A^\dagger Ay}{\|y\|} \right) \right| \|y\| \leq \|A\|^2 \|y\|$$

da cui

$$\|A\|^2 \geq \|A^\dagger A\|$$

la tesi.

(vi) Abbiamo visto sopra che

$$\|A\|^2 \leq \|A^\dagger A\| \leq \|A\| \|A^\dagger\|$$

perciò

$$(c.v.d.) \quad \|A\| \leq \|A^\dagger\| \leq \|A^{\dagger\dagger}\| = \|A\|.$$

Dalla (vi) si ha pure che l'aggiunzione (che è lineare) è una funzione **continua** da $L(\mathcal{H})$ in $L(\mathcal{H})$.

III.3.3 C^* -Algebre

A suo tempo abbiamo accentato al fatto che se E uno spazio di Banach, l'insieme $L(E)$ è un'algebra di Banach. In questa sottosezione vogliamo brevemente specificarne il significato di questa affermazione.

Cominciamo col porre la seguente

Definizione III.4 Un'algebra $\mathcal{A}$ è uno spazio vettoriale sul quale è definita la mappa $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ prodotto che gode delle seguenti proprietà

$$a(b_1 + b_2) = ab_1 + ab_2; a(bc) = (ab)c; a(\alpha b) = \alpha ab$$

se $a, b \in \mathcal{A}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. L'algebra è dotata di una identità $\mathbb{I}$ se

$$a\mathbb{I} = \mathbb{I}a, \forall a \in \mathcal{A};$$

se vale la proprietà commutativa rispetto al prodotto $\mathcal{A}$ si dice commutativa o abeliana.

Lavorando sui complessi vi è un'altra operazione da assiomaticizzare

Definizione III.5 Una $*$ -algebra è un'algebra sulla quale sia definita la mappa $*$: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ tale che

$$(ab)^* = b^*a^*; (a+b)^* = a^* + b^*; (\alpha a)^* = \alpha^*a^*; a^{**} = a$$

per ogni $a, b \in \mathcal{A}$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

Definizione III.6 Una C^* -algebra è una $*$ -algebra che sia uno spazio di Banach la cui norma sia tale che

$$(i) \|ab\| \leq \|a\| \|b\|;$$

$$(ii) \|a^*\| = \|a\|;$$

$$(iii) \|aa^*\| = \|a\| \|a^*\|;$$

$$(iv) \|\mathbb{I}\| = 1.$$

L'operazione di aggiunzione, $*$ $\doteq$ † , rende l'algebra di Banach $L(\mathcal{H})$ una C^* -algebra.

III.3.4 Autoaggiunzione su $L(\mathcal{H})$

**Operatori
autoaggiunti
in $L(\mathcal{H})$**

Un'elemento $A \in L(\mathcal{H})$ si dice **autoaggiunto** se $A^\dagger = A$, ossia se

$$(Ax, x') = (x, Ax') \quad \forall x, x' \in \mathcal{H}.$$

Se a ogni operatore $A \in L(\mathcal{H})$ associamo la forma sesquilineare

$$\phi_A(x, x') \doteq (x, Ax')$$

abbiamo che A è autoaggiunto se e solo se ϕ è hermitiana. Se A è autoaggiunto si ha

$$\phi_A(x', x) = (x', Ax) = (Ax', x) = (x, Ax')^* = \phi_A(x, x')^*$$

viceversa

$$(x', Ax) = \phi_A(x', x) = \phi_A(x, x')^* = (x, Ax')^* = (Ax', x).$$

Se associamo a ϕ sesquilineare la forma quadratica

$$\hat{\phi}(x) = \phi(x, x)$$

abbiamo che $\hat{\phi}$ è reale se e solo se ϕ è hermitiana. Se ϕ è hermitiana si ha subito

$$\hat{\phi}(x) = \phi(x, x) = \phi(x, x)^* = \hat{\phi}(x)^*$$

Vediamo il viceversa. Intanto si deve ricordare la semplice **formula di polarizzazione**

$$\phi(x, x') = \sum_{r=1}^4 \frac{1}{4\omega_r} \hat{\phi}(x + \omega_r x')$$

dove $\omega_r = 1, -1, i, -i$ (radice dell'unità). Inoltre si deve semplicemente notare che

$$\hat{\phi}(x + \omega_r x') = \hat{\phi}(x + \omega_r^* x')$$

allora, se $\hat{\phi}$ è reale,

$$\phi(x', x)^* = \sum_{r=1}^4 \frac{1}{4\omega_r^*} \hat{\phi}(x + \omega_r x') = \sum_{r=1}^4 \frac{1}{4\omega_r^*} \hat{\phi}(x + \omega_r^* x') = \sum_{r=1}^4 \frac{1}{4\omega_r} \hat{\phi}(x + \omega_r x') = \phi(x, x')$$

Riassumendo

Proposizione III.29
(polarizzazione)

Se ϕ è una forma sesquilineare allora la sua forma quadratica associata è tale che

$$\phi(x, x') = \sum_{r=1}^4 \frac{1}{4\omega_r} \hat{\phi}(x + \omega_r x')$$

dove $\omega_r = 1, -1, i, -i$ (radice dell'unità).

Proposizione III.30 Una forma sesquilineare è hermitiana se e solo se la sua forma quadratica associata è reale.

In definitiva quindi A è autoaggiunto se e solo se ϕ_A è hermitiano, se e solo se, per ogni $x \in \mathcal{H}$ $(x, Ax) \in \mathbb{R}$ cioè

Proposizione III.31 $A \in L(\mathcal{H})$ è autoaggiunto se e solo se $(x, Ax) \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in \mathcal{H}$.

Abbiamo anche la seguente

Proposizione III.32 Sia $A \in L(\mathcal{H})$ un operatore autoaggiunto. Allora

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \{|(x, Ax)|\}$$

Dimostrazione È subito evidente (dalla disuguaglianza di Schwarz) che, denotato con s_A il sup di cui nell'enunciato, vale

$$s_A \leq \|A\|.$$

La disuguaglianza opposta è un po' più complicata. Siano $x, x' \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} 4 \operatorname{Re}(x, Ax') &= 2[(x, Ax') + (x', Ax)] = [(x + x', A(x + x')) - (x - x', A(x - x'))] \leq \\ &\leq |(x + x', A(x + x'))| + |(x - x', A(x - x'))| \leq s_A (\|x + x'\|^2 + \|x - x'\|^2) = \\ &= 2s_A (\|x\|^2 + \|x'\|^2) \end{aligned}$$

cioè

$$\operatorname{Re}(x, Ax') \leq \frac{s_A}{2} (\|x\|^2 + \|x'\|^2)$$

Ora esiste una fase z tale che

$$|(x, Ax')| = z(x, Ax') = (zx, Ax') = \operatorname{Re}(zx, Ax') \leq \frac{s_A}{2} (\|x\|^2 + \|x'\|^2)$$

prendiamo

$$x = \frac{\|x'\|}{\|Ax'\|} Ax'$$

da cui

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{\|x'\|}{\|Ax'\|} Ax', Ax' \right) \right| &\leq s_A \|x'\|^2 \\ \frac{\|x'\|}{\|Ax'\|} \|Ax'\|^2 &\leq s_A \|x'\|^2 \end{aligned}$$

cioè

$$\|Ax'\| \leq s_A \|x'\|$$

sicché

(c.v.d.)

$$\|A\| \leq s_A.$$

Se A e B sono autoaggiunti, anche $A + B$ è autoaggiunto

$$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger = A + B$$

mentre, se $k \in \mathbb{C}$

$$(kA)^\dagger = k^* A^\dagger = k^* A$$

cioè kA è autoaggiunto se e solo se $k \in \mathbb{R}$.

Se A, B sono autoaggiunti, si ha

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger = BA$$

perciò AB è autoaggiunto se e solo se $[A, B] \doteq AB - BA = 0$.

**Operatori
positivi**

Infine, per ogni $A \in L(\mathcal{H})$ vale

$$(A^\dagger A)^\dagger = A^\dagger A$$

cioè per ogni $A \in L(\mathcal{H})$ l'operatore $A^\dagger A$ è **autoaggiunto**. Dunque, preso $A \in L(\mathcal{H})$ e posto $B \doteq A^\dagger A$

$$(x, Bx) \in \mathbb{R}^+$$

infatti, $(x, Bx) \in \mathbb{R}$ e $(x, Bx) = (x, A^\dagger A) = (Ax, Ax) = \|Ax\|^2 \in \mathbb{R}^+$. Inoltre, sia B tale che

$$(x, Bx) \in \mathbb{R}^+$$

allora B è autoaggiunto. Ci si può chiedere se esiste un operatore continuo A per cui $B = A^\dagger A$. In dimensione finita, se $B = B^\dagger$ allora è diagonalizzabile (teorema di decomposizione polare); per ipotesi i suoi autovalori dovranno essere positivi, sicché esiste U tale che $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}$ per cui

$$UBU^\dagger = (\lambda_i)$$

per ogni λ_i si ha $\lambda_i = z_i z_i^*$ e allora

$$UBU^\dagger = (\lambda_i) = (z_i)(z_i^*) = U[U^\dagger(z_i)U][U^\dagger(z_i^*)U]U^\dagger$$

allora

$$B = [U^\dagger(z_i)U][U^\dagger(z_i^*)U] = A^\dagger A.$$

Come nel caso in dimensione finita si è dovuto usare una decomposizione spettrale per pervenire alla tesi, così dovremo utilizzare risultati di teoria spettrale nel caso generale. Ad ogni modo un operatore per cui $B = A^\dagger A$ si dice **positivo**.

**Relazioni tra
 $L(\mathcal{H})$ e forme
sesquilineari
limitate**

Una forma sesquilineare si dice limitata se esiste una costante positiva m per cui $|\phi(x, y)| \leq m \|x\| \|y\|$. Normato lo spazio delle forme sesquilineari con l'inf delle m si dimostra il seguente

Teorema III.33 Sia $\phi : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ una forma sesquilineare su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Allora

(i) sono equivalenti le affermazioni

- (a) ϕ è limitata;
- (b) esiste un operatore $A \in L(\mathcal{H})$ tale che $\phi(x, y) = (Ax, y)$ per ogni $x, y \in \mathcal{H}$;

(ii) se è verificata una delle condizioni (a) o (b) allora l'operatore A è unico e vale $\|A\| = \|\phi\|$.

Dimostrazione Ovviamente (b) implica (a). Vediamo il viceversa. Ad ogni $x \in \mathcal{H}$ facciamo corrispondere il funzionale lineare

$$\alpha_x(y) \doteq \phi(x, y), \quad y \in \mathcal{H}$$

Si tratta di un funzionale continuo, $|\alpha_x(y)| \leq (\|\phi\| \|x\|) \|y\|$, dunque, considerando l'isomorfismo di Riesz T abbiamo

$$\phi(x, y) = \alpha_x(y) = (T^{-1}\alpha_x, y)$$

poniamo allora

$$Ax \doteq T^{-1}\alpha_x, \quad x \in \mathcal{H}$$

Vediamo che si tratta di un operatore lineare

$$\begin{aligned} T^{-1}\alpha_{x+\lambda x'} &= T^{-1}(\phi(x, \cdot) + \lambda^* \phi(x', \cdot)) = T^{-1}(\alpha_x + \lambda^* \alpha_{x'}) = T^{-1}(\alpha_x) + T^{-1}(\lambda^* \alpha_{x'}) = \\ &= T^{-1}(\alpha_x) + \lambda T^{-1}(\alpha_{x'}). \end{aligned}$$

Si ha inoltre che A è limitato:

$$\phi(x, y) = (Ax, y)$$

$$\|Ax\|^2 = \phi(x, Ax) \leq \|\phi\| \|x\| \|Ax\|$$

cioè $\|Ax\| \leq \|\phi\| \|x\|$. Ne deriva che $A \in L(\mathcal{H})$ e che $\|A\| \leq \|\phi\|$. La disuguaglianza opposta

si ottiene dalla disuguaglianza di Schwarz

$$|\phi(x, y)| = |(Ax, y)| \leq \|A\| \|x\| \|y\|.$$

Per l'unicità, sia $B \in L(\mathcal{H})$ per cui $\phi(x, y) = (Bx, y)$ allora

$$(Bx, y) = (Ax, y)$$

(c.v.d.) dalla non degenerazione si ottiene $Ax - Bx = 0$ e $A = B$.

III.4 Operatori unitari

In questa e nella prossima proposizione studieremo due particolari tipi di operatori lineari continui: gli operatori unitari e i proiettori. I primi sono gli **automorfismi** di $\mathcal{H}$ mentre i secondi riflettono la proprietà geometrica fondamentale degli spazi di Hilbert, il **teorema della proiezione**.

Cominciamo dagli operatori unitari

Definizione III.7 Dato uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ un operatore unitario U di $\mathcal{H}$ è un operatore lineare su $\mathcal{H}$, $U \in \text{hom}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$, tale che

(i) U è suriettivo, $R(U) = \mathcal{H}$;

(ii) U preserva il prodotto scalare

$$(Ux, Ux') = (x, x') \quad \forall x, x' \in \mathcal{H}.$$

Osservazione III.3 Per la formula di polarizzazione la (ii) è equivalente ad attestare l'isometria di U :

$$\|Ux\| = \|x\| \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Siccome U è isometrico, è iniettivo, perciò, per (i), biunivoco e invertibile su $\mathcal{H}$. L'isometria implica la continuità di U e il fatto che

$$\|U\| = 1$$

Esempio III.2 In dimensione finita (ii) implica (i). Infatti, valendo (ii) l'applicazione è isometrica e perciò iniettiva, inoltre, se $n \doteq \dim \mathcal{H}$, vale

$$n = \dim R(U) + \dim \ker(U) = \dim R(U)$$

da cui $R(U) = \mathcal{H}$.

In dimensione infinita questo non è vero. Consideriamo, in uno spazio di Hilbert, l'operatore T tale che, fissato un s.o.n.c. $\{u_n\}$ in $\mathcal{H}$,

$$Tx \doteq \sum_{n=0}^{\infty} (u_n, x) u_{n+1}$$

Allora, T è lineare e ben definito (teorema di Riesz-Fischer, capitolo II), inoltre

$$\begin{aligned} (Tx, Tx') &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (u_n, x) u_{n+1}, \sum_{m=0}^{\infty} (u_m, x') u_{m+1} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (x, u_n) (u_m, x') \delta_{n+1, m+1} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (x, u_m) (u_m, x') = (x, x') \end{aligned}$$

D'altra parte $R(T) = \{u_0\}^{\perp}$, perciò T non è suriettivo.

Dimostriamo la seguente semplice

Proposizione III.34 Sia $A \in L(\mathcal{H})$. Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni

(i) A è unitario;

(ii) A è regolare e $A^{-1} = A^{\dagger}$;

(iii) $AA^{\dagger} = A^{\dagger}A = \mathbb{I}$;

(iv) $A^\dagger$ è unitario.

Dimostrazione (i) $\Rightarrow$ (ii) A è unitario, allora è continuo e biunivoco, perciò ammette inversa continua (per il teorema dell'inverso limitato), dunque A è regolare. Inoltre, per ogni x, x'

$$(x, x') = (Ax, Ax') = (x, A^\dagger Ax')$$

per non degenerazione allora $A^\dagger A = \mathbb{I}$. D'altra parte, moltiplicando ambo i membri per $A^{-1} \in L(\mathcal{H})$

$$A^\dagger = A^{-1}.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Se A è regolare e $A^{-1} = A^\dagger$ allora moltiplichiamo ambo i membri per A e troviamo $\mathbb{I} = AA^\dagger$. $A^{-1} = A^\dagger$ moltiplicando adesso a destra per A si ottiene $\mathbb{I} = A^\dagger A$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Sia A un operatore continuo per cui $AA^\dagger = A^\dagger A = \mathbb{I}$ allora

$$(A^\dagger x, A^\dagger x') = (x, AA^\dagger x') = (x, x')$$

d'altra parte, siccome $A^\dagger A = \mathbb{I}$ si ha che $A^\dagger$ deve essere suriettivo.

(c.v.d.) (iv) $\Rightarrow$ (i) Siccome (i) $\Rightarrow$ (iv) si ha che $A^{\dagger\dagger}$ è unitario, ma $A^{\dagger\dagger} = A$ perciò A è unitario.

Gruppo unitario L'insieme $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ degli operatori unitari di $\mathcal{H}$ è un sottoinsieme dell'algebra $L(\mathcal{H})$ stabile rispetto al prodotto e all'inversione. Infatti, siano $A, B \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ allora $AB \in GL(\mathcal{H})$ e

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^\dagger A^\dagger = (AB)^\dagger,$$

inoltre, se $A \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ allora $A \in GL(\mathcal{H})$ e $A^{-1} = A^\dagger$, ma $A^\dagger$ è unitario, perciò $A^{-1} \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$. Se ne conclude che $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ è un gruppo (**gruppo unitario di $\mathcal{H}$**).

Riferimenti e gruppo unitario

Ricordiamo che un **riferimento ortogonale** (come dovrebbe essere noto dal corso di Geometria) è un s.o.n.c. nel quale però sia stato specificato una volta per tutte un'ordinamento (i.e. è una successione che include tutti gli elementi del s.o.n.c.) degli elementi. Indichiamo con $\mathcal{ROH}$ l'insieme dei **riferimenti ortogonali di $\mathcal{H}$** , allora vale il seguente

Teorema III.35 Dato uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, sia $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un riferimento ortogonale di $\mathcal{H}$ e sia $A \in L(\mathcal{H})$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni

(i) $A \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$;

(ii) $\{u'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, dove $u'_n \doteq Au_n$ è un riferimento ortogonale di $\mathcal{H}$.

Dimostrazione (i) $\Rightarrow$ (ii) L'insieme $\{u'_n\}$ è certamente un s.o.n.

$$\delta_{nm} = (u_n, u_m) = (Au_n, Au_m) = (u'_n, u'_m)$$

Sia poi dato un vettore $x \in \mathcal{H}$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulti

$$0 = (x, u'_n) = (A^{-1}x, A^{-1}u'_n) = (A^{-1}x, u_n)$$

allora $A^{-1}x = 0$, ma A^{-1} è iniettiva sicché $x = 0$ (la tesi discende dal fatto che A unitaria è regolare e $A^{-1} = A^\dagger$ unitario).

(ii) $\Rightarrow$ (i) $A \in L(\mathcal{H})$ perciò

$$\begin{aligned} Ax &= \sum_{n=0}^{\infty} (u'_n, Ax) u'_n \\ Ax &= \sum_{n=0}^{\infty} (u_n, x) u'_n \end{aligned}$$

se ne ricava

$$(Au_n, Ax) = (u'_n, Ax) = (u_n, x), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathcal{H}$$

perciò

$$(Ax', Ax) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (u_n, x') Au_n, Ax \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (x', u_n) (Au_n, Ax) = \sum_{n=0}^{\infty} (x', u_n) (Au_n, Ax) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (x', u_n) (u_n, x) = (x', x)$$

Infine, A è suriettivo: per ogni $x \in \mathcal{H}$ si ha

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} (u'_n, x) u'_n = \sum_{n=0}^{\infty} (u'_n, x) A u_n = A \sum_{n=0}^{\infty} (u'_n, x) u_n = A x'$$

(c.v.d.) dove $x' \in \mathcal{H}$ per il teorema di Fischer-Riesz.

Possiamo allora introdurre un'azione del gruppo $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ sull'insieme $\mathcal{ROH}$. Se indichiamo brevemente con $\mathbf{u} \doteq \{u_n\} \in \mathcal{ROH}$ possiamo porre

$$\begin{aligned} \tau : \mathcal{U}(\mathcal{H}) \times \mathcal{ROH} &\rightarrow \mathcal{ROH} \\ (U, \mathbf{u}) &\mapsto \tau(U; \mathbf{u}) \doteq U\mathbf{u} = \{U u_n\} \end{aligned}$$

Si ha poi che l'azione è **transitiva** e **libera**, cioè per ogni coppia $\mathbf{u}, \mathbf{u}'$ esiste uno e un solo U tale che $\mathbf{u}' = U\mathbf{u}$; infatti

$$U : Ux \doteq \sum_{n=0}^{\infty} (u_n, x) u'_n.$$

**Operatori
antiunitari**

In meccanica quantistica si ha bisogno anche degli operatori **antunitari** di $\mathcal{H}$. Essi sono operatori **antilineari**, suriettivi e tali che

$$(Vx, Vx') = (x, x')^*, \quad \forall x, x' \in \mathcal{H}.$$

III.5 Operatori di proiezione

Consideriamo un sottospazio $W \subset \mathcal{H}$, allora per il teorema della proiezione si ha che $\mathcal{H} = W \oplus W^\perp$. L'unicità della decomposizione comporta la possibilità di associare a ogni sottospazio W la mappa

$$\text{se } x = w + w', \quad w \in W, \quad w' \in W^\perp \Rightarrow \begin{aligned} P_W : \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H} \\ x &\mapsto w \end{aligned}$$

Nel corso del capitolo II abbiamo dimostrato che

- (i) P_W è lineare (e prende il nome di operatore di proiezione ortogonale - o proiettore - su W)
- (ii) $R(P_W) = W$ e $P_W|_W = \mathbb{I}_W$; $\ker(P_W) = W^\perp$;
- (iii) $P_W^2 = P_W$.

Veniamo alla norma di P_W . Abbiamo immediatamente che $\|P_W x\| = \|w\| \leq \left(\|w\|^2 + \|w'\|^2 \right)^{1/2} = \|x\|$. Ne abbiamo che $\|P_W\| \leq 1$ ma basta prendere $x \in W$ per constatare che $\|P_W x\| = \|x\|$ da cui $\|P_W\| = 1$, se W è non banale (altrimenti $P_W = 0$ e la sua norma è nulla).

Come nel caso degli operatori unitari vogliamo stabilire una proposizione che dia una caratterizzazione algebrica dei proiettori:

Proposizione III.36 Sia $A \in L(\mathcal{H})$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni

- (i) A è un proiettore;
- (ii) $A^\dagger A = A$;
- (iii) $A^\dagger A = A^\dagger$;
- (iv) $A^\dagger = A$ e $A^2 = A$, cioè A è idempotente e autoaggiunto.

Dimostrazione (i) $\Rightarrow$ (ii) A sia un proiettore sul sottospazio W . Per il teorema della proiezione

$$\mathcal{H} = W \oplus W^\perp$$

$$x = w + w'$$

Presi due vettori $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$ abbiamo

$$\begin{aligned}(x_1, A^\dagger A x_2) &= (A x_1, A x_2) = (w_1, w_2) \\ (x_1, A x_2) &= (x_1, w_2) = (w_1, w_2)\end{aligned}$$

da cui $A^\dagger A = A$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Aggiuntando la precedente $A^\dagger A = A^\dagger$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) $A^\dagger A = A^\dagger$ e $A^\dagger A = A$ allora $A^\dagger = A$. Ora, $A = A^\dagger = A^\dagger A = AA = A^2$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Sia $W = R(A)$, mostriamo che si tratta di un insieme chiuso. Sia $\{x_n\} \subset W$ convergente a $x_0 \in \mathcal{H}$, esiste allora la successione $\{y_n\} \in \mathcal{H}$ tale che

$$x_n = A y_n \rightarrow x_0$$

Per la continuità di A si ha

$$A y_n = A^2 y_n \rightarrow A x_0$$

ne ricaviamo che $A y_n \rightarrow x_0$ e $A y_n \rightarrow A x_0$, sicché, per unicità del limite, vale

$$x_0 = A x_0$$

e perciò $x_0 \in R(A) = W$. L'immagine W di A è dunque un sottospazio di $\mathcal{H}$, per il teorema di proiezione, ogni elemento si decompone in modo unico come somma di un vettore di W e di un vettore appartenente all'ortogonale di W . Abbiamo

$$x = A x + (x - A x)$$

infatti, $A x \in W$, mentre, per ogni $y \in \mathcal{H}$

$$(A y, x - A x) = (y, A^\dagger x - A^\dagger A x) = (y, A x - A^2 x) = (y, 0) = 0$$

da cui $x - A x \in W^\perp$. Abbiamo allora che, per ogni x ,

$$A x = P_W x$$

(c.v.d.) perciò $A = P_W$.

Nelle prossime tre proposizioni stabiliremo le condizioni alle quali devono sottostare i proiettori affinché loro combinazioni siano ancora proiettori.

Proposizione III.37 Siano P_R e P_S due proiettori, rispettivamente sui sottospazi R e S .

(i) Sono equivalenti le seguenti affermazioni

- (a) $P_R + P_S$ è un proiettore;
- (b) $P_R P_S = 0$;
- (c) $P_S P_R = 0$;
- (d) $P_R(S) = \{0\}$;
- (e) $P_S(R) = \{0\}$;
- (f) R ed S sono ortogonali.

(ii) Se $P_R + P_S$ è un proiettore, allora è associato al sottospazio $R \oplus S$, cioè $P_R + P_S = P_{R \oplus S}$.

Dimostrazione Cominciamo col vedere che (a) $\Rightarrow$ (b) o (c). Mostriamo che se $P_R + P_S$ è un proiettore, allora il commutatore di P_R e P_S è nullo ed è pure nullo $P_R P_S + P_S P_R$, da cui la tesi. Abbiamo

$$P_R + P_S = (P_R + P_S)^2 = P_R^2 + P_S^2 + P_R P_S + P_S P_R = P_R + P_S + P_R P_S + P_S P_R$$

dunque

$$P_R P_S + P_S P_R = 0;$$

moltiplichiamo prima a destra e poi a sinistra per P_S abbiamo

$$P_S P_R P_S + P_S P_R = 0$$

$$P_R P_S + P_S P_R P_S = 0$$

sottraendo membro a membro

$$P_R P_S - P_S P_R = 0$$

Vediamo come (b) $\Rightarrow$ (d). Abbiamo

$$P_R P_S = 0$$

ma P_S ristretto a S dà l'identità di S , perciò deve essere $P_R(S) = \{0\}$.

Analogamente (c) $\Rightarrow$ (e).

(e) $\Rightarrow$ (f). $P_S(R) = \{0\}$ allora $R \subset \ker S = S^\perp$, perciò tutti gli elementi di R sono ortogonali a tutti gli elementi di S .

(f) $\Rightarrow$ (a) Siccome R e S sono ortogonali (sono sottospazi e perciò sono spazi di Hilbert), consideriamo l'insieme $R \oplus S$. Esso è chiuso: come somma diretta di spazi di Hilbert è uno spazio di Hilbert, perciò è completo, ne consegue che è chiuso come sottoinsieme di $\mathcal{H}$. Allora possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= (R \oplus S) \oplus (R \oplus S)^\perp \\ x &= x' + x''\end{aligned}$$

con $x' \in R \oplus S$ e $x'' \in (R \oplus S)^\perp$. D'altra parte $x'' \in R^\perp$ e $x'' \in S^\perp$, mentre per x' si ottiene una unica decomposizione $x' = r + s$ con $P_R x'' = P_S x'' = 0$. Dunque, per ogni $x = r + s + x''$, con $r \in R$ e $s \in S$ e $x'' \in (R \oplus S)^\perp$. Vale allora

$$P_{R+S} x = x' = r + s = P_R x + P_S x$$

(c.v.d.) Allora $P_R + P_S$ è un proiettore e vale la (ii).

Proposizione III.38 Siano P_R, P_S i proiettori associati a R e S sottospazi di $\mathcal{H}$.

(i) Sono fatti equivalenti

- (a) $P_R P_S$ è un proiettore;
- (b) $P_S P_R$ è un proiettore;
- (c) $[P_R, P_S] = 0$;
- (d) $R = (R \cap S) \oplus (R \cap S^\perp)$;
- (e) $S = (S \cap R) \oplus (S \cap R^\perp)$;

(ii) Se $P_R P_S$ è un proiettore allora esso è associato allo spazio $R \cap S$, cioè $P_R P_S = P_{R \cap S}$.

Dimostrazione (a) $\Leftrightarrow$ (c) In ogni caso, abbiamo

$$(P_R P_S)^\dagger (P_R P_S) = P_S P_R P_S$$

Se $P_R P_S$ è un proiettore, allora

$$(P_R P_S)^\dagger (P_R P_S) = P_R P_S$$

cioè

$$P_S P_R P_S = P_R P_S$$

aggiuntando

$$P_S P_R P_S = P_S P_R$$

da cui il commutatore è nullo.

D'altra parte se

$$P_S P_R = P_R P_S$$

moltiplicando per P_S a destra

$$P_S P_R P_S = P_R P_S$$

sicché

$$(P_R P_S)^\dagger (P_R P_S) = P_R P_S$$

e dunque $P_R P_S$, da cui $P_R P_S$ è un proiettore.

(b) $\Leftrightarrow$ (c) caso precedente scambiando le lettere.

(c) $\Rightarrow$ (d) Sia $x \in \mathcal{H}$ allora

$$P_R x = P_S P_R x + (\mathbb{I} - P_S) P_R x = P_S P_R x + P_{S^\perp} P_R x$$

perciò x si decompone in due vettori ortogonali.

Ora, $P_S P_R x \in R(P_S) = S$, ma $P_S P_R x = P_R P_S x \in R(P_R) = R$ perciò $P_R P_S x \in R \cap S$. In modo analogo si ha che $(\mathbb{I} - P_S) P_R x = P_{S^\perp} P_R \in R \cap S^\perp$. Se ne ricava che

$$R = R(P_R) \subset (R \cap S) \oplus (R \cap S^\perp)$$

d'altra parte

$$(R \cap S) \oplus (R \cap S^\perp) \subset R$$

(c) $\Rightarrow$ (e) in maniera analoga

(e) $\Rightarrow$ (a). Sia $x \in \mathcal{H}$ allora

$$x = x' + x'', \quad x' \in S, \quad x'' \in S^\perp$$

Da (e) abbiamo la decomposizione ortogonale di x' relativa a R :

$$x' = x'_1 + x'_2, \quad x'_1 \in S \cap R, \quad x'_2 \in S \cap R^\perp$$

Allora

$$x = x'_1 + (x'_2 + x'')$$

fornisce la decomposizione ortogonale relativa a $S \cap R$. Infatti $x'_2 + x'' \in (S \cap R)^\perp$ essendo

$$x'_2 \in R^\perp \subset (R \cap S)^\perp$$

$$x'' \in S^\perp \subset (R \cap S)^\perp$$

Allora

$$P_{R \cap S} x = x'_1 = P_R P_S x.$$

(c.v.d.) (d) $\Rightarrow$ (b) analogo.

Proposizione III.39 Siano P_R, P_S proiettori associati ai sottospazi R e S , rispettivamente.

(i) Sono equivalenti le affermazioni

(a) $P_R - P_S$ è un proiettore;

(b) $P_R P_S = P_S P_R = P_S$;

(c) $S \subset R$.

(ii) Se $P_R - P_S$ è un proiettore, esso è associato al sottospazio $R \cap S^\perp$, cioè $P_R - P_S = P_{R \cap S^\perp}$.

Dimostrazione (a) $\Rightarrow$ (b) Da $(P_R - P_S)^\dagger (P_R - P_S) = P_R - P_S$ abbiamo

$$P_R + P_S - (P_R P_S + P_S P_R) = P_R - P_S$$

da cui

$$P_R P_S + P_S P_R = 2P_S$$

moltiplicando a sinistra per P_S ,

$$P_S P_R P_S + P_S P_R = 2P_S$$

moltiplicando a destra per P_S ,

$$P_R P_S + P_S P_R P_S = 2P_S$$

perciò

$$P_R P_S = P_S P_R = P_S.$$

(b) $\Rightarrow$ (c) Sia $x \in S$, abbiamo $x = P_S x$; ma $P_S = P_R P_S$ perciò

$$x = P_R P_S x$$

da cui $x \in R(P_R) = R$, perciò $S \subset R$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Sia $x \in \mathcal{H}$ allora $x = x' + x''$ $x' \in R$ e $x'' \in R^\perp$, ora siccome $S \subset R$,

$$x' = x'_1 + x'_2, \quad x'_1 \in S, \quad x'_2 \in R \cap S^\perp$$

allora

$$x = x'_1 + (x'_2 + x'')$$

e

$$x = x'_2 + (x'_1 + x'')$$

forniscono la decomposizione ortogonale di x rispettivamente sui sottospazi S e $R \cap S^\perp$, infatti $x'' + x'_2 \in S^\perp$

$$\begin{aligned} x'' &\in R^\perp \subset S^\perp \\ x'_2 &\in R \cap S^\perp \subset S^\perp \end{aligned}$$

e $x'' + x'_1 \in (R \cap S^\perp)^\perp$, poiché

$$\begin{aligned} x'' &\in R^\perp \subset (R \cap S^\perp)^\perp \\ x'_1 &\in S \subset (R \cap S^\perp)^\perp \end{aligned}$$

Abbiamo allora

$$P_{R \cap S^\perp} x = x'_2 = x' - x'_1 = P_R x - P_S x = (P_R - P_S) x$$

(c.v.d.) che mostra tesi e (ii).

Finita la dimostrazione di queste noiosissime proposizioni, concludiamo con un

Teorema III.40 Sia $A \in L(\mathcal{H})$ diverso dall'applicazione nulla.

(i) Sono fatti euivalenti

- (a) A è un proiettore;
- (b) esiste un s.o.n. $\{u_n\} \subset \mathcal{H}$ tale che

$$Ax = \sum_{n \in \mathbb{N}} (u_n, x) u_n, \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

(ii) Se (b) è vera, A è il proiettore associato al sottospazio $\text{Span} \langle u_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$.

Dimostrazione Cominciamo a dimostrare che (a) implica (b). $R(A)$ è un sottospazio di $\mathcal{H}$ per definizione di proiettore. $R(A)$ è uno spazio di Hilbert, perciò ammette un suo s.o.n.c. $\{u_n\}$ allora

$$y = \sum_{n \in \mathbb{N}} (u_n, y) u_n \quad \forall y \in R(A)$$

allora, per ogni $x \in \mathcal{H}$

$$Ax = \sum_{n \in \mathbb{N}} (u_n, Ax) u_n$$

ma A è autoaggiunto perciò

$$(u_n, Ax) = (Au_n, x)$$

ma $u_n \in R(A)$, perciò $Au_n = u_n$ e dunque

$$Ax = \sum_{n \in \mathbb{N}} (u_n, x) u_n.$$

Veniamo al viceversa.

$$(x, A^\dagger Ax') = (Ax, Ax') = \sum_{n \in \mathbb{N}} (x, u_n) (u_n, x')$$

$$(x, Ax') = \sum_{n \in \mathbb{N}} (x, u_n) (u_n, x')$$

da cui, per non degenerazione, $A = A^\dagger A$ cioè A è un proiettore.

Veniamo a (ii). Si ha subito che $R(A) \subset \text{Span} \langle u_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$. D'altra parte se vale (b) allora vale (a) e A è un proiettore. Perciò $\ker A = R(A)^\perp$. Ma ancora da (b) si ha che $\ker A \subset \text{Span} \langle u_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}^\perp$, perciò

$$\text{Span} \langle u_n \rangle_{n \in \mathbb{N}} \subset (\ker A)^\perp = R(A)$$

(c.v.d.) la tesi.

III.6 Convergenza forte e convergenza debole

Esempio III.3 Consideriamo uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, di dimensione infinita. Fissiamo un riferimento ortogonale $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e, per ogni $n \in \mathbb{N}$, definiamo l'operatore A_n tale che

$$A_n x \doteq \sum_{i=1}^n (u_n, x) u_n$$

Per l'ultimo teorema dimostrato nella sezione precedente, ogni A_n è un proiettore sul sottospazio $W_n = \text{Span} \langle u_i \rangle_{i \in J_n}$.

Si può pensare che la successione di operatori $\{A_n\}$ converga a $\mathbb{I}$. D'altra parte, siccome $W_n \subset W_m$ se $n < m$, abbiamo che l'operatore $A_m - A_n$ è il proiettore sul sottospazio $\text{Span} \langle u_{n+1}, \dots, u_m \rangle$, sicché

$$\|A_m - A_n\| = 1$$

dunque, la successione A_n non è di Cauchy e perciò non converge.

D'altra parte, per ogni $x \in \mathcal{H}$, la successione $\{A_n x\}$ converge a x essendo $\{u_n\}$ un s.o.n.c.

L'esempio giustifica il fatto che si debbano prendere in considerazione due diversi tipi di topologie.

Definizione III.8 Sia E uno spazio di Banach e sia E^* il suo duale topologico, si dice che $\{x_n\}$ converge debolmente a x , e si scrive

$$x_n \xrightarrow{w} x \text{ o } w - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

se

$$\langle \alpha, x_n \rangle \rightarrow \langle \alpha, x \rangle, \quad \forall \alpha \in E^*$$

x si dice limite debole della successione.

La usuale convergenza in norma, si dice allora convergenza forte e si pone

$$s - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\| = 0.$$

A proposito della convergenza debole, nel caso in cui si consideri uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, grazie al teorema di rappresentazione, vale

$$w - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (y, x_n) = (y, x), \quad \forall y \in \mathcal{H}.$$

Esempio III.4 Sia $\{u_n\} \subset \mathcal{H}$ una successione di elementi appartenenti a un s.o.n., allora

$$\|u_n - u_m\|^2 = \|u_n\|^2 + \|u_m\|^2 = 2$$

perciò la successione non converge in norma. D'altra parte, la successione converge debolmente a 0, per ogni $y \in \mathcal{H}$

$$\sum |(y, u_n)|^2 < \infty$$

allora $(y, u_n) \rightarrow 0$.

Nell'algebra $L(\mathcal{H})$ le nozioni di convergenza che si possono assegnare sono in realtà tre: la convergenza uniforme viene infatti ad affiancarsi a convergenza forte e debole.

La successione $\{A_n\}$ **converge uniformemente** a A , $A_n \xrightarrow{u} A$, se $\|A - A_n\| \rightarrow 0$. La convergenza è **forte**, se $A_n x \xrightarrow{s} Ax$, ed è debole se $A_n x \xrightarrow{w} Ax$, per ogni $x \in \mathcal{H}$.

Proposizione III.41 La convergenza uniforme implica la convergenza forte, la quale a sua volta implica quella debole.

Dimostrazione A_n converga uniformemente a A e sia $x \in \mathcal{H}$, allora

$$\|Ax - A_n x\| \leq \|A - A_n\| \|x\| \rightarrow 0$$

A_n converga fortemente a A e siano $x, y \in \mathcal{H}$, allora

$$(c.v.d.) \quad |(y, Ax) - (y, A_n x)| = |(y, (A - A_n)x)| \leq \|y\| \|Ax - A_n x\| \rightarrow 0.$$

Controesempi Se le tre nozioni coincidono in dimensione finita, così non è in dimensione infinita. Consideriamo infatti un s.o.n. $\{u_n\} \subset \mathcal{H}$ e la successione di operatori $A_n x \doteq (u_n, x) u_0$. Essa converge fortemente a 0, ma $\|A_n\| = 1$, perciò la convergenza non può essere uniforme. Consideriamo ora la successione $A_n^\dagger$, abbiamo

$$(y, A_n x) = (y, (u_n, x) u_0) = (u_n, x) (y, u_0) = ((u_0, y) u_n, x)$$

perciò $A_n^\dagger x = (u_0, x) u_n$. Essa converge debolmente a zero essendo

$$(y, A_n^\dagger x) = (y, u_n) (u_0, x) \rightarrow 0$$

ma

$$\begin{aligned} \|A_n^\dagger x\| &= |(u_0, x)| \\ \|A_n^\dagger\| &= 1 \end{aligned}$$

Conseguenze del teorema di Banach-Steinhaus Ci occorre adesso il teorema di Banach-Steinhaus, o della uniforme limitatezza, che abbiamo dimostrato precedentemente. Esso asserisce che preso un sottoinsieme $\mathcal{F}$ di $L(E, F)$ con E, F spazi di Banach, tale che per ogni $x \in E$ esista $M_x > 0$ per cui $\|Ax\| \leq M_x$ per ogni $A \in \mathcal{F}$, si trova una costante M talché

$$\|A\| \leq M, \forall A \in \mathcal{F}.$$

Ne deriva la seguente proposizione

Proposizione III.42 *Sussistono i seguenti fatti*

- (i) se $\{x_n\} \subset \mathcal{H}$ è debolmente convergente, allora è limitata;
- (ii) se $\{A_n\} \subset L(\mathcal{H})$ è debolmente convergente, allora è limitata.

Dimostrazione (i) Identifichiamo la successione $\{x_n\} \subset \mathcal{H}$ con la $\{Tx_n\} \subset \mathcal{H}^*$, immagine della successione di partenza tramite l'isomorfismo di Riesz. Per ogni $y \in \mathcal{H}$, la successione

$$\langle Tx_n, y \rangle = (x_n, y)$$

è convergente perciò limitata. Dunque, posto $E = \mathcal{H}$, $F = \mathbb{C}$ e $\mathcal{F} = \{Tx_n\}$, abbiamo

$$|\langle Tx_n, y \rangle| \leq M_y, \forall n \in \mathbb{N}$$

Possiamo perciò applicare il teorema di Banach-Steinhaus. Ricaviamo che la successione $\{Tx_n\}$ è limitata. Siccome però T è una isometria, $\{x_n\}$ è limitata.

(ii) Sia $\mathcal{F} = \{A_n\}$. Per ogni x la successione $\{A_n x\}$ è debolmente convergente, per (i) è limitata, e si può allora applicare il teorema di Banach-Steinhaus e ottenere la tesi.

(c.v.d.)

Risulta evidente poi che, se $\{A_n\} \subset L(\mathcal{H})$ e $A \in L(\mathcal{H})$, vale

$$A_n \xrightarrow{w} A \Leftrightarrow A_n^\dagger \xrightarrow{w} A^\dagger$$

D'altra parte, non è invece vero che la convergenza forte di A_n ad A implica, la convergenza forte (solo debole evidentemente) di $A_n^\dagger$ ad $A^\dagger$. Consideriamo, infatti, la successione $A_n x = (u_n, x) u_0$ definita sopra. Essa converge fortemente a 0; però $A_n^\dagger x = (u_0, x) u_n$, non converge fortemente.

III.7 Operatori definiti su una varietà lineare

III.7.1 Richiami alle definizioni e teorema di estensione per gli operatori continui

Operatori definiti su varietà lineari

Fino ad ora, fatta esclusione per la prima sezione, abbiamo considerato operatori che fossero definiti sull'intero spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Da questo momento in poi ci occuperemo invece di operatori lineari qualsiasi, definiti cioè su una generica varietà lineare.

Grafico degli operatori lineari

Denoteremo con il simbolo $\mathcal{O}(X, Y) \doteq \text{hom}(X, Y)$ l'insieme degli operatori lineari da X a Y . Sappiamo che il grafico di un operatore lineare A , $\mathcal{G}(A)$, è una varietà lineare in $X + Y$, e che

$$(0, y) \in \mathcal{G}(A) \Rightarrow y = 0$$

Infatti, siano $x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2 \in \mathcal{G}(A)$, allora $y_1 = Ax_1$ e $y_2 = Ax_2$ per cui

$$x_1 \oplus y_1 + \lambda(x_2 \oplus y_2) = (x_1 + \lambda x_2) \oplus (y_1 + \lambda y_2) \in \mathcal{G}(A)$$

essendo

$$y_1 + \lambda y_2 = A(x_1 + \lambda x_2).$$

Inoltre, se $(0, y) \in \mathcal{G}(A)$, allora $y = A0 = 0$.

Vale anche il viceversa. Cioè se $V \subset X + Y$ è una varietà lineare per cui $(0, y) \in V \Rightarrow y = 0$, allora è il grafico di un operatore lineare. Sia A l'operatore definito su $D(A) \doteq P_X(V) \subset X$ tale che

$$Ax \doteq P_Y(x \oplus y), \quad (x \oplus y) \in V$$

allora $A \in \mathcal{O}(X, Y)$ e $\mathcal{G}(A) = V$. Si noti come la definizione sia ben posta: per ogni x esiste uno e un solo $y \in Y$ tale che $(x \oplus y) \in V$. Infatti, se $x \oplus y_1$ e $x \oplus y_2$ appartengono a V , allora anche $0 \oplus (y_2 - y_1) \in V$ come differenza dei due vettori considerati. Ma questo implica $y_2 - y_1 = 0$ e $y_1 = y_2$.

**Eguaglianza,
somma e
composizione**

Come è ovvio in $\mathcal{O}(X, Y)$ due operatori lineari sono eguali se hanno domini eguali e se su tali domini risultano eguali. La somma di operatori lineari si definisce poi sul dominio intersezione dei domini degli addendi. Analogamente, se $A \in \mathcal{O}(X, Y)$ e $B \in \mathcal{O}(Y, Z)$ l'operatore BA è definito sul dominio

$$D(BA) = \{x \in X \mid x \in D(A), Ax \in D(B)\}.$$

Come ovvio, il problema dei domini interviene sull'esistenza degli elementi inversi, così $\mathcal{O}(X, Y)$ non è uno spazio lineare e $\mathcal{O}(X)$ non è un'algebra con unità rispetto alla composizione (gli elementi neutri 0 e $\mathbb{I}$ hanno dominio su X).

Abbiamo già definito il concetto di estensione di un operatore (usando il simbolo $\preceq$) d'ora in poi diremo che A estende B se $D(B) \subset D(A)$ e $A|_{D(B)} = B$ e scriveremo $B \subset A$.

Nella prima sezione, occupandoci della continuità, abbiamo lavorato supponendo i domini varietà lineari nello spazio vettoriale X , perciò la presentazione della continuità deve considerarsi esaurita, fatta eccezione per il seguente

**Teorema III.43
(di estensione)**

Siano X e Y spazi di Banach e sia $A \in \mathcal{O}(X, Y)$ con $D(A) \neq X$. Se A è continuo sul dominio, allora esiste uno e un solo operatore $\bar{A} \in \mathcal{O}(X, Y)$ tale che

$$(i) \quad D(A) = [D(A)]^a;$$

$$(ii) \quad A \subset \bar{A};$$

$$(iii) \quad \bar{A} \text{ è continuo.}$$

Vale, infine, $\|\bar{A}\| = \|A\|$.

Dimostrazione

Definiamo $\bar{A}$ su $D(A)^a$ come segue

$$\bar{A}x = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n$$

dove $x_n \rightarrow x$ è una successione in $D(A)$, che esiste certamente essendo $x \in D(A)$. Vediamo che la definizione è ben posta. In primo luogo mostriamo che il limite esiste sempre: la successione $\{Ax_n\} \subset Y$ è di Cauchy e perciò, Y è di Banach, converge. Infatti,

$$\|Ax_n - Ax_m\| \leq \|A\| \|x_n - x_m\|$$

e x_n , essendo convergente, è di Cauchy.

Vediamo adesso che se $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow x$, ambedue le successioni a valori in $D(A)$, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Ay_n$$

A questo scopo basta notare che $x_n - y_n \rightarrow 0$, perciò

$$\|Ax_n - Ay_n\| \leq \|A\| \|x_n - y_n\| \rightarrow 0$$

Banalmente vale (ii). Che $\bar{A}$ sia un operatore lineare è abbastanza evidente. Anzitutto il suo dominio, come chiusura di una varietà lineare è un sottospazio (e quindi una varietà lineare chiusa). Si ha poi, se $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$,

$$\bar{A}(x + \lambda y) = \lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n + \lambda y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n + \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} Ay_n = \bar{A}x + \lambda \bar{A}y$$

Vediamo la continuità di $\bar{A}$: abbiamo, se $x \in D(A)^a$

$$\|\bar{A}x\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n\| \leq \|A\| \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|A\| \|x\|$$

cioè $\|\bar{A}\| \leq \|A\|$. Questo prova la continuità di $\bar{A}$. D'altra parte siccome $\bar{A}$ è l'estensione di A , si ha $\|\bar{A}\| \geq \|A\|$ da cui $\|\bar{A}\| = \|A\|$.

L'unicità dell'operatore $\bar{A}$, deriva dalla (iii) e dal fatto che $D(\bar{A}) = D(A)^a$. Infatti, se B è un operatore per il quale valgono le tre proprietà richieste e $x \in D(A)^a$, allora esiste una successione a valori in $D(A)$ tale che $x_n \rightarrow x$. Ne consegue che, per (iii)

$$(c.v.d.) \quad Bx = \lim_{n \rightarrow \infty} Bx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \bar{A}x.$$

III.7.2 Operatori lineari chiudibili e chiusi

Richiami sugli operatori chiusi

Nel corso della dimostrazione dei principi di Banach, abbiamo introdotto sommariamente la nozione di operatore chiuso. Conferita allo spazio $X \oplus Y$ la struttura di spazio di Banach nella norma

$$\|x \oplus y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

(che, se X e Y sono H-spazi, è indotta dal prodotto scalare dato dalla somma dei prodotti scalari su X e Y), e considerato un operatore $A \in \mathcal{O}(X, Y)$, abbiamo detto che A si dice chiuso se $\mathcal{G}(A) \subset X \oplus Y$ è un sottoinsieme chiuso. Abbiamo poi visto che A chiuso ma definito su tutto X è continuo (**teorema del grafico chiuso**). Nel corso della presente sottosezione adotteremo un punto di vista leggermente più generale.

Operatori continui e chiusura del grafico

Riprendiamo in esame il teorema di estensione. Dato l'operatore A continuo, abbiamo definito $\bar{A}$ che estende A sul dominio $D(A)^a$. Adesso è facile rendersi conto che

$$\mathcal{G}(\bar{A}) = \mathcal{G}(A)^a$$

Avendo a che fare solo con spazi metrici continuiamo a sfruttare l'equivalenza di chiusura e sequenziale chiusura. Sia dunque $x \oplus \bar{A}x \in \mathcal{G}(\bar{A})$, allora esiste $\{x_n\} \in D(A)$ per cui $x_n \rightarrow x$ e $\bar{A}x_n = Ax_n \rightarrow \bar{A}x$, perciò esiste $\{x_n \oplus Ax_n\} \subset \mathcal{G}(A)$ talché $x_n \oplus Ax_n \rightarrow x \oplus \bar{A}x$, cioè $x \oplus \bar{A}x \in \mathcal{G}(A)^a$. Viceversa, sia $x \oplus y \in \mathcal{G}(A)^a$, allora esiste una successione $\{x_n \oplus y_n\} \subset \mathcal{G}(A)$ tale che $x_n \oplus y_n \rightarrow x \oplus y$. Ma $y_n = Ax_n$ sicché $y = \bar{A}x$.

Dunque, gli operatori continui sul loro dominio hanno la proprietà notevole che la chiusura del loro grafico è grafico di un operatore (cioè è una varietà lineare tale che se contiene $(0, y)$ allora $y = 0$).

Operatori chiudibili e chiusi

Come abbiamo detto ampliamo il punto di vista sugli operatori chiusi e lo facciamo introducendo la seguente definizione

Definizione III.9

Dati gli spazi di Banach X e Y , sia $A \in \mathcal{O}(X, Y)$. L'operatore A si dice chiudibile se la chiusura del suo grafico $\mathcal{G}(A)^a$ è grafico di un operatore lineare. Se A è chiudibile l'operatore avente come grafico $\mathcal{G}(A)^a$ si dice chiusura di A e è indicato con $\bar{A}$. L'operatore A si dice chiuso se ha grafico chiuso.

Osservazione III.4

Tutti gli operatori continui sono chiudibili e la loro chiusura è un operatore continuo.

Come abbiamo già dimostrato a suo tempo, A è chiuso se e solo se per ogni successione $\{x_n\} \subset D(A)$ convergente a un punto x , tale che la successione $\{Ax_n\}$ ammette come limite y , vale $y = Ax$.

Mostriamo adesso la

Proposizione III.44

A è chiudibile se e solo se, per ogni successione $\{x_n\} \subset A$ che converga a 0, tale che $Ax_n \rightarrow y$, si ha $y = 0$.

Dimostrazione

Sia A chiudibile, perciò se $0 \oplus y \in \mathcal{G}(A)^a$ allora $y = 0$. Sia $\{x_n\} \subset A$ che converga a 0, tale che $Ax_n \rightarrow y$, allora $\{x_n \oplus Ax_n\} \in \mathcal{G}(A)$ perciò $\{0 \oplus \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n\} \in \mathcal{G}(A)^a$, dunque

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = 0.$$

Valga ora che per ogni successione $\{x_n\} \subset A$ che converga a 0, tale che $Ax_n \rightarrow y$, si ha $y = 0$. Sappiamo che $\mathcal{G}(A)$ è una varietà lineare, perciò anche $\mathcal{G}(A)^a$ è una varietà lineare (in più è chiusa). Vediamo che se $0 \oplus y \in \mathcal{G}(A)^a$ allora $y = 0$. Sia $0 \oplus y \in \mathcal{G}(A)^a$ allora esiste (c.v.d.) $\{x_n \oplus Ax_n\}$ che converge a $0 \oplus y$, ma $y = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = 0$.

Anche la chiusura di A chiudibile si esprime mediante successioni:

$$\bar{A}x = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n$$

con

$$D(\bar{A}) = \left\{ x \in X \mid \exists \{x_n\} \subset D(A), x_n \rightarrow x \text{ e } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n \right\}$$

$\bar{A}$ è ben definito, perché se x_n e y_n convergono a x , allora $x_n - y_n \rightarrow 0$ e perciò

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n - \lim_{n \rightarrow \infty} Ay_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n - y_n) = 0.$$

Teorema III.45 Sia $A \in \mathcal{O}(X, Y)$ e si considerino le seguenti tre affermazioni

- (i) $D(A)$ è chiuso;
- (ii) A è continuo;
- (iii) A è chiuso.

Se per A valgono due delle affermazioni precedenti, allora vale la terza.

Dimostrazione (i) e (ii) implicano (iii) A è continuo perciò chiudibile. Allora la sua chiusura $\bar{A}$ è tale che $D(\bar{A}) = D(A)^a = D(A)$. Allora $A = \bar{A}$, perciò A è chiuso.

(ii) e (iii) implicano (i) $\bar{A} = A$, perciò $D(A) = D(\bar{A})$. Ma A è continuo, perciò $D(\bar{A}) = D(A)^a$ sicché $D(A)$ è eguale alla sua chiusura, cioè è chiuso.

(i) e (iii) implicano (i) $D(A)$ è chiuso perciò è uno spazio completo. Dunque, $A \in \mathcal{O}(D(A), Y)$ con $D(A)$ e Y spazi completi e A chiuso. Allora, per il teorema del grafico (c.v.d.) chiuso, A è continuo.

Vediamo adesso due importanti fatti sugli operatori chiusi.

Teorema III.46 Valgono i seguenti asserti

- (i) sia $A \in \mathcal{O}(X, Y)$ chiuso,

- (a) $\ker A$ è chiuso in X ;
- (b) se $\ker A = \{0\}$, cioè se A è invertibile, allora A^{-1} è chiuso.

- (ii) sia $A \in \mathcal{O}(X, Y)$ chiudibile: se $\ker A = \{0\}$, A^{-1} è chiudibile se e solo se $\bar{A}$ è invertibile e vale

$$\overline{A^{-1}} = \bar{A}^{-1}.$$

Dimostrazione (i) Vediamo (a). Sia $\{x_n\} \subset \ker A$ tale che $x_n \rightarrow x$. Vogliamo vedere che $x \in \ker A$. Ora, siccome $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = 0$, si ha che $x \in D(A)$ e $Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = 0$, cioè $x \in \ker A$.

Vediamo (b). Dall'ipotesi si ha che A è invertibile, con $D(A^{-1}) = R(A)$. Consideriamo allora l'operatore

$$T: \begin{array}{ccc} X \oplus Y & \rightarrow & Y \oplus X \\ x \oplus y & \mapsto & y \oplus Ax \end{array}$$

Esso è un isomorfismo isometrico (dunque è un omeomorfismo), inoltre

$$\mathcal{G}(A^{-1}) = T\mathcal{G}(A)$$

perciò, se A è chiuso, A^{-1} è chiuso.

(ii) Sia A^{-1} chiudibile. Tenendo conto del fatto che T è un omeomorfismo

$$\mathcal{G}(\overline{A^{-1}}) = [\mathcal{G}(A^{-1})]^a = [T\mathcal{G}(A)]^a = T[\mathcal{G}(A)]^a = T\mathcal{G}(\overline{A})$$

Notiamo che, per ogni $B \in \mathcal{O}(X, Y)$, B è invertibile se e solo se $T\mathcal{G}(B)$ è un grafico lineare (e in tal caso, $\mathcal{G}(B^{-1}) = T\mathcal{G}(B)$). Infatti, se B è invertibile, allora $T\mathcal{G}(B) = \mathcal{G}(B^{-1})$. Viceversa, $T\mathcal{G}(B)$ sia un grafico lineare, allora $(0, x) \in T\mathcal{G}(B) \Rightarrow x = 0$, dunque $(x, 0) \in \mathcal{G}(B) \Rightarrow x = 0$, cioè

$$Bx = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

sicché il kernel di B è banale. In base a questa osservazione, visto che $T\mathcal{G}(\bar{A})$ è un grafico lineare, si ha che $\bar{A}$ è invertibile.

Viceversa, sia $\bar{A}$ invertibile, allora

$$\mathcal{G}(\bar{A}^{-1}) = T\mathcal{G}(\bar{A}) = T[\mathcal{G}(A)]^a = [T\mathcal{G}(A)]^a = [\mathcal{G}(A^{-1})]^a$$

Perciò la chiusura del grafico di $\mathcal{G}(A^{-1})$ è un grafico lineare, dunque, A^{-1} è chiudibile e

$$[\mathcal{G}(A^{-1})]^a = \mathcal{G}(\overline{A^{-1}})$$

perciò

$$(c.v.d.) \quad \bar{A}^{-1} = \overline{A^{-1}}.$$

Un ultimo risultato di carattere generale

Teorema III.47 *Siano $A \in L(X, Y)$ e $B \in \mathcal{O}(X, Y)$ allora*

- (i) *se B è chiuso, anche $A + B$ è chiuso;*
- (ii) *se B è chiudibile, anche $A + B$ è chiudibile.*

Dimostrazione (i) Sia $\{x_n\} \subset D(A + B) = X \cap D(B) = D(B)$ tale che $x_n \rightarrow x$ e $(A + B)x_n \rightarrow y$, allora, siccome $Ax_n \rightarrow Ax$, Bx_n è convergente e, visto che B è chiuso, $Bx_n \rightarrow Bx$, ne viene che

$$y = (A + B)x$$

perciò $A + B$ è chiuso.

(ii) Sia $\{x_n\} \subset D(A + B) = X \cap D(B) = D(B)$ tale che $x_n \rightarrow 0$ e $(A + B)x_n \rightarrow y$, allora, siccome $Ax_n \rightarrow 0$, Bx_n è convergente e, visto che B è chiudibile, $Bx_n \rightarrow 0$, ne viene che

$$y = 0$$

(c.v.d.) perciò $A + B$ è chiudibile.

III.7.3 Operatori lineari aggiuntabili

Aggiunzione Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert. Consideriamo $A \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$, vogliamo definirne l'aggiunto. A questo scopo, consideriamo l'operatore seguente

$$\begin{aligned} V: \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \\ x \oplus y &\mapsto -y \oplus x \end{aligned}$$

V è unitario. Infatti, è banalmente suriettivo. Inoltre è isometrico,

$$(x \oplus y, x \oplus y) = (x, x) + (y, y) = (-y, -y) + (x, x) = (-y \oplus x, -y \oplus x).$$

Per motivare la definizione che daremo, prendiamo preliminarmente $A \in L(\mathcal{H})$. A è continuo, dunque chiuso, perciò $\mathcal{G}(A)$ è chiuso. Siccome V è unitario, dunque continuo (si tratta, invero, di un omeomorfismo), $V\mathcal{G}(A)$ è chiuso, perciò è un sottospazio. Risulta univocamente definito $G \doteq [V\mathcal{G}(A)]^\perp$. Ci chiediamo se G è un grafico lineare. Certo è una varietà lineare (per di più chiusa), inoltre,

$$0 \oplus y \in G \Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{H} \ 0 = (0 \oplus y, -Ax \oplus x) = (y, x) \Leftrightarrow y = 0$$

G è grafico di un operatore lineare che affermiamo essere $A^\dagger$. Infatti,

$$\begin{aligned} (x, y) \in G &\Leftrightarrow \forall z \in \mathcal{H} \ 0 = (x \oplus y, -Az \oplus z) = -(x, Az) + (y, z) = (y - A^\dagger x, z) \\ &\Leftrightarrow y = A^\dagger x \end{aligned}$$

È ragionevole, allora, porre

Definizione III.10 *L'operatore $A \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$ si dice aggiuntabile se $[V\mathcal{G}(A)]^\perp$ è grafico di un operatore lineare. In questo caso, si definisce aggiunto $A^\dagger$ di A l'operatore il cui grafico è $[V\mathcal{G}(A)]^\perp$.*

La definizione di aggiuntabilità può essere tradotta in modo molto semplice grazie al seguente

Teorema III.48 *$A \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$ è aggiuntabile se e solo se $D(A)$ è denso in $\mathcal{H}$ (cioè A è densamente definito).*

Dimostrazione *A è aggiuntabile se e solo se $[V\mathcal{G}(A)]^\perp$ è un grafico, ma $[V\mathcal{G}(A)]^\perp$ è una varietà lineare (chiusa), perciò A è aggiuntabile se e solo se*

$$0 \oplus y \in [V\mathcal{G}(A)]^\perp \Rightarrow y = 0$$

ma

$$0 \oplus y \in [V\mathcal{G}(A)]^\perp \Rightarrow \forall x \in D(A) \quad 0 = (0 \oplus y, -Ax \oplus x) = (y, x) \Rightarrow y \in [D(A)]^\perp$$

sicché se A è aggiuntabile allora

$$[D(A)]^\perp = [D(A)^a]^\perp = \{0\} \Leftrightarrow D(A)^a = \mathcal{H}$$

(c.v.d.) e perciò $D(A)$ è denso; viceversa, se $D(A)$ è denso, allora A è aggiuntabile.

D'altra parte, nella fisica matematica, si ha solitamente a che fare con operatori densamente definiti, perciò la condizione di aggiuntabilità non è molto forte.

Veniamo adesso a stabilire le proprietà di $A^\dagger$ per A aggiuntabile

Teorema III.49 *Sia $A \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$ aggiuntabile, allora*

(i) $A^\dagger$ è chiuso;

(ii) $A^\dagger$ è aggiuntabile se e solo se A è chiudibile e, in tal caso, $A^{\dagger\dagger} = \bar{A}$;

(iii) se A è chiudibile, anche $\bar{A}$ è aggiuntabile e si ha $(\bar{A})^\dagger = A^\dagger$;

(iv) se A è invertibile, $A^\dagger$ è invertibile se e solo se A^{-1} è aggiuntabile e, in tal caso,

$$(A^\dagger)^{-1} = (A^{-1})^\dagger;$$

(v) per il dominio dell'aggiunto, si ha

$$\begin{aligned} D(A^\dagger) &= \{y \in \mathcal{H} \mid \exists y' \in \mathcal{H} : (y, Ax) = (y', x), \forall x \in D(A)\} = \\ &= \{y \in \mathcal{H} \mid \alpha_y : D(A) \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto (y, Ax) \text{ è continuo} \} \end{aligned}$$

inoltre,

$$\begin{array}{ccc} A^\dagger : D(A^\dagger) & \rightarrow & \mathcal{H} \\ y & \mapsto & A^\dagger y \doteq y' \end{array}$$

dove y' è tale che $(y, Ax) = (y', x)$;

(vi) $\ker A^\dagger = R(A)^\perp$.

Dimostrazione (i) Siccome $\mathcal{G}(A^\dagger) = [V\mathcal{G}(A)]^\perp$ si ha che il grafico di $A^\dagger$ è chiuso, perciò $A^\dagger$ è chiuso.

(ii) Tenendo conto del fatto che V è unitario e che $V^2 = -\mathbb{I}$, abbiamo

$$[V\mathcal{G}(A^\dagger)]^\perp = [V[V\mathcal{G}(A)]^\perp]^\perp = [VV[\mathcal{G}(A)]^\perp]^\perp = [\mathcal{G}(A)]^{\perp\perp} = \mathcal{G}(A)^a$$

perciò $[V\mathcal{G}(A^\dagger)]^\perp$ è un grafico lineare, se e solo se $\mathcal{G}(A)^a$ è un grafico lineare, se e solo se A è chiudibile, in tal caso

$$A^{\dagger\dagger} = \bar{A}$$

(iii) se A è chiudibile, abbiamo $\bar{A} \supset A$ da cui è chiaro che $\bar{A}$ è densamente definito, dunque aggiuntabile. Siccome poi V è unitario

$$\mathcal{G}(\bar{A}^\dagger) = [V(\mathcal{G}(A))^a]^\perp = [(V\mathcal{G}(A))^a]^\perp = [V\mathcal{G}(A)]^\perp = \mathcal{G}(A^\dagger)$$

sicch  $\bar{A}^\dagger = A^\dagger$.

(iv) Reintrodotta l'operatore unitario U talch  $U(x \oplus y) = y \oplus x$ si ha

$$UV = -VU$$

e $\mathcal{G}(A^{-1}) = U\mathcal{G}(A)$. $A^\dagger$   invertibile se e solo se $U\mathcal{G}(A^\dagger)$   un grafico lineare,

$$U\mathcal{G}(A^\dagger) = U[V\mathcal{G}(A)]^\perp = [UV\mathcal{G}(A)]^\perp = [VU\mathcal{G}(A)]^\perp = [V\mathcal{G}(A^{-1})]^\perp$$

se e solo se

$$[V\mathcal{G}(A^{-1})]^\perp$$

  un grafico lineare, se e solo se A^{-1}   aggiuntabile. In tal caso

$$(A^{-1})^\dagger = (A^\dagger)^{-1}.$$

(v) Siccome per definizione $\mathcal{G}(A^\dagger) = [V\mathcal{G}(A)]^\perp$, abbiamo

$$D(A^\dagger) = \left\{ y \in \mathcal{H} \mid \exists y' \in \mathcal{H} : y \oplus y' \in [V\mathcal{G}(A)]^\perp \right\}$$

ora,

$$y \oplus y' \in [V\mathcal{G}(A)]^\perp \Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{H} - (y, Ax) + (y', x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{H} (y, Ax) = (y', x)$$

cio 

$$D(A^\dagger) = \{ y \in \mathcal{H} \mid \exists y' \in \mathcal{H} : (y, Ax) = (y', x), \forall x \in D(A) \}$$

e $y' = A^\dagger x$. Se $y \in D(A^\dagger)$ allora

$$|\alpha_y(x)| = |(y, Ax)| = |(y', x)| \leq \|y'\| \|x\|$$

perci  α_y   continuo. Viceversa, se α_y   continuo, esso ha dominio denso, applicandogli il teorema di estensione, si ottiene $\bar{\alpha}_y$, continuo e a dominio in $\mathcal{H}$, perci  $\bar{\alpha}_y \in \mathcal{H}^*$ e per il teorema di Riesz, si ha l'esistenza di y' tale che

$$\bar{\alpha}_y(x) = (y', x)$$

Perci , per ogni $x \in D(A)$ si ha

$$\alpha_y(x) = (y', x) = (y, Ax)$$

sicch  $y \in D(A^\dagger)$.

(vi) Prendiamo $y \in \ker A$, allora

$$y \in D(A^\dagger), A^\dagger y = 0$$

sicch 

$$\forall x \in D(A), (y, Ax) = 0$$

(c.v.d.) dunque $y \in R(A)^\perp$.

Osservazione III.5 Sia $A \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$ aggiuntabile e chiudibile allora $A^{\dagger\dagger} = \bar{A}$, riaggiuntando
 $A^{\dagger\dagger\dagger} = A^\dagger$

Infine, il seguente

Teorema III.50 Valgono i seguenti asserti, presi $A, B \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$

(i) sia A aggiuntabile e sia $B \supset A$, allora $B^\dagger \subset A^\dagger$;

(ii) siano A, B e $A + B$ aggiuntabili, allora

$$(A + B)^\dagger \supset A^\dagger + B^\dagger,$$

se poi uno tra A e B appartiene a $L(\mathcal{H})$, vale l'eguaglianza;

(iii) sia A aggiuntabile, allora, se $k \neq 0$,

$$(kA)^\dagger = k^* A^\dagger;$$

(iv) siano A, B e AB aggiuntabili, allora

$$(AB)^\dagger \supset B^\dagger A^\dagger,$$

se poi $A \in L(\mathcal{H})$, allora vale l'eguaglianza.

Dimostrazione

(i) $\mathcal{G}(A) \subset \mathcal{G}(B)$, perciò $V\mathcal{G}(A) \subset V\mathcal{G}(B)$, dunque, $[V\mathcal{G}(B)]^\perp \subset [V\mathcal{G}(A)]^\perp$, cioè $B^\dagger \subset A^\dagger$. L'aggiuntabilità di B deriva dal fatto che, estendendo A , esso è densamente definito.

(ii) se $y \in D(A^\dagger + B^\dagger) = D(A^\dagger) \cap D(B^\dagger)$ allora

$$(y, Ax) + (y, Bx) = (A^\dagger y, x) + (B^\dagger y, x), \forall x \in D(A) \cap D(B)$$

$$(y, (A+B)x) = ((A^\dagger + B^\dagger)y, x), \forall x \in D(A) \cap D(B)$$

perciò $y \in D(A+B)^\dagger$ e $(A+B)^\dagger y = (A^\dagger + B^\dagger)y$ dunque

$$(A+B)^\dagger \supset A^\dagger + B^\dagger$$

Supponiamo $B \in L(\mathcal{H})$, se $y \in D(A+B)^\dagger$ allora $(y, (A+B)x) = ((A+B)^\dagger y, x)$, per ogni $x \in D(A+B) = D(A)$, ne viene che

$$(y, Ax) = ((A+B)^\dagger y, x) - (B^\dagger y, x), \forall x \in D(A)$$

da cui, $y \in D(A^\dagger)$ e

$$A^\dagger y = (A+B)^\dagger y - B^\dagger y$$

$$(A^\dagger + B^\dagger)y = (A+B)^\dagger y$$

Infine, per ogni $y \in D(A+B)^\dagger$ vale

$$(A^\dagger + B^\dagger)y = (A+B)^\dagger y,$$

cioè

$$(A+B)^\dagger \subset A^\dagger + B^\dagger$$

(iii) $y \in D(k^*A^\dagger)$ se e solo se $y \in D(A^\dagger)$, se e solo se esiste $y' \in \mathcal{H}$ tale che

$$(y, Ax) = (y', x), \forall x \in D(A)$$

se e solo se esiste $y' \in \mathcal{H}$ tale che

$$(y, kAx) = (k^*y', x), \forall x \in D(A)$$

se e solo se $y \in D(kA)^\dagger$ e, inoltre,

$$(kA)^\dagger y = k^*A^\dagger y$$

(iv) $y \in D(B^\dagger A^\dagger)$ implica $y \in D(A^\dagger)$ e $A^\dagger y \in D(B^\dagger)$, dunque $y \in D(A^\dagger)$ e

$$(A^\dagger y, Bx) = (B^\dagger(A^\dagger y), x), \forall x \in D(B)$$

dunque,

$$(y, ABx) = (B^\dagger A^\dagger y, x), \forall x \in D(AB)$$

ne viene allora che $y \in D(AB)^\dagger$ e che $(AB)^\dagger y = B^\dagger A^\dagger y$, ossia

$$(AB)^\dagger \supset B^\dagger A^\dagger$$

Supposto $A \in L(\mathcal{H})$, allora abbiamo anche

$$y \in D(AB)^\dagger \Rightarrow (y, ABx) = ((AB)^\dagger y, x), \forall x \in D(AB) = D(B) \Rightarrow$$

$$(A^\dagger y, Bx) = ((AB)^\dagger y, x), \forall x \in D(B) \Rightarrow A^\dagger y \in D(B^\dagger) \quad B^\dagger A^\dagger y = (AB)^\dagger y$$

sicché, $y \in D(B^\dagger A^\dagger)$ e $B^\dagger A^\dagger y = (AB)^\dagger y$ per cui

$$(c.v.d.) \quad (AB)^\dagger \subset B^\dagger A^\dagger.$$

III.7.4 Autoaggiunzione

Come prima vogliamo fornire una ragionevole definizione di operatore lineare autoaggiunto nel contesto più ampio che stiamo sviluppando in questa sezione. Torniamo a considerare per un attimo $A \in L(\mathcal{H})$, abbiamo detto che esso è autoaggiunto se e solo se

$$\forall x, x' \in \mathcal{H} \quad (x, Ax') = (x, Ax')$$

Una modifica possibile a questa definizione, in modo da estenderla al caso $A \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$, è la

seguinte

$$\begin{cases} D(A)^a = \mathcal{H} \\ (Ax', x) = (x', Ax), \forall x, x' \in D(A) \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

D'altronde (III.1) è equivalente a

$$\begin{cases} D(A)^a = \mathcal{H} \\ A \subset A^\dagger \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

(III.1) implica (III.2) A è aggiuntabile, $x' \in D(A) \Rightarrow (Ax', x) = (x', Ax)$ per ogni $x \in D(A)$, dunque $x' \in D(A^\dagger)$ e $A^\dagger x' = Ax$, cioè $A^\dagger$ estende A .

(III.2) implica (III.1) A è aggiuntabile, perciò $(A^\dagger x', x) = (x', Ax)$ per ogni $x' \in D(A^\dagger)$ e $x \in D(A)$, da cui, essendo $A \subset A^\dagger$ si ha

$$(Ax', x) = (x', Ax), \forall x, x' \in D(A).$$

Sia (III.1) che (III.2), dunque, non sono buone definizioni di autoaggiunzione, visto che vorremo $A^\dagger = A$. Operatori che soddisfino (III.1) o (III.2) si dicono **operatori simmetrici** (o **hermitiani**). Siamo pronti a stabilire la seguente

Definizione III.11 Sia $A \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$, allora A si dice *simmetrico* se

$$\begin{cases} D(A)^a = \mathcal{H} \\ A \subset A^\dagger \end{cases}$$

A si dice *autoaggiunto* se

$$\begin{cases} D(A)^a = \mathcal{H} \\ A = A^\dagger \end{cases}$$

Ovviamente, l'autoaggiunzione implica la simmetria, ma non il viceversa. Consideriamo un operatore simmetrico, esso ha aggiunto densamente definito, perciò aggiuntabile, ne viene che A è chiudibile e che

$$\bar{A} = A^{\dagger\dagger}$$

perciò

$$A \subset A^{\dagger\dagger}$$

inoltre, dalla $A \subset A^\dagger$ risulta $A^{\dagger\dagger} \subset A^\dagger$, quindi, se A è simmetrico

$$A \subset A^{\dagger\dagger} \subset A^\dagger$$

Questo, peraltro, implica che la chiusura di un operatore simmetrico, $\bar{A}$, è simmetrica

$$\bar{A} \subset A^\dagger = (\bar{A})^\dagger$$

dove l'ultima eguaglianza, valida per A chiudibile, l'abbiamo dimostrata in precedenza.

Proposizione III.51 Sia $A \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$ *simmetrico*, allora A è *chiudibile*, vale

$$A \subset A^{\dagger\dagger} \subset A^\dagger$$

e, infine, la *chiusura* di A è *simmetrica*

$$\bar{A} \subset A^\dagger = (\bar{A})^\dagger.$$

Il caso in cui

$$A = A^{\dagger\dagger} = A^\dagger$$

si verifica per A autoaggiunto; il caso

$$A = A^{\dagger\dagger} \subset A^\dagger$$

si ha per A simmetrico e chiuso. Esiste poi un quarto caso

$$A \subset A^{\dagger\dagger} = A^\dagger$$

in cui A ha **chiusura autoaggiunta**. Operatori di questo tipo, simmetrici a chiusura autoaggiunta, si dicono **essenzialmente autoaggiunti**.

Proposizione III.52 Un operatore $A \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$ è *essenzialmente autoaggiunto* se e solo se è *chiudibile* ed ha *chiusura autoaggiunta*.

Dimostrazione Infatti, la simmetria implica la chiudibilità. Vediamo il viceversa. A è chiudibile, dunque

$$D(\bar{A}) \subset D(A)^a$$

perciò, A è densamente definito, sicché aggiuntabile. Allora

$$\bar{A} = (\bar{A})^\dagger = A^\dagger$$

sicché

$$A \subset A^\dagger$$

(c.v.d.) perciò A è simmetrico e $A^{\dagger\dagger} = A^\dagger$.

In chiusura di trattazione, riportiamo dei criteri per stabilire se un operatore è autoaggiunto o essenzialmente autoaggiunto, nel caso in cui esso sia simmetrico.

Teorema III.53 Sia $A \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$ un operatore simmetrico.

(i) Sono equivalenti le seguenti affermazioni

- (a) A è autoaggiunto;
- (b) $D(A^\dagger) \subset D(A)$;
- (c) A è chiuso e $\ker(A^\dagger \pm i\mathbb{I}) = \{0\}$;
- (d) $R(A \pm i\mathbb{I}) = \mathcal{H}$.

(ii) Sono equivalenti le seguenti affermazioni

- (a) A è essenzialmente autoaggiunto;
- (b) $D(A^\dagger) \subset D(\bar{A})$;
- (c) $\ker(A^\dagger \pm i\mathbb{I}) = \{0\}$;
- (d) $R(A \pm i\mathbb{I})$ è denso in $\mathcal{H}$.

Dimostrazione Dimostriamo (i). (a) equivale a (b) (a) implica banalmente (b). Vediamo il viceversa, essendo $A \subset A^\dagger$ si ha che $D(A^\dagger) \subset D(A)$ dà immediatamente $A^\dagger = A$.

(a) implica (c) Poiché $A^\dagger = A$ si ha subito che A è chiuso (l'aggiunto è sempre chiuso). Siano poi

$$\begin{aligned} x_+ &\in \ker(A^\dagger + i\mathbb{I}) \\ x_- &\in \ker(A^\dagger - i\mathbb{I}) \end{aligned}$$

allora

$$A^\dagger x_\pm = \mp i x_\pm$$

sicché

$$\begin{aligned} (x_\pm, A^\dagger x_\pm) &= (x_\pm, \mp i x_\pm) = \mp i \|x_\pm\|^2 \\ (A^\dagger x_\pm, x_\pm) &= (\mp i x_\pm, x_\pm) = \pm i \|x_\pm\|^2 \end{aligned}$$

quindi, essendo A autoaggiunto,

$$\|x_\pm\|^2 = -\|x_\pm\|^2 \Leftrightarrow x_\pm = 0$$

(c) implica (d) Vediamo anzitutto che, essendo A chiuso, $R(A \pm i\mathbb{I})$ è chiuso. Siano $\{x_{\pm n}\} \subset D(A \pm i\mathbb{I})$ tali che $(A \pm i\mathbb{I})x_{\pm n} \rightarrow y_\pm$. Le $\{x_{\pm n}\}$ sono di Cauchy: infatti, sia $z \in D(A) = D(A \pm i\mathbb{I})$ allora

$$\|z\| \leq \|(A \pm i\mathbb{I})z\|$$

visto che

$$\begin{aligned} \|(A \pm i\mathbb{I})z\|^2 &= ((A \pm i\mathbb{I})z, (A \pm i\mathbb{I})z) = \|Az\|^2 + \|z\|^2 \pm i(Az, z) \mp i(z, Az) = \\ &= \|Az\|^2 + \|z\|^2 \end{aligned}$$

Sicché

$\|x_{\pm n} - x_{\pm m}\| \leq \|(A \pm i\mathbb{I})(x_{\pm n} - x_{\pm m})\| = \|(A \pm i\mathbb{I})x_{\pm n} - (A \pm i\mathbb{I})x_{\pm m}\|$
 siccome la successione a destra è di Cauchy, così è $\{x_{\pm n}\}$. Siano allora

$$x_{\pm} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{\pm n}$$

Dunque, siccome A è chiuso, $A \pm i\mathbb{I}$ è chiuso e dunque $x_{\pm} \in D(A \pm i\mathbb{I})$ e

$$(A \pm i\mathbb{I})x_{\pm} = y_{\pm}$$

perciò $y_{\pm} \in R(A \pm i\mathbb{I})$ e $R(A \pm i\mathbb{I})$ è chiuso. Ora,

$$\{0\} = \ker(A^{\dagger} \pm i\mathbb{I}) = R(A \mp i\mathbb{I})^{\perp}$$

sicché, essendo $R(A \pm i\mathbb{I})$ chiuso, si conclude

$$R(A \mp i\mathbb{I}) = \mathcal{H}$$

(d) implica (b) Sia $y \in D(A^{\dagger})$. Poiché $R(A \pm i\mathbb{I}) = \mathcal{H}$ esiste $x_{\pm} \in D(A \pm i\mathbb{I})$ tale che

$$(A \pm i\mathbb{I})x_{\pm} = (A^{\dagger} \pm i\mathbb{I})y$$

Ma $D(A \pm i\mathbb{I}) = D(A)$ e su tale dominio $A = A^{\dagger}$ perciò

$$(A^{\dagger} \pm i\mathbb{I})(y - x_{\pm}) = 0$$

d'altra parte

$$\ker(A^{\dagger} \pm i\mathbb{I}) = R(A \mp i\mathbb{I})^{\perp} = \{0\}$$

sicché $y = x_{\pm}$ e perciò $y \in D(A)$.

Dimostriamo (ii). (a) equivale a (b) Se A è essenzialmente autoaggiunto, allora

$$A^{\dagger} = \bar{A}$$

perciò $D(A^{\dagger}) \subset D(\bar{A})$. Viceversa, $D(A^{\dagger}) \subset D(\bar{A})$, ma siccome A è simmetrico,

$$\bar{A} \subset A^{\dagger}$$

da cui $\bar{A} = A^{\dagger}$.

(a) implica (c) Se A è essenzialmente autoaggiunto, allora $A^{\dagger}$ è autoaggiunto, perciò

$$\ker(A^{\dagger\dagger} \pm i\mathbb{I}) = \{0\}$$

ma $A^{\dagger\dagger} = A^{\dagger}$, sicché si ha la tesi.

(c) implica (d) Da $\ker(A^{\dagger} \pm i\mathbb{I}) = \{0\}$ si ha

$$R(A \mp i\mathbb{I})^{\perp} = \mathcal{H}$$

perciò $R(A \mp i\mathbb{I})$ è denso in $\mathcal{H}$.

(d) implica (b) Sia $y \in D(A^{\dagger})$. Poiché $R(A \pm i\mathbb{I})^a = \mathcal{H}$ esiste in $D(A \pm i\mathbb{I})$ una successione $\{x_{\pm n}\}$ talché

$$(A \pm i\mathbb{I})x_{\pm n} \rightarrow (A^{\dagger} \pm i\mathbb{I})y$$

La $\{x_{\pm n}\}$ è di Cauchy (come di mostrato in (i), usando il fatto che A è simmetrico). Sia allora

$$x_{\pm} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{\pm n}$$

Siccome A è chiudibile, $A \pm i\mathbb{I}$ è chiudibile ed ha chiusura $\bar{A} \pm i\mathbb{I}$, perciò $x_{\pm} \in D(\bar{A})$ e

$$(\bar{A} \pm i\mathbb{I})x_{\pm} = (A^{\dagger} \pm i\mathbb{I})y$$

Ora, in $D(\bar{A})$ $\bar{A} = A^{\dagger\dagger}$ coincide con $A^{\dagger}$ (per simmetria) sicché

$$(A^{\dagger} \pm i\mathbb{I})(y - x_{\pm}) = 0$$

ma

$$\ker(A^{\dagger} \pm i\mathbb{I}) = R(A \mp i\mathbb{I})^{\perp} = R(A \mp i\mathbb{I})^{a\perp} = \mathcal{H}^{\perp} = \{0\}$$

(c.v.d.) sicché $y = x_{\pm}$ e $y \in D(\bar{A})$.

III.7.5 Valori medi di un operatore

Come sarà di certo noto al lettore, il concetto di valor medio di un operatore riveste un'importanza capitale nel contesto della Meccanica Quantistica, perciò ci apprestiamo a introdurlo. Ancora, $\mathcal{H}$ è un $\mathbb{C}$ -spazio di Hilbert.

Definizione III.12 Sia $A \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$. Per ogni $x \in D(A)$, il valor medio di A riferito a x è il numero complesso dato da

$$\langle A \rangle_x = \begin{cases} (x, Ax) / \|x\|^2, & x \in D(A) \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

l'insieme

$$\Theta(A) \doteq \{\langle A \rangle_x \mid x \in D(A) \setminus \{0\}\}$$

si chiama range numerico di A .

Teorema III.54 Sia $A \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

- (i) A è simmetrico;
- (ii) A è densamente definito e $\langle A \rangle_x \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in D(A)$.

Dimostrazione (i) implica (ii) Se A è simmetrico, allora A è densamente definito per definizione di simmetria. Inoltre

$$(x, Ax) = (Ax, x), \quad \forall x \in D(A)$$

perciò

$$\langle A \rangle_x = \frac{(x, Ax)}{\|x\|^2} = \frac{(Ax, x)^*}{\|x\|^2} = \frac{(x, Ax)^*}{\|x\|^2} = \langle A \rangle_x^*.$$

(ii) implica (i) La realtà dei valori medi implica, se $x \in D(A)$

$$\begin{aligned} (x, Ax)^* &= (x, Ax) = (Ax, x)^* \\ (x, Ax) &= (Ax, x) \end{aligned}$$

Siano $x, x' \in D(A)$ abbiamo

$$(x + \beta x', A(x + \beta x')) = (A(x + \beta x'), x + \beta x')$$

sviluppiamo i due membri

$$\begin{aligned} (x + \beta x', A(x + \beta x')) &= (x, Ax) + \beta (x, Ax') + \beta^* (x', Ax) + |\beta|^2 (x', Ax') \\ (A(x + \beta x'), x + \beta x') &= (Ax, x) + \beta (Ax, x') + \beta^* (Ax', x) + |\beta|^2 (x', Ax') \end{aligned}$$

da cui

$$\beta (x, Ax') + \beta^* (x', Ax) = \beta (Ax, x') + \beta^* (Ax', x)$$

posto $\beta = 1$ e poi $\beta = i$ abbiamo

$$\begin{aligned} (x, Ax') + (x', Ax) &= (Ax, x') + (Ax', x) \\ (x, Ax') - (x', Ax) &= (Ax, x') - (Ax', x) \end{aligned}$$

da cui, per ogni $x, x' \in D(A)$

$$(x, Ax') = (Ax, x')$$

(c.v.d.) perciò A è simmetrico.

Abbiamo ancora il seguente

Teorema III.55 Sia $A \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$ simmetrico:

(i) A è limitato se e solo se

$$\sup_{x \in D(A)} \{|\langle A \rangle_x|\} = \sup_{x \in D(A), \|x\|=1} \{|\langle A \rangle_x|\} < \infty;$$

(ii) se A è limitato allora

$$\|A\| = \sup_{x \in D(A)} \{|\langle A \rangle_x|\}.$$

Dimostrazione L'eguaglianza tra i due sup è ovvia. Dimostriamo l'enunciato per il secondo sup. Sia A illimitato, allora per ogni M esiste un vettore $x \in D(A)$ tale che

$$|(x, Ax)| > M$$

perciò il sup è infinito. Il viceversa è del tutto ovvio.

Se A è limitato, allora è subito evidente (dalla disuguaglianza di Schwarz) che, denotato con s_A il sup di cui nell'enunciato, vale

$$s_A \leq \|A\|.$$

La disuguaglianza opposta è un po' più complicata. Siano $x, x' \in D(A)$

$$\begin{aligned} 4 \operatorname{Re}(x, Ax') &= 2 [(x, Ax') + (x', Ax)] = [(x + x', A(x + x')) - (x - x', A(x - x'))] \leq \\ &\leq |(x + x', A(x + x'))| + |(x - x', A(x - x'))| \leq s_A (\|x + x'\|^2 + \|x - x'\|^2) = \\ &= 2s_A (\|x\|^2 + \|x'\|^2) \end{aligned}$$

cioè

$$\operatorname{Re}(x, Ax') \leq \frac{s_A}{2} (\|x\|^2 + \|x'\|^2)$$

Ora esiste una fase z tale che

$$|(x, Ax')| = z(x, Ax') = (zx, Ax') = \operatorname{Re}(zx, Ax') \leq \frac{s_A}{2} (\|x\|^2 + \|x'\|^2)$$

prendiamo

$$x = \frac{\|x'\|}{\|Ax'\|} Ax'$$

da cui

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{\|x'\|}{\|Ax'\|} Ax', Ax' \right) \right| &\leq s_A \|x'\|^2 \\ \frac{\|x'\|}{\|Ax'\|} \|Ax'\|^2 &\leq s_A \|x'\|^2 \end{aligned}$$

cioè

$$\|Ax'\| \leq s_A \|x'\|$$

sicché

$$(\text{c.v.d.}) \quad \|A\| \leq s_A.$$

Come è noto, nella Meccanica Quantistica, accanto ai valori medi si considerino le dispersioni:

Definizione III.13 Sia $A \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$ un operatore simmetrico e sia $x \in D(A^2)$, la dispersione di A relativa a x è il reale non negativo $\Delta_x A$ dato da

$$\Delta_x A \doteq \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle_x \mathbb{I})^2 \rangle_x}$$

Si noti come

$$\begin{aligned} D(A - \langle A \rangle_x \mathbb{I})^2 &= D(A^2) \\ D(A^2) &\subset D(A - \langle A \rangle_x \mathbb{I}) = D(A) \end{aligned}$$

Siccome $\langle A \rangle_x$ è reale, allora $A - \langle A \rangle_x \mathbb{I}$ è simmetrico, perciò la definizione è ben posta e coincide con la

$$\Delta_x A = \frac{\|Ax - \langle A \rangle_x x\|}{\|x\|}, \quad x \in D(A^2) \setminus \{0\}$$

Teorema III.56
(di indeterminazione)

Dati $A, B \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$ simmetrici, sia $x \in D(A^2) \cap D(B^2) \cap D([A, B])$. Vale allora la relazione di indeterminazione

$$(\Delta_x A)(\Delta_x B) \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle_x|$$

Analisi complessa

In questo capitolo presentiamo brevemente alcuni aspetti sulle funzioni olomorfe che risultano fondamentali di per sé, ma, soprattutto, trovano applicazione nei capitoli che seguono (che hanno come oggetto la trasformata di Fourier e la teoria spettrale). Un prerequisito importante per la lettura del materiale esposto è costituito dalle forme differenziali. Per completezza, abbiamo aggiunto una sezione introduttiva sull'argomento che non ha, comunque, alcuna pretesa di completezza. Tutti i teoremi enunciati (compresi quelli sulle forme) sono debitamente dimostrati, fatta eccezione per il teorema di Picard sulle singolarità essenziali (che non hanno, per noi, alcun interesse) e il fatto che un circuito semplice è omotopo a ogni circonferenza contenuta nel circuito stesso (è un fatto generale che non ci serve: si adoperano circuiti fatti con archi di circonferenza o rettangoli per i quali la dimostrazione è banale).

IV.1 Cenni sulle forme differenziali di grado uno

IV.1.1 Definizione di forma differenziale di grado uno

**Introduzione:
il differenziale**

Se si ha una funzione $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, di classe C^1 sull'aperto D di $\mathbb{R}^n$, il suo differenziale df è una funzione continua

$$df : D \rightarrow \mathbb{R}^{n*}$$

dove con $\mathbb{R}^{n*}$ si è indicato il duale di $\mathbb{R}^n$. Fissata una base in $\mathbb{R}^n$, tipicamente la base canonica $\mathbf{e}_i$, $i \in J_n$, abbiamo subito definita la base duale di $\mathbb{R}^{n*}$, data dai funzionali x_i che a ciascun vettore associano la coordinata i -esima. Ora, essendo x_i lineare, definita su D e a valori in $\mathbb{R}$, il suo differenziale è ancora x_i , perciò abbiamo che $\{dx_i\}_{i \in J_n}$ è una base in $\mathbb{R}^{n*}$ e, inoltre, risulta

$$df(x) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(x) dx_i$$

dove

$$\partial_i \doteq \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

In questo modo, per ogni $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$

$$df(x) \mathbf{h} = \langle df(x), \mathbf{h} \rangle = \sum_{i=1}^n \partial_i f(x) dx_i \mathbf{h} = \sum_{i=1}^n \partial_i f(x) h_i$$

Così motivati, poniamo la seguente

Definizione IV.1 *Sia D un aperto di $\mathbb{R}^n$. Una forma differenziale di grado 1, o campo di covettori su D , è una funzione $\omega : D \rightarrow \mathbb{R}^{n*}$ definita su D a valori nel duale di $\mathbb{R}^{n*}$.*

Una forma ω si dice di classe $\mathcal{C}^\ell$ se ω è una funzione di classe $\mathcal{C}^\ell$. Rispetto alla base duale canonica, ω assume la forma

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i$$

Definizione IV.2 *Una forma $\omega : D \rightarrow \mathbb{R}^{n*}$ si dice esatta su D se esiste $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ talché, per ogni $x \in D$*

$$\omega(x) = df(x)$$

Ogni tale f si dice primitiva o integrale di ω .

Proposizione IV.1 Se D è aperto in $\mathbb{R}^n$, due primitive della stessa forma ω differiscono per una funzione localmente costante, e perciò costante se D è connesso.

Dimostrazione Se f, g sono primitive di ω , si ha $d(f - g) = df - dg = 0$; le funzioni con differenziale nullo (c.v.d.) sono quelle localmente costanti. Sui connessi esse sono costanti (corso di Analisi II).

IV.1.2 Forme chiuse e forme esatte

Definizione IV.3 Una forma differenziale $\omega : D \rightarrow \mathbb{R}^{n*}$ di classe $\mathcal{C}^1$ si dice chiusa in D se, scritta in coordinate

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n \omega_i(x) dx_i$$

si ha

$$\partial_k \omega_j(x) = \partial_j \omega_k(x), \quad \forall j, k \in J_n, \quad \forall x \in D$$

Definizione IV.4 Una forma differenziale si dice localmente esatta su D se per ogni $x \in D$ esiste un intorno di x , contenuto in D , nel quale la forma risulti esatta.

Proposizione IV.2 Sia D aperto in $\mathbb{R}^n$ e sia ω una 1-forma differenziale esatta, allora ω è chiusa.

Dimostrazione Sia f una primitiva di ω , allora

$$\omega_i = \partial_i f$$

ne viene che $f \in \mathcal{C}^2$ e che, per il teorema di Schwarz,

$$(c.v.d.) \quad \partial_k \omega_j = \partial_k \partial_j f = \partial_j \partial_k f = \partial_j \omega_k.$$

Proposizione IV.3 Siano I e J intervalli reali e sia $\omega : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^{2*}$, $\omega(x, y) = \omega_1(x, y) dx + \omega_2(x, y) dy$, una forma chiusa di classe $\mathcal{C}^1$ sul rettangolo aperto $I \times J$. Allora ω è esatta e, fissato $(a, b) \in I \times J$, si ha che tutte e sole le primitive di ω sono della forma

$$F(x, y) = k + \int_a^x \omega_1(\xi, b) d\xi + \int_b^y \omega_2(x, \eta) d\eta$$

Dimostrazione Siccome $I \times J$ è convesso nella direzione di y (vedi **Analisi II per Fisici**, II.1) allora l'insieme delle funzioni $F : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\partial_2 F(x, y) = \omega_2(x, y)$ è dato dalla formula

$$F(x, y) = \int_b^y \omega_2(x, \eta) d\eta + \alpha(x)$$

con $\alpha \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$. Infatti, l'equazione scritta è certamente soluzione della $\partial_2 F(x, y) = \omega_2(x, y)$, d'altra parte, se $G(x, y)$ è un'altra soluzione, si ha $\partial_2(F - G) = 0$, quindi, essendo il rettangolo convesso nella direzione di y , $(F - G)(x, y) = \alpha(x)$, come volevamo dimostrare.

Imponiamo adesso

$$\begin{aligned} \partial_1 F(x, y) &= \omega_1(x, y) = \partial_1 \int_b^y \omega_2(x, \eta) d\eta + \alpha'(x) = \\ &= \int_b^y \partial_1 \omega_2(x, \eta) d\eta + \alpha'(x) = \\ &= \int_b^y \partial_2 \omega_1(x, \eta) d\eta + \alpha'(x) = \omega_1(x, y) - \omega_1(x, b) + \alpha'(x) \end{aligned}$$

(dove si deriva sotto segno perché $\omega_2 \in \mathcal{C}^1$ ed è definita su un compatto, perciò è limitata e ha derivata limitata su un insieme di misura finita) sicché

$$\alpha(x) = k + \int_a^x \omega_1(\xi, b) d\xi$$

(c.v.d.) la tesi.

Vediamo adesso il legame tra forme chiuse e forme localmente esatte:

Teorema IV.4 Una forma differenziale di classe $\mathcal{C}^1$ è chiusa se e solo se è localmente esatta.

Dimostrazione Se ω è di classe $\mathcal{C}^1$ e localmente esatta allora è chiusa: infatti, sia $p \in D$ e sia U l'intorno in cui ω è esatta. Allora in U , ω è chiusa per la proposizione precedente, dunque, ω è chiusa. Siccome nel seguito ci occorreranno solo risultati in dimensione $n = 2$ limitiamoci a questo caso. Per ogni $p \in D$ selezioniamo la palla centrata in p e tutta contenuta in D . In essa (c.v.d.) prendiamo un rettangolo. All'interno del rettangolo ω chiusa è esatta. La tesi.

IV.1.3 Integrazione su cammini e primitive

Sia D aperto in $\mathbb{R}^n$. Un **cammino** in D è una funzione $\alpha : [a, b] \rightarrow D$ continua e $\mathcal{C}^1$ a tratti. $\alpha(a)$ si dice **origine** del cammino e $\alpha(b)$ si dice **estremo** del cammino. Un cammino è un **circuito** se $\alpha(a) = \alpha(b)$. Un **cammino costante** è una funzione costante, perciò un **punto**. Se $\omega : D \rightarrow \mathbb{R}^{n*}$ è una forma differenziale continua ed esatta su D , $\alpha : [a, b] \rightarrow D$ è un cammino in D , e f una primitiva di ω , considerata la funzione $g(t) = f(\alpha(t))$, $t \in [a, b]$ si ha, dal teorema fondamentale del calcolo,

$$g(b) - g(a) = \int_a^b g'(t) dt$$

Ora,

$$g'(t) = \langle df(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle = \langle \omega(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle$$

sicché

$$f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)) = \int_a^b \langle \omega(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n \omega_i(\alpha(t)) \alpha'_i(t) dt$$

Siamo ora motivati a porre

Definizione IV.5 Se $\alpha : [a, b] \rightarrow D$ è un cammino nell'aperto D di $\mathbb{R}^n$, e ω è una forma differenziale continua su D , si dice **integrale (di linea) di ω esteso al cammino α** il numero reale

$$\int_{\alpha} \omega \doteq \int_a^b \langle \omega(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n \omega_i(\alpha(t)) \alpha'_i(t) dt$$

Dunque, abbiamo prima dimostrato il

Teorema IV.5
(fondamentale
del calcolo)

Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^1(D)$ con D aperto di $\mathbb{R}^n$ e $p, q \in D$, si ha, per ogni cammino α di D avente origine in p ed estremo in q ,

$$f(q) - f(p) = \int_{\alpha} df.$$

In particolare, $\int_{\gamma} df = 0$ per ogni circuito γ di D .

Il teorema fondamentale del calcolo caratterizza le forme esatte come affermato dal seguente

Teorema
IV.6 (carat-
terizzazione
integrale delle
forme esatte)

Sia D un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $\omega : D \rightarrow \mathbb{R}^{n*}$ una forma differenziale continua. Sono affermazioni equivalenti

(i) ω è esatta in D ;

(ii) se α e β sono cammini in D aventi origine ed estremo in comune, allora

$$\int_{\alpha} \omega = \int_{\beta} \omega;$$

(iii) per ogni circuito γ di D si ha

$$\int_{\gamma} \omega = 0.$$

Dimostrazione

(i) implica (ii) in virtù del teorema fondamentale del calcolo.

(ii) equivale a (iii) in modo banale (si spezza il circuito in due cammini, o si uniscono due cammini a ottenere un circuito).

(ii) implica (i) Non è restrittivo considerare D connesso, dato che si può ripetere lo stesso ragionamento a ogni componente connessa di D . Ora D è un aperto connesso di uno spazio normato, perciò è connesso per archi. Fissato $c \in D$, definiamo $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo $f(x) = \int_{\alpha} \omega$, dove α è un cammino in D che congiunge c con x ; per (ii) la funzione è ben definita e per ogni $x \in D$ si ha $df(x) = \omega(x)$. Infatti, esiste $\delta > 0$ tale che sia $B(x, \delta) \subset D$; se $|h| < \delta$, $x + h \in B(x, \delta)$, ed essendo la palla un insieme convesso, il segmento $[x, x+h]$ è tutto contenuto in $B(x, \delta)$; ne segue che $f(x+h)$ è l'integrale di ω sul cammino ottenuto attaccando a α il segmento detto: se chiamiamo tale cammino $\tilde{\alpha}$, abbiamo

$$f(x+h) = \int_{\tilde{\alpha}} \omega = \int_{\alpha} \omega + \int_{[x, x+h]} \omega = f(x) + \int_{[x, x+h]} \omega$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$, dobbiamo mostrare che esiste $\delta' > 0$ per cui se $|h| < \delta'$, allora

$$|f(x+h) - f(x) - \langle \omega(x), h \rangle| \leq \varepsilon |h|$$

Ma

$$|f(x+h) - f(x) - \langle \omega(x), h \rangle| = \left| \int_{[x, x+h]} \omega - \langle \omega(x), h \rangle \right| \leq \int_0^1 |\langle \omega(x+th) - \omega(x), h \rangle| dt$$

Siccome ω è continua in x , esiste δ' talché

$$\|\omega(x+th) - \omega(x)\| < \varepsilon$$

per $h < \delta'$, infine,

$$(c.v.d.) \quad |f(x+h) - f(x) - \langle \omega(x), h \rangle| \leq \int_0^1 |\langle \omega(x+th) - \omega(x), h \rangle| dt \leq \varepsilon |h|$$

IV.1.4 Omotopia tra circuiti e invarianza per omotopia

La nozione di omotopia rende rigoroso il concetto di deformazione continua di un circuito:

Definizione IV.6 Siano $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow D$ circuiti. Un'omotopia da α a β è una funzione continua $h : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow D$ tale che

(i) $h(t, 0) = \alpha(t)$ e $h(t, 1) = \beta(t)$ per ogni $t \in [a, b]$;

(ii) $h(a, \lambda) = h(b, \lambda)$ per ogni $\lambda \in [0, 1]$.

Posto $\alpha_{\lambda}(t) = h(t, \lambda)$ si ha che $\alpha_{\lambda} : [a, b] \rightarrow D$ è un circuito (di classe $\mathcal{C}^0$ soltanto) per la (ii). Ne viene che al variare di λ , α_{λ} è una famiglia a un parametro di circuiti. Il primo, per $\lambda = 0$ è α , l'ultimo, per $\lambda = 1$ è β .

Si verifica facilmente che nell'insieme dei circuiti in D l'omotopia è una relazione di equivalenza.

Teorema IV.7
(di invarianza
per omotopia)

Se ω è una forma continua e localmente esatta in D e α e β sono circuiti omotopi in D , allora

$$\int_{\alpha} \omega = \int_{\beta} \omega.$$

Dimostrazione

Sia $h : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow D$ l'omotopia tra α e β . Per ogni $x \in D$ si scelga una palla aperta U_x contenuta in D tale che $\omega|_{U_x}$ sia esatta. Allora i $V_x = h^{-1}(U_x)$ al variare di $x \in D$ costituiscono un ricoprimento aperto del compatto $[a, b] \times [0, 1]$. Ne esiste allora un

sottoricoprimento finito, dato da $V_{x_1}, \dots, V_{x_n}$. Se $y \in [a, b] \times [0, 1]$ definiamo la funzione

$$f(y) = \max_{i \in J_n} d(y, V_{x_i}^c)$$

essa fornisce, per ogni punto, il raggio massimo di una palla centrata in y tutta contenuta in uno degli V_{x_i} . Siccome $d(\cdot, V_{x_i})$ è una funzione continua e $\max$ è continua (si scrive in termini del valore assoluto ecc.) si ha che, per il teorema di Weierstraß, f ammette minimo, δ . Per ogni punto $y \in [a, b] \times [0, 1]$ si ha che $B(y, \delta)$ è tutta contenuta in V_{x_i} per qualche i . Suddividiamo allora $[a, b] \times [0, 1]$ in m rettangoli compatti $Q_{k\ell} \doteq [t_{k-1}, t_k] \times [\lambda_{\ell-1}, \lambda_\ell]$ con i punti $a = t_0 < \dots < t_m = b$ e $0 = \lambda_0 < \dots < \lambda_q = 1$, di modo che il diametro di ciascun $Q_{k\ell}$ sia minore di δ . In questo modo, per ogni (k, ℓ) esiste $x(k, \ell) \in D$ sicché $h(Q_{k\ell}) \subset U_{x(k, \ell)}$. Il circuito $\alpha = \alpha_0$ può essere pensato come giustapposizione dei cammini $\alpha_0|_{[t_{k-1}, t_k]} \doteq \alpha_{k0}$ cioè

$$\alpha_0 = \alpha_{10} \dots \alpha_{m0}$$

Analogamente per $\beta = \alpha_q = \alpha_{1q} \dots \alpha_{mq}$. Per $\ell = 1, \dots, q-1$ possiamo ammettere che α_{λ_ℓ} sia la poligonale chiusa di vertici successivi $h(t_0, \lambda_\ell), h(t_1, \lambda_\ell), \dots, h(t_m, \lambda_\ell) = h(t_0, \lambda_\ell)$, infatti tale poligonale ha sostegno in D , visto che due suoi vertici successivi $h(t_{k-1}, \lambda_\ell)$ e $h(t_k, \lambda_\ell)$ sono contenuti in $U_{x(k, \ell)}$ che è convesso (essendo una palla). Mostriamo che

$$\int_{\alpha_\ell} \omega = \int_{\alpha_{\ell+1}} \omega, \ell = 0, \dots, q-1$$

da cui si ha la tesi. Basta mostrare che

$$\int_{\alpha_0} \omega = \int_{\alpha_1} \omega$$

gli altri sono analoghi. Si ha

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_0} \omega &= \sum_{k=1}^m \int_{\alpha_{k0}} \omega \\ \int_{\alpha_1} \omega &= \sum_{k=1}^m \int_{(q_{k-1}, q_k)} \omega \end{aligned}$$

dove $q_k = h(t_k, \lambda_1)$, $k = 0, \dots, m$. Dunque,

$$\int_{\alpha_0} \omega - \int_{\alpha_1} \omega = \sum_{k=1}^m \left(\int_{\alpha_{k0}} \omega - \int_{(q_{k-1}, q_k)} \omega \right)$$

Posto $p_k = h(t_k, 0)$, $k = 0, \dots, m$, allora

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^m \left(\int_{\alpha_{k0}} \omega - \int_{(q_{k-1}, q_k)} \omega \right) + \sum_{k=0}^m \left(\int_{(p_k, q_k)} \omega + \int_{(q_k, p_k)} \omega \right) \\ &\sum_{k=1}^m \left(\int_{\alpha_{k0}} \omega + \int_{(p_k, q_k)} \omega + \int_{(q_k, q_{k-1})} \omega + \int_{(q_{k-1}, p_{k-1})} \omega \right) \end{aligned}$$

(poiché invertendo i cammini l'integrale cambia segno e perché $p_0 = p_m$ e $q_0 = q_m$). La somma entro parentesi è l'integrale sul circuito $\alpha_{k0}, (p_k, q_k), (q_k, q_{k-1}), (q_{k-1}, p_{k-1})$ che ha sostegno in $U_{x(k, 1)}$ dove ω è esatta. Ciascun addendo della sommatoria è nullo: la tesi.

Vediamo perché è lecito usare delle poligonali. Consideriamo α_{λ_ℓ} i punti tra due punti $\alpha_{\lambda_\ell}(t_k)$ successivi appartengono a $U_{x(k, \ell)}$ perché immagini di punti di $[a, b] \times [0, 1]$ appartenenti allo stesso rettangolo (k, ℓ) ; ivi la forma è esatta, dunque, si possono unire i punti $\alpha_{\lambda_\ell}(t_k)$ successivi con un percorso qualsiasi ai fini dell'integrazione.

(c.v.d.)

Un circuito **nullomotopo** è un circuito omotopo a un circuito costante. Inoltre si ha la seguente

Definizione IV.7 *Uno spazio topologico si dice semplicemente connesso se è connesso per archi ed ogni circuito nello spazio è nullomotopo.*

Si ha allora il seguente

Corollario IV.8 Se D è un aperto semplicemente connesso di $\mathbb{R}^n$ e ω è una forma differenziale su D continua localmente esatta, allora ω è esatta.

Dimostrazione Ogni circuito γ è omotopo al circuito costante. Su di esso l'integrale di linea di ω è nullo. Per il teorema precedente, sul circuito γ l'integrale è nullo. Per il teorema di caratterizzazione integrale delle forme esatte, si ha che ω è esatta.
(c.v.d.)

Teorema IV.9 Se D è un aperto semplicemente connesso di $\mathbb{R}^n$ e ω è una forma differenziale su D chiusa, allora ω è esatta.

Dimostrazione Come abbiamo dimostrato (esplicitamente solo nel caso che ci occorrerà nel seguito, cioè $n = 2$) ogni forma chiusa è localmente esatta, perciò, dal corollario precedente e dal teorema di caratterizzazione integrale delle forme esatte, si ha che ω è una forma esatta.
(c.v.d.)

IV.2 Funzioni olomorfe

Avvertenza In questo capitolo considereremo funzioni $f : \mathbb{C} \supset D \rightarrow \mathbb{C}$, perciò, salvo avviso contrario, useremo la parola funzione come abbreviazione di **funzione complessa di una variabile complessa**.

Limiti e continuità In campo complesso si riprendono tutte le nozioni di limiti e continuità tipiche degli spazi topologici. $\mathbb{C}$ viene infatti riguardato come uno spazio normato (normato dal modulo $|\cdot|$), in realtà è uno spazio di Banach, anzi di Hilbert.

Esempio IV.1 La funzione $z \mapsto z^*$ è continua. Infatti, sia $z_n \rightarrow z$, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n^* - z^*| = \lim_{n \rightarrow \infty} |(z_n - z)^*| = \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z| = 0.$$

- Anche la funzione modulo è continua, essendo la norma di $\mathbb{C}$.

IV.2.1 Derivazione complessa

Definizione IV.8 Sia $f : \mathbb{C} \supset D \rightarrow \mathbb{C}$ con D aperto. Si dice che f è derivabile in senso complesso nel punto $z \in D$ se esiste in $\mathbb{C}$ il limite

$$\lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

Se tale limite esiste, si dice derivata complessa di f in z e si indica con $f'(z)$ o $df/dz(z)$.

Osservazione IV.1 La definizione di derivata data, per quanto assai naturale, risulta molto restrittiva e, vedremo, sarà la chiave di tutta la teoria che andremo a stabilire.

Il fatto che la richiesta di derivabilità sia molto forte, deriva dal fatto che il limite del rapporto incrementale deve esistere indipendentemente dal percorso che si segue per raggiungere il punto

- z . Su questo avremo modo di tornare abbondantemente nel seguito.

In modo immediato si dimostrano le solite regole di derivazione valide nel caso reale: derivazione della somma, del prodotto, della funzione composta. . . Dunque, la funzione identica è derivabile con derivata nulla, così come i polinomi sono derivabili e hanno derivata polinomiale.

Esempio IV.2 Cominciamo a vedere quanto forte sia la richiesta di derivabilità. Funzioni molto semplici, come il coniugio, non sono derivabili: consideriamo $z \mapsto z^*$ si ha

$$\frac{w^* - z^*}{w - z} = \frac{(w - z)^*}{(w - z)} = \frac{h^*}{h} = e^{-2i\theta}$$

se $h \doteq w - z = |h|e^{i\theta}$. Come si vede, $e^{-2i\theta}$ assume tutti i valori possibili di modulo 1 al variare di h in un qualsiasi intorno dell'origine. Perciò $z \mapsto |z|^2 = zz^*$ è derivabile solo nell'origine.

- Si noti che, pensando $\mathbb{C}$ come $\mathbb{R}^2$, la funzione $|z|^2 = x^2 + y^2$ è un polinomio, perciò è $\mathcal{C}^\infty$.

Vogliamo adesso chiarire i legami tra differenziabilità reale e complessa. Scriviamo allora $f(z)$ come $f(x + iy)$ e siano

$$\begin{aligned} u(x, y) &\doteq \operatorname{Re} f(x + iy) \\ v(x, y) &\doteq \operatorname{Im} f(x + iy) \end{aligned}$$

di modo che $u + iv = f$ e f viene vista come una funzione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$.

Come abbiamo detto, il limite nella definizione della derivata è un limite complesso, perciò si computa indipendentemente dal percorso che fa w per avvicinarsi a z . In particolare possiamo scegliere il cammino sul quale $h = w - z$ rimane reale. Allora

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \doteq \partial_x f(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h, y) + iv(x+h, y) - u(x, y) + iv(x, y)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} + i \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h} \right) \end{aligned}$$

sicché,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \partial_x f(z) &= \operatorname{Re} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} + i \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} \\ \operatorname{Im} \partial_x f(z) &= \operatorname{Re} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} + i \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h} \right) = i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h} \end{aligned}$$

visto che Re e Im commutano con l'operazione di limite (sono funzioni complesse continue: infatti sono combinazioni lineari di identità e coniugio, che sono continue). Dunque,

$$\partial_x f(z) = \partial_x u(x, y) + i \partial_x v(x, y).$$

Se scegliamo ora un incremento puramente immaginario, ik , $k \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(z+ik) - f(z)}{ik} \doteq \frac{1}{i} \partial_y f(z) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(x, y+k) + iv(x, y+k) - u(x, y) + iv(x, y)}{ik} = \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{u(x, y+k) - u(x, y)}{ik} + \frac{v(x, y+k) - v(x, y)}{k} \right) \end{aligned}$$

così, ragionando come prima, abbiamo che u e v sono derivabili parzialmente rispetto a y e si ha

$$\partial_y f(z) = \partial_y u(x, y) + \frac{1}{i} \partial_y v(x, y).$$

Perciò, se f è derivabile in senso complesso si ha

$$\partial_x f = \frac{1}{i} \partial_y f$$

e, inoltre, si ha che u e v sono derivabili parzialmente e

$$\partial_x u(x, y) + i \partial_x v(x, y) = \partial_y v(x, y) - i \partial_y u(x, y)$$

cioè

$$\begin{aligned} \partial_x u(x, y) &= \partial_y v(x, y) \\ \partial_y u(x, y) &= -\partial_x v(x, y) \end{aligned}$$

Le equazioni trovate si dicono **identità di Cauchy-Riemann**.

Teorema IV.10 Sia $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ con x, y, u, v reali. Sia $x + iy$ interno a D .

- Se la funzione f è derivabile in senso complesso in $z \doteq x + iy$ allora u, v sono differenziabili in senso reale, in $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ed inoltre le derivate di u, v in (x, y) soddisfano l'identità di Cauchy-Riemann;
- Se u e v sono differenziabili in (x, y) interno a D e le loro derivate parziali soddisfano l'identità di Cauchy-Riemann, allora f è derivabile in $z \doteq x + iy$.

Dimostrazione Abbiamo già dimostrato (i). Vediamo (ii). Poniamo $a \doteq \partial_x u(x, y) = \partial_y v(x, y)$ e $b \doteq \partial_x v(x, y) = -\partial_y u(x, y)$. Allora, grazie all'ipotesi di differenziabilità

$$u(x+h, y+k) - u(x, y) = ah - bk + \sigma(h, k) \sqrt{h^2 + k^2}$$

$$v(x+h, y+k) - v(x, y) = bh + ak + \tau(h, k) \sqrt{h^2 + k^2}$$

con σ e τ infinitesime per $h, k \rightarrow 0$. Moltiplicando la seconda per i e sommando

$$f((x+h) + i(y+k)) - f(x+iy) = (ah - bk) + i(bh + ak) + (\sigma + i\tau) \sqrt{h^2 + k^2}$$

Ora,

$$(ah - bk) + i(bh + ak) = (a + ib)(h + ik)$$

perciò, posto $w \doteq (x+h) + i(y+k)$ si ha

$$f(w) - f(z) = (a + ib)(w - z) + (\sigma + i\tau)|w - z|$$

sicché, f è derivabile e si ha

$$(c.v.d.) \quad f'(z) = \partial_x u(x, y) + i\partial_x v(x, y)$$

IV.2.2 Olomorfia

Definizione IV.9 Sia D un aperto di $\mathbb{C}$. Una funzione $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ si dice *olomorfa* in D se è derivabile in senso complesso in ogni punto di D , con derivata continua in D .

In altra parole f è olomorfa se è $\mathcal{C}^1$ in senso complesso. Ne abbiamo

Teorema IV.11 Sia D un aperto di $\mathbb{C}$ e sia $f : D \rightarrow \mathbb{C}$. Allora f è olomorfa se e solo se u e v sono derivabili parzialmente, con derivata continua e soddisfano l'identità di Cauchy-Riemann. In altre parole, f è olomorfa se e solo se $u, v \in \mathcal{C}^1(D)$ e vale l'identità di Cauchy-Riemann.

Dimostrazione Se f è olomorfa, allora è derivabile, dunque u e v sono derivabili parzialmente e hanno derivate che si esprimono in termini di f' . Perciò u, v hanno derivate parziali continue, cioè sono $\mathcal{C}^1$. Inoltre, vale l'identità di Cauchy-Riemann. Viceversa, u e v sono differenziabili per il teorema del differenziale totale. Sicché f è derivabile. Siccome f' si esprime in termini delle derivate parziali di u e v , si ha che f è continua.

(c.v.d.)

Serie di potenze Le somme delle serie di potenze, sono olomorfe all'interno del cerchio di convergenza. Infatti, sono ivi derivabili in senso complesso, e la loro derivata è data dalla derivata termine a termine della serie di partenza. Dunque, la derivata di una serie di potenze è ancora una serie di potenze con il medesimo raggio di convergenza, perciò è continua.

Algebra $H(D)$ Sono dunque funzioni olomorfe (su $\mathbb{C}$) gli esponenziali e le funzioni sin e cos. Le funzioni olomorfe su $\mathbb{C}$ si dicono **interi**. Ovviamente, composizioni, somme e prodotti di funzioni olomorfe danno funzioni olomorfe. Se indichiamo con $H(D)$ l'insieme delle funzioni olomorfe su D , si ha che $H(D)$ è un'algebra.

Serie bilatere Abbiamo richiamato sopra le serie di potenze (per la trattazione delle quali rimandiamo al testo di Mariano Giaquinta, **Analisi**, volume 2, *Processi discreti*). Introduciamo ora le **serie bilatere**. Esse sono definite nel modo che segue

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

dove $c_n = a_n$ e $c_{-n} = b_n$ per $n > 0$. Sia r il raggio di convergenza della parte a potenze positive. Esaminiamo la parte a potenze negative: poniamo

$$w \doteq \frac{1}{z - z_0}$$

allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n$$

se r' è il raggio di convergenza del secondo membro, abbiamo che la serie bilatera converge in

$$\frac{1}{r'} < |z - z_0| < r$$

Cioè, se $1/r' < r$ la serie converge in una corona circolare (come d'uso, si pone $1/r' = 0$ se $r' = \infty$).

All'interno della corona di convergenza le serie bilatere sono olomorfe. Infatti, la derivata della parte a potenze negative è

$$\frac{d}{dz} \sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n$$

dove la serie è una funzione continua in w , perciò è continua e derivabile in z visto che si esclude comunque il punto $z = z_0$, cioè $w = 0$. Perciò, dal teorema di composizione della derivata si ha derivabilità e continuità.

Riassumendo

Proposizione IV.12 *Serie di potenze e serie bilatere sono funzioni olomorfe all'interno delle regioni di convergenza (rispettivamente cerchi e corone).*

IV.2.3 Integrazione delle funzioni complesse

**Definizione
di integrale
di funzioni
complesse
continue**

Se D è un aperto di $\mathbb{C}$ e $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione **continua**, si può considerare la forma differenziale complessa $f(z) dz = f(x + iy) dx + i f(x, y) dy$. Ci interessa la nozione di **integrale** di tale forma lungo un cammino di D . Se $\alpha : [a, b] \rightarrow D$ è un cammino di D (cioè α è continua e C^1 a tratti), si pone

$$\int_{\alpha} f dz \doteq \int_a^b f(\alpha(t)) \alpha'(t) dt = \int_a^b f(\alpha(t)) \alpha'_1(t) dt + i \int_a^b f(\alpha(t)) \alpha'_2(t) dt$$

Si verifica facilmente che l'integrale così definito, gode di tutte le proprietà degli integrali di linea sugli spazi reali: cambia segno se si inverte il senso di percorrenza del cammino; non dipende dalla parametrizzazione se essa conserva la orientazione; è additivo sulla congiunzione di due cammini.

**Teorema IV.13
(di Darboux, o
disuguaglianza
fondamentale)**

Sia $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ con D aperto di $\mathbb{C}$. Sia f continua e sia α un cammino in D . Se $M \doteq \max_{\alpha} |f|$ allora

$$\left| \int_{\alpha} f dz \right| \leq M \ell(\alpha)$$

dove $\ell(\alpha)$ è la lunghezza della curva α .

Dimostrazione

Notiamo che M è proprio un max: essendo α continua e definita su un compatto, ha immagine in un compatto e su tale compatto, f assume massimo essendo continua.

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha} f dz \right| &\doteq \left| \int_a^b f(\alpha(t)) |\alpha'_1(t) + i\alpha'_2(t)| dt \right| \leq \int_a^b |f(\alpha(t))| (\alpha_1'^2(t) + \alpha_2'^2(t))^{1/2} dt \leq \\ &\leq M \int_a^b (\alpha_1'^2(t) + \alpha_2'^2(t))^{1/2} dt = M \ell(\alpha). \end{aligned}$$

(c.v.d.)

Se poniamo $\alpha(t) \doteq \alpha_1(t) + i\alpha_2(t)$ abbiamo

$$\left| \int_{\alpha} f dz \right| \leq \int_a^b |f(\alpha(t))| |\alpha'(t)| dt \doteq \int_{\alpha} |f(z)| |dz|$$

Esempio IV.3

Sia f una funzione complessa continua. Vogliamo andare a considerarne l'integrale sull'arco di circonferenza γ_r avente centro in $z_0 \in \mathbb{C}$, raggio r , percorso in senso positivo (antiorario), compreso tra gli angoli α e β (misurati a partire dalla direzione positiva dell'asse reale). γ_r è parametrizzabile tramite la funzione

$$\gamma_r(\theta) = z_0 + re^{i\theta} = \begin{cases} x = \operatorname{Re} z_0 + r \cos \theta \\ y = \operatorname{Im} z_0 + r \sin \theta \end{cases}, \theta \in [\alpha, \beta]$$

allora

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_r} f(z) dz &= \int_{\alpha}^{\beta} f(z_0 + r \cos \theta + ir \sin \theta) (x' + iy') d\theta = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(z_0 + re^{i\theta}) ire^{i\theta} d\theta\end{aligned}$$

- Nel seguito denoteremo l'angolo cui appartiene l'arco γ_r descritto scrivendo $A(z_0, \alpha, \beta)$

Due utili lemmi

Lemma IV.14
(dell'arco di
cerchio grande)

Sia f continua in $A(z_0, \theta_1, \theta_2) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| > R\}$ per un qualche $R > 0$, allora, se

$$\lim_{z \rightarrow \infty, z \in A(z_0, \theta_1, \theta_2)} z f(z) = k \in \mathbb{C}$$

allora

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} f(z) dz = i(\theta_2 - \theta_1)k.$$

Lemma IV.15
(dell'arco di
cerchio piccolo)

Sia f continua in $A(z_0, \theta_1, \theta_2) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$ per un qualche $R > 0$, allora, se

$$\lim_{z \rightarrow z_0, z \in A(z_0, \theta_1, \theta_2)} (z - z_0) f(z) = k \in \mathbb{C}$$

allora

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} f(z) dz = i(\theta_2 - \theta_1)k.$$

Dimostrazione

Cominciamo con il notare che, nelle ipotesi del primo lemma

$$\lim_{z \rightarrow \infty, z \in A(z_0, \theta_1, \theta_2)} z f(z) = k \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow \infty, z \in A(z_0, \theta_1, \theta_2)} (z - z_0) f(z) = k \in \mathbb{C}$$

Infatti,

$$\lim_{z \rightarrow \infty, z \in A(z_0, \theta_1, \theta_2)} f(z) = 0$$

questo perché

$$f(z) = \frac{1}{z} z f(z) \rightarrow k \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} = 0$$

Adesso i due lemmi si trattano in modo analogo. Abbiamo

$$\int_{\gamma_r} f(z) dz = \int_{\gamma_r} \left(f(z) - \frac{k}{z - z_0} + \frac{k}{z - z_0} \right) dz = \int_{\gamma_r} \frac{(z - z_0) f(z) - k}{z - z_0} dz + \int_{\gamma_r} \frac{k}{z - z_0} dz$$

Ora,

$$\int_{\gamma_r} \frac{k}{z - z_0} dz = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{k}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta = i \int_{\theta_1}^{\theta_2} k d\theta = ik(\theta_2 - \theta_1)$$

Per mostrare la tesi bisogna vedere che l'altro integrale è infinitesimo (al limite per $r \rightarrow \infty$, primo caso, o $r \rightarrow 0^+$, secondo caso). Si ha

$$\left| \int_{\gamma_r} \frac{(z - z_0) f(z) - k}{z - z_0} dz \right| \leq \int_{\theta_1}^{\theta_2} |re^{i\theta} f(z_0 + re^{i\theta}) - k| d\theta \leq \varepsilon(r)(\theta_2 - \theta_1)$$

dove $\varepsilon(r)$ è il massimo di $|(z - z_0) f(z) - k|$ sul sostegno dell'arco γ_r . In ambedue i casi, dall'ipotesi, $\varepsilon(r) \rightarrow 0$.

Infatti, (e lo vediamo per esempio nel secondo caso) fissiamo una qualunque successione $r_n \rightarrow 0$: sull'arco n -esimo fissiamo il punto di massimo z_n , valutando $|(z - z_0) f(z) - k|$ in $z = z_n$ otteniamo la successione $\varepsilon(r_n)$. La successione z_n tende a z_0 , essendo $r_n = |z_0 - z_n| \rightarrow 0$. Dunque,

$$\varepsilon(r_n) = |(z_n - z_0) f(z_n) - k| \rightarrow 0$$

(c.v.d.) perché, per $n \rightarrow \infty$, $z_n \rightarrow z_0$.

Un altro risultato utile nei calcoli è il seguente

Lemma IV.16
(di Jordan)

Sia f continua nell'angolo $A(z_0, \theta_1, \theta_2)$, almeno per $|z - z_0| > R$, e supponiamo che sia

$$\lim_{z \rightarrow \infty, z \in A(z_0, \theta_1, \theta_2)} f(z) = 0$$

Sia $w = |w| e^{i\varphi}$ un numero complesso non nullo per cui $\cos(\theta + \varphi) \leq 0$, per $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Se γ_r è l'arco di raggio r centrato in z_0 e compreso nell'angolo considerato, allora

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} f(z) e^{wz} dz = 0$$

Dimostrazione Si ha,

$$\left| \int_{\gamma_r} f(z) e^{wz} dz \right| \leq \int_{\gamma_r} |f(z)| |e^{wz}| |dz|$$

Ora, se $z = z_0 + re^{i\theta}$

$$\begin{aligned} |e^{wz}| &= |\exp(wz_0 + wre^{i\theta})| = |e^{wz_0}| |\exp(wre^{i\theta})| = |e^{wz_0}| \exp \operatorname{Re}(|w| r e^{i(\theta+\varphi)}) = \\ &= |e^{wz_0}| e^{|w|r \cos(\theta+\varphi)} \end{aligned}$$

perciò

$$\left| \int_{\gamma_r} f(z) e^{wz} dz \right| \leq \int_{\gamma_r} |e^{wz_0}| e^{|w|r \cos(\theta+\varphi)} |f(z)| |dz| \leq |e^{wz_0}| \varepsilon(r) \int_{\theta_1}^{\theta_2} r e^{|w|r \cos(\theta+\varphi)} d\theta$$

dove $\varepsilon(r) = \max_{\gamma_r} |f(z)| \rightarrow 0$ per $r \rightarrow \infty$. Perciò si tratta di vedere che l'integrale a destra rimane limitato per $r \rightarrow \infty$. Si ha

$$\cos(\theta + \varphi) \leq 0, \theta \in [\theta_1, \theta_2]$$

se e solo se

$$\frac{\pi}{2} + 2m\pi \leq \theta_1 + \varphi \leq \theta_2 + \varphi \leq \frac{3}{2}\pi + 2m\pi,$$

per m intero. Facciamo allora il seguente cambiamento di variabile $\theta + \varphi = t + \pi/2 + 2m\pi$, siano $0 \leq \alpha = \theta_1 + \varphi - (\pi/2 + 2m\pi)$ e $\beta = \theta_2 + \varphi - (\pi/2 + 2m\pi) \leq \pi$ i nuovi estremi di integrazione, abbiamo, se $s \doteq |w|r$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} r e^{|w|r \cos(\theta+\varphi)} d\theta = \frac{s}{|w|} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-s \sin t} dt \leq \frac{s}{|w|} \int_0^{\pi} e^{-s \sin t} dt$$

ora,

$$\int_0^{\pi} e^{-s \sin t} dt = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-s \sin t} dt,$$

ma in $[0, \pi/2]$ si ha

$$\begin{aligned} \sin t > \frac{t}{2} &\Rightarrow -s \sin t < -\frac{st}{2} \\ 2 \int_0^{\pi/2} e^{-s \sin t} dt &\leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-st/2} dt = \frac{4}{s} (1 - e^{-s\pi/4}) < \frac{4}{s} = \frac{4}{|w|r} \end{aligned}$$

indi

$$\left(\text{c.v.d.} \right) \quad \left| \int_{\gamma_r} f(z) e^{wz} dz \right| \leq |e^{wz_0}| \varepsilon(r) \frac{4}{|w|r} r \rightarrow 0$$

IV.2.4 Integrazione delle funzioni olomorfe: teoremi di Cauchy

Sia f una funzione continua definita sull'aperto D di $\mathbb{C}$ e a valori complessi. Allora, se α è un cammino in D

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} f(z) dz &= \int_a^b f(\alpha(t)) (\alpha'_1(t) + i\alpha'_2(t)) dt = \int_a^b (u(\alpha(t)) + iv(\alpha(t))) (\alpha'_1(t) + i\alpha'_2(t)) dt = \\ &= \int_a^b [u(\alpha(t)) \alpha'_1(t) - v(\alpha(t)) \alpha'_2(t)] dt + i \int_a^b [u(\alpha(t)) \alpha'_2(t) + v(\alpha(t)) \alpha'_1(t)] dt = \\ &= \int_{\alpha} [u(x, y) dx - v(x, y) dy] + i \int_{\alpha} [v(x, y) dx + u(x, y) dy] \end{aligned}$$

cioè l'integrale di f è dato da una combinazione lineare degli integrali curvilinei su α , cammino di D aperto di $\mathbb{R}^2$, delle forme reali $udx - vdy$ e $vdx + udy$. Abbiamo allora che ambedue le forme considerate **sono chiuse se e solo se f è olomorfa**, infatti, vale l'identità di Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned}\partial_2 u &= -\partial_1 v \\ \partial_2 v &= \partial_1 u\end{aligned}$$

e, se f è olomorfa, u e v sono $\mathcal{C}^1$, viceversa, f è derivabile e ha derivata continua. Vale allora il seguente

Teorema IV.17 (primo, di Cauchy)

Sia D aperto di $\mathbb{C}$, e $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa. Se α, β sono circuiti di D omotopi in D si ha

$$\int_{\alpha} f(z) dz = \int_{\beta} f(z) dz$$

In particolare, per ogni circuito α nullomotopo in D si ha

$$\int_{\alpha} f(z) dz = 0$$

Dimostrazione

Se f è olomorfa, il suo integrale è pari a quello di una forma differenziale reale chiusa, perciò localmente esatta. Il teorema discende allora dal teorema di invarianza per omotopia per le forme differenziali reali.

(c.v.d.)

Veniamo ora alla **formula integrale di Cauchy** o

Teorema IV.18 (secondo, di Cauchy)

Sia $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa su D aperto di $\mathbb{C}$ e sia Γ un circuito in D che racchiuda solo punti di olomorfia per f . Allora, se z è un punto interno a Γ vale

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Dimostrazione

Γ racchiude solo punti di olomorfia per f perciò l'integrando è olomorfo nella regione A interna a Γ privata di z . Isoliamo la componente connessa di A che contiene al suo interno z . Consideriamo le altre componenti connesse di A . Esse sono connesse e contengono solo punti di olomorfia, perciò sono nullomotope. Ne segue che ci interessa solo l'integrale eseguito sulla frontiera della componente connessa di A che racchiude z . Sia allora Γ un curva chiusa semplice che racchiude z e sia A l'aperto di cui Γ è frontiera. Esiste una palla $B(z, \rho)$ tutta contenuta in A , se γ_{ρ} è il contorno di $B(z, \rho)$ si ha che Γ è omotopa a γ_{ρ} (come detto nell'introduzione al capitolo, lo accettiamo). Allora, dal primo teorema di Cauchy,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\rho}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Siccome il primo membro dell'eguaglianza non dipende da ρ , nemmeno il secondo dipenderà da ρ , perciò si può passare al limite per $\rho \rightarrow 0$ nel secondo membro

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\rho}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

d'altra parte

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(z + \rho e^{i\theta})}{\rho e^{i\theta}} i \rho e^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} f(z + \rho e^{i\theta}) d\theta$$

la funzione a primo membro è una funzione continua a supporto in un compatto, perciò è dominata da una funzione sommabile, ne viene che

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\rho}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + \rho e^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_{\rho \rightarrow 0} f(z + \rho e^{i\theta}) d\theta$$

Ma, visto che f è continua e $z + \rho e^{i\theta} \rightarrow z$ per $\rho \rightarrow 0$, si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\rho}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z)$$

(c.v.d.)

La formula di Cauchy ha il seguente importante corollario

Corollario IV.19 *Sia f una funzione olomorfa in D aperto di , allora $f \in \mathcal{C}^\infty(D)$, cioè f ammette tutte le derivate ed esse stesse sono olomorfe.*

Dimostrazione Consideriamo $z \in D$. Esiste allora una palla $B(z, \rho)$ tutta contenuta in D . Allora f è olomorfa nella palla e se γ ne è il contorno, per il secondo teorema di Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Ora,

$$\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = i \int_0^{2\pi} f(z + \rho e^{i\theta}) d\theta$$

deriviamo in z ambo i membri

$$\frac{d}{dz} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} d\zeta = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \rho e^{i\theta})}{\rho e^{i\theta} - h} i d\theta$$

Consideriamo l'integrando all'ultimo membro

$$\left| \frac{f(\zeta)}{\rho e^{i\theta} - h} \right| \leq \frac{M}{|\rho e^{i\theta} - h|} \leq \frac{M}{||\rho| - |h||} \rightarrow \frac{M}{|\rho|}$$

perciò è limitato. Applicando il teorema di Lebesgue

$$\frac{d}{dz} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta = \int_{\gamma} \frac{d}{dz} \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right] d\zeta$$

Sicché

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

cioè, esiste la derivata prima di f . Reiterando, otteniamo

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

perciò $f \in \mathcal{C}^\infty(D)$. In particolare, derivate di funzioni olomorfe, sono funzioni olomorfe.

Per completezza mostriamo che

$$\frac{d^n}{dz^n} \frac{1}{\zeta - z} = \frac{n!}{(\zeta - z)^{n+1}}$$

Abbiamo già visto il primo passo. Passo induttivo. Sia

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \frac{1}{\zeta - z} = \frac{(n-1)!}{(\zeta - z)^n}$$

deriviamo,

$$(c.v.d.) \quad \frac{d^n}{dz^n} \frac{1}{\zeta - z} = \frac{(n-1)!n(\zeta - z)^{n-1}}{(\zeta - z)^{2n}} = \frac{n!}{(\zeta - z)^{2n-n+1}} = \frac{n!}{(\zeta - z)^{n+1}}.$$

Esempio IV.4 Sia γ un circuito semplice racchiudente l'origine. Calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} \frac{2!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \sin z \Big|_{z=0} = 0$$

dove si è applicato in modo inverso la formula ricavata nel corollario al secondo teorema di

■ Cauchy.

Una applicazione immediata della formula di Cauchy è data dal

Teorema IV.20
(di Liouville)

Ogni funzione intera limitata è costante.

Dimostrazione Sia $a \in \mathbb{C}$. Se $r > |a|$ e γ_r è il cerchio di centro l'origine e raggio r , si ha

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta \\ f(0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta \end{aligned}$$

Perciò

$$f(a) - f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(\zeta) \frac{a}{\zeta(\zeta - a)} d\zeta$$

Mostriamo ora che il secondo membro tende a 0 per $r \rightarrow \infty$. A questo scopo, possiamo utilizzare il lemma del cerchio grande, perciò ci occorre

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \zeta f(\zeta) \frac{a}{\zeta(\zeta - a)} = a \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)} = 0$$

(c.v.d.) essendo f limitata.

**Primitive
delle funzioni
olomorfe**

Sia f una funzione complessa continua definita nell'aperto D di $\mathbb{C}$. Si dice primitiva di f , la funzione derivabile F tale che, per ogni $z \in D$, risulti $F'(z) = f(z)$. In questo caso, F risulta derivabile con derivata continua, perciò olomorfa. Siccome le derivate di funzioni olomorfe sono olomorfe, si ha che f è olomorfa. Perciò se f ammette primitiva, allora f è olomorfa.

Ora, sia $f = u + iv$ e sia la sua primitiva $F = U + iV$. L'integrale di f è dato dall'integrale della forma differenziale $(udx - vdy) + i(vdx + udy)$ e

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{Re} F' \\ v &= \operatorname{Im} F' \end{aligned}$$

ma

$$F' = \partial_x U + i\partial_x V = \partial_y V - i\partial_y U$$

sicché

$$\begin{aligned} u &= \partial_x U = \partial_y V \\ v &= -\partial_y U = \partial_x V \end{aligned}$$

perciò

$$\begin{aligned} udx - vdy &= dU \\ vdx + udy &= dV \end{aligned}$$

Dal teorema fondamentale del calcolo, abbiamo

$$\int_{\alpha}^b f dz = \int_{\alpha}^b (udx - vdy) + i \int_{\alpha}^b (vdx + udy) = \int_{\alpha}^b dU + i \int_{\alpha}^b dV = F(b) - F(\alpha)$$

se a è l'origine di α e b ne è l'estremo.

La domanda adesso è: se f è olomorfa, ammette primitiva? Se f è olomorfa le due forme differenziali $udx - vdy$ e $vdx + udy$ sono chiuse, cioè localmente esatte. Ne viene che le due forme ammettono localmente primitive U e V . Se $F(x + iy) = U(x, y) + iV(x, y)$, allora $F' = f$, come si ha ripetendo a rovescio il ragionamento di sopra. In definitiva, ogni funzione olomorfa ammette primitive locali. Viceversa, una funzione complessa continua che ammetta primitive locali, è localmente olomorfa (ammettere primitiva implica olomorfia, sicché ammettere localmente primitiva significa essere localmente olomorfa), cioè olomorfa.

D'altra parte f olomorfa è localmente esatta, perciò su un aperto semplicemente connesso è esatta, dunque ammette primitiva.

In conclusione,

Proposizione IV.21 Sia D un aperto di $\mathbb{C}$ e sia $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua. Allora

- (i) la funzione f ammette primitiva in D se e solo se ha integrale nullo su ogni circuito chiuso contenuto in D ;
- (ii) la funzione f ammette primitive locali se e solo se è olomorfa in D .

IV.2.5 Analiticità delle funzioni olomorfe

Grazie al secondo teorema di Cauchy, abbiamo dimostrato che le funzioni olomorfe sono $\mathcal{C}^\infty$. In realtà si ha molto di più: una funzione olomorfa è **analitica**. In ogni punto del dominio, la serie di Taylor attorno a quel punto converge alla funzione stessa, su ogni disco centrato nel punto e contenuto nel dominio di olomorfia della funzione. Prima di dimostrare questo importante teorema, ci occorre il seguente

Lemma IV.22 Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un cammino di $\mathbb{C}$, sia $K = \gamma([a, b])$ il suo sostegno e sia $u : K \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua. La formula

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus K$$

definisce una funzione analitica $f : \mathbb{C} \setminus K \rightarrow \mathbb{C}$. In altre parole, se $a \in \mathbb{C} \setminus K$ si ha

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad |z - a| < r \doteq d(a, K)$$

con

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{u(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta.$$

Dimostrazione Se $|z - a| < r = d(a, K)$, per $\zeta \in K$ si ha $|z - a| < r \leq |\zeta - a|$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - a + a - z} = \frac{1}{\zeta - a} \frac{1}{1 - (z - a)/(\zeta - a)} = \frac{1}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - a}{\zeta - a} \right)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} \end{aligned}$$

perciò

$$\frac{u(\zeta)}{\zeta - a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} (z - a)^n$$

La convergenza della serie a secondo membro è totale su $[a, b]$ una volta posto $\zeta = \gamma(t)$: si ha infatti, se $\|u\|_{\gamma} = \max_K |u|$ (che esiste essendo K un compatto, teorema di Weierstraß) si ha

$$\left| \frac{u(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} (z - a)^n \right| \leq \frac{\|u\|_{\gamma}}{r^{n+1}} |z - a|^n = \frac{\|u\|_{\gamma}}{r} \left(\frac{|z - a|}{r} \right)^n$$

che converge essendo $|z - a|/r < 1$. La convergenza totale implica quella uniforme, dunque si può procedere a integrare termine a termine

$$\int_{\gamma} \frac{u(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma} \frac{u(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} (z - a)^n d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma} \frac{u(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta (z - a)^n$$

(c.v.d.) la tesi, una volta diviso ambo i membri per $2\pi i$.

Siamo adesso in grado di dimostrare il

Teorema IV.23
(Analiticità
delle funzioni
olomorfe)

Se D è aperto di $\mathbb{C}$, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa, $a \in D$ e $B(a, r) \subset D$ si ha

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad z \in B(a, r)$$

e, qualsiasi sia $\delta \in (0, r)$, si ha

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a, \delta)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dimostrazione La serie a secondo membro è proprio la serie di Taylor di f in a , grazie al corollario al secondo teorema di Cauchy. Ora, la tesi del teorema è contenuta tutta nel lemma precedente,

una volta notato che, ancora dal teorema di Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

(c.v.d.) per ogni $z \in B(a, r) \subset D$.

Come corollario, si ha che l'insieme delle funzioni intere coincide con l'insieme delle serie di potenze con raggio infinito. Esse sono infatti intere. Viceversa, dal teorema si ha che le funzioni intere sono eguali alle loro serie di potenze entro palle arbitrariamente grandi, perciò si ha convergenza su tutto $\mathbb{C}$.

IV.2.6 Serie di Taylor-Laurent

Abbiamo visto che una funzione olomorfa è analitica, cioè coincide con il suo sviluppo di Taylor in dischi compatibili con l'estensione del dominio di olomorfia. In questo modo abbiamo legato le funzioni olomorfe alle serie di potenze che sapevamo essere olomorfe nel disco di convergenza. Vediamo ora il legame con le serie di potenze bilatere: sappiamo che esse sono olomorfe entro la corona di convergenza.

Prima di enunciare e dimostrare il teorema di Taylor-Laurent che generalizza il risultato ottenuto nella precedente sottosezione, facciamo alcune considerazioni sulla convergenza di una serie di potenze (bilatera). Giusto per completezza richiamiamo i risultati più importanti, a partire dal (trascurato in alcuni testi)

Lemma IV.24
(di Abel)

Sia data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, e sia $w \in \mathbb{C}$ tale che $\{a_n w^n\} \subset \mathbb{C}$ è limitato. Allora la serie di potenze converge assolutamente in ogni z tale che $|z| < |w|$.

Dimostrazione Molto semplice. Se $\{a_n w^n\}$ è una successione limitata, allora

$$|a_n w^n| \leq M$$

perciò, se $|z| < |w|$ si ha

$$(c.v.d.) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n w^n| \left| \frac{z}{w} \right|^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} M \left| \frac{z}{w} \right|^n = \frac{M}{1 - |z/w|} < \infty$$

Proposizione IV.25 *Se una serie di potenze converge puntualmente in w , allora converge assolutamente in ogni z tale $|z| < |w|$.*

Dimostrazione Se la serie converge puntualmente in w , allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n w^n = 0$$

(c.v.d.) perciò la successione $\{a_n w^n\} \subset \mathbb{C}$, essendo convergente, è limitata. Per il lemma di Abel, si ha la convergenza assoluta della serie in $|z| < |w|$.

Si ha, infine, il seguente risultato che vogliamo richiamare

Teorema IV.26 *Se una serie di potenze converge assolutamente in w , allora converge totalmente nella palla aperta $|z| < |w|$.*

Dimostrazione Si ha

$$(c.v.d.) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{|z| < |w|} |a_n z^n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n w^n| < \infty$$

Riassumendo, se si definisce cerchio di convergenza il **massimo cerchio in cui la serie converge puntualmente**,

Teorema IV.27 Nei cerchi interni al cerchio di convergenza una serie di potenze converge totalmente, perciò uniformemente.

Così, la **convergenza puntuale implica quella uniforme** nei cerchi interni al cerchio di raggio dato dal modulo del punto in cui si riscontra convergenza puntuale.

Le serie bilatere convergono totalmente (perciò uniformemente) all'interno della corona circolare di convergenza.

Teorema IV.28
(Taylor-Laurent)

Sia D un aperto di $\mathbb{C}$ e sia $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa. Sia $a \in \mathbb{C}$ e siano α, β con $0 \leq \alpha < \beta < \infty$ tali che la corona circolare aperta $B(a, \alpha, \beta)$ sia contenuta in D . In tal caso esiste unica una successione bilatera $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$, per cui

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \quad \alpha < |z-a| < \beta$$

si ha inoltre, per $\alpha < r < \beta$,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta$$

Dimostrazione Fissiamo z con $\alpha < |z-a| < \beta$. Prendiamo ora due reali r, s di modo che $\alpha < r < |z-a| < s < \beta$. Consideriamo la funzione

$$g(\zeta) \doteq \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, \quad \zeta \in D \setminus \{z\}$$

$$g(z) \doteq f'(z)$$

Si ha che g è olomorfa in D . Infatti, è olomorfa in $D \setminus \{z\}$ e sviluppando f attorno a z si ha

$$f(\zeta) = f(z) + f'(\zeta)(\zeta-z) + a_2(\zeta-z)^2 + \dots, \quad \forall \zeta \in B(z, \delta) \subset D$$

su $B(z, \delta)$ si ha

$$g(\zeta) = f'(\zeta) + a_2(\zeta-z) + \dots$$

Indi, g è una serie di potenze in $B(z, \delta)$, allora è olomorfa in $B(z, \delta) \cup D = D$. Se con γ_t denotiamo il bordo (orientato positivamente) della circonferenza di raggio t e centro a , abbiamo che γ_r e γ_s sono omotopi in D dunque

$$\int_{\gamma_r} g(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_s} g(\zeta) d\zeta$$

sicché

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{\zeta-z} d\zeta = \int_{\gamma_s} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - \int_{\gamma_s} \frac{f(z)}{\zeta-z} d\zeta$$

Ma, siccome $1/(\zeta-z)$ è olomorfa nella regione interna a γ_r si ha

$$\int_{\gamma_r} \frac{1}{\zeta-z} d\zeta = 0$$

mentre, dal primo teorema di Cauchy, considerando l'identità,

$$\int_{\gamma_s} \frac{1}{\zeta-z} d\zeta = 2\pi i$$

perciò

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \int_{\gamma_s} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - 2\pi i f(z)$$

cioè

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta$$

Il primo addendo si tratta in modo identico a quello usato nella dimostrazione del lemma all'analiticità delle funzioni olomorfe, perciò

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta$$

Vediamo il secondo addendo. Siccome ζ appartiene al sostegno di γ_r si ha $|z - a| > r = |\zeta - a|$:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - a} \frac{1}{(\zeta - a) / (z - a) - 1} = -\frac{1}{z - a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta - a)^k}{(z - a)^k} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta - a)^k}{(z - a)^{k+1}}$$

moltiplicando ambo i membri per $f(\zeta)$ si ha

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = -\sum_{k=0}^{\infty} f(\zeta) \frac{(\zeta - a)^k}{(z - a)^{k+1}} = -\sum_{j=1}^{\infty} f(\zeta) \frac{(\zeta - a)^{j-1}}{(z - a)^j}$$

Tale serie è totalmente convergente sul sostegno di γ_r , infatti se M è il massimo modulo di f sul sostegno, si ha

$$\left| f(\zeta) \frac{(\zeta - a)^{j-1}}{(z - a)^j} \right| \leq \frac{M}{r} \left(\frac{r}{|z - a|} \right)^j$$

che converge essendo $r/|z - a| < 1$. Si può quindi integrare termine a termine su γ_r e ottenere

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\gamma_r} f(\zeta) \frac{(\zeta - a)^{j-1}}{(z - a)^j} d\zeta = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_{-j}}{(z - a)^j}$$

Questo prova l'esistenza dello sviluppo di Taylor-Laurent.

Per l'unicità, supponiamo che esista in $B(a, \alpha, \beta)$ un secondo sviluppo

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n (z - a)^n$$

Fissato un intero k moltiplichiamo ambo i membri per $1/(z - a)^{k+1}$,

$$\frac{f(z)}{(z - a)^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n (z - a)^{n-k-1}$$

La serie a secondo membro è una serie bilatera che converge puntualmente nella corona $B(a, \alpha, \beta)$, perciò si ha convergenza totale all'interno della corona, in particolare su un circolo di raggio $r < \rho < s$. Perciò si può integrare termine a termine

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z - a)^{k+1}} dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n \int_{\gamma_\rho} (z - a)^{n-k-1} dz$$

La funzione $(z - a)^{n-k-1}$ ammette una primitiva, $(z - a)^{n-k} / (n - k)$ a meno che $n = k$, perciò

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z - a)^{k+1}} dz = d_k \int_{\gamma_\rho} \frac{1}{z - a} dz = 2\pi i d_k$$

(c.v.d.) perciò $d_k = c_k$, come volevamo.

IV.2.7 Zeri di una funzione olomorfa

Sia $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa. L'insieme $Z(f)$ degli zeri di f ha una struttura molto particolare, grazie all'analiticità di f . Uno zero di f si dirà isolato se è un punto isolato di $Z(f)$, equivalentemente, se esiste un intorno di a in cui f assume valori diversi da 0, per complessi diversi da a . Abbiamo subito la seguente

Proposizione IV.29 *Sia D un aperto di $\mathbb{C}$, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa, e $a \in \mathbb{C}$ uno zero di f . Le seguenti affermazioni sono equivalenti*

- (i) a è uno zero isolato per f ;
- (ii) il punto a non è interno a $Z(f)$;
- (iii) esistono un intero m e una funzione g olomorfa in D , con $g(a) \neq 0$, tali che
$$f(z) = (z - a)^m g(z), \quad \forall z \in D$$
- (iv) esiste un intero $m \geq 1$ tale che in a la funzione sia nulla assieme alle sue derivate fino all'ordine $m - 1$, mentre la derivata m -esima (in a) è non nulla.

Dimostrazione Siccome f è olomorfa, è analitica all'interno della palla di centro a e raggio $r = d(a, D^c)$. visto poi che $f(a) = 0$, si ha

$$f(z) = c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$$

(i) implica (ii) Se a fosse interno a $Z(f)$, allora sarebbe un punto di accumulazione per $Z(f)$, perciò non sarebbe isolato.

(ii) implica (iii) Se nello sviluppo di Taylor tutti i coefficienti fossero nulli, f sarebbe nulla in $B(a, r)$, perciò $B(a, r) \subset Z(f)$, dunque a sarebbe interno a $Z(f)$. Esiste allora un intero m tale che $c_m \neq 0$. allora

$$f(z) = c_m(z-a)^m + c_{m+1}(z-a)^{m+1} + \dots = (z-a)^m [c_m + c_{m+1}(z-a) + \dots]$$

Posto $g(z) = f(z)/(z-a)^m$, abbiamo che essa è olomorfa in $D \setminus \{a\}$ e in $B(a, r)$ (poiché è ivi analitica). Perciò $g(z)$ è olomorfa in D , non nulla in a , $g(a) = c_m \neq 0$, e $f(z) = (z-a)^m g(z)$.

(iii) implica (iv) Sviluppando g in un intorno di a si ha

$$f(z) = g_0(z-a)^m + g_1(z-a)^{m+1} + \dots$$

e la tesi è immediata.

(iv) implica (i) Dall'ipotesi si ha che i primi m coefficienti della serie di Taylor in un intorno di a sono nulli

$$f(z) = c_m(z-a)^m + c_{m+1}(z-a)^{m+1} + \dots = (z-a)^m g(z)$$

con g olomorfa e non nulla in a e con l'eguaglianza tra primo e ultimo membro estesa a D . Siccome g è continua, esiste un intorno in cui è non nulla. Siccome a è l'unico zero di $(z-a)^m$

(c.v.d.) si ha la tesi.

Il numero m di cui nella proposizione (il massimo esponente da dare a $(z-a)$ affinché $(z-a)^m$ divida f) si dice **molteplicità** di a come zero di f .

Veniamo così al

Teorema IV.30
(principio
di identità
delle funzioni
olomorfe)

Sia D aperto connesso di $\mathbb{C}$, e siano f, g olomorfe su D . Allora f e g coincidono su D , se coincidono su un sottoinsieme di D che abbia un punto di accumulazione appartenente a D .

Dimostrazione

Consideriamo la funzione $h = f - g$ che ovviamente è olomorfa in D . Dobbiamo dimostrare che se D è connesso e se $Z(h)$ ammette un punto di accumulazione appartenente a D , allora $Z(h) = D$. Sia a il punto di accumulazione di $Z(h)$ che appartiene a D : allora esiste una successione a valori in $Z(h) \subset D$, z_n , convergente ad $a \in D$: per continuità di h in a si ha

$$h(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(z_n) = 0$$

perciò $a \in Z(h)$. Ma a non è uno zero isolato, perciò appartiene alla parte interna di $Z(h)$ per la proposizione precedente.

Ora, se mostriamo che il complementare in D della parte interna di $Z(h)$ è un insieme aperto e supponiamo che sia pure non vuoto, abbiamo partito D in due aperti non vuoti disgiunti, il che è assurdo, essendo D connesso. Se $a \in D \setminus Z(h)$ per continuità esiste un intorno di a in cui la funzione è non nulla. Se poi $a \in Z(h)$ ma a non è interno a $Z(h)$, dalla proposizione precedente, a è isolato in $Z(h)$, cioè esiste un intorno di a talché l'unico elemento di $Z(h)$ in questo insieme è proprio a . Quindi a ammette un intorno tutto disgiunto dalla parte interna di $Z(h)$. Ne viene che il complementare della parte interna di $Z(h)$ è aperto. La tesi.

(c.v.d.)

Dunque, una volta specificato il valore di una funzione olomorfa su un insieme avente un punto di accumulazione appartenente a D , si è specificata la funzione su tutta quella componente connessa di D contenente il punto di accumulazione. Ad esempio, una volta specificata una funzione olomorfa in $\mathbb{R}$ (che di certo ammette punti di accumulazione contenuti in $\mathbb{C}$), essa ha **al più** una estensione olomorfa in $\mathbb{C}$ (non è detto che esista!). In questo senso, le funzioni esponenziale, seno e coseno sono le uniche possibili! (Richiesta l'olomorfia).

Esempio IV.5

Abbiamo detto che se l'estensione olomorfa esiste allora è unica. Ma l'esistenza non è certo garantita! Consideriamo la funzione $1/(1-z)$. Essa è una funzione analitica (dunque

olomorfa) in $B(0, 1)$. Siccome $B(0, 1)$ possiede punti di accumulazione contenuti in $\mathbb{C}$ che è connesso, ci si potrebbe aspettare che l'estensione della serie geometrica sia una funzione olomorfa in $\mathbb{C}$. D'altra parte essa ammette, come estensione su $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, la funzione $1/(1-z)$. Si tratta di una buona estensione e che, per di più, soddisfa le ipotesi del principio di identità. Ne viene che $1/(1-z)$ è l'unica estensione della serie geometrica in $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Ammettiamo ora che esista una estensione della serie geometrica a tutto $\mathbb{C}$. Si tratterebbe di una estensione alla $1/(1-z)$ su $\mathbb{C}$. Ma la $1/(1-z)$ tende a ∞ per $z \rightarrow 1$. Se ne esistesse un prolungamento olomorfo g su $\mathbb{C}$ si avrebbe, per il principio di località del limite

$$\infty = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1-z} = \lim_{z \rightarrow 1} g(z)$$

- Ma g sarebbe una funzione continua in 1, perciò non potrebbe avere limite infinito in 1.

Esempio IV.6 Consideriamo la parte di Laurent di una funzione olomorfa f in $\mathbb{C} \setminus \{a\}$

$$L_a(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$$

$L_a(z)$ converge puntualmente su tutto $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ dal teorema di Taylor-Laurent. Inoltre, presa una qualsiasi palla $B(0, r)$ essa è certamente olomorfa al di fuori della palla (come serie a potenze negative con raggio interno di convergenza nullo); all'interno della palla L_a è pari alla differenza di f e T_a che sono olomorfe nella palla bucata, perciò L_a è olomorfa nella palla bucata $B(0, r)$. In definitiva, L_a è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. Ne viene che $f(z) - L_a(z)$ è una funzione olomorfa $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. D'altra parte, si estende a una funzione olomorfa in $\mathbb{C}$, visto che in

- a ammette sviluppo puramente di Taylor.

Corollario IV.31 Se una funzione olomorfa è localmente costante in un punto del suo dominio, è costante su tutta la componente connessa del dominio che contiene il punto.

Dimostrazione (c.v.d.) Sia a il punto in questione. $f(a)$ e $f(z)$ coincidono in un intorno di a , quindi su tutta la componente connessa del dominio che contiene a .

In particolare, sia a un punto di D dominio aperto di olomorfia della funzione f . Se in a , f si annulla con tutte le sue derivate, allora nella palla $B(a, r) \subset D$ la funzione f è nulla, perciò f è nulla in tutta la componente connessa di D che contiene a .

Se D aperto connesso è dominio di olomorfia di f e se f non è identicamente nulla in D , allora l'insieme degli zeri di f è dato da punti isolati e gli eventuali punti di accumulazione di $Z(f)$ non cadono in D .

Esempio IV.7 Dimostrare che per ogni $z \in \mathbb{C}$, $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$.
In $\mathbb{R}$ si ha la seguente identità

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

L'estensione olomorfa del primo membro è $\sin 2z$, mentre l'estensione del secondo membro è $2 \sin z \cos z$. Entrambe, sono estensioni della medesima funzione, perciò devono essere eguali

- per ogni $z \in \mathbb{C}$. La tesi.

Esempio IV.8 Sia D un aperto connesso e sia $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa. Siano $a \in D$ e $m \in \mathbb{N}$ tali che

$$f^{(k)}(a) = 0, \forall k > m$$

Allora f è un polinomio di grado al più k .

Infatti, essendo D aperto, esiste $B(a, r) \subset D$. In tale palla si ha che $f(z)$ è un polinomio di grado al più m ,

$$f(z) = a_0 + \dots + a_m z^m, \forall z \in B(a, r)$$

Ma $B(a, r)$ ammette come punto di accumulazione per D per esempio a . Essendo D connesso, vale il principio di identità e si ha

$$f(z) = a_0 + \dots + a_m z^m, \forall z \in D.$$

IV.3 Singolarità di una funzione olomorfa

IV.3.1 Singolarità isolate

Veniamo allo studio delle singolarità delle funzioni olomorfe. Si dice che $a \in \mathbb{C}$ è una **singolarità isolata** per una funzione olomorfa f se esiste un aperto D di $\mathbb{C}$ tale che $a \in D$ ed f è olomorfa in $D \setminus \{a\}$. Esiste allora un cerchio di centro a e raggio β tutto contenuto in D . Nel cerchio bucato $B(a, \beta) \setminus \{a\} \doteq B^\times(a, \beta)$ la funzione f è identicamente eguale al suo sviluppo di Taylor-Laurent, cioè

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} = T_a(z) + L_a(z), \quad \forall z \in B^\times(a, \beta)$$

dove il primo addendo (a potenze positive), T_a , si chiama **parte regolare** (o di Taylor) dello sviluppo e il secondo addendo (a potenze negative), L_a , si chiama **parte singolare** (o di Laurent) dello sviluppo.

La parte singolare dello sviluppo classifica la singolarità a nel modo che segue

- (i) se tutti i c_{-n} sono nulli, cioè $L_a(z) \equiv 0$, allora a si dice **singolarità removibile**;
- (ii) se solo per un insieme finito di indici n i c_{-n} sono non nulli, allora $L_a(z)$ è una funzione razionale, a si dice **singolarità polare** (o polo) e il massimo m per cui $c_{-m} \neq 0$ si dice **ordine del polo** a .
- (iii) i c_{-n} sono non nulli per un insieme infinito di indici n ; a si dice **singolarità essenziale**.

Noi ci interesseremo diffusamente solo dei primi due tipi di singolarità. In una singolarità essenziale, la funzione ha un comportamento estremamente complicato e non ammette limite per $z \rightarrow a$. Si dimostra (a noi non interessa) che in un intorno di a , la funzione assume tutti i valori complessi tranne al più uno (teorema di Picard).

Vediamo, in ogni caso, un esempio di ogni tipo di singolarità:

Esempio IV.9 La funzione definita su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ $f(z) = \sin z/z$ ha in $z = 0$ una singolarità eliminabile. Infatti, dallo sviluppo in serie di $\sin z$ si ha

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \dots = T_a(z)$$

perciò la parte di Laurent dello sviluppo è nulla. Consideriamo allora la funzione g tale che $g(z) = f(z)$ per $z \neq 0$ e 1 per $z = 0$. La funzione f , nell'intorno bucato $B(0, r)$ è pari a T_a per il teorema di Taylor-Laurent, perciò la funzione g è pari a T_a su tutta la palla $B(0, r)$. Ne viene che g è olomorfa in $\mathbb{C}$. Siccome g estende f su un connesso e nelle ipotesi del principio di identità, l'estensione è unica.

Esempio IV.10 La funzione $\bar{f}(z) = 1/(z^2 + 1)$, definita in $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ è olomorfa. I punti i e $-i$ sono singolarità polari del primo ordine. Infatti,

$$\frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1/2i}{z-i} + \frac{-1/2i}{z+i}$$

La parte singolare di $1/(z^2 + 1)$ attorno a i è di certo data dal primo addendo di sopra, visto che il secondo addendo è olomorfo in un intorno di i perciò ha ivi parte di Laurent nulla (è analitico). Analogamente per l'intorno di $-i$.

Esempio IV.11 La funzione $\sin 1/z$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ma ha una singolarità essenziale in $z = 0$. Infatti,

$$\sin \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \dots$$

- perciò f ha solo parte di Laurent diversa da 0.

IV.3.2 Singolarità removibili

La seguente proposizione caratterizza le singolarità removibili

Proposizione IV.32 *Sia a singolarità isolata per la funzione olomorfa f . Sono affermazioni equivalenti*

(i) a è una singolarità removibile;

(ii) esiste

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) \in \mathbb{C};$$

(iii) f è limitata in un intorno di a .

Dimostrazione (i) implica (ii) In un intorno di a si ha

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + \dots$$

perciò

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = c_0 \in \mathbb{C}$$

(ii) implica (iii) Se

$$\lim_{z \rightarrow a} |f(z) - c_0| = 0$$

allora esiste un intorno di a in cui

$$|f(z) - c_0| < \varepsilon$$

perciò $f(z)$ è limitata.

(iii) implica (i) Si ha

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(\zeta) (\zeta - a)^{n-1} d\zeta, \quad n \geq 1$$

se γ_r borda il disco $B(a, r) \subset D$. Volendo usare il lemma del cerchio piccolo, si ha, essendo f limitata in un intorno di a

$$\lim_{\zeta \rightarrow a} (\zeta - a) f(\zeta) (\zeta - a)^{n-1} = 0$$

perciò

$$2\pi i c_{-n} = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} f(\zeta) (\zeta - a)^{n-1} d\zeta = 0$$

(c.v.d.) cioè la parte di Laurent è nulla.

IV.3.3 Singolarità polari

Proposizione IV.33 *Sia a una singolarità isolata per la funzione olomorfa f . a è un polo per f se e solo se*

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$$

In tal caso esiste $m \geq 1$ tale che f è dello stesso ordine di $1/(z-a)^m$ per $z \rightarrow a$, cioè

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^m f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\};$$

m è l'ordine di a come polo di f .

Dimostrazione Sia D aperto di $\mathbb{C}$ tale che f è olomorfa in $D \setminus \{a\}$. Se

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$$

allora esiste $\delta > 0$ talché $B(a, \delta) \subset D$ e $f(z) \neq 0$ per $z \in B^\times(a, \delta)$. La funzione $g(z) = 1/f(z)$ può essere definita in $B^\times(a, \delta)$, ed essendo

$$\lim_{z \rightarrow a} g(z) = 0$$

a è una singolarità removibile per g . Dunque, g si prolunga a una funzione olomorfa in $B(a, \delta)$ che, con leggero abuso di notazione, chiameremo g e tale che $g(a) = 0$. g è nulla solo in a nel dominio $B(a, \delta)$ di olomorfia. Sia m la molteplicità di a come zero di g . Allora

$$g(z) = k(z)(z-a)^m$$

con k olomorfa e mai nulla in $B(a, \delta)$. Ne viene che

$$f(z) = \frac{1}{k(z)} \frac{1}{(z-a)^m} = \frac{h(z)}{(z-a)^m}$$

Ora, $h(z)$ è olomorfa e mai nulla in $B(a, \delta)$, presone lo sviluppo di Taylor

$$h(z) = h_0 + h_1(z-a) + \dots$$

si ha, $h_0 \neq 0$

$$f(z) = \frac{h_0}{(z-a)^m} + \dots + \frac{h_{m-1}}{(z-a)} + h_m + h_{m+1}(z-a) + \dots$$

perciò a è un polo di ordine m .

Viceversa, sia a polo di ordine m allora

$$f(z) = T_a(z) + \dots + \frac{c_{-m}}{(z-a)^m}$$

si trae

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow a} f(z)(z-a)^m &= c_{-m} \neq 0 \\ \lim_{z \rightarrow a} f(z) &= \infty. \end{aligned}$$

(c.v.d.)

Risulta anche dimostrato che se f ammette limite in una singolarità, allora tale singolarità non è essenziale (ma è removibile nel caso in cui il limite sia finito e polare nel caso in cui il limite sia infinito).

IV.3.4 Metodi per la classificazione delle singolarità

**Singolarità
delle funzioni**
 $h(z)/g(z)$

Nelle applicazioni, il più delle volte, si devono considerare funzioni complesse definite come rapporto di due altre funzioni olomorfe su $\mathbb{C}$ h e g . g abbia solo zeri isolati, allora definiamo la funzione olomorfa $f: \mathbb{C} \setminus Z(g) \rightarrow \mathbb{C}$ come

$$f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$$

Allora le singolarità di f sono tutte isolate e coincidono con i punti di $Z(g)$. Dato $a \in Z(g)$ sia n la sua molteplicità come zero di g ; controllato se a appartiene anche a $Z(h)$, posta m la molteplicità di a come zero di h (eventualmente $n = 0$ se $a \notin Z(h)$) allora

(i) a è una singolarità eliminabile se $m \geq n$;

(ii) a è una singolarità polare se $m < n$ e l'ordine di a come polo è $n - m$.

Infatti, in un intorno di a si ha $h(z) = (z-a)^m h_1(z)$ e $g(z) = (z-a)^n g_1(z)$ con h_1 e g_1 diverse da 0 nell'intorno considerato. Allora

$$f(z) = \frac{(z-a)^m}{(z-a)^n} f_1(z) = (z-a)^{-(n-m)} f_1(z)$$

con $f_1(z)$ olomorfa e diversa da 0 nell'intorno di a considerato. Allora f_1 è analitica in tale intorno e

$$f_1(z) = c_0 + c_1(z-a) + \dots$$

e

$$f(z) = \frac{c_0}{(z-a)^{n-m}} + \frac{c_1}{(z-a)^{n-m-1}} + \dots$$

come si vede, se $n > m$ allora f ha in a un polo di ordine $n - m$. Viceversa, la singolarità è eliminabile.

**Regola
dell'Hôpital**

Anche in variabile complessa vale la regola dell'Hôpital. Siano f e g olomorfe in un intorno bucato di a . Se esse sono entrambe infinitesime per $z \rightarrow a$, allora il limite per $z \rightarrow a$ del rapporto è pari al limite del rapporto delle derivate.

Infatti, se f, g sono infinitesime in $z \rightarrow a$, allora hanno in a singolarità removibili, perciò l'estensione di f e g che in $z = a$ pone entrambe le funzioni a zero è olomorfa nell'intorno di a considerato. Siccome il limite del rapporto è pari al limite del rapporto delle estensioni

(località) si ha, dal teorema di analiticità

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f'(a)(z-a) + \dots}{g'(a)(z-a) + \dots} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f'(a)}{g'(a)} \frac{c_2(z-a) + \dots}{g_2(z-a) + \dots} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Un'ultima applicazione reca il ben noto

Teorema IV.34
(fondamentale
dell'algebra)

Ogni polinomio complesso di grado strettamente positivo ha almeno uno zero.

Dimostrazione

Consideriamo la funzione razionale $f(z) = 1/P(z)$. Se P non avesse zeri, f non avrebbe singolarità e sarebbe una funzione intera. Inoltre, siccome $|P(z)| \rightarrow \infty$ per $|z| \rightarrow \infty$, si ha che $|f(z)| \rightarrow 0$ per $|z| \rightarrow \infty$. Dunque, grazie alla continuità di f , essa sarebbe una funzione intera e limitata, perciò, dal teorema di Liouville, costante, il che è assurdo avendo supposto $\deg P > 0$.

(c.v.d.)

**Funzioni
razionali**

Le funzioni razionali sono date dal rapporto di due polinomi A e B . Esse sono funzioni olomorfe in $\mathbb{C}$ privato di un numero finito di punti, gli zeri del denominatore. Una funzione razionale si dice propria se $\deg A < \deg B$ di modo che, all'infinito, $|A/B| \rightarrow 0$. Ogni funzione razionale può essere banalmente decomposta in somma di un polinomio e di una funzione razionale propria, come discende dal teorema di divisione dei polinomi:

$$\frac{A(z)}{B(z)} = Q(z) + \frac{R(z)}{B(z)}$$

Inoltre, le funzioni razionali proprie sono tutt e sole quelle funzioni razionali che si annullano all'infinito. Sia infatti F una funzione razionale, allora

$$F(z) = Q(z) + \frac{R(z)}{B(z)}$$

se $Q(z)$ non fosse nulla, allora avremmo $|F| \rightarrow \infty$, il che sarebbe assurdo.

Notiamo poi che ogni funzione razionale propria si scrive come

$$\frac{R(z)}{B(z)} = \sum_{j=1}^r \left(\frac{c_{-1}(a_j)}{z-a_j} + \dots + \frac{c_{-\nu_j}(a_j)}{(z-a_j)^{\nu_j}} \right) = \sum_{j=1}^r L_{a_j}(z)$$

dove $\{a_1, \dots, a_r\}$ sono i poli di R/B . Infatti, la funzione $R/B - \sum L_{a_j}$ ha parte di Laurent nulla in $\mathbb{C}$. Perciò è intera. Siccome poi ha limite nullo all'infinito, per il teorema di Liouville, è identicamente nulla:

Teorema IV.35
(decomposizione
delle funzioni
razionali)

Sia $F(z)$ una funzione razionale. Essa si può allora scrivere (in modo unico) come

$$F(z) = Q(z) + \sum_{j=1}^r \left(\frac{c_{-1}(a_j)}{z-a_j} + \dots + \frac{c_{-\nu_j}(a_j)}{(z-a_j)^{\nu_j}} \right) = Q(z) + \sum_{j=1}^r L_{a_j}(z)$$

dove Q è un polinomio (nullo se F è propria) e $\{a_1, \dots, a_r\}$ sono i poli di F (che mancano se F è un polinomio).

IV.3.5 Residui

Per il calcolo degli integrali risulta importante il coefficiente c_{-1} dello sviluppo di Taylor-Laurent di una funzione olomorfa attorno a una singolarità isolata. Tale quantità si dice **residuo** di f in a , e si scrive

$$R_f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a,r)} f(\zeta) d\zeta$$

dove $B(a,r)$ è una palla tutta contenuta in D .

In questa sottosezione ci occuperemo di come effettuare il calcolo dei residui (senza eseguire l'integrale, ovviamente).

Cominciamo dai residui del primo ordine

Proposizione IV.36

Se a è un polo del primo ordine per f si ha

$$R_f(a) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z)$$

Se poi $f = h/g$ con $g(a) = 0$, $h(a) \neq 0$ e $g'(a) \neq 0$, allora a è polo del primo ordine e

$$R_f(a) = \frac{h(a)}{g'(a)}.$$

Dimostrazione Si ha $f(z) = T_a(z) + c_{-1}/(z-a)$ con T_a olomorfa in un intorno di a . Allora

$$(z-a)f(z) = (z-a)T_a(z) + c_{-1},$$

passando al limite per $z \rightarrow a$, la tesi, essendo $T_a(z)$ continua in a .

Per quanto riguarda la seconda asserzione

$$(c.v.d.) \quad \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \frac{h(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{h(z)}{g(z)/(z-a)} = \frac{h(a)}{g'(a)}.$$

Per un polo di ordine n è utile notare che in un intorno di a si ha

$$f(z) = T_a(z) + \frac{c_{-1}}{z-a} + \dots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$$

Ne viene che

$$(z-a)^n f(z) = (z-a)^n T_a(z) + (z-a)^{n-1} c_{-1} + \dots + c_{-n}$$

Pensiamo ora di derivare successivamente ambo i membri e di passare al limite per $z \rightarrow a$.

Per isolare il coefficiente c_{-1} bisogna derivare $n-1$ volte. Ora, per ogni $m \leq n-1$

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{d^m}{dz^m} (z-a)^n T_a(z) = 0$$

sicché

$$(n-1)!c_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-a)^n f(z)]$$

cioè

$$c_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-a)^n f(z)]$$

Se $n = 1$, ritroviamo la proposizione precedente.

Il calcolo dei residui ha una notevole importanza a causa del seguente

Teorema IV.37
(dei residui)

Sia D un aperto di $\mathbb{C}$, sia N un sottoinsieme discreto di D e sia $f : D \setminus N \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa. Sia γ un circuito in $D \setminus N$ nullomotopo in D . Si ha allora

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{a \in N} R_f(a) \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}$$

Dimostrazione

Essendo per ipotesi γ null'omotopo in D , esiste un'omotopia $h : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow D$ di γ con una costante. L'immagine K di h è un compatto di D , che ha quindi un intorno con chiusura compatta, $U^a \subset D$ (basta prendere l'insieme dei complessi che distano al più $\rho/2$ da K , dove ρ è la distanza di K da D^c). Ora, entro U cade al più un insieme finito di punti. Altrimenti, se $N \cap U$ fosse infinito, per il teorema di Bolzano, ci sarebbe almeno un punto di accumulazione di N nel compatto $U^a \subset D$, contro l'ipotesi che N sia discreto. Adesso U contiene γ , $f : U \setminus (N \cap U) \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa e i punti singolari sono nel nuovo dominio sono finiti.

Ridenominiamo D l'insieme U e N , $N \cap U$, con la nuova ipotesi che N sia finito, $N = \{a_1, \dots, a_r\}$. Per ogni $a \in N$ sia L_a la parte di Laurent di f in a . L_a è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ (essendo olomorfa in una palla bucata centrata in a , si estende per olomorfia a $\mathbb{C} \setminus \{a\}$). La funzione $f - \sum_{i=1}^r L_{a_i}$ ha solo singolarità eliminabili in D e perciò si estende a una funzione olomorfa in D . Il suo integrale sul circuito γ nullomotopo in D è dunque nullo. Perciò

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^r \int_{\gamma} L_{a_i}(z) dz$$

Calcoliamo ciascun addendo a secondo membro

$$\int_{\gamma} L_{a_i}(z) dz = \int_{\gamma} \frac{R_f(a_i)}{z-a_i} dz + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{\gamma} \frac{c_{-n}(a_i)}{(z-a_i)^n} dz$$

poiché si ha convergenza totale della serie in ogni $\mathbb{C} \setminus B(a_i, \delta)$, per ogni $\delta > 0$ e dato che il sostegno di γ è compatto e non passa per alcun a_i . Ora, gli integrali entro la serie sono tutti nulli perché gli integrandi ammettono tutti una primitiva, sicché

$$(c.v.d.) \quad \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^r R_f(a_i) \int_{\gamma} \frac{1}{z - a_i} dz$$

Osservazione IV.2 La quantità

$$\text{avv}_{\gamma}(a) \doteq \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - a} dz$$

si dice **indice di avvolgimento** di γ attorno ad a . Sia a è interno a γ , allora applicando il primo teorema di Cauchy alla funzione identica, si ha

$$1(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - a} dz$$

perciò

$$\text{avv}_{\gamma}(a) = 1$$

Se invece adesso a è esterno a γ , allora abbiamo l'integrale si riduce alla circuitazione di una funzione olomorfa entro il circuito d'integrazione, perciò l'integrale è nullo.

Nel teorema dei residui tutti i punti a_i sono interni a γ , perciò in essi l'indice di avvolgimento vale 1 e, in definitiva,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^r R_f(a_i)$$

Quello che per tutta la trattazione abbiamo accettato è che un circuito semplice è omotopo a una qualsiasi circonferenza contenuta in esso (in particolare è nullomotopo): effettivamente non lo dimostreremo (come detto nell'introduzione non ci servirà: useremo infatti circuiti fatti da archi di circonferenza e segmenti, per i quali la cosa sarebbe facilmente dimostrabile).

IV.3.6 Punto all'infinito

Definizione del punto all'infinito

In qualche occasione abbiamo considerato il comportamento all'infinito delle funzioni complesse aventi dominio illimitato. Risulta molto utile assumere la convenzione che il piano complesso sia dotato di un solo punto all'infinito. Una rappresentazione intuitiva di questa convenzione è la seguente: immaginiamo di considerare una sfera tangente al piano complesso nell'origine O del piano stesso. Sia O' il punto della sfera diametralmente opposto a O . Proiettiamo dal punto O' ogni punto della superficie della sfera sul piano complesso. Mediante una tale proiezione (stereografica) a ogni punto P' della sfera (distinto da O') andiamo ad associare un punto al finito del piano complesso. Al punto O' corrisponde invece, **per definizione**, il punto all'infinito del piano complesso di cui sopra. In tal modo si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i punti della sfera (detta **sfera complessa**) e i punti del piano complesso, compreso il punto all'infinito. Consideriamo ora una linea chiusa nel piano complesso, i punti che stanno all'esterno della linea sono, sulla sfera, un intorno di O' , cioè costituiscono un intorno dell'infinito complesso.

Inoltre, la trasformazione

$$z' \doteq \frac{1}{z}$$

associa al punto O il punto O' , cioè è una corrispondenza biunivoca del piano complesso (unito all'infinito) in sé che manda l'origine nell'infinito e l'infinito nell'origine. In particolare, trasforma un intorno dell'origine in un intorno dell'infinito e viceversa.

Allora se una funzione $f(z)$ è definita in un dominio illimitato si definisce il suo comportamento all'infinito, come il comportamento della funzione

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

nel punto $z = 0$. Per definizione, si assume che il comportamento della funzione f all'infinito è il comportamento della funzione g nell'origine.

Esempio IV.12 La funzione $f(z) = 1/(1+z^2)$ è olomorfa nel piano complesso esclusi i punti $\pm i$ in cui presenta poli del primo ordine. Occupiamoci del comportamento all'infinito. Definiamo

$$g(z) = \frac{1}{1+1/z^2} = \frac{z^2}{z^2+1}$$

essa è olomorfa nell'origine. Ne viene che f è olomorfa all'infinito e presenta uno zero di ordine due all'infinito.

Esempio IV.13 La funzione $f(z) = e^z$ presenta all'infinito una singolarità essenziale essendo

$$g(z) = e^{1/z}$$

- che ha, in 0, sviluppo di Laurent a infiniti coefficienti.

Se è possibile eseguire lo sviluppo di Taylor-Laurent nell'origine di $g(z)$, cioè

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c'_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c'_{-n}}{z^n}$$

allora si ha il seguente sviluppo all'infinito per f :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c'_n}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} c'_{-n} z^n$$

Teorema di Liouville

Notiamo adesso che una funzione olomorfa in $\mathbb{C}$ unito all'infinito è costante. Infatti, f è intera, limitata al finito e all'infinito (g è limitata in un intorno dell'origine, f è limitata in un intorno dell'infinito), dal teorema di Liouville si conclude la costanza di f . Un altro modo per ridimostrare il teorema di Liouville in queste particolari ipotesi (olomorfia anche all'infinito) è il seguente.

Su ogni $B(0, r)$ si ha

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

inoltre, su ogni $\mathbb{C} \setminus B(0, r)$

$$f(z) = b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots$$

In definitiva, per ogni punto al finito

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots = b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots$$

da cui $a_i = b_i = 0$ per ogni $i \neq 0$, cioè $f(z) = a_0$.

Residuo all'infinito

Data una funzione f olomorfa su un aperto illimitato, esista un circuito Γ tale che al suo esterno si trovino solo punti di olomorfia (si noti che l'ipotesi è tutt'altro che banale, si consideri come controesempio la funzione $\sin(1/z)$). Si definisce allora il **residuo di f all'infinito**

$$R_f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma} f(z) dz$$

dove γ è una qualsiasi curva esterna a Γ e dove il segno meno indica che la percorrenza della γ deve avvenire in senso orario. Dall'ipotesi posta, si ha che l'esterno di Γ individua un intorno dell'infinito e in tale intorno l'unica singolarità che eventualmente esiste si ha proprio all'infinito (il che assicura che la definizione di residuo non dipende dalla particolare scelta di γ se questa è esterna a Γ).

Ora, sia $g(z) = f(1/z)$, allora se con a'_n indichiamo i coefficienti di Taylor-Laurent dello sviluppo di g

$$a'_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{g(z')}{z'^{n+1}} dz' = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma} \frac{f(z)}{z^{-n-1}} \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma} \frac{f(z)}{z^{-n+1}} dz$$

dove si è effettuato il cambio di coordinate $z = 1/z'$ (lecito cambiando parametrizzazione e curva). Ne viene che

$$R_f(\infty) = -a'_1$$

Evidentemente vale anche un teorema dei residui esterni, infatti

$$\int_{\gamma} f(z) dz = -2\pi i R_f(\infty) = 2\pi i a'_1$$

se all'esterno della curva γ non vi sono singolarità al finito. Se il circuito α interno a γ ha al suo esterno qualche singolarità al finito, allora

$$\int_{\alpha} f(z) dz = \text{somma dei residui entro } \alpha$$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \text{somma dei residui entro } \gamma = \text{somma dei residui entro } \alpha + \text{somma dei residui esterni a } \alpha$$

$$= \int_{\alpha} f(z) dz + \text{somma dei residui al finito esterni a } \alpha$$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = -2\pi i R_f(\infty)$$

da cui

$$\int_{\alpha} f(z) dz = -2\pi i \sum_{a \in \mathbb{C}, \text{ esterno } \alpha} R_f(a) - 2\pi i R_f(\infty)$$

IV.3.7 Calcolo degli integrali con il metodo dei residui

Utilizzeremo i risultati dell'analisi complessa per calcolare particolari tipi di integrali definiti o generalizzati.

Primo tipo Si debba calcolare

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$$

dove R è una funzione razionale di due variabili **definita** sulla circonferenza unitaria $\mathbb{S}^1$. Posto $z = e^{i\theta}$ si ha

$$\cos \theta = \frac{z + 1/z}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{z - 1/z}{2i}$$

Ora, come abbiamo già visto $dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta$, perciò, andando a integrare sul circolo unitario γ

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \int_{\gamma} R\left(\frac{z + 1/z}{2}, \frac{z - 1/z}{2i}\right) \frac{dz}{iz}$$

Siccome l'integranda non ha poli sul circuito d'integrazione si ha che l'integrale è pari alla somma dei residui nei poli della funzione aventi modulo minore stretto di 1, moltiplicata per $2\pi i$.

Secondo tipo Il metodo è utile per il calcolo degli integrali su tutto $\mathbb{R}$ delle funzioni razionali. Si abbia una funzione olomorfa in un aperto contenente tutto il semipiano $\text{Im } z \geq 0$ eccetto che per un numero finito di singolarità nell'aperto $\text{Im } z > 0$. In particolare f deve essere continua sulla retta reale.

Se

$$\lim_{z \rightarrow \infty, \text{Im } z > 0} z f(z) = 0$$

allora si ha

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } a > 0} R_f(a)$$

Infatti, si integra sul bordo del semidisco S_r centrato nell'origine, di raggio r e posto nel semipiano $\text{Im } z \geq 0$. Tale semidisco ha frontiera composta dalla semicirconferenza σ_r e dal segmento reale $[-r, r]$: da un certo r in poi

$$2\pi i \sum_{\text{Im } a > 0} R_f(a) = \int_{-r}^r f(x) dx + \int_{\sigma_r} f(z) dz$$

Per il lemma del cerchio grande il secondo addendo tende a 0 e si ha la tesi passando al limite per $r \rightarrow \infty$.

Naturalmente nel caso in cui in tutte le ipotesi si usi il semipiano inferiore, basta moltiplicare la somma dei residui per $-2\pi i$.

Terzo tipo Come prima, si abbia una funzione olomorfa in un aperto contenente tutto il semipiano

$\operatorname{Im} z \geq 0$ eccetto che per un numero finito di singolarità nell'aperto $\operatorname{Im} z > 0$. In particolare f deve essere continua sulla retta reale.

Se

$$\lim_{z \rightarrow \infty, \operatorname{Im} z > 0} f(z) = 0$$

allora si ha

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r e^{i\alpha x} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a > 0} R_{e^{i\alpha \cdot} f}(a)$$

La dimostrazione è analoga a quella precedente, ma il pezzo

$$\int_{\sigma_r} e^{i\alpha z} f(z) dz$$

tende a 0 grazie al lemma di Jordan, se $\alpha > 0$. Infatti, si deve avere, per z con $\operatorname{Im} z \geq 0$, $\cos(\theta + \varphi) \leq 0$, che si ha se φ è pari a $\pi/2$ (cioè se $\alpha > 0$).

Se $\alpha < 0$ conviene chiudere nel semipiano inferiore, ma allora si devono riformulare convenientemente le ipotesi (e aggiungere un segno meno nella formula di sopra).

Quarto tipo Sia R una funzione razionale priva di poli sul semiasse reale positivo. L'integrale

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} R(t) dt$$

si riconduce a un integrale sull'asse reale tramite la sostituzione $t = e^x$,

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} R(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha x} R(e^x) dx$$

Adesso si usa la periodicità della funzione e^z nel piano complesso. Si considera, per $r > 0$, il rettangolo di vertici, $-r, r, r + 2\pi i, -r + 2\pi i$. Se R non aveva singolarità su $\mathbb{R}^+$, la funzione $f(z) = e^{\alpha z} R(e^z)$ non avrà singolarità su $\mathbb{R}$ né su $\mathbb{R} + 2m\pi i$. Integriamo allora f sul bordo del rettangolo. La funzione f ha singolarità sui logaritmi dei poli di R , su ogni striscia di ampiezza 2π , vi sono allora un numero finito di singolarità. Ne viene che da un certo r in poi la somma dei residui diviene costante e si ha

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{-r}^r f(x) dx - \int_{-r}^r f(x + 2\pi i) dx + \int_{s_r} f(z) dz - \int_{s_{-r}} f(z) dz = 2\pi \sum_{0 < \operatorname{Im} a < 2\pi} R_f(a)$$

I contributi verticali spesso sono nulli (al limite $r \rightarrow \infty$) mentre il confronto dei contributi orizzontali consente di concludere.

Valori principali Finora abbiamo richiesto l'assenza di poli sull'asse reale. Vediamo come si procede quando si ha che fare con dei poli. Consideriamo un esempio concreto. Si voglia calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi x)}{x^2} dx$$

L'integrale è assolutamente convergente (per $x \rightarrow 0$ la funzione ammette limite, all'infinito è L^1). Tuttavia, non è possibile eseguire l'integrale con il metodo dei semicerchi, perché il $\sin^2(\pi x)$ scoppia sull'asse immaginario. Si deve allora scrivere

$$\sin^2(\pi x) = \frac{1 - \cos(2\pi x)}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(1 - e^{2\pi i x})$$

dunque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi x)}{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re}\left(\frac{1 - e^{2\pi i x}}{x^2}\right)$$

Purtroppo integrale e parte reale non commutano, dato che la funzione $1 - e^{-2\pi i z}/z^2$ ha, nell'origine, un polo di ordine 1.

Si deve allora introdurre la nozione di **valore principale**. Sia $I = [a, b]$ un intervallo compatto della retta reale; se c è interno a I ed è l'unica singolarità di f si scrive

$$P_c \int_I f(x) dx \doteq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{I \setminus [c-\varepsilon, c+\varepsilon]} f(x) dx$$

se tale limite esiste (ed esiste senz'altro se f è integrabile in senso generalizzato in I).

La parte principale, grazie a linearità di limiti e integrali è lineare. Dunque, la parte principale coincide con la somma di parte principale della parte reale più i volte la parte principale della

parte immaginaria:

$$P \int f(x) dx = P \int (\operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f) dx = P \int \operatorname{Re} f dx + iP \int \operatorname{Im} f dx$$

e, in particolare

$$\operatorname{Re} P \int f(x) dx = P \int \operatorname{Re} f dx$$

$$\operatorname{Im} P \int f(x) dx = P \int \operatorname{Im} f dx$$

Tornando all'esempio, abbiamo

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{1 - e^{2\pi i x}}{x^2} \right) dx = \frac{1}{2} P_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{1 - e^{2\pi i x}}{x^2} \right) dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} P_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1 - e^{2\pi i x}}{x^2} \right) dx$$

Abbiamo

$$\int_{-r}^{-s} \frac{1 - e^{2\pi i x}}{x^2} dx + \int_r^s \frac{1 - e^{2\pi i x}}{x^2} dx + \int_{\gamma_r} \frac{1 - e^{2\pi i z}}{z^2} dz - \int_{\gamma_s} \frac{1 - e^{2\pi i z}}{z^2} dz = 0$$

Vediamo che accade in γ_r : il primo pezzo è $1/z^2$ che moltiplicato per z va a zero all'infinito: lemma di cerchio grande implica contributo nullo; il secondo pezzo si annulla banalmente grande al lemma di Jordan. Integrale in γ_s : si ha

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \frac{1 - e^{2\pi i z}}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-2\pi i z^2 + O(z^3)}{z^2} = -2\pi i$$

perciò il lemma di cerchio piccolo reca

$$\int_{\gamma_s} \frac{1 - e^{2\pi i z}}{z^2} dz = -2\pi i (i\pi) = 2\pi^2$$

Passando al limite per $r \rightarrow \infty$ e $s \rightarrow 0$ si ha

$$P_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{2\pi i x}}{x^2} dx = 2\pi^2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi x)}{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{1 - e^{2\pi i x}}{x^2} \right) dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} P_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{2\pi i x}}{x^2} dx = \pi^2.$$

IV.3.8 Tagli e punti di diramazione

In questa sottosezione ci occuperemo brevemente di un ultimo aspetto interessante delle funzioni olomorfe. Finora non abbiamo considerato mai diffusamente singolarità non isolate. Ebbene, lo facciamo adesso.

**Definizione
del logaritmo
complesso:
problematiche**

Cominciamo con l'introdurre un problema molto importante. Si voglia definire il logaritmo. Come sappiamo il logaritmo fornisce in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ infiniti valori per ogni z che si vada a valutare, per esempio, se scriviamo

$$z = \rho e^{i\theta}$$

possiamo scrivere

$$\log z \doteq \log \rho + i\theta + 2im\pi, \quad m \in \mathbb{Z}$$

infatti,

$$\exp(\log z) = \rho e^{i\theta} e^{2im\pi} = \rho e^{i\theta}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

D'altra parte, una applicazione a infiniti valori non è una funzione, perciò si tenta di ridurre il log a una applicazione a un valore. Si può procedere fissando $\theta \in [0, 2\pi]$ nella rappresentazione esponenziale dei numeri complessi. Si ha allora

$$\log z \doteq \log \rho + i\theta$$

Questa funzione ha però un grave difetto. Prendiamo i punti $z_+ = e^{i\varepsilon}$ e $z_- = e^{i(2\pi-\varepsilon)}$, abbiamo

$$|z_+ - z_-| \leq 2\varepsilon$$

D'altra parte,

$$|\log z_+ - \log z_-| = 2(\pi - \varepsilon)$$

perciò, quando z_+ e z_- si avvicinano i loro logaritmi vanno a distare per 2π , cioè

$$\left| \lim_{z \rightarrow 0, \operatorname{Im} z > 0} \log z - \lim_{z \rightarrow 0, \operatorname{Im} z < 0} \log z \right| = 2\pi$$

e la funzione logaritmo non è continua.

Intrinsecità della discontinuità

La funzione che abbiamo costruito è discontinua su tutto il semiasse reale positivo, si dice allora che essa ha un taglio su tale semiasse. Il significato del taglio è molto più profondo di quanto non si sia messo in luce qui. Tanto per cominciare, si potrebbe pensare che la discontinuità segua dal fatto che si è operato **quella** determinata determinazione dell'argomento (abbiamo fissato θ tra 0 e 2π): questo non è vero.

Prendiamo un punto z_0 qualsiasi sul circolo di raggio ρ e aumentiamo gradualmente l'argomento θ (quale che sia la sua determinazione): il logaritmo aumenta, cioè il punto $w = \log z$ si sposta sempre più in alto nel piano complesso w ; se la funzione fosse continua dopo un giro w dovrebbe tornare in $w_0 = \log z_0$, invece si è spostata di $2\pi i$.

Tuttavia, si nota che se avessimo fatto un circolo attorno a un qualsiasi altro punto diverso dallo zero, questo non sarebbe accaduto: in effetti, l'argomento θ , dopo un giro torna in sé: per esempio, per un tratto aumenta (fino alla tangente) poi diminuisce (fino all'altra tangente), poi aumenta di nuovo fino a tornare al valore di partenza: così il logaritmo.

Punti di diramazione e tagli

Si sintetizza la particolarità dello zero dicendo che esso è un **punto di diramazione**. Precisamente, si chiama **punto di diramazione**, un punto z_0 per il quale esistano curve chiuse γ che godano della seguente proprietà: considerato un punto z_1 sul sostegno di γ e il corrispondente valore $f(z_1)$, facendo muovere la variabile z lungo γ , il valore della funzione non torna ad essere $f(z_1)$ quando il punto z torna a coincidere con z_1 dopo aver percorso un giro sul sostegno di γ .

Torniamo al logaritmo: ogni curva chiusa che abbraccia lo zero, grande quanto si voglia, è tale da produrre una discontinuità della funzione: dunque, questo accade anche per ogni curva chiusa che abbraccia l'infinito (è la stessa cosa). Se ne deriva che gli unici punti di diramazione della funzione logaritmo sono l'origine e l'infinito. Notiamo che quando prima abbiamo stabilito il **taglio** lo abbiamo proprio tracciato tra 0 e ∞ : non è un fatto casuale.

Si chiama, infatti, **taglio** una qualsiasi linea del piano che congiunga i punti di diramazione della funzione. Il taglio impedisce ai circuiti di chiudere un singolo punto di diramazione: su di esso si manifesta la discontinuità della funzione, perciò scegliere il taglio equivale a decidere una determinazione per la funzione stessa.

Definizione rigorosa di logaritmo

Prima abbiamo affermato che l'esistenza di un taglio nel logaritmo è un fatto intrinseco, che non ha a che vedere che la parametrizzazione del piano complesso. In quanto segue, cerchiamo di chiarire questo punto.

Cominciamo con la seguente

Definizione IV.10 Se $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa, un suo logaritmo su D è una funzione $\varphi : D \rightarrow \mathbb{C}$ tale che

$$\exp \varphi(z) = f(z)$$

per ogni $z \in D$.

Il logaritmo di cui sopra è il logaritmo della funzione z . In generale, $\exp \varphi(z) \neq 0$, perciò condizione necessaria perché f ammetta un logaritmo è che $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in D$. Il logaritmo comunemente inteso va allora definito come logaritmo della funzione z olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Vediamo allora la seguente

Proposizione IV.38 Sia D un aperto connesso e sia $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa; la funzione $\varphi : D \rightarrow \mathbb{C}$ è un logaritmo di f in D se e solo se $\varphi'(z) = f'(z)/f(z)$ per ogni z in D , e inoltre, esiste in D almeno un punto a tale che $\exp \varphi(a) = f(a)$. Se poi φ e ψ sono logaritmi di f , allora esiste un intero k tale che sia

$$\psi(z) = \varphi(z) + 2\pi k i$$

per ogni $z \in D$.

DimostrazioneDall'identità $\exp(\varphi(z)) = f(z)$ si ottiene, derivando

$$\varphi'(z) \exp(\varphi(z)) = f'(z)$$

cioè

$$\varphi'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

perché ammettendo logaritmo f è sempre diversa da 0. Viceversa, sia $\varphi' = f'/f$. Deriviamo la $\exp(-\varphi(z)) f(z)$, otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} (\exp(-\varphi(z)) f(z)) &= \exp(-\varphi(z)) (f'(z) - \varphi'(z) f(z)) = \\ &= \exp(-\varphi(z)) f(z) \left(\frac{f'(z)}{f(z)} - \varphi'(z) \right) \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{d}{dz} (\exp(-\varphi(z)) f(z)) = 0$$

Ne viene, grazie alla connessione, che $\exp(-\varphi(z)) f(z) = \exp(-\varphi(a)) f(a) = 1$ sicché

$$f(z) = \exp(\varphi(z)).$$

Vediamo, infine, l'ultima affermazione

$$\exp(\varphi(z)) = \exp(\psi(z)), \forall z \in D$$

allora

$$\exp(\varphi(z) - \psi(z)) = 1, \forall z \in D$$

se e solo se

$$\varphi(z) - \psi(z) \in 2\pi i\mathbb{Z}$$

ma, siccome l'immagine di $\varphi - \psi$ è un connesso e $2\pi i\mathbb{Z}$ è discreto, si ha che

$$\varphi(z) - \psi(z) = 2\pi i k$$

(c.v.d.) per qualche $k \in \mathbb{Z}$: la tesi.**Origine di
diramazione
e taglio per
il logaritmo**Nel costruire la funzione logaritmo comunemente intesa, dobbiamo allora cercare una primitiva di $1/z$. Sappiamo bene che essa non esiste in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, tuttavia tentiamo di costruirla. La funzione che andiamo a costruire sia $F(z)$. Se essa è una primitiva di $1/z$ allora

$$F(z) = \int_{\alpha_z} \frac{1}{\zeta} d\zeta$$

dove α_z è una linea qualsiasi in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ che partendo da una origine prefissata, diciamo pure 1, va in z . Ora, grazie alla olomorfia in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ di $1/z$, se consideriamo due linee α_{1z} e α_{2z} abbiamo che esse recano alla stessa $F(z)$ se, unite, non racchiudono lo 0. Infatti, il circuito α dato dalla giustapposizione delle due linee racchiude solo punti di olomorfia, dunque ha circuitazione nulla (è nullomotopo in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$), perciò

$$\int_{\alpha_{1z}} \frac{1}{z} dz - \int_{\alpha_{2z}} \frac{1}{z} dz = 0$$

La funzione F sembra è allora ben posta (è una funzione a un valore), ma si noti che per ottenerlo abbiamo dovuto restringere la classe delle linee α_z . In ogni caso, F non è una primitiva in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ della funzione $1/z$, ma lo diventa se cambiamo il dominio in modo da realizzare effettivamente la restrizione detta sulla classe delle linee che vanno da 1 a z . Siccome dobbiamo impedire che un circuito passante per 1 (come per un qualsiasi altro punto, a meno di traslazioni nella definizione della F) abbracci l'origine, togliamo a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ una qualsiasi linea che parta dall'origine. Otteniamo un aperto D connesso, ma tale che non esista un circuito di D che abbracci l'origine. Quella linea che va a definire il dominio D è proprio il **taglio** di cui abbiamo euristicamente parlato prima. $z = 0$ è un **punto di diramazione**, perché è una singolarità di $1/z$.Si noti come, **qualsiasi** sia la linea che definisce il taglio, su di essa si registra la solita discontinuità $2\pi i$: infatti, sia z_1 appartenente al taglio: la funzione poco a destra del taglio e poco a sinistra del taglio si ottengono tramite linee che al limite danno un circuito che

abbraccia lo 0, cioè

$$F(z_1^+) - F(z_1^-) = \int_{\alpha_{z_1^+}} \frac{1}{z} dz - \int_{\alpha_{z_1^-}} \frac{1}{z} dz = \oint \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

Tornando al problema della definizione del logaritmo di una funzione qualsiasi, l'esistenza delle primitive di f'/f è equivalente al fatto che su ogni circuito chiuso l'integrale di f'/f sia nullo, cosa che accade se ogni circuito chiuso è nullomotopo in D , si ha perciò che

Corollario IV.39 Ogni funzione non nulla f olomorfa su un aperto semplicemente connesso ammette logaritmi.

Potenze Definito il logaritmo si passa poi a definire le potenze: se f ammette logaritmi, allora, scelto un logaritmo di f e denotatolo con $\log f(z)$ si ha

$$f^\alpha(z) = \exp(\alpha \log f(z))$$

Siccome gli altri logaritmi hanno determinazioni che differiscono da quello scelto per $2\pi i k$, la funzione potenza è indeterminata per $e^{2\pi i k \alpha}$. In particolare, se $\alpha \in \mathbb{N}$ non vi è indeterminazione (l'indeterminazione è 1, qualsiasi logaritmo si prenda). Invece, esiste indeterminazione per $\alpha = 1/n$ con $n \in \mathbb{N}$: per esempio, se $n = 2$ si ha una indeterminazione pari a $e^{\pi i k} = (-1)^k$, cioè si hanno due interminazioni. Una volta scelto un taglio per il logaritmo, quel taglio viene ereditato dalla funzione potenza: tuttavia può accadere che la discontinuità al taglio, per quanto visto, sia nulla, di modo che la singolarità sul taglio sia removibile.

IV.4 Funzioni olomorfe e potenziali in due dimensioni

IV.4.1 Applicazioni conformi

**Applicazioni
conformi
del piano**

Un applicazione conforme del piano è una trasformazione lineare non singolare del piano che conserva gli angoli. Un'applicazione conforme è, allora, una similitudine, infatti un triangolo è mappato in un altro triangolo con eguali angoli al vertice.

Inoltre, se T è un'applicazione conforme, allora ha determinante non nullo, perciò $T' = T/\sqrt{|\det T|}$ è conforme. Ma T' ha determinante di modulo 1, perciò conserva le aree. In particolare, dovendo conservare gli angoli, considerando un qualunque triangolo, si ottiene che T' conserva anche le lunghezze. Perciò T' è un'isometria: $T' \in O(\mathbb{R}^2)$. Ne viene che ogni applicazione lineare conforme è multipla di una trasformazione ortogonale.

Questo fatto, che abbiamo dimostrato utilizzando nozioni elementari di geometria sintetica piana, si dimostra facilmente in un ambito un po' più generale

Proposizione IV.40 Sia V uno spazio euclideo, $T \in GL(V)$ un'applicazione lineare invertibile. Sono fatti equivalenti,

$$(i) \ T \text{ è conforme, cioè, per ogni } u, v \in V \setminus \{0\} \\ \frac{(Tu, Tv)}{|Tu||Tv|} = \frac{(u, v)}{|u||v|},$$

(ii) T conserva l'ortogonalità dei vettori;

(iii) T è una similitudine: esistono $\lambda > 0$ e $A \in O(V)$ tali che $T = \lambda A$.

Dimostrazione Le implicazioni (i) $\Rightarrow$ (ii) e (iii) $\Rightarrow$ (i) sono ovvie. Resta allora da vedere che (ii) $\Rightarrow$ (iii). Basta mostrare che esiste $\lambda > 0$ per cui, per ogni versore $u \in V$, $|u| = 1$, si ha

$$|Tu| = \lambda$$

al che avremo che $A = T/\lambda$ trasforma basi ortonormali in basi ortonormali, perciò $A \in O(V)$. Siano u e v due versori: la nostra tesi è $|Tu| = |Tv|$. Ora, $u+v$ e $u-v$ sono ortogonali, infatti

$$(u+v, u-v) = (u, u) - (u, v) + (u, v) - (v, v) = 1 - 1 = 0.$$

Dunque,

$$(T(u+v), T(u-v)) = 0$$

cioè

$$(Tu, Tu) - (Tu, Tv) + (Tu, Tv) - (Tv, Tv) = 0 \Leftrightarrow (Tu, Tu) = (Tv, Tv)$$

(c.v.d.) la tesi.

**Funzioni
olomorfe come
applicazioni
conformi**

Nell'ambito dell'analisi complessa, chiamiamo **conforme** un'applicazione $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, con D aperto di $\mathbb{C}$, che sia $\mathbb{R}$ -differenziabile, con differenziale mai nullo, che trasformi curve $\mathcal{C}^1$ che incontrandosi formano un dato angolo, in curve $\mathcal{C}^1$ che formano lo stesso angolo.

Ora, date α, β due curve $\mathcal{C}^1$ da $I \rightarrow D$ che si incontrano in $w_0 = \alpha(t_0) = \beta(t_0)$, i rispettivi vettori tangenti in $f(w_0)$ delle curve trasformate sono dati da $f'(w_0)\dot{\alpha}(t_0)$ e da $f'(w_0)\dot{\beta}(t_0)$. Entrambi, sono dati dai vettore tangenti di partenza, $\dot{\alpha}(t_0)$ e $\dot{\beta}(t_0)$, moltiplicati per il numero complesso $f'(w_0)$. Ne viene che i vettori tangenti alle curve trasformate si ottengono dai vettori $\dot{\alpha}(t_0)$ e $\dot{\beta}(t_0)$ tramite una roto-omotetia, il che garantisce la conservazione degli angoli.

Proposizione IV.41 Una funzione olomorfa in D con derivata mai nulla è ivi conforme.

**Applicazioni
conformi
come funzioni
olomorfe**

Sia f un'applicazione $\mathcal{C}^1$ in senso reale conforme su un dominio connesso D . Allora essa ha jacobiano sempre positivo o sempre negativo. La matrice jacobiana di f (riguardata come funzione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$) è data da

$$J_f = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix},$$

ma siccome f è conforme, J_f è conforme sul piano (essendo anche $\det J_f \neq 0$), dunque, per quanto detto in apertura,

$$\frac{1}{\sqrt{|\det J_f|}} J_f^t = \sqrt{|\det J_f|} J_f^{-1}$$

da cui

$$\begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_x v \\ \partial_y u & \partial_y v \end{pmatrix} = \frac{|\det J_f|}{\det J_f} \begin{pmatrix} \partial_y v & -\partial_y u \\ -\partial_x v & \partial_x u \end{pmatrix}$$

perciò, se $\det J_f > 0$, allora valgono le identità di Cauchy-Riemann e f è olomorfa. Altrimenti, f^* è olomorfa.

Proposizione IV.42 Sia D un aperto connesso di $\mathbb{C}$ e sia $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ in senso reale, conforme, con determinante jacobiano mai nullo. Se lo jacobiano è positivo, allora f è olomorfa, altrimenti f è antiolomorfa (cioè f^* è olomorfa).

IV.4.2 Inversa di una funzione olomorfa

Sia f una funzione olomorfa sull'aperto $D \subset \mathbb{C}$, allora lo jacobiano di f vale

$$\det J_f = (\partial_x u)(\partial_y v) - (\partial_x v)(\partial_y u) = (\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2 = |f'|^2$$

dunque, f ha derivata nulla se e solo se ha jacobiano nullo. Ne viene che se $f'(z_0) \neq 0$, allora la mappa $(x, y) \mapsto (u, v)$ è invertibile per il teorema dell'invertibilità locale. Cioè, esiste un intorno di z_0 in cui la funzione f è invertibile. Se chiamiamo g l'inversa di f nell'intorno detto, abbiamo che essa ha jacobiano

$$\frac{1}{|f'(z)|^2} \begin{pmatrix} \partial_y v & -\partial_y u \\ -\partial_x v & \partial_x u \end{pmatrix} \Big|_{z=x+iy}$$

perciò, se $w = f(z)$

$$g'(w) = \frac{\partial_y v - i\partial_y u}{|f'(g(w))|^2} = \frac{\partial_x u - i\partial_x v}{|f'(g(w))|^2} = \frac{f'^*(g(w))}{|f'(g(w))|^2} = \frac{1}{f'(g(w))}.$$

Infine,

**Teorema
IV.43 (di
invertibilità)**

omomorfa sull'aperto D e $f'(z_0) \neq 0$ allora esiste una palla $B(z_0, \delta)$ nel quale è ben definita g inversa di f . g è olomorfa e vale

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}, \quad \forall w \in f(B(z_0, \delta)).$$

Una volta garantita l'invertibilità globale della funzione, l'olomorfia dell'inversa discende dal teorema precedente:

Teorema IV.44 Sia f una funzione olomorfa ed iniettiva sull'aperto D . Se $f'(z) \neq 0$ per ogni $z \in D$, allora l'inversa g di f è olomorfa su $f(D)$ e risulta

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}, \quad \forall w \in f(D)$$

Dimostrazione Su ogni insieme $f(B(z_0, \delta))$ l'inversa g coincide con l'inversa locale, dal teorema di (c.v.d.) invertibilità locale, la tesi.

IV.4.3 Funzioni armoniche e funzioni olomorfe

**Funzioni
olomorfe
come funzioni
armoniche**

Sappiamo che una funzione olomorfa è $\mathcal{C}^\infty$ e che, dunque, in particolare, la sua parte reale e la sua parte immaginaria sono funzioni $\mathcal{C}^\infty$ in senso reale. Dunque, possiamo derivare ulteriormente l'identità di Cauchy-Riemann per ottenere

$$\begin{aligned}\partial_x^2 u &= \partial_x \partial_y v \\ \partial_y^2 u &= -\partial_y \partial_x v\end{aligned}$$

dal teorema di Schwarz, concludiamo che

$$\Delta u(x, y) = 0$$

per ogni $(x, y) \in D$, dunque u è **armonica** in D . In modo del tutto analogo, si trova che v è, a sua volta, **armonica** in D .

**Esistenza
globale e locale
dell'armonica
coniugata**

Si pone adesso il seguente problema: sia $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale armonica, esiste una funzione reale armonica $v : D \rightarrow \mathbb{R}$, talché $u + iv$ sia olomorfa in D ? Una tale v , se esiste, si dice **armonica coniugata** di u . Le derivate parziali della funzione v sono determinate dall'identità di Cauchy-Riemann e si ha

$$\begin{aligned}\partial_x v &= -\partial_y u \\ \partial_y v &= \partial_x u\end{aligned}$$

Si ha che v esiste su D se e solo se la forma differenziale reale

$$(-\partial_y u) dx + (\partial_x u) dy$$

è esatta su D , essendone v una primitiva. La forma che stiamo considerando è chiusa, in quanto u è armonica, perciò è localmente esatta. Dunque, se D è semplicemente connesso si ha l'esistenza di v , armonica coniugata. In ogni caso, la locale esattezza sussiste sempre, di modo che l'**armonica coniugata esiste localmente**. Localmente $u + iv$ è olomorfa, dunque, localmente u è $\mathcal{C}^\infty$, perciò u è $\mathcal{C}^\infty$:

Proposizione IV.45 Una funzione armonica di due variabili è $\mathcal{C}^\infty$.

IV.4.4 Problemi di potenziale in due dimensioni

**Problemi di
potenziale
elettrostatico:
potenziale
complesso**

Supponiamo di dover risolvere un problema di potenziale in due dimensioni: si tratta cioè di determinare una funzione $\varphi : \mathbb{R}^2 \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ soddisfacente all'equazione di Laplace

$$\Delta \varphi(x, y) = 0$$

assegnate certe condizioni al bordo, che chiameremo C .

Se il dominio nel quale si cerca la soluzione è semplicemente connesso, esiste certamente l'armonica ψ coniugata a φ , e allora esiste una funzione olomorfa $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ tale che φ è pari alla parte reale di f . Una tale funzione f si dice **potenziale complesso**.

**Potenziale
in una
circonferenza a
terra: problema
di Dirichlet**

Vediamo subito un'applicazione di quanto detto. Sia Γ una circonferenza (centrata in (x_0, y_0)) all'interno della quale non vi siano cariche. Il potenziale all'interno della circonferenza è una funzione armonica: il suo dominio è semplicemente connesso, perciò esiste un potenziale complesso, che è una funzione olomorfa, dunque

$$\varphi(x_0, y_0) = \operatorname{Re} f(z_0) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} dz = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(r \cos \theta; r \sin \theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(r, \theta) d\theta$$

con ovvio abuso di notazione. La formula trovata consente di determinare il potenziale nel centro della circonferenza noto il potenziale al bordo (**problema di Dirichlet**). Il problema si sa risolvere anche per ogni altro punto interno alla circonferenza, ma non è comodo usare il metodo del potenziale complesso.

Prima di andare avanti nell'illustrazione delle applicazioni della teoria delle funzioni olomorfe alla teoria del potenziale, mostriamo il seguente risultato

Proposizione IV.46 *Se $f(x + iy) = u(x + iy) + iv(x + iy)$ è una funzione olomorfa, allora le linee su cui u è costante sono ortogonali alle linee su cui v è costante.*

Dimostrazione Si tratta di verificare l'ortogonalità dei rispettivi gradienti

$$(c.v.d.) \quad \nabla u \cdot \nabla v = \begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_y u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\partial_y v \\ \partial_x v \end{pmatrix} = 0$$

Se u rappresenta il potenziale, le linee a u costante sono le superfici equipotenziali e dunque le linee dove l'armonica coniugata sono costanti, sono proprio le linee del campo elettrico.

**Potenziale
di un piano
uniformemente
carico**

Passiamo ora in rassegna alcuni esempi illustrativi delle tecniche finora descritte. Cominciamo a considerare un caso molto semplice: un piano carico posto a terra. Il caso si presta bene a essere trattato in variabile complessa: grazie alla simmetria del problema (traslazione), il potenziale non dipende dalle coordinate parallele al piano, diciamo che una di esse sia z . Se $x = 0$ è l'equazione del piano, sappiamo bene che

$$\varphi(x) = cx$$

Ora, il semipiano $x > 0$ è certamente semplicemente connesso, dunque, deve esistere un potenziale complesso. Ma esso è banalmente

$$f(z) = cz$$

(si tratta infatti di una funzione olomorfa con parte reale eguale a φ). Le superfici equipotenziali sono parallele all'asse delle y , mentre quelle $\operatorname{Im} f$ costante sono parallele all'asse delle x e rappresentano, correttamente, le linee di campo.

**Uso delle
applicazioni
conformi:
esposizione
tramite un
esempio**

Complichiamoci leggermente la vita per mostrare un metodo particolarmente interessante che si basa sull'uso delle applicazioni conformi. Vogliamo calcolare il potenziale nella regione compresa tra due semipiani ortogonali aventi origine in comune e posti a terra. Ancora una volta, la traslazione rispetto a vettori paralleli alla retta di origine dei semipiani è una simmetria del problema. Ne viene che se su tale retta fissiamo l'asse z , il potenziale non dipenderà da z . Possiamo ancora applicare i risultati in variabile complessa: il dominio D (regione che comprende la zona tra i due piani) è un aperto semplicemente connesso. Esiste allora $f(z)$ olomorfa tale che la sua parte reale è il potenziale φ che andiamo cercando. Vogliamo, ora, eseguire un cambiamento di coordinate $z' = \Phi(z)$ di modo da semplificare il problema. Φ dovrà mappare l'aperto semplicemente connesso D , unito alla sua frontiera C , in un altro aperto semplicemente connesso D' , unito alla sua frontiera C' , in modo biunivoco. Se richiediamo che Φ sia olomorfa su D assieme alla sua inversa (per questo, come sappiamo, basta che Φ' sia mai nulla in D) abbiamo che

$$g(z') \doteq f(\Phi^{-1}(z'))$$

è una funzione olomorfa su D' . La parte reale di g sarà allora armonica e avrà i valori assegnati sull'immagine C' , secondo Φ , dei due piani, cioè di C . Il problema su D è equivalente al problema su D' : se troviamo g abbiamo automaticamente la f che stavamo cercando, essendo

$$f(z) = g(\Phi(z))$$

(infatti, f è olomorfa e assume i giusti valori al bordo). Si noti come la biunivocità di Φ unita alla sua olomorfia, garantiscono che Φ sia un'applicazione conforme in D .

**Risoluzione
del problema
dell'esempio**

L'idea è quella di applicare Φ , olomorfa e invertibile in D , al nostro sistema, in modo da mandare i due semipiani in una configurazione più semplice, che magari sappiamo già risolvere.

Cerchiamo allora Φ in modo che l'immagine dei due semipiani sia un unico piano.

Conviene scegliere gli assi x e y di modo che i due semipiani formino un angolo $\pm\pi/4$ con l'asse delle x e siano nella regione a $x > 0$. Consideriamo il semipiano in $y > 0$: per trasformarlo nel semipiano $x = 0, y > 0$, basta applicargli una rotazione di $\pi/4$, che corrisponde a $\Phi(z) = z^2$. Anche l'altro semipiano ruota nel semipiano a $x = 0$, ma con $y < 0$. $\Phi(z) = z^2$ semplifica notevolmente il nostro lavoro. Tuttavia, per renderla invertibile e olomorfa dobbiamo scegliere un taglio conveniente per la sua funzione inversa $\sqrt{z}$. Non possiamo certo mettere il taglio sul semiasse reale positivo. Poniamolo allora sul semiasse reale negativo, il che corrisponde a fissare gli angoli polari tra $-\pi$ e π . Con questa determinazione abbiamo trovato la Φ che volevamo. Come avevamo visto prima, si ha

$$g(z') = cz'$$

e, dunque,

$$f(z) = g(\Phi(z)) = c\Phi(z) = cz^2$$

Ne viene che

$$\varphi(x, y) = c(x^2 - y^2)$$

Le linee equipotenziali, come quelle di campo, sono allora archi di iperbole, le prime, asintotiche ai due semipiani.

Un ultimo esempio Siano ora i due semipiani di cui nell'esempio precedente inclinati di un angolo $\alpha < \pi/2$, il primo posto a un potenziale V_1 e il secondo a V_2 . Poniamo il primo sul semiasse reale positivo. Una trasformazione interessante per questo problema è la

$$\Phi(z) = i \log z = i \log \rho - \theta$$

Essa, infatti, manda il primo semipiano sull'asse (tutto!) immaginario positivo, mentre trasforma il secondo in un piano avente ascissa pari a $-\alpha$. Scelto il taglio del logaritmo sul semiasse reale negativo, abbiamo che Φ è olomorfa e si ha pure subito che

$$g(z') = -\frac{V_2 - V_1}{\alpha} z' + V_1$$

Dunque, si conclude notando che

$$f(z) = -\frac{V_2 - V_1}{\alpha} (i \log \rho - \theta) + V_1$$

sicché

$$\varphi(\rho, \theta) = \operatorname{Re} f(z) = (V_2 - V_1) \frac{\theta}{\alpha} + V_1$$

come ci si poteva immaginare.

Analisi di Fourier

Anche in questo capitolo andiamo a trattare un argomento molto vasto e difficile, per cui abbiamo privilegiato gli aspetti più generali e semplici, nonché quelli che avessero maggiori possibilità di essere applicati nello studio della meccanica quantistica.

V.1 Spazi di funzioni regolari

In questa sezione studieremo alcuni tipici spazi di funzioni definite su $\mathbb{R}^\ell$ regolari: funzioni di classe $\mathcal{C}^m$ su un compatto o su un aperto, a supporto compatto o meno; funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$ su un compatto, su un aperto, a supporto compatto; funzioni $\mathcal{C}^\infty$ infinitesime all'infinito; funzioni a decrescenza rapida.

V.1.1 Topologizzazione degli spazi di funzioni lisce

Notazioni e definizioni fondamentali

Fissiamo la notazione una volta per tutte: con Ω indicheremo un aperto di $\mathbb{R}^\ell$ e con K un compatto contenuto in $\mathbb{R}^\ell$; con i simboli $\mathcal{C}^m(\Omega)$ intenderemo gli spazi lineari delle funzioni di classe $\mathcal{C}^m$ (m intero non negativo oppure infinito) definite sull'aperto Ω ; con $\mathcal{C}_K^m(\Omega)$ intenderemo lo spazio delle funzioni a supporto contenuto in K , dove il supporto è

$$\text{supp } f = \{x \in \mathbb{R}^\ell \mid f(x) \neq 0\}^a;$$

infine, con $\mathcal{C}_c^m(\Omega)$ indicheremo lo spazio delle funzioni di classe $\mathcal{C}^m$ a supporto compatto contenuto in Ω e con $\mathcal{C}_\infty^m$ lo spazio delle funzioni definite in $\mathbb{R}^\ell$, di classe $\mathcal{C}^m$, infinitesime all'infinito. In seguito introdurremo le funzioni a decrescenza rapida.

Nozioni di convergenza

In ciascuno degli spazi $\mathcal{C}_K^m(\Omega)$, diremo che f_n è una successione convergente a $f \in \mathcal{C}_K^m(\Omega)$ se, per ogni multi-indice $\mathbf{p} \in \mathbb{N}^\ell$ talché $|\mathbf{p}| = \sum_{i=1}^\ell p_i \leq m$, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|D^{\mathbf{p}} f_n - D^{\mathbf{p}} f\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} |D^{\mathbf{p}} f_n(x) - D^{\mathbf{p}} f(x)| = 0.$$

Per quello che riguarda gli spazi $\mathcal{C}^m(\Omega)$, la convergenza di f_n a f si ha se, per ogni compatto $K \subset \Omega$ e per ogni $|\mathbf{p}| \leq m$ risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|D^{\mathbf{p}} f_n - D^{\mathbf{p}} f\|_{\infty, K} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} |D^{\mathbf{p}} f_n(x) - D^{\mathbf{p}} f(x)| = 0.$$

Ricordiamo che

$$D^{\mathbf{p}} f = \frac{\partial^{|\mathbf{p}|}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_\ell^{p_\ell}} f.$$

Topologizzazione

Adesso vogliamo procedere a topologizzare tutti gli spazi qui introdotti: mostreremo che per ciascuno di essi esiste una opportuna metrica che riproduce le nozioni di convergenza di cui sopra. Mostriamo poi che ciascuno degli spazi detti è completo nella metrica introdotta. Sebbene quello che seguiremo non è un modo generale di ragionare, ci eviterà di parlare degli spazi localmente convessi, e ci darà comunque modo di vedere alcune cose interessanti sugli spazi delle funzioni lisce.

Cominciamo con un lemma ben noto (lo abbiamo già usato in precedenza), ma fondamentale nel seguito.

Lemma V.1 *Per ogni $A \subset \mathbb{R}^\ell$, lo spazio $\mathcal{C}(A)$ è uno spazio di Banach nella norma uniforme*

$$\|f\|_\infty \doteq \sup_{x \in A} |f(x)|$$

Dimostrazione Sia f_n una successione a valori in $\mathcal{C}(A)$ di Cauchy. Tale cioè che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu(\varepsilon)$ per cui, se $n, m > \nu$, allora

$$\|f_n - f_m\|_\infty = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

In particolare, per ogni $x \in A$, la successione a valori in $\mathbb{C}$, $\{f_n(x)\}$ è di Cauchy, perciò è convergente, visto che $\mathbb{C}$ è completo. Ne deriva che per ogni $x \in A$ abbiamo definito la funzione f talché

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

Si tratta di vedere che la convergenza a f è uniforme e che f è continua. Ora, per $n, m > \nu$ si ha, per ogni $x \in A$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

fissato n , la funzione $|f_n(x) - \cdot|$ è continua, sicché, passando al limite per $m \rightarrow \infty$, per la permanenza del segno

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

per ogni $x \in A$, da cui la convergenza è uniforme.

Continuità di f . Abbiamo

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$, allora troviamo n tale che

$$\sup_{x \in A} |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

siccome f_n è continua, esiste un raggio δ tale che se $x \in B(x_0, \delta)$ allora

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

(c.v.d.) da cui la continuità di f .

Lemma V.2 Sia D un aperto di $\mathbb{R}^\ell$. Lo spazio delle funzioni $\mathcal{C}^m(D)$ è di Banach nella norma

$$\|f\|_{m,D} \doteq \sum_{|\mathbf{p}| \leq m} \|D^{\mathbf{p}} f\|_\infty = \sum_{|\mathbf{p}| \leq m} \sup_{x \in D} \|D^{\mathbf{p}} f(x)\|_\infty$$

Dimostrazione Notiamo che f_n converge a f (risp. è di Cauchy) rispetto alla norma introdotta, se e solo se ogni $D^{\mathbf{p}} f_n$ converge a $D^{\mathbf{p}} f$ (risp. è di Cauchy) nella norma uniforme (di cui nel lemma precedente).

Se f_n è di Cauchy, dunque, ciascuna $D^{\mathbf{p}} f_n$ è di Cauchy, perciò converge nella norma uniforme a una funzione $g_{\mathbf{p}}$ continua su D . Si tratta solo di mostrare che $g \doteq g_0$ è $\mathcal{C}^m(D)$ e che $g_{\mathbf{p}} = D^{\mathbf{p}} g$. A questo scopo basta mostrare che se $f_n \rightarrow g$ e $(\partial f_n / \partial x_i) \rightarrow g_1$ uniformemente, allora $g \in \mathcal{C}^1$ e

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = g_1$$

Sia $x_0 \in D$, allora esiste r tale che $B(x_0, r) \subset D$. Per ogni n consideriamo

$$h_n(\tau) = f_n(x_0 + \tau \mathbf{e}_i), \quad \tau \in]-r, r[$$

dove $\mathbf{e}_i$ è il versore dell' i -esimo asse di $\mathbb{R}^\ell$. Allora $h_n(\tau)$ converge uniformemente a

$$h(\tau) = g(x_0 + \tau \mathbf{e}_i)$$

Inoltre, $h_n \in \mathcal{C}^1$ e

$$h'_n(\tau) = \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(x_0 + \tau \mathbf{e}_i)$$

ne viene che h'_n converge uniformemente a

$$h_1(\tau) = g_1(x_0 + \tau \mathbf{e}_i)$$

D'altra parte, siccome $h_n \in \mathcal{C}^1$, dal teorema fondamentale del calcolo,

$$h_n(\tau) = h_n(0) + \int_0^\tau h'_n(t) dt$$

Passiamo al limite per $n \rightarrow \infty$ in entrambi i membri, dato che la convergenza di h'_n è uniforme,

si ha

$$h(\tau) = h(0) + \int_0^\tau h_1(t) dt$$

da cui h è di classe $\mathcal{C}^1$ e, derivando e valutando in $\tau = 0$,

$$h'(0) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0) = h_1(0) = g_1(x_0)$$

come volevamo. (La stessa dimostrazione, se non si vuole usare quest'ultima induzione, può essere fatta usando la formula di Taylor con resto integrale).

(c.v.d.)

**Topologizzazione
di $\mathcal{C}_K^m(\Omega)$**

Andiamo a dare una struttura metrica agli spazi $\mathcal{C}_K^m(\Omega)$ con m finito. Consideriamo la norma

$$\|f\|_{m,K} = \sum_{|\mathbf{p}| \leq m} \|D^{\mathbf{p}} f\|_{\infty,K}$$

Che sia ben definita è praticamente ovvio. Notiamo che $\{f_n\} \subset \mathcal{C}_K^m(\Omega)$ converge a $f \in \mathcal{C}_K^m(\Omega)$ nel senso definito prima, se e solo se si ha convergenza nella norma $\|\cdot\|_{m,K}$. Dunque, $\mathcal{C}_K^m(\Omega)$ è uno spazio normato. Si ha di più:

Proposizione V.3

Lo spazio vettoriale $\mathcal{C}_K^m(\Omega)$ dotato della norma

$$\|f\|_{m,K} = \sum_{|\mathbf{p}| \leq m} \|D^{\mathbf{p}} f\|_{\infty}$$

è uno spazio di Banach.

Dimostrazione

La dimostrazione discende subito dal lemma V.2. Infatti, una successione $\{f_n\} \subset \mathcal{C}_K^m(\Omega)$ di Cauchy è di Cauchy (grazie al supporto contenuto in K) anche in $\mathcal{C}^m(\Omega)$. Ne viene che essa converge a una funzione $f \in \mathcal{C}^m(\Omega)$ nella norma del lemma V.2 e quindi nella norma di questa proposizione. Inoltre, f è nulla fuori da K come limite uniforme, perciò puntuale, di funzioni nulle fuori da K .

(c.v.d.)

**Topologizzazione
di $\mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$**

Andiamo a topologizzare lo spazio $\mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$. A questo scopo introduciamo la distanza

$$d(f, g) \doteq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\min(\|f - g\|_{m,K}; 1)}{2^m}$$

Verifichiamo che la definizione sia ben posta. Anzitutto la serie a secondo membro è banalmente convergente. Siccome tale serie è a termini positivi, d è un'applicazione a valori non negativi. Certamente è simmetrica. La disuguaglianza triangolare si verifica immediatamente. Sia ora $d(f, g) = 0$, allora ciascun termine della serie è nullo, ne segue che per ogni m si ha $\|f - g\|_{m,K} = 0$, perciò $f = g$.

$\{f_n\} \subset (\mathcal{C}_K^\infty(\Omega); d)$ converge a f se e solo se per ogni m $\|f_n - f\|_{m,K} \rightarrow 0$. Dimostriamolo. Se $d(f_n, f) \rightarrow 0$ allora per ogni $0 < \varepsilon < 1$ esiste ν tale che

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\min(\|f_n - f\|_{m,K}; 1)}{2^m} < \varepsilon$$

se $n > \nu$, allora, per ogni $m \in \mathbb{N}$ si ha

$$\frac{\|f_n - f\|_{m,K}}{2^m} < \varepsilon$$

da cui $f_n \rightarrow f$ in $(\mathcal{C}_K^m(\Omega); \|\cdot\|_{m,K})$. Viceversa, per ogni $m \in \mathbb{N}$, $\|f_n - f\|_{m,K} \rightarrow 0$. Fissiamo M , allora per ogni $0 < \varepsilon < 1$ esiste ν tale che se $n > \nu$, si ha

$$\|f_n - f\|_{m,K} < \varepsilon, \forall m \leq M$$

Preso dunque $n > \nu$ abbiamo

$$d(f_n, f) = \sum_{m=0}^M \frac{\min(\|f_n - f\|_{m,K}; 1)}{2^m} + \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{\min(\|f_n - f\|_{m,K}; 1)}{2^m} \leq$$

$$\leq \sum_{m=0}^M \frac{\varepsilon}{2^m} + \sum_{m=M+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m \leq 2\varepsilon + \frac{1}{2^M}$$

visto che

$$\sum_{m=0}^M \frac{1}{2^m} = \frac{1 - (1/2)^{M+1}}{1 - (1/2)} = 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{M+1} \right]$$

Se adesso scegliamo $\varepsilon = 1/M$, abbiamo che per ogni M esiste $\nu(M) > 0$ per cui se $n > \nu(M)$ allora

$$d(f_n, f) \leq \frac{2}{M} + \frac{1}{2^M}$$

da cui si ricava la tesi.

Vale poi la seguente

Proposizione V.4 *Lo spazio metrico $(\mathcal{C}_K^\infty(\Omega); d)$ è completo.*

Dimostrazione Sia $\{f_n\} \subset \mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$ una successione di Cauchy nella metrica d . Allora f_n è di Cauchy nella norma $\|\cdot\|_{m,K}$ per ogni $m \in \mathbb{N}$. Di conseguenza f_n converge nella norma detta a una funzione $f \in \mathcal{C}_K^m(\Omega)$ per ogni $m \in \mathbb{N}$. Sicché $f \in \mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$ e f_n converge in d a f per le considerazioni (c.v.d.) precedenti.

Topologizzazione di $\mathcal{C}^m(\Omega)$ Andiamo a considerare gli spazi $\mathcal{C}^m(\Omega)$. Sia K_i una successione crescente di compatti tali che

$$\Omega \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i$$

Definiamo allora la seguente metrica in $\mathcal{C}^m(\Omega)$:

$$\delta^m(f, g) \doteq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\min(\|f - g\|_{m, K_i}; 1)}{2^i}$$

Mostriamo che δ^m è una distanza.

Vediamo che la nozione di convergenza introdotta in precedenza coincide con la convergenza nella metrica δ^m . Sia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta^m(f_n, f) = 0$$

allora per ogni $0 < \varepsilon < 1$ esiste ν tale che se $n > \nu$ allora

$$\frac{\|f - f_n\|_{m, K_i}}{2^i} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\min(\|f - f_n\|_{m, K_i}; 1)}{2^i} < \varepsilon$$

perciò $D^{\mathbf{p}}f_n \rightarrow D^{\mathbf{p}}f$ su ogni K_i , per ogni multi-indice con $|\mathbf{p}| \leq m$. Dato un qualsiasi compatto sottoinsieme di Ω , esso sarà contenuto in un K_i di qui la tesi.

Viceversa f_n converga a f nel senso convenuto precedentemente. Allora su ogni compatto si ha

$$\|f - f_n\|_{m, K} \rightarrow 0$$

in particolare, per ogni $i \in \mathbb{N}$, si ha

$$\|f - f_n\|_{m, K_i} \rightarrow 0$$

Fissiamo $M \in \mathbb{N}$. Per ogni $0 < \varepsilon < 1$ troviamo ν per cui, se $n > \nu$ allora

$$\|f - f_n\|_{m, K_i} < \varepsilon$$

per ogni $i \leq M$. Dunque,

$$\delta^m(f_n, f) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\min(\|f - f_n\|_{m, K_i}, 1)}{2^i} \leq \sum_{i=0}^M \frac{\varepsilon}{2^i} + \sum_{i=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \leq 2\varepsilon + \frac{1}{2^M}$$

scelto $\varepsilon = 1/M$ abbiamo la tesi.

Ancora

Proposizione V.5 *Lo spazio metrico $(\mathcal{C}^m(\Omega), \delta^m)$ è completo.*

Dimostrazione Sia $\{f_n\} \subset (\mathcal{C}^m(\Omega), \delta^m)$ di Cauchy. Allora, per ogni i , la successione $\{f_n|_{K_i}\}$ è di Cauchy nella norma $\|\cdot\|_{m, K_i}$. Dal lemma V.2, preso come aperto D l'insieme $\text{int}(K_{i+1})$, questo implica che $f_n|_{K_i}$ converge, rispetto a $\|\cdot\|_{m, K_i}$, a una funzione f^i di classe $\mathcal{C}^m$. Ovviamente $f^{i+1}|_{K_i} = f^i$ perciò, in definitiva, la convergenza di ciascuna $f_n|_{K_i}$ è a $f|_{K_i}$ di classe $\mathcal{C}^m$. Siccome si ha convergenza della successione a f su ogni compatto contenuto in Ω , per le (c.v.d.) considerazioni precedenti, si ha la tesi.

Topologizzazione di $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ La metrica che introduciamo su $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ è la seguente

$$\delta_\Omega(f, g) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\min(\delta^m(f, g); 1)}{2^m}$$

Il fatto che si tratti di una distanza è evidente (si tratta di fare gli stessi ragionamenti fatti nelle altre occasioni...). Anche il discorso sulla convergenza è identico a quello fatto prima, perciò lo omettiamo.

Proposizione V.6 *Lo spazio metrico $(\mathcal{C}^\infty(\Omega), \delta_\Omega)$ è completo.*

Dimostrazione Sia $\{f_n\} \subset (\mathcal{C}^\infty(\Omega), \delta_\Omega)$ di Cauchy. Allora, per ogni m , la successione $\{f_n\}$ è di Cauchy rispetto alla distanza δ^m . Questo implica che f_n converge, rispetto a δ^m , a una funzione f di classe $\mathcal{C}^m$. Siccome questo vale per ogni m (la funzione limite non cambia al variare di m !) allora f è di classe $\mathcal{C}^\infty$ ed è limite secondo δ_Ω di f_n . (c.v.d.)

Convergenza in $\mathcal{C}_c^m(\Omega)$ e $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ Annotiamo che è d'uso denotare con $\mathcal{D}(\Omega)$ lo spazio $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ e con $\mathcal{D}$ lo spazio $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^\ell)$. Spesso ci atterremo a questa convenzione. Veniamo a presentare le nozioni di convergenza negli spazi di funzioni lisce a supporto compatto. Diciamo che una successione $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a valori in $\mathcal{C}_c^m(\Omega)$ converge a $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ se esiste un compatto K tale che

$$\text{supp } \varphi_n \subset K, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{supp } \varphi \subset K$$

e tale che $\|\varphi_n - \varphi\|_{m, K} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Analogamente, se $m = \infty$, basta sostituire alla norma di $\mathcal{C}_K^m$ la metrica di $\mathcal{C}_K^\infty$.

V.1.2 Teoremi di densità

Prodotto di convoluzione Per dimostrare i teoremi di densità ci occorre la nozione di prodotto di convoluzione. Ambientiamo inizialmente il prodotto di convoluzione in $\mathcal{C}_c^m(\mathbb{R}^\ell) = \mathcal{D}$. Se $f, g \in \mathcal{C}_c^m(\mathbb{R}^\ell)$, allora definiamo la funzione

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^\ell} f(x - y) g(y) d\mu(y)$$

prodotto di convoluzione di f e g . La definizione data è buona, visto che l'integrale si estende su un insieme limitato ove le funzioni sono limitate (perché continue). Il supporto di $f * g$ è chiaramente compatto, essendo

$$\text{supp } f * g \subset \text{supp } f + \text{supp } g$$

Il prodotto di convoluzione è commutativo, posto $z = x - y$, si ha

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^\ell} f(x - y) g(y) d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^\ell} f(z) g(x - z) d\mu(z) = (g * f)(x)$$

Grazie al teorema di derivazione sotto segno (probabilmente noto al lettore, ma che, comunque, dimostreremo nella prossima sezione) si ha che $f * g$ è derivabile con continuità m volte, cioè $f * g \in \mathcal{C}_c^m(\mathbb{R}^\ell)$. In particolare $\mathcal{D}$ è stabile per convoluzione. Si ha di più

$$D^{\mathbf{p}}(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^\ell} D^{\mathbf{p}}f(x - y) g(y) d\mu(y) = ((D^{\mathbf{p}}f) * g)(x)$$

Ora, applicando il teorema di Fubini e il teorema di integrazione per parti, si ha che

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^\ell} \frac{\partial}{\partial x_i} f(x - y) g(y) d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^\ell} -\frac{\partial}{\partial y_i} f(x - y) g(y) d\mu(y) =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^{\ell-1}} d\mu(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_\ell) \int_{\mathbb{R}} -\frac{\partial}{\partial y_i} f(x-y) g(y) d\mu(y_i) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^{\ell-1}} d\mu(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_\ell) \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \frac{\partial}{\partial y_i} g(y) d\mu(y_i) \\
&= \left(f * \frac{\partial}{\partial y_i} g \right) (x)
\end{aligned}$$

per induzione,

$$D^{\mathbf{P}}(f * g)(x) = ((D^{\mathbf{P}}f) * g)(x) = (f * D^{\mathbf{P}}g)(x).$$

Il prodotto di convoluzione è anche continuo in $\mathcal{D}$, come si verifica subito tramite il teorema di Lebesgue.

**Regolarizzazione
delle funzioni:
successione
di Dirac**

Vogliamo adesso mostrare alcuni teoremi di densità degli spazi di funzioni lisce introdotti. Cominciamo con il vedere che lo spazio $\mathcal{D}$ contiene elementi non banali. Cominciamo con il considerare la funzione definita sull'asse reale

$$\rho(x) \doteq \begin{cases} e^{-1/x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Si vede facilmente che $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Adesso, per $x \in \mathbb{R}^\ell$ poniamo

$$\varphi(x) = \rho(1 - |x|^2)$$

La funzione φ è non negativa, di classe $\mathcal{C}^\infty$ ed è nulla per $|x|^2 \leq 1$. Se $a = \int \varphi d\mu$, poniamo

$$\chi = \frac{\varphi}{a}$$

ed abbiamo ricavato una funzione appartenente a $\mathcal{D}$, non negativa, a integrale unitario e a supporto nella chiusura della 1-palla di centro l'origine. La successione a valori in $\mathcal{D}$

$$\chi_n(x) = n^\ell \chi(nx), \quad n \in \mathbb{N}^\times$$

si dice successione **regolarizzante di Dirac**. Notiamo che χ_n ha supporto nella palla chiusa di raggio $1/n$ e ha integrale sempre pari a 1. Il fatto che χ_n sia "regolarizzante" è dimostrato nella seguente

Proposizione V.7 *Sia $\psi \in \mathcal{C}_c^m(\mathbb{R}^\ell)$, per $m \in \mathbb{N}$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ la funzione $\psi * \chi_n \in \mathcal{D}$ e la successione $\{\chi_n * \psi\}$ converge in $\mathcal{C}_c^m(\mathbb{R}^\ell)$ a ψ .*

Dimostrazione

Ricordiamo che si definisce prodotto di convoluzione delle funzioni ψ e χ_n la funzione

$$(\chi_n * \psi)(x) = \int_{\mathbb{R}^\ell} \chi_n(x-y) \psi(y) d\mu(y)$$

Si ha subito che, avendo χ_n e ψ supporti compatti, il loro prodotto di convoluzione è a supporto compatto:

$$\text{supp}(\chi_n * \psi) \subset \text{supp}(\psi) + \text{supp}(\chi_n) \subset \text{supp}(\psi) + B^a(0, 1/n) \subset \text{supp}(\psi) + B^a(0, 1)$$

Inoltre, applicando il teorema di derivazione sotto segno (che vale in modo ovvio) si ha che la convoluzione è infinitamente derivabile, perciò $\chi_n * \psi \in \mathcal{D}$. Inoltre,

$$D^{\mathbf{P}}(\chi_n * \psi) = (D^{\mathbf{P}}\psi * \chi_n)$$

Ora, dato che il supporto di χ_n è contenuto nella $1/n$ palla chiusa e dato che χ_n ha integrale unitario, si ha

$$\begin{aligned}
|D^{\mathbf{P}}(\chi_n * \psi)(x) - D^{\mathbf{P}}\psi(x)| &= |(D^{\mathbf{P}}\psi * \chi_n)(x) - D^{\mathbf{P}}\psi(x)| = \\
&= \left| \int_{|y| \leq 1/n} [D^{\mathbf{P}}\psi(x-y) - D^{\mathbf{P}}\psi(x)] \chi_n(y) d\mu(y) \right| \leq \\
&\leq \sup_{x, z \in \mathbb{R}^\ell; |z-x| < 1/n} |D^{\mathbf{P}}\psi(z) - D^{\mathbf{P}}\psi(x)|
\end{aligned}$$

Tuttavia, $D^{\mathbf{P}}\psi$ è continua e a supporto compatto, perciò è uniformemente continua. Ne viene che scelto ε si trova ν tale che se $n > \nu$ allora il secondo membro della disuguaglianza di sopra (c.v.d.) è minore di ε , da cui si ha la tesi.

Si noti come non si è usata la forma particolare di χ_n , ma solo il fatto che ha supporto che si stringe attorno a un punto e che ha integrale costantemente unitario.

In ogni caso, abbiamo che $\mathcal{D}$ è denso in ogni $\mathcal{C}_c^m(\mathbb{R}^\ell)$, dunque, se $n < m$ allora $\mathcal{C}_c^m(\mathbb{R}^\ell)$ è denso in $\mathcal{C}_c^n(\mathbb{R}^\ell)$, in quanto il primo contiene un sottoinsieme che è denso nel secondo. La stessa cosa può essere generalizzata agli spazi $\mathcal{C}_c^m(\Omega)$ con il seguente

Corollario V.8 *Lo spazio $\mathcal{D}(\Omega)$ è denso in ogni $\mathcal{C}_c^m(\Omega)$ per ogni $m \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione Sia $\varphi \in \mathcal{C}_c^m(\Omega)$, allora possiamo vederlo come elemento di $\mathcal{C}_c^m(\mathbb{R}^\ell)$ estendo φ fuori da Ω per continuità, cioè ponendo $\varphi = 0$. Ora,

$$\text{supp}(\chi_n * \varphi) \subset \text{supp}(\varphi) + B(0, 1/n)^a$$

per cui, per n abbastanza grande $\text{supp}(\chi_n * \varphi) \subset \Omega$. Dunque, $\chi_n * \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ (definitivamente) e converge, per la proposizione precedente, a φ nella norma di $\mathcal{C}_c^m(\Omega)$.

(c.v.d.)

In conclusione le inclusioni

$$\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \subset \dots \subset \mathcal{C}_c^0(\Omega) = \mathcal{C}_c(\Omega)$$

sono **continue** e **dense** (cioè le iniezioni date dall'identità di uno spazio nell'altro sono applicazioni continue, con immagine densa).

Riprendiamo adesso il teorema di partizione dell'unità dimostrato nel corso del capitolo I nel corso dello studio del teorema di rappresentazione di Riesz-Markov. Abbiamo

Teorema V.9
(partizione $\mathcal{C}^\infty$
dell'unità)

‘e un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^\ell$ e $U_1, \dots, U_n$ è un suo ricoprimento finito, allora esistono n funzioni $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ appartenenti a $\mathcal{D}$, tali che, per $i \in J_n$

$$0 \leq \varphi_i \leq 1, \text{ supp } \varphi_i \subset U_i$$

e per $x \in K$

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i(x) = 1$$

Dimostrazione Nel teorema di partizione dell'unità di cui al capitolo I, avevamo dimostrato l'esistenza di funzioni h_i rispondenti alla tesi del presente teorema, ma di classe $\mathcal{C}^0$ e non $\mathcal{C}^\infty$. Ora, sia $U = \bigcup_{i \in J_n} U_i$ e poniamo

$$d = d(K, U^c)$$

Sia

$$K' = \{x \mid d(x, K) \leq d/2\}$$

allora l'insieme K' è compatto e si ha

$$K \subset \{x \mid d(x, K) < d/2\} \subset \text{int } K'$$

perciò $K \subset \text{int } K' \subset K' \subset U$. Applichiamo il vecchio teorema di partizione a K' determinando le funzioni continue h_i a supporto contenuto in U_i e tali che

$$\sum_{i=1}^n h_i(x) = 1, x \in K'$$

Definiamo adesso $\delta = d(K, (\text{int } K')^c)$, $\eta_i = d(\text{supp } h_i, U_i^c)$ e

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min(\delta, \eta_i)$$

Sia ora χ la funzione regolarizzante definita in apertura di sottosezione e poniamo

$$u(x) = \varepsilon^d \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

allora $u \in \mathcal{D}$ è non negativa, ha integrale unitario e supporto contenuto nella ε -palla chiusa di centro l'origine. Per ogni $i \in J_n$ poniamo $\varphi_i = u * h_i$ di modo che $\varphi_i \in \mathcal{C}^\infty$ e

$$\text{supp } \varphi_i \subset \text{supp } h_i + B(0, \varepsilon)^a \subset U_i$$

cioè $\varphi \in \mathcal{D}$. Resta da vedere che per ogni $x \in K$ si ha $\sum \varphi_i(x) = 1$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^\ell} u(x-y) h_i(y) d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^\ell} \sum_{i=1}^n u(x-y) h_i(y) d\mu(y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^\ell} \sum_{i=1}^n u(z) h_i(x-z) d\mu(z) \end{aligned}$$

d'altronde, per $x \in K$ e $z \in B(0, \varepsilon)^a$ si ha $x-z \in K'$ e dunque

$$\sum_{i=1}^n u(z) h_i(x-z) = u(z) \sum_{i=1}^n h_i(x-z) = u(z)$$

perciò

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i(x) = \int_{\mathbb{R}^\ell} u(z) d\mu(z) = 1$$

(c.v.d.) come si voleva.

Conseguentemente troviamo un altro risultato di densità: se denotiamo, come è d'uso, con $\mathcal{E}(\Omega)$ lo spazio $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, abbiamo

Proposizione V.10 *Lo spazio $\mathcal{D}(\Omega)$ è denso in $\mathcal{E}(\Omega)$ e in $\mathcal{C}^m(\Omega)$ per ogni $m \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione Sia K_n una successione crescente (nel senso che $K_n \subset \text{int } K_{n+1}$) di compatti avente unione che include Ω . Dal teorema di partizione dell'unità, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste un elemento $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ tale che

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varphi_n \leq 1 \\ \varphi_n(x) &= 1, x \in K_n \\ \text{supp } \varphi_n &\subset K_{n+1} \end{aligned}$$

Se $f \in \mathcal{E}(\Omega)$, abbiamo $f\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Se K è un sottoinsieme compatto di Ω , esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $K \subset \text{int}(K_N)$, perciò, per ogni $n > N$ e $\mathbf{p} \in \mathbb{N}^\ell$ abbiamo $D^{\mathbf{p}} f \varphi_n = D^{\mathbf{p}} f$ su K . Da cui $\{f\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ converge in $\mathcal{E}(\Omega)$ a f , come volevamo dimostrare. Analogamente si dimostra che $\mathcal{C}_c^m$ è denso in $\mathcal{E}^m$, ma $\mathcal{D}$ è denso in $\mathcal{C}_c^m$, da cui $\mathcal{D}$ è denso in $\mathcal{C}^m$.

Mostriamo, a margine, l'esistenza di N per cui $K \subset \text{int}(K_n)$: K è un compatto un cui ricoprimento aperto è dato dalla successione $\text{int } K_n$, dunque K è ricoperto da un numero finito di $\text{int}(K_n)$ e perciò (crescenza) da un solo $\text{int}(K_N)$.

In particolare ricaviamo che le inclusioni

$$\mathcal{E}(\Omega) = \mathcal{C}^\infty(\Omega) \subset \dots \subset \mathcal{C}^0(\Omega) = \mathcal{C}(\Omega)$$

sono iniezioni continue a immagini dense.

V.1.3 Lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$ delle funzioni a decrescenza rapida

Funzioni a decrescenza rapida

Veniamo ora a descrivere lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$ delle **funzioni a decrescenza rapida**, oppure spazio di Schwartz. Siano $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{N}^\ell$ due multi-indici e sia $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^\ell)$; con $f^{\mathbf{k}, \mathbf{l}}$ indichiamo la funzione

$$f^{\mathbf{k}, \mathbf{l}}(x) = x_1^{k_1} \dots x_\ell^{k_\ell} D^{\mathbf{l}} f(x)$$

Ora, l'insieme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$ è costituito dalle funzioni $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^\ell)$, tali che

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |f^{\mathbf{k}, \mathbf{l}}(x)| = 0, \forall \mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{N}^\ell.$$

Si noti come se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$, allora $f^{\mathbf{k}, \mathbf{l}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$, perciò $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$ è stabile rispetto alla derivazione di qualsiasi ordine e alla moltiplicazione per un polinomio di qualsiasi grado.

Nozione di convergenza

Una successione $\{f_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$ converge a $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$ se $f_n^{\mathbf{k}, \mathbf{l}} \rightarrow f^{\mathbf{k}, \mathbf{l}}$ uniformemente per ogni multi-indice $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{N}^\ell$. Come si vede la nozione di convergenza che si utilizza in $\mathcal{S}$ non usa i compatti come avveniva per gli spazi di funzioni continue, questo consente di avere un

controllo globale dell'andamento all'infinito di tutti i termini della successione, come avremo modo di apprezzare in seguito.

Il duale topologico $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^\ell)$ di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$ si dice **spazio delle distribuzioni temperate**.

Evidentemente $\mathcal{D}$ è contenuto in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$, ma l'inclusione è propria, come mostra l'esempio della funzione introdotta in precedenza

$$\exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right), x \in \mathbb{R}^\ell$$

che è a decrescenza rapida, ma non a supporto compatto.

Vediamo la seguente

Proposizione V.11 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^\ell)$ appartiene a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$ se e solo se verifica una delle seguenti condizioni

(i) $f^{\mathbf{k}, \mathbf{l}}$ è limitata per ogni $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{N}^\ell$;

(ii) la funzione

$$x \mapsto \left(1 + |x|^2\right)^k D^{\mathbf{l}} f(x)$$

è limitata per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $\mathbf{l} \in \mathbb{N}^\ell$.

Dimostrazione Cominciamo con l'asserto (i). Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$ allora

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |f^{\mathbf{k}, \mathbf{l}}(x)| = 0$$

perciò, essendo $f^{\mathbf{k}, \mathbf{l}}(x)$ continua, si ha che esiste $M_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}$ per cui

$$|f^{\mathbf{k}, \mathbf{l}}(x)| \leq M_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}, \forall x \in \mathbb{R}^\ell$$

Viceversa, valga la disuguaglianza di sopra. Si ha

$$f^{\mathbf{k}, \mathbf{l}}(x) = x^{\mathbf{k}} D^{\mathbf{l}} f(x) = \frac{x^{\mathbf{k}}}{x^{\mathbf{k}_0}} x^{\mathbf{k}_0} D^{\mathbf{l}} f(x)$$

preso $\mathbf{k}_0 = (k_1 + 1, \dots, k_\ell + 1) = \mathbf{k} + (1, \dots, 1)$, si conclude

$$|f^{\mathbf{k}, \mathbf{l}}(x)| \leq \left| \frac{x^{\mathbf{k}}}{x^{\mathbf{k}_0}} \right| M_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} \rightarrow 0$$

Vediamo adesso (ii). Sia $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$, allora certamente la funzione considerata è limitata, essendo data da un polinomio per $D^{\mathbf{l}} f(x)$, dunque continua e tendente a 0 all'infinito. Vediamo il viceversa. Si ha

$$\left| \left(1 + \sum_{r=1}^{\ell} x_r^2\right)^k D^{\mathbf{l}} f(x) \right| \leq M$$

Fissato un qualunque $\mathbf{k}$ ci basta trovare k di modo che

$$\left| \frac{x^{\mathbf{k}}}{\left(1 + \sum_{r=1}^{\ell} x_r^2\right)^k} \right| \rightarrow 0$$

(c.v.d.) e per questo è sufficiente $k > |\mathbf{k}|$.

Topologizzazione di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$ Si tratta adesso di dare una conveniente metrizzazione di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$. Per le funzioni q volte derivabili con continuità e che decadono all'infinito più delle potenze p -esime poniamo

$$\|f - g\|_{p,q} \doteq \sum_{|\mathbf{k}| \leq p, |\mathbf{l}| \leq q} \|f^{\mathbf{k}, \mathbf{l}} - g^{\mathbf{k}, \mathbf{l}}\|_\infty$$

Una successione f_n converge a f se e solo se ciascuna $f_n^{\mathbf{k}, \mathbf{l}}$ converge uniformemente a $f^{\mathbf{k}, \mathbf{l}}$. Per metrizzare lo spazio $\mathcal{S}$ ci basta porre

$$\delta_{\mathcal{S}}(f, g) = \sum_{p,q} \frac{\min(\|f - g\|_{p,q}; 1)}{2^{p+q}}$$

La nozione di convergenza introdotta da questa distanza è quella cercata. Infatti, se $\delta_S(f_n, f) \rightarrow 0$ allora per ogni ε' si trova ν tale che se $n > \nu$ allora

$$\delta_S(f_n, f) < \varepsilon'$$

d'altra parte, fissati p, q si può scegliere $2^{p+q}\varepsilon' \doteq \varepsilon < 1$ di modo che

$$\frac{\min(\|f - f_n\|_{p,q}; 1)}{2^{p+q}} \leq \delta_S(f_n, f) < \varepsilon'$$

cioè, se $n > \nu$

$$\|f - f_n\|_{p,q} < \varepsilon$$

Quindi, per ogni $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ si ha $x^{\mathbf{p}} D^{\mathbf{q}} f_n \rightarrow x^{\mathbf{p}} D^{\mathbf{q}} f$. Viceversa, fissiamo $P, Q > 0$. Fissiamo ε troviamo ν tale che per $n > \nu$, $p \leq P$ e $q \leq Q$ si ha

$$\|f - f_n\|_{p,q} < \varepsilon$$

dunque, $n > \nu$ implica

$$\delta_S(f, f_n) \leq \sum_{p \leq P, q \leq Q} \frac{\varepsilon}{2^{p+q}} + \sum_{p > P, q > Q} \frac{1}{2^{p+q}}$$

La prima somma è inferiore a $\varepsilon/2$. La seconda è la coda di una serie geometrica: siccome quest'ultima converge si possono scegliere P, Q di modo da rendere la coda inferiore a $\varepsilon/2$. La tesi.

Infine, resta da vedere la completezza di $\mathcal{S}$. Data una successione $\{f_n\} \subset \mathcal{S}$ di Cauchy, essa è di Cauchy in ogni $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^\ell)$, perciò esiste f cui la successione f_n converge uniformemente. Inoltre, tutte le $D^{\mathbf{k}} f_n$ convergono a $D^{\mathbf{k}} f$ e $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^\ell)$ come dimostrato precedentemente. Vediamo adesso che $x^{\mathbf{l}} D^{\mathbf{k}} f_n$ converge uniformemente a $x^{\mathbf{l}} D^{\mathbf{k}} f$. A questo scopo basta notare che la successione $x^{\mathbf{l}} D^{\mathbf{k}} f_n$ converge puntualmente a $x^{\mathbf{l}} D^{\mathbf{k}} f$, ma dovendo ammettere anche limite uniforme, questo è eguale al limite puntuale.

Infine, dobbiamo vedere che

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^{\mathbf{l}} D^{\mathbf{k}} f = 0$$

a questo scopo basta notare che

$$|x^{\mathbf{l}} D^{\mathbf{k}} f| \leq |x^{\mathbf{l}} D^{\mathbf{k}} f_n - x^{\mathbf{l}} D^{\mathbf{k}} f| + |x^{\mathbf{l}} D^{\mathbf{k}} f_n|$$

dunque, si sceglie n affinché il primo addendo sia inferiore a $\varepsilon/2$, e poi R di modo che per $|x| > R$ il secondo addendo stia sotto $\varepsilon/2$. In definitiva,

Proposizione V.12 *Lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$ delle funzioni a decrescenza rapida è uno spazio metrico completo.*

**Prodotto di
convoluzione
in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$**

Anche su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$ si definisce il prodotto di convoluzione

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^\ell} f(x-y) g(y) d\mu(y),$$

infatti, all'infinito le due funzioni scendono più rapidamente di $1/|y|^2$. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$ è stabile per convoluzione. Per vederlo cominciamo con lo stimare la quantità

$$|D^{\mathbf{l}}(f * g)(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^\ell} D^{\mathbf{l}} f(x-y) g(y) d\mu(y) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^\ell} |D^{\mathbf{l}} f(x-y) g(y)| d\mu(y)$$

dove $D^{\mathbf{l}}$ commuta con l'integrale, perché le funzioni a decrescenza rapida sono sommabili con derivate sommabili. In definitiva, non resta che mostrare che moltiplicando per x_1 , la funzione

$$x_1(f * g)(x)$$

è ancora limitata, per poi concludere usando l'induzione e il punto (i) della proposizione che caratterizza $\mathcal{S}$: basta notare che

$$|x_1(f * g)(x)| = |(x_1 f * g)(x) + (f * x_1 g)(x)|$$

Consideriamo ancora una successione regolarizzante χ_n (successione non negativa a valori in $\mathcal{D}$ con integrale sempre 1 e supporto che si stringe entro la palla $1/n$) vogliamo dimostrare che, ancora

$$\mathcal{S} - \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n * \varphi = \varphi$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \left| \int [\varphi(x-y) - \varphi(x)] \chi_n(y) d\mu(y) \right| &\leq \int |\varphi(z) - \varphi(x)| \chi_n(x-z) d\mu(y) = \sup_{|z-x| \leq 1/n} |\varphi(z) - \varphi(x)| = \\ &= \sup_{|z-x| \leq 1/n} \left| \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x + \theta(z-x))(z-x) \right| \leq \sup_x \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| \frac{1}{n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

analogamente per le derivate. Invece, per la moltiplicazione per i monomi, basta vedere

$$\begin{aligned} \left| \int [(x-y)\varphi(x-y) - x\varphi(x)] \chi_n(y) d\mu(y) \right| &\leq \int |z\varphi(z) - x\varphi(x)| \chi_n(x-z) d\mu(y) \leq \\ &\leq \sup_{|z-x| \leq 1/n} |z\varphi(z) - x\varphi(x)| \leq \\ &\leq \sup_{|z-x| \leq 1/n} |z\varphi(z) - z\varphi(x)| + \sup_{|z-x| \leq 1/n} |z\varphi(x) - x\varphi(x)| \end{aligned}$$

il secondo termine converge banalmente a 0. Per il secondo si sfrutta la limitatezza di $z\partial\varphi/\partial z$ e si usa il teorema del valor medio. Torneremo a usare questo risultato quando mostreremo che $\mathcal{S}$ è denso nel suo duale topologico $\mathcal{S}'$.

**Teoremi
di densità
per $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$**

Notando che $\mathcal{D}$ è denso in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^\ell)$ che è denso in $L^p(\mathbb{R}^\ell)$, si ottiene che $\mathcal{D}$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^\ell)$. Infine, essendo $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$, si ottiene che $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^\ell)$. Inoltre,

Proposizione V.13 *Lo spazio $\mathcal{D}(\mathbb{R}^\ell)$ è denso in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$.*

Dimostrazione

Consideriamo una funzione $\varphi_1 \in \mathcal{C}^\infty$ che sia pari a 1 sulla palla $B(0, 1)^a$ e poi scenda a zero in modo da avere supporto contenuto in $B(0, 2)$. Consideriamo la successione $\varphi_n = \varphi_1(x/n)$. Essa ha supporto in $B(0, 2n)$ ed è identicamente eguale a 1 su $B(0, n)^a$.

Sia $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$. Vogliamo vedere che

$$\mathcal{S} - \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi \varphi_n = \varphi$$

In questo caso, avremmo la tesi, dal momento che $\varphi \varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^\ell)$ per ogni $n \in \mathbb{N}^\times$. Ricordando la regola di Leibniz

$$D^{\mathbf{p}}(fg) = \sum_{|\mathbf{q}| \leq |\mathbf{p}|} \binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}} D^{\mathbf{p}-\mathbf{q}} f D^{\mathbf{q}} g$$

dove

$$\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}} = \prod_{j=1}^{\ell} \binom{p_j}{q_j},$$

abbiamo

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^\ell} |x^{\mathbf{k}} D^{\mathbf{l}}(\varphi_n \varphi - \varphi)| &= \sup_{x \in \mathbb{R}^\ell} \left| \sum_{|\mathbf{j}| \leq |\mathbf{l}|} c_{\mathbf{j}} x^{\mathbf{k}} D^{\mathbf{j}} \varphi D^{\mathbf{l}-\mathbf{j}}(\varphi_n - 1) \right| \leq \\ &\leq \sum_{|\mathbf{j}| \leq |\mathbf{l}|} c_{\mathbf{j}} \sup_{|x| \geq N} |x^{\mathbf{k}} D^{\mathbf{j}} \varphi| \sup_{x \geq N} |D^{\mathbf{l}-\mathbf{j}}(\varphi_n - 1)| \leq \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{j=0}^l c_l^j \sup_{x \in \mathbb{R}^\ell} |x^{\mathbf{k}} D^{\mathbf{j}} \varphi| \sup_{x \in \mathbb{R}^\ell} |D^{\mathbf{l}-\mathbf{j}}(\varphi_n - 1)| = \end{aligned}$$

Ora, i due estremi superiori sono quantità finite grazie al fatto che $\varphi, \varphi_n \in \mathcal{S}$. Passando al (c.v.d.) limite per $N \rightarrow +\infty$, abbiamo la tesi.

V.2 Trasformata di Fourier in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$

V.2.1 La trasformata di Fourier

Cominciamo con l'introdurre la trasformata di Fourier sullo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$, anziché su $L^1(\mathbb{R}^\ell)$, per un motivo fondamentale: $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$ è Fourier-invariante, a differenza di $L^1(\mathbb{R}^\ell)$, questo

consente di introdurre l'operatore di trasformata e quello di antitrasformata fin da subito, per poi procedere a una loro estensione sullo spazio $L^2(\mathbb{R}^\ell)$, nel quale, come abbiamo dimostrato, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$ è denso.

È tempo di passare alla

Definizione V.1 Definiamo le due applicazioni, trasformata di Fourier,

$$\begin{aligned}\hat{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell) &\rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell) \\ f &\mapsto \hat{f}(k) \doteq \int_{\mathbb{R}^\ell} \exp(ik \cdot x) f(x) d\mu(x)\end{aligned}$$

e antitrasformata di Fourier

$$\begin{aligned}\check{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell) &\rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell) \\ f &\mapsto \check{f}(x) \doteq \frac{1}{(2\pi)^\ell} \int_{\mathbb{R}^\ell} \exp(-ik \cdot x) f(k) d\mu(k)\end{aligned}$$

Osservazione V.1 Entrambe le definizioni sono ben poste. Infatti, le integrande (per ogni k sopra, e x sotto) sono dominate da $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell) \subset L^1(\mathbb{R}^\ell)$.

Derivando sotto segno di integrale si ottiene subito che $\hat{f}$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$. Vediamo che per ogni coppia di multi-indici $\mathbf{n}, \mathbf{r}$ si ha che $\hat{f}^{\mathbf{n}, \mathbf{r}}$ è una funzione limitata:

$$\begin{aligned}\hat{f}^{\mathbf{n}, \mathbf{r}}(k) &= \frac{k^{\mathbf{n}}}{(2\pi)^{\ell/2}} D_k^{\mathbf{r}} \int_{\mathbb{R}^\ell} \exp(ik \cdot x) f(x) d\mu(x) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\ell/2}} \int_{\mathbb{R}^\ell} k^{\mathbf{n}} D_k^{\mathbf{r}} \exp(ik \cdot x) f(x) d\mu(x)\end{aligned}$$

ma

$$D_k^{\mathbf{r}} \exp(-ik \cdot x) = \prod_{j=1}^{\ell} \frac{\partial^{r_j}}{\partial k_j^{r_j}} \exp(ik_j x_j) = \prod_{j=1}^{\ell} i^{r_j} (x_j)^{r_j} \exp(ik_j x_j) = i^{|\mathbf{r}|} x^{\mathbf{r}} \exp(-ik \cdot x)$$

sicché, passando al modulo ed eliminando così le fasi delle derivazioni

$$\begin{aligned}|\hat{f}^{\mathbf{n}, \mathbf{r}}(k)| &= \left| \frac{1}{(2\pi)^{\ell/2}} \int_{\mathbb{R}^\ell} [D_x^{\mathbf{n}} \exp(ik \cdot x)] x^{\mathbf{r}} f(x) d\mu(x) \right| = \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^{\ell/2}} \int_{\mathbb{R}^\ell} |D_x^{\mathbf{n}} (x^{\mathbf{r}} f(x))| d\mu(x) < \infty\end{aligned}$$

- dove si è integrato per parti.

Osservazione V.2 Trasformata e antitrasformata sono legate nel modo che segue

$$\check{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^\ell} \left[\widehat{f^*}(k) \right]^*$$

Infatti,

$$\frac{1}{(2\pi)^\ell} \left[\widehat{f^*}(k) \right]^* = \frac{1}{(2\pi)^\ell} \left[\int_{\mathbb{R}^\ell} f^*(x) e^{ik \cdot x} d\mu(x) \right]^* = \frac{1}{(2\pi)^\ell} \int_{\mathbb{R}^\ell} f(x) e^{-ik \cdot x} d\mu(x) = \check{f}(k)$$

Grazie a questa osservazione, riconduciamo facilmente le proprietà dell'antitrasformata a quelle della trasformata.

-

Prima di procedere ad esaminare le proprietà più intrinseche delle trasformate di Fourier, vediamo subito alcuni fatti tecnici molto utili:

Proposizione V.14 Abbiamo

(i) teoremi di traslazione,

$$\begin{aligned}g(x) &= e^{ia \cdot x} f(x) \implies \hat{g}(k) = \hat{f}(k + a) \\ g(x) &= f(x + a) \implies \hat{g}(k) = e^{-ia \cdot k} \hat{f}(k)\end{aligned}$$

(ii) teorema di convoluzione,

$$g(x) = (f * h)(x) \implies g(k) = \hat{f}(k) \hat{h}(k)$$

(iii) teorema di parità,

$$g(x) = f(-x) \implies \hat{g}(k) = (2\pi)^\ell \check{f}(k)$$

(iv) teorema di cambiamento di scala,

$$g(x) = f(\varepsilon x), \varepsilon > 0 \implies \hat{g}(k) = \frac{1}{\varepsilon} \hat{f}\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)$$

(v) teorema di derivazione,

$$g(x) = x_j^n f(x) \implies \hat{g}(k) = (-i)^n \frac{\partial^n}{\partial k_j^n} \hat{f}(k)$$

$$g(x) = i^n \frac{\partial^n}{\partial x_j^n} f(x) \implies \hat{g}(k) = k_j^n \hat{f}(k)$$

(vi) trasformata della gaussiana,

$$g(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}|x|^2\right) \implies \hat{g}(k) = (2\pi)^{\ell/2} g(k)$$

DimostrazioneTeoremi di traslazione. Posto $g(x) = e^{ia \cdot x} f(x)$ si ha

$$\hat{F}(e^{ia \cdot x} f)(k) = \int e^{ia \cdot x} f(x) e^{ik \cdot x} d\mu(x) = \int f(x) e^{i(k+a) \cdot x} d\mu(x) = \hat{f}(k+a)$$

Posto $g(x) = f(x+a)$ si ha

$$\hat{F}(g)(k) = \int f(x+a) e^{ik \cdot x} d\mu(x) = \int f(y) e^{ik \cdot (y-a)} d\mu(y) = e^{-ik \cdot a} \hat{f}(k)$$

Convoluzione. Grazie al fatto che $f, g \in L^1$, vale il teorema di Fubini perciò

$$\begin{aligned} \hat{F}(f * g)(k) &= \int d\mu(x) e^{ik \cdot x} \int d\mu(y) f(x-y) g(y) = \int d\mu(y) g(y) \int d\mu(x) e^{ik \cdot x} f(x-y) = \\ &= \int d\mu(y) g(y) \int d\mu(z) e^{ik \cdot z} e^{ik \cdot y} f(z) = \hat{f}(k) \int d\mu(y) g(y) e^{ik \cdot y} = \hat{f}(k) \hat{g}(k) \end{aligned}$$

Parità. Posto $g(x) = f(-x)$ si ha

$$\hat{F}(g)(k) = \int f(-x) e^{ik \cdot x} d\mu(x) = \int f(y) e^{-ik \cdot y} d\mu(y) = (2\pi)^\ell \check{F}(f)(k)$$

Cambiamento di scala. Posto $g(x) = f(\varepsilon x)$ si ha

$$\hat{F}(g)(k) = \int f(\varepsilon x) e^{ik \cdot x} d\mu(x) = \frac{1}{\varepsilon} \int f(y) e^{ik \cdot y/\varepsilon} d\mu(y) = \frac{1}{\varepsilon} \hat{f}\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)$$

Derivazione. Posto $g(x) = x_j^n f(x)$ si ha

$$\begin{aligned} \hat{F}(g)(k) &= \int x_j^n f(x) e^{ik \cdot x} d\mu(x) = \frac{1}{i^n} \int f(x) \frac{\partial^n}{\partial k_j^n} e^{ik \cdot x} d\mu(x) = \\ &= \frac{1}{i^n} \frac{\partial^n}{\partial k_j^n} \int f(x) e^{ik \cdot x} d\mu(x) = (-i)^n \frac{\partial^n}{\partial k_j^n} \hat{f}(k) \end{aligned}$$

Posto $g(x) = i^n (\partial^n / \partial x_j^n) f(x)$ si ha

$$\begin{aligned} \hat{F}(g)(k) &= i^n \int \frac{\partial^n}{\partial x_j^n} f(x) e^{ik \cdot x} d\mu(x) = \\ &= i^n \int_{i \neq j} d\mu(x_i) e^{ik_i \cdot x_i} \int d\mu(x_j) \frac{\partial^n}{\partial x_j^n} f(x) e^{ik_j x_j} = \\ &= k_j^n \int d\mu(x) e^{ik \cdot x} f(x) = k_j^n \hat{f}(k) \end{aligned}$$

Trasformata della gaussiana. Più in generale cerchiamo la trasformata di Fourier di $e^{-a|x|^2}$ abbiamo

$$\int d\mu(x) e^{-a|x|^2} e^{ik \cdot x} = \prod_{i=1}^{\ell} \int d\mu(x_i) e^{-ax_i^2} e^{ik_i x_i}$$

cioè si tratta di calcolare

$$\hat{F}(e^{-ax^2})(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{ikx} dx$$

L'integrale scritto coincide con l'integrale sulla linea γ , data da $\text{Im } z = 0$, di $e^{-az} e^{ikz}$ funzione evidentemente intera. Dunque,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{ikx} dx = \int_{\gamma} e^{-az^2} e^{ikz} dz = e^{-k^2/4a} \int_{\gamma} e^{-(\sqrt{a}z - ik/2\sqrt{a})^2} dz$$

Consideriamo il rettangolo compreso tra $-r$ e r e tra γ e γ' data da $\text{Im } z = k/2a$. L'integrale sul bordo del rettangolo è nullo, i contributi sui lati verticali si elidono, perciò, passando al limite per $r \rightarrow \infty$

$$\int_{\gamma} e^{-(\sqrt{a}z - ik/2\sqrt{a})^2} dz = \int_{\gamma'} e^{-(\sqrt{a}z - ik/2\sqrt{a})^2} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

sicché

$$\hat{F}(e^{-ax^2})(k) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-k^2/4a}$$

Nel caso in cui $a = 1/2$ si ottiene

$$(c.v.d.) \quad \hat{F}(e^{-ax^2})(k) = \sqrt{2\pi} e^{-k^2/2}$$

Veniamo adesso agli aspetti più rilevanti, a cominciare dal seguente

Teorema V.15 *La mappa $\hat{F}$ è una applicazione lineare, biunivoca di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{\ell})$ in sé, e la sua inversa è $\check{F}$.*

Dimostrazione La linearità discende in modo banale dalla linearità dell'integrazione.

Veniamo alla iniettività. Date $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{\ell})$, si ha, per ogni $x \in \mathbb{R}^{\ell}$, valendo il teorema di Fubini,

$$\begin{aligned} \int g(k) \hat{f}(k) \exp(-ik \cdot x) d\mu(k) &= \int d\mu(k) g(k) \exp(-ik \cdot x) \int d\mu(z) f(z) \exp(ik \cdot z) = \\ &= \int d\mu(z) f(z) \int d\mu(k) g(k) \exp(ik \cdot (z - x)) = \\ &= \int d\mu(z) f(z) \hat{g}(z - x) = \int d\mu(z) f(z + x) \hat{g}(z) \end{aligned}$$

dunque,

$$\begin{aligned} \int g(\varepsilon k) \hat{f}(k) \exp(-ik \cdot x) d\mu(k) &= \frac{1}{\varepsilon} \int d\mu(z) f(z + x) \hat{g}\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) = \\ &= \int d\mu(z) f(\varepsilon z + x) \hat{g}(z), \quad \forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}^{\ell} \end{aligned}$$

Poniamo adesso

$$g(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}|x|^2\right)$$

e passiamo al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ in ambedue i membri, grazie al teorema di Lebesgue (si noti che $|g| \leq 1$)

$$\begin{aligned} (2\pi)^{\ell} \check{F} \hat{F} f &= \int \hat{f}(k) \exp(-ik \cdot x) d\mu(k) = f(x) \int d\mu(z) \hat{g}(z) = f(x) \int d\mu(z) (2\pi)^{\ell/2} g(z) = \\ &= (2\pi)^{\ell} f \end{aligned}$$

se ne conclude che

$$\check{F} \hat{F} f = f$$

per ogni $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$. Ne deriva l'iniettività. Per quello che riguarda la suriettività,

$$\begin{aligned}\hat{F}^2 f(x) &= (2\pi)^\ell f(-x) \\ \hat{F}^4 f(x) &= (2\pi)^{2\ell} f(x)\end{aligned}$$

perciò

$$\begin{aligned}R(\hat{F}^4) &= \mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell) \\ R(\hat{F}^4) &\subset R(\hat{F})\end{aligned}$$

(c.v.d.) donde la tesi.

In vista dell'estensione di $\hat{F}$ a $L^2(\mathbb{R}^\ell)$, riguardiamo $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$ come una varietà lineare (densa) in $L^2(\mathbb{R}^\ell)$ e studiamo le proprietà topologiche di $\hat{F}$:

Teorema V.16
(identità di Parseval)

Per ogni $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$ si ha

$$\|\hat{f}\| = (2\pi)^{\ell/2} \|f\|.$$

Dimostrazione

Si tratta di dimostrare, equivalentemente, che

$$(\hat{f}, \hat{g}) = (2\pi)^\ell (f, g), \quad \forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell),$$

abbiamo

$$\begin{aligned}(f, g) &= \int f^* g d\mu = \int f^* \hat{F} \hat{F} g d\mu = \frac{1}{(2\pi)^\ell} \int d\mu(x) f^*(x) \int d\mu(k) e^{-ik \cdot x} \int d\mu(z) g(z) e^{ik \cdot z} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^\ell} \int d\mu(k) \left(\int d\mu(x) f(x) e^{ik \cdot x} \right)^* \int d\mu(z) g(z) e^{ik \cdot z} = \frac{1}{(2\pi)^\ell} \int d\mu(k) [\hat{f}(k)]^* \hat{g}(k) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^\ell} (\hat{f}, \hat{g})\end{aligned}$$

(c.v.d.)

Ne viene che la trasformata di Fourier è continua nel suo dominio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$ (essendo ivi limitata), grazie al teorema di estensione delle applicazioni continue, si ha che, essendo $\mathcal{S}$ denso in L^2 , la trasformata di Fourier si estende ad operatore continuo nello spazio di Hilbert L^2 . Quanto detto sarà preciso nella prossima sezione.

**Proprietà $\mathcal{S}$ -
topologiche di $\hat{F}$**

A margine, notiamo che la trasformata di Fourier è continua su $\mathcal{S}$ anche nella topologia di $\mathcal{S}$ (finora abbiamo esaminato le proprietà topologiche indotte dalla metrica L^2 su $\mathcal{S}$).

Lemma V.17

Sia $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{S}$ una successione tale che esiste $\varphi \in \mathcal{S}$ per cui

$$\varphi = \mathcal{S} - \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n$$

allora

$$\varphi = L^1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n$$

Dimostrazione

Abbiamo

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \int |\varphi(x) - \varphi_n(x)| d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{1}{1 + |x|^2} (1 + |x|^2) |\varphi(x) - \varphi_n(x)| d\mu \leq \\ &\leq \int \frac{1}{1 + |x|^2} d\mu \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi - \varphi_n| + \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^2 |\varphi - \varphi_n| \right]\end{aligned}$$

Il limite è nullo essendo

$$(c.v.d.) \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi - \varphi_n| + \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^2 |\varphi - \varphi_n| \leq \|\varphi - \varphi_n\|_{0,0} + \|\varphi - \varphi_n\|_{2,0} \rightarrow 0$$

Teorema V.18

La trasformata di Fourier in $\mathcal{S}$ è un'applicazione continua rispetto alla convergenza di $\mathcal{S}$.

Dimostrazione Sia φ_n una successione di funzioni a decrescenza rapida convergenti a $\varphi \in \mathcal{S}$ nella metrica di $\mathcal{S}$.

Allora, usando il lemma precedente

$$\|\hat{\varphi}(x) - \hat{\varphi}_n\|_{0,0} = \sup_{k \in \mathbb{R}^\ell} \left| \int_{\mathbb{R}^\ell} e^{ik \cdot x} (\varphi(x) - \varphi_n(x)) d\mu \right| \leq \|\varphi - \varphi_n\|_{L^1} \rightarrow 0$$

Notiamo che

$$k^r \frac{d^s}{dk^s} (\hat{\varphi}(k) - \hat{\varphi}_n(k)) = \hat{F} \left[i^{r+s} \frac{d^r}{dx^r} (x^s (\varphi - \varphi_n)) \right]$$

Siccome l'argomento di $\hat{F}$ converge uniformemente a 0, per quanto visto sopra, così farà il primo membro. Sicché abbiamo la tesi.

V.3 Trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R}^\ell)$

V.3.1 Estensione della trasformata di Fourier allo spazio $L^2(\mathbb{R}^\ell)$

Teorema di estensione Gli operatori $\hat{F}$ e $\check{F}$ sono limitati sullo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$, dunque per il teorema dell'estensione continua degli operatori continui, esistono unici due operatori che estendono $\hat{F}$ e $\check{F}$ a $L^2(\mathbb{R}^\ell)$. Tali estensioni sono, a meno di un fattore, operatori unitari e se F estende $\hat{F}$ l'estensione di $\check{F}$ è F^{-1} .

Estensione dell'antitrasformata e unitarietà della trasformata

Infatti, sappiamo che esiste F che estende $\hat{F}$ e che F ha norma pari a quella di $\hat{F}$, cioè $\|F\| = (2\pi)^{\ell/2}$. L'operatore F è definito nel seguente modo: sia $f \in L^2(\mathbb{R}^\ell)$, sia $\{f_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$ una successione di funzioni convergente a f (la cui esistenza è dovuta alla densità di $\mathcal{S}$ in L^2), allora

$$Ff = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{F}f_n.$$

Analogamente si procede per $\check{F}$, costruendo $\tilde{F}$ avente norma $1/(2\pi)^{\ell/2}$, su $L^2(\mathbb{R}^\ell)$. Mostriamo adesso che $(2\pi)^\ell \tilde{F}$ è l'aggiunto di F . Siano $f, g \in L^2(\mathbb{R}^\ell)$ e siano $f_n, g_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$ le rispettive approssimanti, allora

$$(Ff, g) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{F}f_n, \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\hat{F}f_n, g_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, (2\pi)^\ell \check{F}g_n) = (f, (2\pi)^\ell \tilde{F}g)$$

quindi

$$(2\pi)^\ell \tilde{F} = F^\dagger.$$

Ora,

$$\begin{aligned} F\tilde{F}f &= \lim_{n \rightarrow \infty} F\tilde{F}f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{F}\check{F}f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \\ \tilde{F}Ff &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{F}Ff_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \check{F}\hat{F}f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \end{aligned}$$

Se adesso poniamo

$$\hat{U} \doteq \frac{F}{(2\pi)^{\ell/2}}; \quad \check{U} \doteq (2\pi)^{\ell/2} \tilde{F}$$

abbiamo

$$\hat{U}^{-1} = \check{U}$$

e

$$\hat{U}^\dagger = \frac{(2\pi)^\ell \tilde{F}}{(2\pi)^{\ell/2}} = (2\pi)^{\ell/2} \tilde{F} = \check{U}$$

perciò $\hat{U}, \check{U}$ sono l'uno l'aggiunto e l'inverso dell'altro, cioè sono operatori unitari.

Trasformata e antitrasformata in $L^2(\mathbb{R}^\ell)$

L'operatore unitario F di $L^2(\mathbb{R}^\ell)$ si dice **trasformata di Fourier** in $L^2(\mathbb{R}^\ell)$, il suo inverso $\tilde{F}$, si dice **antitrasformata di Fourier** in $L^2(\mathbb{R}^\ell)$.

V.3.2 Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R}^\ell)$

Utilità dell'estensione a L^1 della trasformata di Fourier

La formula con la quale abbiamo definito trasformata e antitrasformata in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$ non vale più in $L^2(\mathbb{R}^\ell)$, anzi in quest'ultimo spazio, può non avere alcun senso, perciò si deve utilizzare la costruzione tramite le approssimanti.

In ogni modo, la formula integrale resta valida in $L^1(\mathbb{R}^\ell)$ perciò ha un qualche interesse andare

ad esaminare la trasformata in tale spazio.

L'estensione di $\hat{F}$ a $L^1(\mathbb{R}^\ell)$ avviene ancora grazie al teorema di estensione degli operatori lineari continui definiti su un denso. Useremo questo teorema in modo leggermente diverso da quanto fatto sopra, ne ricordiamo la formulazione completa data nel capitolo "Teoria degli operatori lineari":

Teorema V.19
(di estensione)

Siano X e Y spazi di Banach e sia $A \in \mathcal{O}(X, Y)$ con $D(A) \neq X$. Se A è continuo sul dominio, allora esiste uno e un solo operatore $\bar{A} \in \mathcal{O}(X, Y)$ tale che

- (i) $D(\bar{A}) = [D(A)]^a$;
- (ii) $A \subset \bar{A}$;
- (iii) $\bar{A}$ è continuo.

Vale, infine, $\|\bar{A}\| = \|A\|$.

Sia $X = L^1(\mathbb{R}^\ell)$ e sia $Y = \mathcal{C}_\infty(\mathbb{R}^\ell)$, l'insieme delle funzioni continue che si annullano all'infinito, normato con la norma del sup. Ora, sia $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$, abbiamo

$$\left| \int f(x) e^{ik \cdot x} d\mu(x) \right| \leq \int |f(x) e^{ik \cdot x}| d\mu(x) \leq \int |f(x)| d\mu(x)$$

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}$$

da cui $\hat{F} \in \mathcal{O}(L^1, \mathcal{C}_\infty)$ (il range di $\hat{F}$ è $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}_\infty$) è continuo, poiché limitato sul dominio $\mathcal{S}$. Inoltre, $D(\hat{F})^a = \mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)^a = L^1(\mathbb{R}^\ell)$, perciò esiste $F_1 \in \mathcal{O}(L^1, \mathcal{C}_\infty)$ che estende in modo continuo l'operatore $\hat{F}$. Per completezza mostriamo il seguente

Teorema V.20

Lo spazio $\mathcal{C}_\infty(\mathbb{R}^\ell)$ delle funzioni continue che hanno limite nullo all'infinito, normato dalla

$$\|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}^\ell} |f|$$

è uno spazio di Banach.

Dimostrazione

Sia $\{f_n\} \subset \mathcal{C}_\infty$ una successione di Cauchy. Allora, siccome $\mathcal{C}(\mathbb{R}^\ell)$ è uno spazio di Banach nella norma uniforme, esiste f tale che

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}^\ell} |f_n - f| \rightarrow 0$$

Si tratta di vedere che f è infinitesima all'infinito. Abbiamo

$$|f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty + |f_n(x)|$$

Scegliamo n affinché il primo addendo sia minore di $\varepsilon/2$ e $|x| > M$ affinché il secondo sia inferiore a $\varepsilon/2$ per avere la tesi.
(c.v.d.)

Dimostrazione
del lemma
di Riemann-
Lebesgue

Vogliamo adesso dare forma esplicita all'operatore F_1 : esso esiste ed è unico per quello che abbiamo dimostrato sopra. Perciò, se ne esibiamo uno, esso è F_1 . Diciamo che F_1 ha la stessa forma di $\hat{F}$

$$F_1 f = \int f(x) e^{ik \cdot x} d\mu(x)$$

Esso è certo un'estensione di $\hat{F}$, ci basta mostrare che si tratta di un'estensione continua con range in $\mathcal{C}_\infty$. Il fatto che sia continuo è ovvio dalla stima fatta in $\mathcal{S}$ che vale pure in L_1 , resta da vedere che $F_1 f \in \mathcal{C}_\infty$. Ora, la continuità di $F_1 f$ discende dal teorema della convergenza dominata in modo banale (si scambiano limite e integrale). Per quanto concerne la tendenza a 0 all'infinito di $F_1 f$ si può procedere sfruttando la densità di $\mathcal{S}$ in L^1 : sia $f_n \in \mathcal{S}$ una successione convergente a f , allora

$$\sup_k |F_1 f(k) - F_1 f_n(k)| \leq \|f - f_n\|_{L^1} \rightarrow 0$$

perciò $F_1 f$ è limite uniforme di $F_1 f_n = \hat{F} f_n \in \mathcal{S} \subset \mathcal{C}_\infty$, per il teorema precedente, $F_1 f \in \mathcal{C}_\infty$. Il risultato secondo cui $F_1 f$ è infinitesima all'infinito è generalmente indicato come **lemma di Riemann-Lebesgue**.

Iniettività di F_1 Mostriamo, ancora, che F_1 è un operatore iniettivo (ma non suriettivo). Sia $F_1 f = 0$. Per ogni $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$ vale allora

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^\ell} F_1 f(k) g(k) d\mu(k) = \int_{\mathbb{R}^\ell} d\mu(k) \left[\int_{\mathbb{R}^\ell} f(x) e^{ik \cdot x} d\mu(x) \right] g(k) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^\ell} d\mu(x) f(x) \int_{\mathbb{R}^\ell} g(k) e^{ik \cdot x} d\mu(k) = \int_{\mathbb{R}^\ell} f(x) \hat{g}(x) d\mu(x) \end{aligned}$$

sicché

$$0 = \int_{\mathbb{R}^\ell} (F_1 f) g d\mu = \int_{\mathbb{R}^\ell} f \hat{g} d\mu$$

Poiché $\hat{F}$ è suriettiva, per ogni $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$ si ha

$$0 = \int_{\mathbb{R}^\ell} f h d\mu$$

da cui

$$0 = \int_{\mathbb{R}^\ell} f h d\mu, \forall h \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^\ell)$$

Sia $D_n \doteq B(0, n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e sia χ_n la funzione caratteristica di D_n . Definita la funzione segno (nulla per $f = 0$) che risulta di modulo inferiore a 1 e misurabile (come prodotto di funzioni q.o. misurabili) si ha che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\chi_n \text{sign } f \in L^1$ è approssimabile con una successione $\{h_i\} \subset \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^\ell)$ (con le h_i di modulo minore a 1). Allora, dal teorema di Lebesgue

$$\int_{D_n} |f| d\mu = \int_{D_n} f \text{sign } f d\mu = \int_{\mathbb{R}^\ell} \chi_n f \text{sign } f d\mu = \lim_{i \rightarrow \infty} \int f h_i d\mu = 0$$

Perciò f è q.o. nulla su ogni D_n , poiché

$$\mathbb{R}^\ell = \bigcup_n D_n$$

si conclude che f è q.o. nulla in $\mathbb{R}^\ell$, perciò $f = 0$.

Relazione tra la trasformata di Fourier in L^1 e in L^2

Ovviamente F_1 si dice trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R}^\ell)$. Vogliamo adesso dimostrare che se $f \in L^1(\mathbb{R}^\ell) \cap L^2(\mathbb{R}^\ell)$, allora

$$Ff = F_1 f$$

Cominciamo col considerare la successione di funzioni $f_n = \chi_n f$: essa converge a f sia in L^1 che in L^2 : in L^2 abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^\ell} |f - f_n|^2 d\mu &= \int_{\mathbb{R}^\ell} |f - f \chi_n|^2 d\mu = \int_{\mathbb{R}^\ell \setminus D_n} |f|^2 d\mu = \\ &= \int_{\mathbb{R}^\ell} |f \chi_{D_n^c}|^2 d\mu \end{aligned}$$

La successione $f \chi_{D_n^c}$ tende puntualmente a zero ed è dominata da $|f|^2 \in L^1$, perciò dal teorema di Lebesgue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f - f_n|^2 d\mu = 0$$

Analogamente, in L^1

$$\int |f - f_n| d\mu = \int_{\mathbb{R}^\ell} |f - f_n| d\mu = \int_{\mathbb{R}^\ell} |f - f \chi_n| d\mu = \int_{\mathbb{R}^\ell} |f \chi_{D_n^c}| d\mu \rightarrow 0$$

Grazie alla densità di $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^\ell)$ in L^p possiamo trovare, per ogni n , $\varphi_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^\ell)$, tale che

$$\|f_n - \varphi_n\|_{L^2} \leq \frac{1}{n \mu^{1/2}(D_n)}$$

possiamo inoltre supporre che il supporto di φ_n sia contenuto in D_n e allora, grazie alla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\|f_n - \varphi_n\|_{L^1} = \int_{D_n} |f - \varphi_n| d\mu \leq \|f_n - \varphi_n\|_{L^2} \mu^{1/2}(D_n) \leq \frac{1}{n}$$

da cui abbiamo che φ_n tende a f sia in senso L^1 che in senso L^2 . Essendo anche una funzione di Schwartz, abbiamo

$$F_1 f = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{F} \varphi_n = F f$$

Riassumendo

Teorema V.21
(di Riemann-Lebesgue)

L'operatore lineare $\hat{F}$ si estende in modo unico a un operatore lineare, iniettivo e continuo

$$\begin{aligned} F_1 : L^1(\mathbb{R}^\ell) &\rightarrow C_\infty(\mathbb{R}^\ell) \\ f(x) &\mapsto F_1 f(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\ell/2}} \int f(x) e^{-ik \cdot x} d\mu(x) \end{aligned}$$

Se poi $f \in L^1(\mathbb{R}^\ell) \cap L^2(\mathbb{R}^\ell)$, allora $F f = F_1 f$.

Dimostrazione
(c.v.d.)

Completata in più passi sopra.

Nel corso della dimostrazione del teorema di sopra abbiamo dimostrato un risultato che vogliamo rimarcare

Lemma V.22
(di Dubois-Reymond)

Se f è una funzione su $\mathbb{R}^\ell$ integrabile su ogni sottoinsieme misurabile limitato (cioè f è localmente sommabile, i.e., $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^\ell)$) e vale

$$\int_{\mathbb{R}^\ell} f h d\mu = 0, \forall h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^\ell)$$

allora $f = 0$ quasi ovunque.

In modo analogo si dimostra un teorema di Riemann-Lebesgue per l'antitrasformata di Fourier su L^1 . Ovviamente, se è $\tilde{F}_1$ l'antitrasformata su L^1 , $\tilde{F}_1 \neq F_1^{-1}$ (nel modo più assoluto!), si ha

$$\tilde{F}_1 f(x) = \frac{1}{(2\pi)^\ell} \int f(k) e^{-ik \cdot x} d\mu(k) = \frac{1}{(2\pi)^\ell} (F_1 f^*)^*$$

Forma esplicita della trasformata di Fourier in L^2

Infine, volendo una forma più esplicita per l'operatore F , notiamo che se $f \in L^2(\mathbb{R}^\ell)$, allora $f_n = f \chi_n$ appartiene a $L^1(\mathbb{R}^\ell) \cap L^2(\mathbb{R}^\ell)$ (usando come sempre Cauchy-Schwarz) e converge in norma L^2 a f , perciò

$$F f(k) = L^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} F f_n = L^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} F_1 f_n = L^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B(0,n)} e^{ik \cdot x} f(x) d\mu(x)$$

cioè $F f(k)$ è il limite in senso L^2 della successione di funzioni di L^2

$$g_n(k) = \int_{B(0,n)} e^{ik \cdot x} f(x) d\mu(x)$$

Va da sé che se $g(k)$ è limite puntuale di $g_n(k)$ quasi ovunque, allora, siccome $g_n(k)$ ammette limite in senso L^2 a $F f(k)$, ammette pure una sottosuccessione che converge puntualmente a $F f(k)$ quasi ovunque. Ma allora, quasi ovunque,

$$g(k) = F f(k)$$

perciò, se per quasi ogni k fissato esiste

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n e^{ikx} f(x) d\mu(x) = P_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} f(x) d\mu(x) = g(k)$$

allora

$$F f(k) = P_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} f(x) d\mu(x), \text{ q.o.}$$

dove P_∞ è la parte principale dell'integrale.

Inversione della trasformata di Fourier in L^2

Ci aspettiamo che

$$F^{-1} g(x) = L^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^\ell} \int_{B(0,n)} e^{-ik \cdot x} g(k) d\mu(k) = \frac{1}{(2\pi)^\ell} (F g^*)^*$$

Per mostrare questo bisogna vedere che, se $f = (F g^*)^*$, allora

$$\hat{f} = F f = g$$

cioè

$$\|\hat{f} - g\|_{L^2} = 0$$

Tuttavia

$$\begin{aligned} \|\hat{f} - g\|_{L^2} &= \|\hat{f}\|_{L^2} + \|g\|_{L^2} - (\hat{f}, g) - (g, \hat{f}) = \|f\|_{L^2} + \|g\|_{L^2} - (\hat{f}, g) - (g, \hat{f}) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^\ell} \|(Fg^*)^*\|_{L^2} + \|g\|_{L^2} - (\hat{f}, g) - (g, \hat{f}) = 2\|g\|_{L^2} - 2\operatorname{Re}(g, \hat{f}) \end{aligned}$$

d'altra parte, grazie al fatto che sulle palle finite le funzioni L^2 sono L^1 , si può scambiare l'ordine di integrazione e trovare

$$\begin{aligned} (g, \hat{f}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (g_n, F_1 f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int d\mu(k) \int d\mu(x) e^{ikx} f_n(x) g_n^*(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n^*, F_1 g_n^*) = \\ &= (f^*, Fg^*) = (Fg^*, Fg^*) = (g, g) \end{aligned}$$

da cui la tesi.

V.3.3 Il teorema di Payley-Wiener

Come abbiamo visto le trasformate di Fourier di funzioni a decrescenza rapida sono a decrescenza rapida. Vogliamo adesso caratterizzare, tra le funzioni a decrescenza rapida, quelle che sono trasformate di Fourier di funzioni $\mathcal{C}_c^\infty$. A questo scopo mostriamo il seguente

**Teorema
V.23 (di
Payley-Wiener)**

Le trasformate di Fourier delle funzioni di $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ formano lo spazio lineare delle funzioni g intere (olomorfe su $\mathbb{C}$) che soddisfano alla seguente condizione: esistono un reale non negativo a e, per ogni intero k , delle costanti $c_k > 0$ tali che

$$|g(\lambda)| |\lambda|^k \leq c_k e^{a|\operatorname{Im} \lambda|}$$

L'insieme delle funzioni così individuate prende il nome di classe di Payley-Wiener.

Dimostrazione Sia $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ e sia $\operatorname{supp} f \subset [-b, b]$. Allora la funzione

$$g(\lambda) = \int_{-b}^b e^{i\lambda x} f(x) dx$$

è una funzione intera che estende in modo unico su $\mathbb{C}$ la trasformata di Fourier di f . Sviluppando, infatti, l'esponenziale, si ottiene

$$g(\lambda) = \int_{-b}^b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\lambda x)^n}{n!} f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} d_n$$

con

$$d_n \doteq \int_{-b}^b (ix)^n f(x) dx$$

da cui

$$|d_n| \leq 2 \|f\|_\infty b^n$$

perciò la serie a secondo membro sopra converge per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$. Dunque, siccome g è olomorfa su $\mathbb{C}$ ed estende $\hat{f}$, si ha che g è unica. Usando ripetutamente l'integrazione per parti, si ottiene

$$\left(\frac{\lambda}{i}\right)^k g(\lambda) = \int_{-b}^b e^{i\lambda x} f^{(k)}(x) dx$$

quindi

$$\begin{aligned} |\lambda|^k |g(\lambda)| &\leq 2 \|f^{(k)}\|_\infty \int_0^b e^{|\operatorname{Im} \lambda| x} dx \leq 2 \|f^{(k)}\|_\infty e^{|\operatorname{Im} \lambda| b} \int_0^b dx = \\ &= 2b \|f^{(k)}\|_\infty e^{|\operatorname{Im} \lambda| b} \end{aligned}$$

come si voleva.

Vediamo il viceversa. Sia g intera e verifichi la condizione di Payley-Wiener. Allora, la sua restrizione all'asse reale (che chiameremo ancora g) è $\mathcal{C}^\infty$, inoltre, dalle condizioni Payley-Wiener, per ogni k

$$x^k g(x) \rightarrow 0, \forall k \in \mathbb{N}$$

Siccome, in particolare $g \rightarrow 0$, si può applicare il teorema dell'Hôpital

$$x^{k+1}g'(x) \rightarrow 0$$

per induzione si ha che le derivate di g scendono più rapidamente dei polinomi, dunque, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$ e si può considerare $f = \tilde{F}g$. Si ha ovviamente che $f \in \mathcal{C}^\infty$, vediamo adesso che f ha supporto compatto. Appliciamo il metodo dei residui. Dobbiamo calcolare, per ogni x

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} g(\lambda) d\lambda$$

Consideriamo i rettangoli aventi un lato sull'asse reale, tra $-R$ e R , e uno su una parallela all'asse reale. La circuitazione di $e^{-i\lambda x} g(\lambda)$ su tali rettangoli è nulla. Passando al limite per $R \rightarrow \infty$, abbiamo che i contributi sui lati verticali si annullano, perciò gli integrali sulle rette parallele all'asse reale sono eguali. Siccome, posto $\lambda \doteq \lambda' + i\lambda''$, si ha

$$e^{-i\lambda x} = e^{-i\lambda' x} e^{\lambda'' x}$$

allora scegliamo di integrare su una retta avente $\lambda'' x < 0$. Preso $t > 0$ abbiamo

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} g(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R} - it \operatorname{sign} x} e^{-i\lambda x} g(\lambda) d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda' x} e^{-t|x|} g(\lambda' - it \operatorname{sign} x) d\lambda' \end{aligned}$$

Ora,

$$\begin{aligned} |g| &\leq c_0 e^{at} \\ |g| &\leq \frac{c_2}{|\lambda|^2} e^{at} \leq \frac{c_2}{\lambda'^2} e^{at} \end{aligned}$$

perciò possiamo dominare $g(\lambda' - it \operatorname{sign} x)$ con una funzione L^1 che chiameremo $h(\lambda') e^{at}$. Allora

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} e^{-t|x|} e^{at} \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\lambda')| d\lambda' = \frac{1}{2\pi} e^{-t(|x|-a)} \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\lambda')| d\lambda'$$

perciò, per $|x| > a$, passando al limite per $t \rightarrow \infty$ si ottiene

$$|f(x)| = 0$$

(c.v.d.) da cui f ha supporto compatto.

V.3.4 Alcune proprietà della trasformata di Fourier

Utilizzando il teorema di estensione, possiamo riformulare alcune delle asserzioni di cui nella proposizione V.14.

Traslazione Sia T_a l'operatore di traslazione di a su $L^i(\mathbb{R}^\ell)$, $i \in J_2$:

$$(T_a f)(x) = f(x - a)$$

e sia U_a l'operatore

$$(U_a f)(x) = e^{ia \cdot x} f(x)$$

allora, i due operatori sono continui e inoltre

$$FT_a = U_a F$$

Infatti, sia $f \in L^2(\mathbb{R}^\ell)$ e sia $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$ una successione di approssimanti, allora

$$FT_a f = Ff(x - a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{F}f_n(x - a) = e^{ia \cdot x} \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{F}f_n(x) = U_a Ff$$

Parità Se I è l'operatore di parità, tale cioè che

$$If(x) = f(-x)$$

allora, I è un operatore continuo e si ha

$$F^2 = (2\pi)^\ell I$$

infatti,

$$FIf = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{F}f_n(-x) = (2\pi)^\ell \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{F}f_n(x) = (2\pi)^\ell F^{-1}f$$

perciò

$$F^2 I = (2\pi)^\ell \mathbb{I} \Leftrightarrow F^2 = (2\pi)^\ell I$$

e, quindi,

$$F^4 = (2\pi)^{2\ell} \mathbb{I}$$

Derivazione Più complicato il rapporto tra derivazione e trasformata di Fourier. Invece di assumere un punto di vista operatoriale, come sopra, lavoriamo solo in casi speciali (sarebbe altrimenti richiesto di definire con opportune estensioni gli operatori di derivazione e moltiplicazione). Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$, vogliamo vedere quando la sua trasformata di Fourier, $g(k) = F_1 f$, oltre che, come sappiamo, essere continua, è derivabile. A questo scopo, calcoliamone il rapporto incrementale (oppure usiamo il teorema di derivazione sotto segno la cui dimostrazione sarà data tra poco)

$$\frac{g(k+\varepsilon) - g(k)}{\varepsilon} = i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \frac{e^{i\varepsilon x} - 1}{i\varepsilon x} (xf(x)) d\mu(x)$$

Applichiamo il teorema di Lebesgue, notando che

$$\left| \frac{e^{i\varepsilon x} - 1}{i\varepsilon x} \right| = \frac{|\cos(\varepsilon x) - 1| + |\sin(\varepsilon x)|}{\varepsilon |x|} \leq \sup_{\mathbb{R}} \frac{|\cos(\varepsilon x) - 1|}{\varepsilon |x|} + \sup_{\mathbb{R}} \frac{|\sin(\varepsilon x)|}{\varepsilon |x|} \leq 2$$

Abbiamo, se $xf \in L^1$ si ha

$$\frac{dg}{dk} = F_1(ixf)$$

Proposizione V.24 Se $f, xf, \dots, x^k f \in L^1(\mathbb{R})$ allora $g = F_1 f$ è una funzione $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^\ell)$ e

$$\frac{d^n g}{dk^n} = F_1((ix)^n f)$$

tutte le derivate dette sono infinitesime all'infinito.

Vediamo adesso i risultati *simmetrici*. Sia $f \in L^1 \cap \mathcal{C}^1$ e sia $df/dx \in L^1$ allora

$$F_1 f' = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{ikx} dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} ik f(x) e^{ikx} dx = -ik F_1 f$$

dove si è integrato per parti, notando che

$$f \in L^1 \cap \mathcal{C}^1 \& \frac{df}{dx} \in L^1 \Rightarrow f \in \mathcal{C}_\infty$$

Infatti, siccome $f \in \mathcal{C}^1$ si ha

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t) dt$$

Ora, il limite per $x \rightarrow \infty$ del secondo membro esiste finito, perciò esiste finito il limite di f per $x \rightarrow \infty$. Ne viene che esiste

$$\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)|$$

Se tale limite fosse maggiore o eguale a 0, allora da un certo punto in poi $|f| > \varepsilon$ e perciò non sarebbe sommabile, il che è assurdo.

In definitiva,

Proposizione V.25 Se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ e $f^{(i)} \in L^1(\mathbb{R})$ per $i = 1, \dots, k$ allora

$$F_1 \left(\frac{d^n f}{dx^n} \right) = (-ik)^n F_1(f)$$

e, inoltre, $(-ik)^n F_1(f)$ è limitata, perciò $F_1(f)$ scende come $1/k^n$ per $k \rightarrow \infty$

Ritroviamo la chiusura di $\mathcal{S}$ per trasformata e antitrasformata di Fourier.

V.4 Trasformata di Laplace

V.4.1 Definizione e prime proprietà

La trasformata di Laplace è stretta parente della trasformata di Fourier, ma ha applicazioni indipendenti e presenta alcune novità interessanti. Dunque, la introduciamo:

Definizione V.2 Sia f una funzione localmente sommabile su $(0, +\infty)$, allora si dice trasformata di Laplace

di f la funzione del piano complesso in sé

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-sx} dx$$

definita su tutti i punti $s \in \mathbb{C}$ per i quali l'integrale della formula di sopra è finito.

Il dominio di esistenza della trasformata di Laplace ha qualche analogia con il dominio di convergenza delle serie di potenze. Vale, infatti, la seguente

Proposizione V.26 Se la trasformata di Laplace $F(s)$ di $f(x)$ è definita in $s_0 \in \mathbb{C}$, allora è definita in tutto il semipiano

$$\operatorname{Re} s \geq \operatorname{Re} s_0$$

Dimostrazione D'ora in poi assumiamo la seguente convenzione per indicare parte reale e parte immaginaria di un numero complesso s

$$\operatorname{Re} s = s'; \quad \operatorname{Im} s = s''$$

Si vuole dunque dimostrare che se

$$f(x) e^{-s_0 x} \in L^1(0, +\infty)$$

allora per ogni $s' > s'_0$ risulta

$$f(x) e^{-sx} \in L^1(0, +\infty)$$

D'altra parte, la funzione $f(x) e^{-sx}$, essendo localmente sommabile, è misurabile sul semiasse reale positivo, inoltre,

$$|f(x) e^{-sx}| = |f(x) e^{-s'x}| \leq |f(x) e^{-s'_0 x}| \leq |f(x) e^{-s_0 x}| \in L^1$$

(c.v.d.) da cui la tesi.

Ne viene che se $f(x)$ è sommabile, allora certamente la sua trasformata di Laplace esisterà per ogni $\operatorname{Re} s \geq 0$. L'estremo inferiore delle $\operatorname{Re} s$ alle quali si ha esistenza della trasformata di Laplace si dice **ascissa di convergenza** della trasformata e si indica solitamente con λ . Dunque, se $f \in L^1$, allora $\lambda \leq 0$. Presentiamo adesso un criterio di trasformabilità

Proposizione V.27 Se f è localmente sommabile, $f(x) = 0$ per $x < 0$ ed esistono tre costanti $M > 0, x_0, k$ tali che

$$|f(x)| \leq M e^{kx}, \quad \forall x \geq x_0$$

allora f è Laplace trasformabile e si ha $\lambda \leq k$ se λ è l'ascissa di convergenza di f .

Dimostrazione Abbiamo

$$\int_0^{+\infty} |f(x) e^{-sx}| dx = \int_0^{x_0} |f(x) e^{-sx}| dx + \int_{x_0}^{+\infty} |f(x) e^{-sx}| dx$$

Il primo integrale esiste poiché f è localmente sommabile. Per quanto riguarda il secondo, abbiamo

$$|f(x) e^{-sx}| = |f(x)| e^{-s'x} \leq M e^{-(s'-k)x}$$

che è sommabile per ogni s tale che

$$s' = \operatorname{Re} s > k$$

perciò

(c.v.d.)

$$\lambda \leq k.$$

Esempio V.1 La funzione di Heaviside $\theta(x)$ è certamente Fourier trasformabile se $s' > 0$. Infatti, in tal caso

$$\mathcal{L}(\theta)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} dx = \frac{1}{s}$$

Viceversa, se $s' \leq 0$, la trasformata di Laplace di $\mathcal{L}$ non è definita e perciò $\lambda = 0$. Un altro modo istruttivo per dirimere la questione dell'ascissa di convergenza è il seguente: vedremo

tra un po' che la trasformata di Laplace è olomorfa nel semipiano di convergenza. Perciò se $\mathcal{L}(\theta)(s)$ avesse $\lambda < 0$ dovrebbe essere olomorfa nell'origine. D'altra parte, $\mathcal{L}(\theta)(s) = 1/s$ per $s' > 0$. Dal teorema di estensione abbiamo che $\mathcal{L}(\theta)(s)$ dovrebbe essere pari a $1/s$ anche per $\lambda < \operatorname{Re} s \leq 0$, ma questo è assurdo perché $1/s$ presenta un polo nell'origine.

Ascissa di convergenza ed olomorfia della trasformata

L'esempio di sopra mostra dunque un fatto del tutto generale: l'ascissa di convergenza della trasformata di Laplace di f è la massima compatibile con le singolarità dell'estensione a $\mathbb{C}$ della trasformata di Laplace determinata in un qualsiasi semipiano.

Vediamo alcuni risultati tecnici a proposito della trasformata di Laplace

Teorema V.28 (di traslazione)

Sia $\mathcal{L}(f)(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(x)$. Sia λ l'ascissa di convergenza. Allora

$$\mathcal{L}(e^{cx}f(x)) = \mathcal{L}(f)(s - c)$$

e $e^{cx}f(x)$ ha ascissa di convergenza pari a $\lambda + \operatorname{Re} c$

Inoltre,

$$\mathcal{L}(f(x - a)\theta(x - a))(s) = e^{-sa}\mathcal{L}(f)(s)$$

Dimostrazione

Abbiamo

$$\mathcal{L}(e^{cx}f(x)) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-(s-c)x} d\mu(x) = \mathcal{L}(f)(s - c)$$

inoltre, dovendo essere

$$\operatorname{Re}(s - c) > \lambda$$

si ha che l'ascissa di convergenza di $e^{cx}f(x)$ è $\lambda + \operatorname{Re} c$.

Passiamo alla seconda parte

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(x - a)\theta(x - a))(s) &= \int_a^{+\infty} f(x) e^{-sx} d\mu(x) = \int_0^{+\infty} f(y) e^{-sy} e^{-sa} d\mu(y) = \\ &= e^{-sa} \mathcal{L}(f)(s) \end{aligned}$$

(c.v.d.)

Teorema V.29 (di convoluzione)

Se f_1 e f_2 sono funzioni L^1 nulle per $x < 0$, allora

$$\mathcal{L}(f_1 * f_2) = \mathcal{L}(f_1) \mathcal{L}(f_2)$$

Dimostrazione

Se f_1 e f_2 sono L^1 allora il loro prodotto di convoluzione $f_1 * f_2 \in L^1$. Siccome f_1 e f_2 hanno supporto in $(0, +\infty)$ si ha

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x - y) f_2(y) d\mu(y) = \int_0^x f_1(x - y) f_2(y) d\mu(y)$$

da cui

$$(f_1 * f_2)(x) = 0, x < 0$$

Passando alla trasformata di Laplace e utilizzando Fubini,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} (f_1 * f_2)(x) e^{-sx} d\mu(x) &= \int_0^{+\infty} d\mu(x) e^{-sx} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x - y) f_2(y) d\mu(y) = \\ &= \int_0^{+\infty} d\mu(y) f_2(y) e^{-sy} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(x) f_1(x - y) e^{-s(x-y)} = \\ &= \int_0^{+\infty} d\mu(y) f_2(y) e^{-sy} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(z) f_1(z) e^{-sz} = \\ &= \int_0^{+\infty} d\mu(y) f_2(y) e^{-sy} \int_0^{+\infty} d\mu(x) f_1(x) e^{-sx} = \mathcal{L}(f_1) \mathcal{L}(f_2). \end{aligned}$$

(c.v.d.)

V.4.2 Integrali dipendenti da parametri

In questa sottosezione affrontiamo il problema della regolarità degli integrali dipendenti da un parametro. Molti dei risultati che vedremo sono già noti al lettore, tanto che ci siamo permessi di utilizzarli in precedenza. In ogni caso, sono molto utili in vista della trattazione dell'olomorfia della trasformata di Laplace.

Sia E un insieme misurabile in $\mathbb{R}^n$, sia A un aperto di $\mathbb{R}^k$, consideriamone il prodotto cartesiano $E \times A$ che conterrà le coppie (x, t) . Sia $f(x, t)$ una funzione definita in $E \times A$, integrabile in x per ogni fissato $t \in A$. Poniamo allora

$$F(t) \doteq \int_E f(x, t) d\mu(x)$$

Vogliamo indagare la continuità e la differenziabilità di F che è un integrale dipendente dai k parametri t .

Cominciamo dal seguente

Lemma V.30 *Sia $f(x, t)$ una funzione integrabile in x per ogni $t \in A$ e continua in t per quasi ogni $x \in E$. Se esiste una funzione sommabile in E , $g(x)$ talché*

$$|f(x, t)| \leq g(x)$$

per ogni $t \in A$ e per quasi ogni $x \in A$, allora la funzione $F(t)$ è continua in A .

Dimostrazione Sia $t_0 \in A$ e sia $\{t_h\}_{h \in \mathbb{N}} \subset A$ una successione a valori in A , convergente a t_0 . Poiché $f(x, t)$ è continua in t per quasi tutti gli x , varrà, dal teorema di collegamento,

$$\lim_{h \rightarrow \infty} f(x, t_h) = f(x, t_0) \text{ q.o. in } E.$$

Ma quasi ovunque,

$$|f(x, t_h)| \leq g(x)$$

perciò, applicando il teorema di Lebesgue,

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_E f(x, t_h) d\mu(x) = \int_E f(x, t_0) d\mu(x)$$

perciò

$$F(t_h) \rightarrow F(t_0)$$

(c.v.d.) valendo per ogni $t_h \rightarrow t_0$, ciò significa che F è continua in t_0 .

Vale il fondamentale

Teorema V.31
(di derivazione
sotto il segno
di integrale)

Sia $f(x, t)$ una funzione integrabile in E per ogni $t \in A$, di classe $\mathcal{C}^1(A)$ per quasi ogni $x \in E$. Supponiamo che esistano $k + 1$ funzioni sommabili in E , tali che, per ogni $t \in A$ e per quasi ogni $x \in E$, risulti

$$\begin{aligned} |f(x, t)| &\leq g_0(x), \\ \left| \frac{\partial f}{\partial t_h}(x, t) \right| &\leq g_h(x), \quad h \in J_k \end{aligned}$$

Allora $F(t) \doteq \int_E f(x, t) d\mu(x)$ è di classe $\mathcal{C}^1(A)$, e risulta

$$\frac{\partial F}{\partial t_h}(t) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t_h}(x, t) d\mu(x).$$

Dimostrazione Dalle disuguaglianze e dal teorema del confronto si ha che la funzione, come le derivate sono sommabili in x su E .

Sia, intanto $A \subset \mathbb{R}$, sicché F è funzione di una sola variabile. Fissato $t_0 \in A$, esiste $r > 0$ per cui $B(t_0, r) \subset A$. Sia $\{t_k\} \subset B(t_0, r)$ una successione convergente a t_0 . Abbiamo

$$\frac{F(t_h) - F(t_0)}{t_h - t_0} = \int_E \frac{f(x, t_h) - f(x, t_0)}{t_h - t_0} d\mu(x)$$

Definiamo la successione di funzioni

$$\psi_h(x) = \frac{f(x, t_h) - f(x, t_0)}{t_h - t_0}$$

per il teorema del valor medio, quasi ovunque in E , essa varrà

$$\psi_h(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, \tau)$$

con $\tau \in B(t_0, r)$, perciò, quasi ovunque,

$$\psi_h(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, \tau) \leq g_1(x)$$

d'altra parte, per quasi ogni x , la successione converge

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \psi_h(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)$$

Siamo allora nelle ipotesi del teorema di Lebesgue, perciò

$$\int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) d\mu(x) = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_E \frac{f(x, t_h) - f(x, t_0)}{t_h - t_0} d\mu(x) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{F(t_h) - F(t_0)}{t_h - t_0}$$

ma ciò vale per ogni successione convergente a t_0 , sicché dal teorema di collegamento,

$$\int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) d\mu(x) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \frac{dF}{dt}(t_0)$$

dalla disuguaglianza e dal lemma si ha la continuità.

(c.v.d.) Il caso di più variabili si riconduce a questo una volta fissate tutte le t_j con $j \neq i$.

Esempio V.2 Consideriamo il caso in cui $E = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Siano allora $f(x, t)$ e $\partial f / \partial t_j$ continue in $[a, b] \times A$. Fissato $t \in A$, la funzione $f(x, t)$ come le $\partial f / \partial t_j(x, t)$ sono continue e definite su un compatto, perciò ovunque dominate da una costante per il teorema di Weierstraß. Siamo allora nelle ipotesi del teorema di derivazione sotto il segno di integrale.

Nelle ipotesi di cui sopra, siano anche $u, w \in [a, b]$, la funzione

$$F(t, u, w) = \int_u^w f(x, t) d\mu(x)$$

essa risulterà definita in $A \times [a, b] \times [a, b]$ e sarà $\mathcal{C}^1$ nel dominio per il teorema di cui sopra e per il teorema fondamentale del calcolo. Inoltre,

$$\frac{\partial F}{\partial t_j} = \int_u^w \frac{\partial f}{\partial t_j}(x, t) d\mu(x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -f(u, t)$$

$$\frac{\partial F}{\partial w} = f(w, t)$$

perciò se $u = \alpha(t)$ e $w = \beta(t)$ con $\alpha, \beta \in \mathcal{C}^1(A; [a, b])$, posto

$$G(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t) d\mu(x)$$

dal teorema di derivazione composta,

$$\frac{\partial G}{\partial t_j} = \frac{\partial F}{\partial w} \frac{\partial \beta}{\partial t_j} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial \alpha}{\partial t_j} + \frac{\partial F}{\partial t_j} = f(\beta(t), t) \frac{\partial \beta}{\partial t_j}(t) - f(\alpha(t), t) \frac{\partial \alpha}{\partial t_j}(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t_j}(x, t) d\mu(x)$$

In particolare, se $A \subset \mathbb{R}$, vale

$$\frac{d}{dt} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t) dx = f(\beta(t), t) \frac{d\beta}{dt}(t) - f(\alpha(t), t) \frac{d\alpha}{dt}(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$$

■

V.4.3 Olomorfia della trasformata di Laplace

**Regolarità delle
trasformate
di Laplace**

Siamo adesso in grado di stabilire le proprietà di differenziabilità della trasformata di Laplace.

Riguardiamo la trasformata come una funzione di due variabili

$$F(s' + is'') \doteq F(s', s'')$$

di modo che $F(s', s'')$ divenga un integrale dipendente dai parametri s, s'' . Fissiamo l'aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ di variazione dei parametri s' e s'' ponendo

$$s' > \eta > \lambda; s'' \in \mathbb{R}.$$

L'insieme misurabile E della sezione precedente diviene invece $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$. La funzione $f(x)e^{-sx}$ è di classe $\mathcal{C}^\infty(A)$ per ogni $x \in E$, e, inoltre, abbiamo le seguenti disuguaglianze

$$\begin{aligned} |F(s', s'')| &= \left| \int_0^{+\infty} f(x) e^{-s'x} e^{is''x} dx \right| \leq \int_0^{+\infty} |f(x) e^{-\eta x}| dx \\ \left| \frac{\partial}{\partial s'} F(s', s'') \right| &= \left| \int_0^{+\infty} -x f(x) e^{-s'x} e^{is''x} dx \right| \leq \int_0^{+\infty} x |f(x) e^{-\eta x}| dx \\ \left| \frac{\partial}{\partial s''} F(s', s'') \right| &= \left| \int_0^{+\infty} i x f(x) e^{-s'x} e^{is''x} dx \right| \leq \int_0^{+\infty} x |f(x) e^{-\eta x}| dx \end{aligned}$$

**Ascissa di
sommabilità
per $x^n f(x) e^{-\eta x}$**

Notiamo che $x^n f(x) e^{-\eta x}$ è sommabile. Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste M per cui, se $x > M$, si ha

$$x^n \leq e^{\varepsilon x}$$

Per $0 < x < M$ la funzione $x^n f(x) e^{-sx}$ è certamente sommabile, per $x > 0$, invece, si ha

$$|x^n f(x) e^{-sx}| \leq |f(x) e^{-(s-\varepsilon)x}|$$

da cui la $x f(x) e^{-sx}$ è sommabile per ogni s talché

$$\operatorname{Re} s > \lambda + \varepsilon$$

Per l'arbitrarietà di ε si ha che l'ascissa di sommabilità di $x^n f(x) e^{-sx}$ è ancora λ e in particolare valgono le disuguaglianze di sopra.

Di conseguenza possiamo applicare i teoremi di derivazione sotto segno di integrale per le derivate di qualsiasi ordine; in particolare per la prima derivata

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s'} F(s', s'') &= \int_0^{+\infty} -x f(x) e^{-s'x} e^{is''x} dx \\ \frac{\partial}{\partial s''} F(s', s'') &= \int_0^{+\infty} i x f(x) e^{-s'x} e^{is''x} dx \end{aligned}$$

Da cui F è differenziabile e rispetta le condizioni di Cauchy-Riemann, sicché, per l'arbitrarietà di η

Teorema V.32 *La trasformata di Laplace di una funzione localmente sommabile con ascissa di sommabilità $\lambda \in \mathbb{R}$ è olomorfa nel semipiano $\operatorname{Re} s > \lambda$.*

**Derivata della
trasformata**

Ne viene che

$$\frac{dF}{ds} = \int_0^{+\infty} -x f(x) e^{-sx} d\mu(x) \iff \frac{d}{ds} \mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(-xf)$$

più in generale

$$\frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}(f) = (-1)^n \mathcal{L}(x^n f)$$

**Trasformata
della derivata**

Supponiamo ora che f sia una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ e che f e f' siano localmente sommabili. Supponiamo inoltre che per un certo s ambedue $f e^{-sx}$ e $f' e^{-sx}$ siano sommabili; si ha allora

$$\mathcal{L}(f'(x)) = \int_0^{+\infty} f'(x) e^{-sx} d\mu(x) = f(x) e^{-sx} \Big|_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} f(x) e^{-sx} d\mu(x) = -f(0) + s \mathcal{L}(f)$$

dove

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

e si è usato il fatto che se $g \in L^1 \cap \mathcal{C}^1$ e $dg/dx \in L^1$, allora $g \in \mathcal{C}_\infty$, applicandolo a $g \doteq f e^{-sx}$.

In generale

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(s) = s^n \mathcal{L}(f)(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

**Andamento
all'infinito
reale della
trasformata**

Vogliamo adesso studiare l'andamento all'infinito reale della trasformata di Laplace. Abbiamo

$$\lim_{s' \rightarrow +\infty} F(s', s'') = 0$$

Infatti,

$$|F(s', s'')| \leq \int_0^{+\infty} |f(x) e^{-s'x} e^{-is''x}| d\mu(x) = \int_0^{+\infty} |f(x)| e^{-s'x} d\mu(x)$$

Il limite puntuale (in x) dell'integranda, per $s' \rightarrow +\infty$, è nullo. D'altra parte

$$|f(x)| e^{-s'x} \leq |f(x)| e^{-\lambda x} \in L^1$$

sicché, dal teorema di Lebesgue, ricaviamo la tesi.

Proposizione V.33

Se f è una funzione Laplace trasformabile, allora

$$\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow \infty} \mathcal{L}(f)(s) = 0.$$

La proposizione trovata ci consente di dimostrare anche il

**Teorema
V.34 (del
valore iniziale)**

Se $f \in \mathcal{C}^1$ e f ed f' sono Laplace trasformabili allora

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow \infty} s \mathcal{L}(f)$$

V.4.4 Inversione della trasformata di Laplace

**Trasformata
di Fourier e
trasformata
di Laplace**

Sia $f(x)$ una funzione nulla per $x < 0$. Come abbiamo visto se essa è L^1 allora è Laplace trasformabile (con λ al più 0). Se $f \in L^2$, allora

$$\int_0^{+\infty} f(x) e^{-sx} d\mu(x) < \infty$$

se $e^{-sx} \in L^2$ cioè se $s' > 0$. Perciò se $f \in L^1$ o $f \in L^2$ allora f è Laplace trasformabile e si ha $\lambda \leq 0$. In queste ipotesi f è pure Fourier trasformabile. Se adesso supponiamo che $\lambda < 0$ (ascissa di sommabilità **strettamente** negativa), vediamo che

$$(Ff)(\omega) = (\mathcal{L}f)(-i\omega)$$

**Inversione della
 $\mathcal{L}$ -trasformata**

Vogliamo adesso ricavare una formula che consenta di invertire la trasformata di Laplace. Data $f(x)$ avente ascissa di convergenza $\lambda < +\infty$, possiamo scrivere, per ogni s avente $\operatorname{Re} s > \lambda$

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-s'x} e^{-is''x} d\mu(x) = F(fe^{-s'x})(-s'')$$

Dalla formula per l'antitrasformata di Fourier abbiamo

$$fe^{-s'x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{L}f)(s', s'') e^{is''x} d\mu(s'')$$

da cui

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} (\mathcal{L}f)(s) e^{isx} ds$$

per ogni $a \in \mathbb{R}$ con $a > \lambda$. Il risultato trovato è corretto nell'ipotesi che $fe^{-s'x} \in L^2$ (già sapevamo che appartiene a L^1).

V.5 Distribuzioni

In questa sezione riporteremo solo alcuni cenni agli aspetti più utili ed interessanti della teoria delle distribuzioni: ci concentreremo in particolare sulle distribuzioni temperate.

V.5.1 Funzioni generalizzate

Gli elementi del duale topologico dell'insieme $\mathcal{D}(\Omega)$ si dicono **funzioni generalizzate** o **distribuzioni**. Lo spazio delle distribuzioni si denota con il simbolo $\mathcal{D}'(\Omega)$. Si omette l'indicazione Ω se si ha $\Omega = \mathbb{R}^\ell$.

Cominciamo con un teorema che ci consente di caratterizzare le distribuzioni

Teorema V.35 Sia T una forma lineare definita su $\mathcal{D}(\Omega)$. Allora T è una distribuzione se e solo se, per ogni compatto K in Ω , esistono $m \in \mathbb{N}$ e $C \geq 0$ tali che, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$,

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{m,K}$$

Dimostrazione Sia T una distribuzione. Per definizione, T è continua rispetto a ogni $\|\cdot\|_{m,K}$. In particolare, è continua in 0. Fissati m e K e $\varepsilon > 0$ troviamo δ tale che se

$$\|\varphi\|_{m,K} \leq \delta$$

allora

$$|\langle T, \varphi \rangle| < \varepsilon$$

Presa poi $\psi \neq 0$ abbiamo

$$\psi = \frac{\delta \psi}{\|\psi\|_{m,K}} \frac{\|\psi\|_{m,K}}{\delta}$$

da cui

$$\begin{aligned} |\langle T, \psi \rangle| &= \left| \left\langle T, \frac{\delta \psi}{\|\psi\|_{m,K}} \frac{\|\psi\|_{m,K}}{\delta} \right\rangle \right| = \frac{\|\psi\|_{m,K}}{\delta} \left| \left\langle T, \frac{\delta \psi}{\|\psi\|_{m,K}} \right\rangle \right| < \\ &< \frac{\varepsilon}{\delta} \|\psi\|_{m,K} \end{aligned}$$

Vediamo l'inverso. Sia allora T continua, ma non valga il criterio di sopra. Allora esistono un compatto K contenuto in Ω e una successione $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_K(\Omega)$ tale che

$$|\langle T, \varphi_n \rangle| > n \|\varphi_n\|_{n,K}$$

Per $n \geq 1$, poniamo

$$\psi_n = \frac{1}{n \|\varphi_n\|_{n,K}} \varphi_n \in \mathcal{D}_K(\Omega)$$

Per ogni m

$$\|\psi_n\|_{m,K} \leq \|\psi_n\|_{n,K} = \frac{1}{n}, \forall n > m$$

Ne viene che la successione ψ_n è convergente a 0. D'altronde la successione $|\langle T, \psi_n \rangle|$ è tale che

$$|\langle T, \psi_n \rangle| > 1$$

(c.v.d.) perciò non converge a 0. Assurdo.

V.5.2 Supporto di una distribuzione

Sia T una distribuzione in $\mathcal{D}'(\Omega)$. Definiamo **dominio di nullità** di T un aperto $\Omega' \subset \Omega$ tale che la restrizione di T alle funzioni in $\mathcal{D}(\Omega')$ è eguale alla distribuzione nulla in $\mathcal{D}'(\Omega')$. Proveremo che esiste un dominio di nullità massimale. Il suo complementare (che è un chiuso) si dice **supporto** di T

Teorema V.36 Ogni distribuzione T su Ω ha un dominio di nullità massimo.

Dimostrazione Sia $\mathcal{U}$ la collezione dei domini di nullità di T . Sia

$$\Omega_0 = \bigcup_{O \in \mathcal{U}} O$$

Vogliamo provare che Ω_0 è un dominio di nullità per T . Prendiamo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_0) \subset \mathcal{D}(\Omega)$. Siccome φ ha supporto compatto contenuto in Ω_0 , esiste un numero finito di aperti $O_1, \dots, O_n \in \mathcal{U}$ che ricoprono il supporto di φ . Esiste allora una partizione $\mathcal{C}^\infty$ dell'unità associata con questo ricoprimento finito: cioè esistono $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{D}$ tali che $0 \leq \varphi_i \leq 1$, $\text{supp } \varphi_i \subset O_i$ e

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i(x) = 1, \forall x \in \text{supp } \varphi.$$

Ne viene che

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi \varphi_i$$

Siccome ciascuna $\varphi \varphi_i$ ha supporto nel dominio di nullità O_i concludiamo che

$$(c.v.d.) \quad \langle T, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^n \langle T, \varphi \varphi_i \rangle = 0.$$

Abbiamo in qualche modo accennato al concetto di restrizione di una distribuzione a un insieme $\Omega' \subset \Omega$. In modo inverso, se $T \in \mathcal{D}(\Omega')$ definiamo estensione di T a Ω una distribuzione a valori $\mathcal{D}(\Omega)$ tale che la sua restrizione a Ω' sia pari a T . I concetti elementari fin qui introdotti ci consentono di passare a un teorema non banale:

Teorema V.37 *Sia T una distribuzione in Ω . Condizione necessaria e sufficiente affinché il supporto di T sia compatto è che T abbia una estensione a una forma lineare continua su $\mathcal{E}(\Omega)$. L'estensione allora è unica.*

Dimostrazione Supponiamo in primo luogo che il supporto di T sia compatto. Allora esiste un compatto K in Ω la cui parte interna contiene il supporto di T . Segue dal teorema di partizione $\mathcal{C}^\infty$ dell'unità che esiste $\rho \in \mathcal{D}(\Omega)$ tale che $0 \leq \rho \leq 1$ e $\rho(x) = 1$ per ogni $x \in K$. Poniamo allora

$$\hat{T}(f) \doteq \langle T, f\rho \rangle$$

Evidentemente questo definisce una forma lineare su $\mathcal{E}$. D'altro canto se $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, abbiamo

$$\text{supp}(\varphi - \rho\varphi) \subset \Omega \setminus \text{int } K \subset \Omega \setminus \text{supp } T$$

sicché

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi\rho \rangle$$

Ne viene che $\hat{T}$ estende T in $\mathcal{E}(\Omega)$. Veniamo alla continuità di $\hat{T}$. Sia f_n una successione di funzioni $\mathcal{E}$ -convergente a 0. Usando la formula di Leibniz è facile vedere che $f_n\rho$ tende a 0 in $\mathcal{D}(\Omega)$ di modo che $\langle T, f_n\rho \rangle \rightarrow 0$. Siccome $\mathcal{D}(\Omega)$ è denso in $\mathcal{E}(\Omega)$ l'estensione continua $\hat{T}$ di T è unica.

Vediamo l'inverso. Sia $\hat{T}$ l'estensione a $\mathcal{E}$ di T . Sia K_n una successione di compatti che esaurisce lo spazio Ω . Se il supporto di T non fosse compatto, esisterebbe per ogni intero $n \in \mathbb{N}$, una funzione $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ tale che

$$\text{supp } \varphi_n \subset \Omega \setminus K_n \text{ \& } \langle T, \varphi_n \rangle \neq 0$$

Dividendo, se necessario, per φ_n possiamo pure supporre che

$$\langle T, \varphi_n \rangle = 1$$

La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n$$

converge in $\mathcal{E}(\Omega)$. Infatti, se K è un compatto allora K esiste n_0 talché $K \subset K_{n_0}$ e, su K , la serie si riduce a una somma finita. Ne verrebbe che

$$\left\langle \hat{T}, \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \right\rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \langle \hat{T}, \varphi_n \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \langle T, \varphi_n \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} N < \infty$$

(c.v.d.) il che è palesemente falso.

**Distribuzioni
a supporto
compatto**

La restrizione a $\mathcal{D}(\Omega)$ di una forma lineare continua definita in $\mathcal{E}(\Omega)$ è una distribuzione appartenente a $\mathcal{D}'(\Omega)$. Infatti, se una successione converge in senso $\mathcal{D}$, allora $\mathcal{E}$ -converge. Ma tale restrizione ha supporto compatto. Ne viene che possiamo identificare lo spazio delle distribuzioni su Ω aventi supporto compatto con il duale topologico di $\mathcal{E}(\Omega)$ che indicheremo con $\mathcal{E}'(\Omega)$. Perciò

$$\mathcal{E}'(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$$

e lo spazio $\mathcal{E}'(\Omega)$ prende il nome di **spazio delle distribuzioni a supporto compatto**.

Distribuzioni temperate In aggiunta allo spazio delle distribuzioni e delle distribuzioni a supporto compatto, si introduce lo spazio delle **distribuzioni temperate** come duale topologico dello spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$. Evidentemente,

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^\ell) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^\ell) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^\ell)$$

Alcuni esempi È il momento di concretizzare un po' le nozioni fin qui presentate. Esporremo una sequenza di esempi molto importanti.

Esempio V.3 Sia $u(x)$ una qualunque funzione localmente sommabile (cioè sommabile su ogni compatto o su ogni palla), limitata, i.e., $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^\ell)$, l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}^\ell} u(x) \varphi(x) d\mu(x)$$

esiste per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$ ed è un funzionale lineare continuo definito su $\mathcal{S}$. La limitatezza di u garantisce che $|u\varphi| \leq \sup |u| |\varphi| \doteq M |\varphi| \in L^1(\mathbb{R}^\ell)$, perciò si ha l'esistenza dell'integrale. La linearità discende immediatamente dalla linearità dell'integrale, resta da vedere la continuità. Sia $\varphi_n \rightarrow \varphi$ una successione di funzioni test, allora

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^\ell} u(x) (\varphi(x) - \varphi_n(x)) d\mu(x) \right| &\leq M \int_{\mathbb{R}^\ell} |\varphi(x) - \varphi_n(x)| d\mu(x) = \\ &M \int_{\mathbb{R}^\ell} \frac{1}{1 + |x|^2} \left(1 + |x|^2 \right) |\varphi(x) - \varphi_n(x)| d\mu(x) \leq \\ &M' \left[\sup_{\mathbb{R}^\ell} |\varphi(x) - \varphi_n(x)| + \sup_{\mathbb{R}^\ell} \left(|x|^2 |\varphi(x) - \varphi_n(x)| \right) \right] \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Ma se $\varphi_n \rightarrow \varphi$ nella topologia di $\mathcal{S}$, allora

$$\sup_{\mathbb{R}^\ell} |x_j^2 (\varphi(x) - \varphi_n(x))| = \sup_{\mathbb{R}^\ell} x_j^2 |\varphi(x) - \varphi_n(x)| \rightarrow 0$$

da cui

$$\sup_{\mathbb{R}^\ell} \left(|x|^2 |\varphi(x) - \varphi_n(x)| \right) \leq \sum_{j=1}^{\ell} \sup_{\mathbb{R}^\ell} x_j^2 |\varphi(x) - \varphi_n(x)| \rightarrow 0$$

per cui si ha la continuità del funzionale.

Ne viene che l'insieme delle funzioni limitate è iniettato nell'insieme $\mathcal{S}'$ (e perciò in $\mathcal{D}'$) dall'applicazione

$$u \mapsto T_u \doteq \langle u, \cdot \rangle = \int_{\mathbb{R}^\ell} u(x) \cdot d\mu$$

Tramite tale iniezione, si ha che $\mathcal{S}'$ contiene l'insieme delle funzioni localmente sommabili

■ limitate.

Esempio V.4 $\mathcal{D}'$ contiene l'insieme $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^\ell)$ senza bisogno della restrizione sulla limitatezza di tali funzioni, grazie alla compattezza del supporto delle funzioni test. Proprio a questa inclusione $\mathcal{D}'$ deve il nome di spazio delle funzioni generalizzate.

Se invece vogliamo includere le localmente sommabili in $\mathcal{S}'$ dobbiamo pure richiedere che esse

■ abbiano supporto compatto, come ci si poteva aspettare.

Grazie al lemma di Dubois-Reymond, abbiamo che

Proposizione V.38 Due funzioni localmente integrabili, definiscono la stessa distribuzione se e solo se sono eguali quasi ovunque.

Esempio V.5 Sia ora $g \in L^1(\mathbb{R})$ e consideriamo ancora il funzionale su $\mathcal{S}$

$$T_g \varphi = \langle g, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^\ell} g(x) \varphi(x) d\mu$$

Vediamo che appartiene a $\mathcal{S}'$. Tanto per cominciare, è ben definito

$$\left| \int_{\mathbb{R}^\ell} g(x) \varphi(x) d\mu \right| \leq \sup_{\mathbb{R}^\ell} |\varphi| \|g\|_{L^1} < \infty;$$

è banalmente lineare, ed è continuo. Vediamo perché. Sia $\varphi_n \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{S}$, allora

$$\left| \int_{\mathbb{R}^\ell} g(x) (\varphi(x) - \varphi_n(x)) d\mu \right| \leq \sup_{\mathbb{R}^\ell} |\varphi(x) - \varphi_n(x)| \|g\|_{L^1} \rightarrow 0$$

- Dunque ricaviamo un'altra iniezione via la quale possiamo dire che $L^1(\mathbb{R}^\ell) \subset \mathcal{S}'$.

Esempio V.6 Procediamo come nell'esempio precedente: sia $g \in L^q(\mathbb{R}^\ell)$, $q \neq 1$ allora il funzionale su $\mathcal{S}$

$$T_g \varphi = \langle g, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^\ell} g(x) \varphi(x) d\mu$$

è lineare e continuo, perciò appartiene a $\mathcal{S}'$. Infatti, $\varphi(x) \in L^p(\mathbb{R}^\ell)$ per ogni p , in particolare per p coniugato a q , allora dalla disuguaglianza di Hölder (capitolo I),

$$\left| \int_{\mathbb{R}^\ell} g(x) \varphi(x) d\mu \right| \leq \int_{\mathbb{R}^\ell} |g(x) \varphi(x)| d\mu \leq \|g\|_{L^q} \|\varphi\|_{L^p} < \infty$$

Si tratta di vedere la continuità,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^\ell} g(x) [\varphi(x) - \varphi_n(x)] d\mu \right| \leq \|g\|_{L^q} \|\varphi - \varphi_n\|_{L^p}$$

Ora, se $\psi \in \mathcal{S}$, allora

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{L^p} &= \left\| |\psi|^{1/p} |\psi|^{1-1/p} \right\|_{L^p} = \left\| |\psi|^{1/p} |\psi|^{1/q} \right\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^\ell} |\psi| |\psi|^{p/q} d\mu \right)^{1/p} \leq \\ &\leq \sup_{\mathbb{R}^\ell} |\psi|^{1/q} \|\psi\|_{L^1}^{1/p} \end{aligned}$$

Se $\psi = \varphi - \varphi_n$, si ha, come avevamo pure già visto in precedenza,

$$\begin{aligned} \|\varphi - \varphi_n\|_{L^1} &= \int |\varphi - \varphi_n| d\mu = \int \frac{(1 + |x|^2)}{1 + |x|^2} |\varphi - \varphi_n| d\mu \leq \\ &\leq C \left(\sup |\varphi - \varphi_n| + \sup |x|^2 |\varphi - \varphi_n| \right) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

In definitiva, tutti gli spazi $L^p(\mathbb{R}^\ell)$ definiscono dei funzionali continui su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$, perciò

- appartengono a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^\ell)$.

Osservazione V.3 In particolare abbiamo dimostrato che se $\varphi_n \rightarrow \varphi$ nella topologia di $\mathcal{S}$, allora $\varphi_n \rightarrow \varphi$ in senso L^p , per un qualsiasi intero $p \geq 1$. Ne viene che l'identità da $\mathcal{S} \rightarrow L^p$ è una funzione continua. In particolare, se $\varphi_n \rightarrow \varphi$, allora φ_n tende a φ in senso L^2 e, se $u \in L^2$, allora

$$\langle u, \varphi \rangle = (u, \varphi) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \langle u, \varphi_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} (u, \varphi_n) = (u, \varphi)$$

- che è uno dei risultati trovati nell'esempio precedente.

Lo spazio $\mathcal{S}'$ contiene ben più degli spazi L^p come dimostra il seguente

Esempio V.7
(delta di Dirac)

Il seguente è un funzionale lineare continuo definito su $\mathcal{S}$

$$\delta_{x_0}(\varphi) = \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0)$$

la dimostrazione è ovvia. La δ_{x_0} , **delta di Dirac**, è una distribuzione che agisce non solo in $\mathcal{S}$, ma su anche su $\mathcal{C}(\Omega)$, se $x_0 \in \Omega$. Essa non corrisponde ad alcuna funzione L^p , ma in analogia con queste ultime si suole scrivere impropriamente

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^\ell} \delta(x - x_0) \varphi(x) d\mu = \varphi(x_0).$$

Quest'ultima scrittura è suggerita anche dal fatto che esiste una misura, μ_{x_0} (vedi capitolo I), **misura puntuale**, tale che

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^\ell} \varphi(x) d\mu_{x_0} = \varphi(x_0)$$

In questo senso, δ_{x_0} non è associata a una funzione, ma a una misura.

- Ovviamente δ_{x_0} appartiene anche a $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^\ell)$.

Esempio V.8 Sia $T \in \mathcal{S}'$, definiamo per ogni polinomio $P(x)$ la distribuzione $P(x)T$ come

$$\langle P(x)T, \varphi \rangle = \langle T, P(x)\varphi \rangle$$

essa è ben definita essendo $P\varphi \in \mathcal{S}$. La continuità deriva dall'ovvio fatto che se

$$\varphi_n \rightarrow \varphi$$

allora

$$P\varphi_n \rightarrow P\varphi$$

■ in $\mathcal{S}$.

V.5.3 Convergenza debole e debole completezza

Non abbiamo ancora imposto una nozione di convergenza negli spazi distribuzionali. Con $\mathcal{T}$ indichiamo i vari spazi funzionali e con $\mathcal{T}'$ i rispettivi duali topologici. Diremo che $\{T_n\} \subset \mathcal{T}'$ converge a T se, per ogni $\varphi \in \mathcal{T}$, risulta

$$\langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$$

dove il limite è ovviamente eseguito in $\mathbb{C}$. La convergenza introdotta si chiama **convergenza debole**. Adesso vogliamo mostrare che la convergenza debole *cattura* vari altri tipi di convergenza:

Esempio V.9 Sia $\{u_n\} \subset L^1$ una successione convergente, in senso L^1 , a $u \in L^1$, allora $u_n \rightarrow u$ in senso della convergenza distribuzionale, infatti

$$\left| \int u\varphi \, d\mu - \int u_n\varphi \, d\mu \right| \leq \int |u - u_n| |\varphi| \, d\mu \leq \sup_{\mathbb{R}^\ell} |\varphi| \int |u - u_n| \, d\mu \rightarrow 0$$

■

Esempio V.10 Sia $\{u_n\} \subset L^q$ una successione convergente, in senso L^q , a $u \in L^q$, allora $u_n \rightarrow u$ in senso della convergenza distribuzionale ($\mathcal{S}'$ o $\mathcal{D}'$), infatti, grazie alla disuguaglianza di Hölder, se p è coniugato a q , allora

$$\left| \int u\varphi \, d\mu - \int u_n\varphi \, d\mu \right| \leq \int |u - u_n| |\varphi| \, d\mu \leq \|u - u_n\|_{L^p} \|\varphi\|_{L^q} \rightarrow 0$$

In particolare, in L^2 , dove esiste un prodotto scalare, basta che $u_n \rightarrow u$ debolmente, infatti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_n, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, \varphi) = (u, \varphi) = \langle u, \varphi \rangle$$

■

Esempio V.11 Sia data una successione di funzioni u_n localmente sommabili convergenti puntualmente quasi ovunque alla funzione u . Se tutti gli elementi della successione ed il limite u sono dominati da un polinomio, allora si ha convergenza in senso $\mathcal{S}'$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int u\varphi \, d\mu - \int u_n\varphi \, d\mu \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int |u - u_n| |\varphi| \, d\mu$$

ma

$$|u - u_n| |\varphi| \leq 2P |\varphi| \in \mathcal{S} \subset L^1$$

■ usando il teorema di Lebesgue si può portare dentro il limite ottenendo la tesi.

La convergenza distribuzionale consente anche il verificarsi di situazioni nuove

Proposizione V.39 Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^\ell)$ una funzione normalizzata, i.e.

$$\int_{\mathbb{R}^\ell} f(x) \, d\mu = 1$$

Allora la successione di funzioni $tf(tx)$ tende alla delta di Dirac per $t \rightarrow \infty$.

Dimostrazione Sia $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\ell)$ si ha

$$\int tf(tx) \, d\mu = \int f(y) \, d\mu = 1$$

dunque,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \int t f(tx) [\varphi(x) - \varphi(0)] dx \right| = \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \int f(y) \left[\varphi\left(\frac{y}{t}\right) - \varphi(0) \right] dy \right|$$

siccome

$$\left| f(y) \left[\varphi\left(\frac{y}{t}\right) - \varphi(0) \right] \right| \leq 2 \sup \varphi |f| \in L^1$$

e si ha convergenza puntuale

$$\varphi\left(\frac{y}{t}\right) - \varphi(0) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

(c.v.d.) dal teorema di Lebesgue si ha la tesi.

Esempio V.12 Le successioni

$$u_n = \frac{1}{\pi} \frac{n}{1 + n^2 x^2}$$

$$u_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \pi}} e^{-x^2/\varepsilon}$$

- tendono alla delta per $n \rightarrow \infty$ e $\varepsilon \rightarrow 0$, rispettivamente.

**Debole
completezza
di $\mathcal{S}'$ ed $\mathcal{E}'$**

Sia ora $\mathcal{T} \doteq \mathcal{S}, \mathcal{E}$. Sia T_n una successione di Cauchy in $\mathcal{T}'$, dunque per ogni φ , per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un indice ν , talché se $n, m > \nu$ allora

$$|T_n \varphi - T_m \varphi| < \varepsilon$$

Dunque, $\{T_n \varphi\} \subset \mathbb{C}$ è una successione di Cauchy. Siccome $\mathbb{C}$ è completo, esiste per ogni φ

$$T\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n \varphi$$

Si tratta di vedere se $T \in \mathcal{T}'$. Cominciamo dalla linearità

$$T(\varphi + \lambda \psi) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\varphi + \lambda \psi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (T_n \varphi + \lambda T_n \psi) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n \varphi + \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} T_n \psi = T\varphi + \lambda T\psi$$

Si tratta adesso di mostrare che T è continuo. La cosa è un po' più complicata perché richiede il teorema di uniforme limitatezza di Banach-Steinhaus. Sia $\varphi_m \rightarrow \varphi$, allora

$$|T\varphi_m - T\varphi| = |T\varphi_m - T_n \varphi_m| + |T_n \varphi_m - T_n \varphi| + |T_n \varphi - T\varphi|$$

Fissiamo ε . Fissato φ esiste ν_φ tale che preso $n > \nu_\varphi$ si ha

$$|T_n \varphi - T\varphi| < \frac{\varepsilon}{3}$$

d'altra parte, fissato $m > \nu_n$ si trova

$$|T\varphi_m - T_n \varphi_m| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Resta da minorare un addendo

$$|T_n \varphi_m - T_n \varphi|$$

Notiamo che si ha a che fare con una famiglia di operatori lineari T_n definiti su $\mathcal{T}$ (che è uno spazio metrico completo nei casi $\mathcal{E}$ ed $\mathcal{S}$) a valori nello spazio normato (completo) $\mathbb{C}$. Per ogni $\varphi \in \mathcal{T}$ la successione

$$\{T_n \varphi\}$$

è limitata in $\mathbb{C}$, ossia esiste M_φ per cui

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |T_n \varphi| < M_\varphi$$

ne viene, dal teorema di Banach-Steinhaus, che esiste M per cui

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |T_n \varphi| < M, \quad \forall \varphi \in B(0, 1)$$

Siccome in $\mathcal{T}$ l'operazione di moltiplicazione è continua ($\mathcal{T}$ è uno spazio metrico lineare), si ha che esiste δ per cui

$$B(0, \delta) \subset \frac{\varepsilon}{3M} B(0, 1)$$

allora, se ψ_1 e ψ_2 distano meno di δ

$$|T_n \psi_1 - T_n \psi_2| = |T_n(\psi_1 - \psi_2)| = \frac{\varepsilon}{3M} \left| T_n \frac{3M}{\varepsilon} (\psi_1 - \psi_2) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

sicché, scelto $m > \nu_n$ e m tale che

$$d_{\mathcal{T}}(\varphi_m, \varphi) < \delta,$$

abbiamo

$$|T_n \varphi_m - T_n \varphi| < \frac{\varepsilon}{3}$$

In definitiva abbiamo dimostrato il seguente

Teorema V.40
(della debole
completezza)

Il duale topologico di uno spazio metrico lineare è debolmente completo.

Cioè

Teorema V.41

Gli spazi $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^\ell)$ e $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^\ell)$ sono completi nella topologia della convergenza debole, cioè sono debolmente completi.

**Debole
completezza
di $\mathcal{D}'$**

Veniamo a considerare il caso $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^\ell)$. Si ragiona come prima per definire T , limite della successione T_n . Sempre come prima si usa l'argomento $\varepsilon/3$ per mostrare la continuità di T . Se φ_n è una successione $\mathcal{D}$ -convergente a $\varphi \in \mathcal{D}$, si tratta di compiere la minorazione

$$|T_n \varphi_m - T_n \varphi| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$\mathcal{D}$ non è uno spazio metrico, tuttavia, esiste un compatto K tale che i supporti delle φ_m e il supporto di φ sono tutti contenuti in K e, inoltre,

$$\varphi = \mathcal{D}_K - \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m$$

Siccome $\mathcal{D}_K$ è uno spazio metrico completo, possiamo tornare ad applicare il teorema di Banach-Steinhaus e, in modo identico a prima, pervenire alla tesi.

Teorema V.42

Lo spazio delle funzioni generalizzate, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^\ell)$, è debolmente completo.

V.5.4 Prodotto tensoriale di distribuzioni e teoremi di densità

Nel seguito indicheremo con $\mathbb{R}^n$ lo spazio di variazione della x , e con $\mathbb{R}^m$ lo spazio di variazione della y . Ancora, $\mathcal{T} \doteq \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{S}$. Inoltre, se $T \in \mathcal{T}'(\mathbb{R}^n)$ e $S \in \mathcal{T}'(\mathbb{R}^m)$ specificheremo

$$\langle T, \varphi \rangle \doteq \langle T_x, \varphi(x) \rangle$$

$$\langle S, \psi \rangle \doteq \langle S_y, \psi(y) \rangle$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$ e $\psi \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^m)$.

Cominciamo dal seguente semplice

Teorema V.43
(derivazione
entro parentesi)

Sia $\mathcal{T} \doteq \mathcal{D}, \mathcal{E}$. Sia $T \in \mathcal{T}'(\mathbb{R}^n)$ e sia $\varphi \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$, la mappa su $\mathbb{R}^m$ definita da

$$y \mapsto \langle T, \varphi(\cdot, y) \rangle$$

appartiene a $\mathcal{T}(\mathbb{R}^m)$ e, per ogni multi-indice $\mathbf{p} \in \mathbb{N}^m$ si ha, per ogni $y \in \mathbb{R}^m$

$$\frac{\partial^{|\mathbf{p}|}}{\partial y^{\mathbf{p}}} \langle T, \varphi(\cdot, y) \rangle = \left\langle T, \frac{\partial^{|\mathbf{p}|}}{\partial y^{\mathbf{p}}} \varphi(\cdot, y) \right\rangle.$$

Dimostrazione

Per ogni y la funzione $x \mapsto \varphi(x, y) \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$ quindi la mappa è ben definita. Vediamo che essa è continua. Sia y_n una successione a valori in $\mathbb{R}^m$ che converga a y . Se mostriamo che

$$T - \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\cdot, y_n) = \varphi(\cdot, y)$$

allora, dato che T è continuo, avremo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T, \varphi(\cdot, y_n) \rangle = \langle T, \varphi(\cdot, y) \rangle$$

da cui la continuità. Nel caso in cui $\mathcal{T} = \mathcal{D}$, siano K e K' compatti tali che $\text{supp } \varphi \subset K \times K'$ si ha che ogni $\langle T, \varphi(\cdot, y_n) \rangle$ ha supporto in K' perciò possiamo procedere a studiarne la convergenza nei compatti contenuti in K' .

Dal teorema del valor medio, sui compatti

$$\sup_x |\varphi(x, y_n) - \varphi(x, y)| = \sup_x \left| \frac{\partial}{\partial y} \varphi(x, \eta_n) (y_n - y) \right|$$

dove $\eta_n \in [y_n, y]$. Siccome il sup della derivata è limitato, si conclude che il limite uniforme per $n \rightarrow \infty$, è nullo. Si procede analogamente per le derivate di ordine superiore.

Si deve adesso derivare in y la mappa. Se $y_n \rightarrow y_0$ si tratta di calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle T, \varphi(\cdot, y_n) \rangle - \langle T, \varphi(\cdot, y_0) \rangle}{y_n - y_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle T, \frac{\varphi(\cdot, y_n) - \varphi(\cdot, y_0)}{y_n - y_0} \right\rangle$$

Ancora ci basta mostrare che esiste

$$\mathcal{T} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(\cdot, y_n) - \varphi(\cdot, y_0)}{y_n - y_0}$$

Evidentemente, puntualmente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x, y_n) - \varphi(x, y_0)}{y_n - y_0} = \frac{\partial}{\partial y} \varphi(x, y_0)$$

Perciò se mostriamo che il limite è anche in senso $\mathcal{T}$, abbiamo mostrato pure la seconda parte della tesi (per $|p| = 1$, il resto è analogo o induttivo).

Abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x, y_n) - \varphi(x, y_0)}{y_n - y_0} - \frac{\partial}{\partial y} \varphi(x, y_0) &= \frac{\partial}{\partial y} \varphi(x, y_0 + \eta_n) - \frac{\partial}{\partial y} \varphi(x, y_0) = \\ &= \frac{\partial}{\partial y} [\varphi(x, y_0 + \eta_n) - \varphi(x, y_0)] \end{aligned}$$

Siccome $\varphi(x, y_0 + \eta_n) - \varphi(x, y_0)$ converge a 0 in senso $\mathcal{T}$ per quanto visto sopra, anche la sua derivata convergerà a 0 in senso $\mathcal{T}$, la tesi.

(c.v.d.)

Vogliamo andare a parlare di prodotto tensore di due distribuzioni T_x e S_y . Ci occorre preliminarmente il seguente

Lemma V.44 Supponiamo $\psi, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Per $\varepsilon > 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$ poniamo

$$g_\varepsilon(x) = \varepsilon^n \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \varphi(x - \varepsilon \nu) \psi(\varepsilon \nu)$$

allora $g_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e

$$\mathcal{D} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} g_\varepsilon = \varphi * \psi.$$

Dimostrazione Notiamo, in primo luogo, che $g_\varepsilon(x)$ è una somma di Riemann per $(\varphi * \psi)(x)$ a ogni x fissato. Infatti, a ε fissato la somma è finita dovendo essere

$$\varepsilon |\nu| \leq \max_{x \in \text{supp } \psi} |x| \doteq R$$

Grazie a questo fatto si ha subito che $g_\varepsilon \in \mathcal{D}$.

Per quanto concerne il limite, si tratta, intanto, di vedere che

$$\sup_{x \in K} |(\varphi * \psi)(x) - g_\varepsilon(x)| \rightarrow 0$$

Ora, se reticoliamo $\mathbb{R}^n$ con punti $\varepsilon \nu$ al variare di $\nu \in \mathbb{Z}^n$ e chiamiamo il quadrato di lato ε e vertice ν , Q_ν^ε , abbiamo

$$|(\varphi * \psi)(x) - g_\varepsilon(x)| \leq \sum_{|\nu| < R/\varepsilon} \int_{Q_\nu^\varepsilon} |\varphi(x - y) \psi(y) - \varphi(x - \nu \varepsilon) \psi(\nu \varepsilon)| d\mu(y)$$

Grazie al teorema del valor medio

$$|\varphi(x - y) \psi(y) - \varphi(x - \nu \varepsilon) \psi(\nu \varepsilon)| \leq C |y - \nu \varepsilon|$$

Dunque,

$$|(\varphi * \psi)(x) - g_\varepsilon(x)| \leq \sum_{|\nu| < R/\varepsilon} C \int_{Q_\nu^\varepsilon} |y - \nu \varepsilon| d\mu(y)$$

Ciascun integrale porta un contributo di ordine ε^{n+1} , il numero degli integrali da sommare varia come $(R/\varepsilon)^n$, perciò il limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ è nullo. Su ogni compatto K , g_ε converge uniformemente a $\varphi * \psi$. Stesso discorso vale per le derivate. Infatti, visto che g_ε è una somma

finita,

$$D^{\mathbf{P}}g_{\varepsilon} = \varepsilon^n \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} D^{\mathbf{P}}\varphi(x - \varepsilon\nu) \psi(\varepsilon\nu)$$

perciò $D^{\mathbf{P}}g_{\varepsilon}$ converge uniformemente sui compatti a $(D^{\mathbf{P}}\varphi * \psi) = D^{\mathbf{P}}(\varphi * \psi)$, come si voleva.

Ne viene che

$$(c.v.d.) \quad \mathcal{D} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_{\varepsilon} = \varphi * \psi.$$

Usiamo il lemma per dimostrare il seguente importante

Teorema V.45 *Lo spazio $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ generato dalle funzioni*

$$f \otimes g : (x, y) \mapsto f(x)g(y)$$

è denso in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$.

Dimostrazione Consideriamo due successioni regolarizzanti (a supporto compatto tendente a un punto e di integrale unitario), $\chi_i^{(1)} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e $\chi_j^{(2)} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. Chiaramente $\chi_i^{(1)} \otimes \chi_i^{(2)}$ è una successione regolarizzante in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$. Prendiamo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$. Allora esistono due compatti K_1 e K_2 tali che $\text{supp } \varphi \subset K_1 \times K_2 \subset K'_1 \times K'_2$ con $K_h \subset \text{int } K'_h$, $h \in J_2$. Per i sufficientemente grande, si ha $K_h + \text{supp } \chi_i^{(h)} \subset K'_h$, perciò $(\chi_i^{(1)} \otimes \chi_i^{(2)}) * \varphi$ approssima φ in $\mathcal{D}_{K'_1 \times K'_2}$. Tuttavia, dal lemma, $(\chi_i^{(1)} \otimes \chi_i^{(2)}) * \varphi$ può essere approssimata, in $\mathcal{D}_{K'_1 \times K'_2}$, da funzioni della forma

$$\varepsilon^{n+m} \sum_{\nu^1, \nu^2} \varphi(\varepsilon\nu^{(1)}, \varepsilon\nu^{(2)}) \chi_i^{(1)}(x - \varepsilon\nu^{(1)}) \chi_i^{(2)}(y - \varepsilon\nu^{(2)})$$

Ne viene che, essendo $\mathcal{D}_{K'_1 \times K'_2}$ uno spazio metrico, esiste una successione a valori in $\mathcal{D}_{K'_1 \times K'_2}$ che converge a φ e che è data dal prodotto di funzioni in $\mathcal{D}_{K'_1}$ e $\mathcal{D}_{K'_2}$. In definitiva, si ha che

(c.v.d.) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ è denso in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$.

Osservazione V.4 Presa ora una funzione φ in $\mathcal{E}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ troviamo una successione f_i a valori in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ tale che

$$\mathcal{E}, \mathcal{S} - \lim_{i \rightarrow \infty} f_i = \varphi$$

Consideriamo ogni f_i . Su un compatto K_i che ne contiene il supporto tale che $K_i \subset K'_i \times K''_i$, troviamo $\psi_{i,n}^{(1)} \in \mathcal{D}_{K'_i}(\mathbb{R}^n)$ e $\psi_{i,n}^{(2)} \in \mathcal{D}_{K''_i}(\mathbb{R}^m)$ per cui

$$\mathcal{D}_{K_i} - \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{i,n}^{(1)} \otimes \psi_{i,n}^{(2)} = f_i$$

Perciò

$$\mathcal{E}, \mathcal{S} - \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{i,n}^{(1)} \otimes \psi_{i,n}^{(2)} = f_i$$

Cioè, esiste ν sufficientemente grande per cui

$$\delta_{\mathcal{E}, \mathcal{S}}(\psi_{i,\nu}^{(1)} \otimes \psi_{i,\nu}^{(2)}, f_i) < \frac{1}{i}$$

sicché

$$\delta_{\mathcal{E}, \mathcal{S}}(\psi_{i,\nu}^{(1)} \otimes \psi_{i,\nu}^{(2)}, \varphi) \leq \delta_{\mathcal{E}, \mathcal{S}}(\psi_{i,\nu}^{(1)} \otimes \psi_{i,\nu}^{(2)}, f_i) + \delta_{\mathcal{E}, \mathcal{S}}(f_i, \varphi) \rightarrow 0$$

In definitiva, siccome $\psi_{i,\nu}^{(1)} \otimes \psi_{i,\nu}^{(2)} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{E}(\mathbb{R}^m), \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.

Riassumiamo il contenuto dell'osservazione nel seguente

Teorema V.46 $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$ è denso in $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ è denso in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$.

Veniamo a introdurre il concetto di prodotto tensore di distribuzioni mediante il seguente

Teorema V.47
(di Fubini)

Supponiamo $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$. Esiste un'unica distribuzione in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ tale che

$$\langle T \otimes S, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \langle S, \psi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$$

$T \otimes S$ si dice prodotto tensore di T ed S . Inoltre, per ogni $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ vale

$$\langle T \otimes S, \zeta \rangle = \langle T_x, \langle S_y, \zeta(x, y) \rangle \rangle = \langle S_y, \langle T_x, \zeta(x, y) \rangle \rangle$$

Dimostrazione $T \otimes S$ è un'applicazione lineare continua su un denso perciò si estende per continuità a un'unica applicazione, di qui esistenza e unicità. Consideriamo la mappa (ben definita, dai teoremi precedenti)

$$\zeta \mapsto \langle S_y, \langle T_x, \zeta(x, y) \rangle \rangle$$

se mostriamo che essa è continua, abbiamo la tesi, grazie all'unicità (Fubini si ottiene poi scambiando, nella dimostrazione, il ruolo di x con quello di y). Infatti, se $\zeta = \varphi(x)\psi(y)$ abbiamo

$$\langle S_y, \langle T_x, \varphi(x)\psi(y) \rangle \rangle = \langle S_y, \psi(y) \langle T_x, \varphi(x) \rangle \rangle = \langle S_y, \psi(y) \rangle \langle T_x, \varphi(x) \rangle.$$

Continuità. Sia $K_1 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ un compatto e siano K e K' tali che $K_1 \subset K \times K'$. Per la continuità di T ed S esistono $C, C' > 0$ e $m, m' \in \mathbb{N}$ tali che

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{m, K} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$$

$$|\langle S, \varphi \rangle| \leq C' \|\varphi\|_{m', K'} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_{K'}(\mathbb{R}^m)$$

Allora, ancora grazie al teorema di derivazione entro parentesi, si ha, per ogni $\zeta \in \mathcal{D}_{K_1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$

$$\begin{aligned} |\langle S_y, \langle T_x, \zeta(x, y) \rangle \rangle| &\leq C' \sum_{|i| \leq m'} \sup_{y \in K'} |D^i \langle T_x, \zeta(x, y) \rangle| = C' \sum_{|i| \leq m'} \sup_{y \in K'} |\langle T_x, D^i \zeta(x, y) \rangle| \leq \\ &\leq C' C \sum_{|i| \leq m'} \sup_{y \in K'} \sup_{x \in K} \sum_{|k| \leq |i|} |D^{i+k} \zeta(x, y)| \leq C'' \|\zeta\|_{m+m', K_1} \end{aligned}$$

(c.v.d.) Da cui, la tesi.

Adesso, presa una successione regolarizzante $\varphi_n \in \mathcal{D}$ e una distribuzione $T \in \mathcal{D}'$, vogliamo approssimare la distribuzione T usando la successione di funzioni appartenenti a $\mathcal{D}$, $T_n \doteq \langle T_x, \varphi_n(x-y) \rangle$. Dal teorema di Fubini, si ha, per ogni $\psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^\ell)$ (perciò $\psi \in \mathcal{D}'$),

$$\langle \langle T_x, \varphi_n(x-y) \rangle, \psi(y) \rangle = \langle \psi(y), \langle T_x, \varphi_n(x-y) \rangle \rangle = \langle T_x, \langle \psi(y), \varphi_n(x-y) \rangle \rangle = \langle T_x, \varphi_n * \psi \rangle$$

Fissato $\psi \in \mathcal{T} \doteq \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{S} \subset \mathcal{E}$, siccome $\varphi_n * \psi$ converge a ψ in $\mathcal{T}$, si ha che

$$T' - \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_x, \varphi_n(x-y) \rangle = T$$

Ne viene che $\mathcal{D}$ è denso in $\mathcal{T}'$, essendo poi $\mathcal{D}$ denso in $\mathcal{T}$, abbiamo

Teorema V.48
(di densità)

o $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ è denso in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Lo spazio $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ è denso in $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è denso in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Ogni distribuzione (funzione generalizzata, a supporto compatto o distribuzione temperata) è limite di una successione di funzioni “belle quanto si vuole” (per dirla col Cicogna).

V.5.5 Derivazione delle distribuzioni

Motivazione

Sia T una distribuzione, vogliamo definirne la derivata. Ovviamente richiediamo che se T_u è associata a una funzione derivabile u la cui derivata u' continua ad essere associabile a una distribuzione, allora

$$DT_u = T_{u'}$$

Consideriamo, ad esempio, $u \in L^1_{\text{loc}}$ tale che anche $u' \in L^1_{\text{loc}}$, allora $T_u, T_{u'} \in \mathcal{D}'$. Abbiamo, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$

$$T_{u'}(\varphi) = \int u' \varphi d\mu = - \int u \varphi' d\mu = -T_u(\varphi')$$

dove i termini di bordo nell'integrazione per parti sono nulli grazie alla compattezza del supporto di φ .

Ancora, se per esempio $u, u' \in L^1_{\text{loc}}$ polinomialmente dominate, allora $T_u, T_{u'} \in \mathcal{S}'$, per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$

$$T_{u'}(\varphi) = \int u' \varphi d\mu = - \int u \varphi' d\mu = -T_u(\varphi')$$

Se poi $u, u' \in L^1_{\text{loc}}$ e u ha supporto compatto, allora, per ogni $\varphi \in \mathcal{E}$,

$$T_{u'}(\varphi) = \int u' \varphi d\mu = - \int u \varphi' d\mu = -T_u(\varphi')$$

Definizione della derivata debole

Definiamo, allora, per **ogni** distribuzione $T \in \mathcal{T}'$, la derivata DT come segue

$$DT\varphi = -T\varphi', \forall \varphi \in \mathcal{T}$$

Vediamo che $DT \in \mathcal{T}'$, cioè che la definizione è ben posta. Siano $\varphi, \psi \in \mathcal{T}'$ allora

$$DT(\varphi + \lambda\psi) = -T(\varphi + \lambda\psi)' = -T\varphi' - \lambda T\psi' = DT\varphi + \lambda DT\psi$$

Sia ora $\varphi_n \rightarrow \varphi$, allora anche $\varphi'_n \rightarrow \varphi'$, perciò DT è continuo.

Per induzione si definisce, per ogni intero k , la derivata k -esima

$$D^k T\varphi = (-1)^k T\varphi^{(k)}$$

Allora $D^k T \in \mathcal{T}'$ e otteniamo il ragguardevole risultato che ogni distribuzione è infinitamente derivabile. La derivata distribuzionale così definita si dice anche **derivata debole (weak derivative)**.

È opportuno considerare qualche esempio:

Esempio V.13 Consideriamo la funzione di Heaviside

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

essa appartiene chiaramente a $\mathcal{S}'$ perciò ha senso calcolarne la derivata (debole): abbiamo

$$\langle D\theta, \varphi \rangle = -\langle \theta, D\varphi \rangle = - \int_0^{+\infty} \varphi' d\mu = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

da cui

$$D\theta = \delta_0.$$

Più in generale, sia $u = u(x) \in \mathcal{S}'$ una funzione derivabile in ogni punto tranne che nel punto x_0 , dove la funzione stessa presenta una discontinuità finita,

$$\sigma \doteq \lim_{x \rightarrow x_0^+} u(x) - \lim_{x \rightarrow x_0^-} u(x)$$

Allora, se la funzione u' è generalmente continua (la generalità continuità serve per eseguire l'integrazione per parti), abbiamo (aggiunte alcune ipotesi ragionevoli che specifichiamo sotto)

$$\begin{aligned} \langle Du, \varphi \rangle &= -\langle u, D\varphi \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} u \varphi' d\mu = - \int_{-\infty}^{x_0} u \varphi' d\mu - \int_{x_0}^{+\infty} u \varphi' d\mu = \\ &= -u\varphi|_{-\infty}^{x_0} + \int_{-\infty}^{x_0} u' \varphi d\mu - u\varphi|_{x_0}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{x_0} u' \varphi d\mu = \\ &= \sigma \varphi(x_0) + \int_{-\infty}^{+\infty} u' \varphi d\mu = \sigma \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle + \langle u', \varphi \rangle \end{aligned}$$

dove ci si accerti che u non diverga più che polinomialmente all'infinito e abbiano senso gli integrali in cui appare u' (per questo si può richiedere che u' sia limitata o L^p o polinomialmente dominata...).

Esempio V.14 Direttamente dalla definizione

$$\langle D^k \delta_{x_0}, \varphi \rangle = (-1)^k \varphi^{(k)}(x_0).$$

V.5.6 Moltiplicazione e convoluzione

Moltiplicazione di una distribuzione per una funzione

Evidentemente definire prodotto e convoluzione di distribuzioni risulta particolarmente complicato. Noi non ci occuperemo diffusamente di questo problema, ma ci limiteremo ai suoi aspetti principali.

Sia, tanto per cominciare, $T \in \mathcal{D}'$. Sia poi $\alpha \in \mathcal{E}$; possiamo definire la distribuzione αT in modo naturale come

$$\langle \alpha T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Infatti, la funzione $\alpha\varphi \in \mathcal{D}$ (è $\mathcal{C}^\infty$ come prodotto di $\mathcal{C}^\infty$ ed è a supporto compatto).

In $\mathcal{S}'$ la cosa non è possibile nei termini di sopra (basta prendere $\alpha = e^{x_i}$ per avere che $e^{x_i}\varphi \notin \mathcal{S}$) e dovremmo richiedere $\alpha \in \mathcal{E}$ limitata polinomialmente.

Continuità della moltiplicazione

L'applicazione $T \mapsto \alpha T$ è continua in $\mathcal{D}'(\Omega)$. Infatti, sia $T_n \rightarrow T$ allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \alpha T_n, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \alpha \varphi \rangle = \langle T, \alpha \varphi \rangle = \langle \alpha T, \varphi \rangle.$$

Proposizione V.49 *Siano $T \in \mathcal{D}'$ e $\varphi \in \mathcal{E}$ allora*

$$\text{supp}(\alpha T) \subset \text{supp}(\alpha) \cap \text{supp}(T)$$

Se $\beta \in \mathcal{E}$, allora

$$\alpha(\beta T) = (\alpha\beta)T$$

Dimostrazione Sia $\varphi \in \mathcal{D}$, allora, se $\text{supp}(\varphi) \subset \text{supp}(\alpha)^c$ allora $\langle \alpha T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha \varphi \rangle = 0$, perciò φ appartiene a un dominio di nullità di αT , dunque, $\text{supp}(\alpha)^c \subset \text{supp}(\alpha T)^c$, cioè

$$\text{supp}(\alpha T) \subset \text{supp}(\alpha)$$

Se $\text{supp}(\varphi) \subset \text{supp}(T)^c$, allora $\langle \alpha T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha \varphi \rangle = 0$, perciò $\text{supp}(T)^c \subset \text{supp}(\alpha T)^c$, cioè

$$\text{supp}(\alpha T) \subset \text{supp}(T)$$

(c.v.d.) La seconda parte è del tutto ovvia.

Supporto in un punto

Vediamo adesso un risultato interessante che riguarda proprio la moltiplicazione.

Teorema V.50

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^\ell$ contenente l'origine. Allora le uniche distribuzioni $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ con supporto ridotto all'origine sono quelle esprimibili come combinazione lineare finita della delta di Dirac e delle sue derivate.

Dimostrazione

T abbia supporto nell'origine. Consideriamo una funzione χ di classe $\mathcal{C}^\infty$ pari a 1 nella 1-palla e nulla fuori dalla palla di raggio 2. Consideriamo adesso $\chi_\varepsilon(x) = \chi(x/\varepsilon)$. Essa ha supporto contenuto nella 2ε -palla e vale 1 nella ε -palla. Sia f una funzione qualsiasi in $\mathcal{D}(\Omega)$. Posto $f_\varepsilon = \chi_\varepsilon f$, abbiamo

$$\langle T, f \rangle = \langle T, f_\varepsilon \rangle$$

per ogni ε . Infatti, per ogni ε , la $f - f_\varepsilon$ ha supporto nel dominio di nullità di T , perciò

$$\langle T, f - f_\varepsilon \rangle = 0.$$

Perciò il valore di T in f non dipende dai valori che f assume fuori da ogni palla $B(0, \varepsilon)$.

Grazie alla continuità di T , fissato il compatto $B(0, 1)^a$ esistono due costanti C e k tali che

$$|\langle T, f \rangle| \leq C \sup_{|\mathbf{j}| \leq k, |x| \leq 1} |D^{\mathbf{j}} f(x)|, \forall f \in \mathcal{D}_{B(0,1)^a}(\Omega)$$

Proveremo, per cominciare, che la condizione

$$D^{\mathbf{j}} f(0) = 0, \forall |\mathbf{j}| \leq k$$

implica

$$\langle T, f \rangle = 0$$

Siccome,

$$\langle T, f_\varepsilon \rangle = \langle T, f \rangle$$

ci basta vedere che

$$\langle T, f \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle T, f_\varepsilon \rangle = 0$$

Ossia, visto che per $\varepsilon < 1/2$ $f_\varepsilon \in \mathcal{D}_{B(0,1)^a}(\Omega)$ ci basta vedere che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{|\mathbf{j}| \leq k, |x| \leq 1} |D^{\mathbf{j}} f_\varepsilon(x)| = 0$$

cioè che tutte le derivate di ordine inferiore a k di f_ε convergono uniformemente (sulla 1-palla, cioè sul supporto) a 0.

Dalla formula di Leibniz, le derivate $D^{\mathbf{j}}$ di ordine inferiore a k di f_ε sono una combinazione lineare di termini $|\varepsilon|^{-|\mathbf{j}|} D^{\mathbf{j}} \chi D^{\mathbf{i}} f$ con $|\mathbf{i}| + |\mathbf{j}| \leq k$. Siccome le derivate di f di ordine inferiore

a k sono nulle nell'origine, abbiamo che $D^{\mathbf{j}}f_\varepsilon$ è nulla per ogni $|\mathbf{j}| \leq k$. Applicando la formula di Taylor a $D^{\mathbf{j}}f_\varepsilon$ abbiamo che essa, nel suo supporto, è dominata da

$$C\varepsilon^{k+1-|\mathbf{j}|}$$

sicché, per ogni $|\mathbf{j}| \leq k$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{|x| \leq 1} |D^{\mathbf{j}}f_\varepsilon(x)| \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C\varepsilon^{k+1-|\mathbf{j}|} \rightarrow 0$$

Adesso prendiamo una f qualsiasi (cioè che non abbia tutte le prime derivate nulle. Sia f_k il suo sviluppo di Taylor nell'origine fino all'ordine k moltiplicato per χ . Allora, siccome χ è pari a 1 sulla 1-palla, $f - f_k$ ha, nell'origine, derivate tutte nulle fino all'ordine k . Dunque,

$$\langle T, f \rangle = \langle T, f_k \rangle + \langle T, f - f_k \rangle = \langle T, f_k \rangle$$

Questo mostra che T è una combinazione lineare di funzionali lineari nelle derivate di f calcolate nell'origine e di ordine inferiore a k :

$$f_k(x) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{i!} \sum_{|\mathbf{p}|=i} D^{\mathbf{p}}f(0) x^{\mathbf{p}} \chi(x)$$

sicché

$$\langle T, f \rangle = \langle T, f_k \rangle = \sum_{i=1}^k \frac{1}{i!} \sum_{|\mathbf{p}|=i} D^{\mathbf{p}}f(0) \langle T, x^{\mathbf{p}} \chi \rangle = \sum_{|\mathbf{p}| \leq k} C_{\mathbf{p}} \langle D^{\mathbf{p}}\delta, f \rangle$$

(c.v.d.) come si voleva.

**Convoluzione
in $\mathcal{E}'$**

Le cose si complicano ulteriormente quando si tenta di definire il prodotto di convoluzione di due distribuzioni in modo generale. Per i nostri scopi, ci limiteremo alla definizione della convoluzione in $\mathcal{E}'$ e della convoluzione di una funzione con una funzione generalizzata.

Consideriamo $T, S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Allora $T \otimes S$ è una distribuzione a supporto compatto appartenente a $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Sia $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e consideriamo l'applicazione definita su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$(x, y) \mapsto \varphi(x + y)$$

Banalmente tale applicazione appartiene a $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Definiamo allora

$$\langle T * S, \varphi \rangle = \langle T_x \otimes S_y, \varphi(x + y) \rangle$$

$T * S$ appartiene a $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Infatti, se φ_n $\mathcal{D}$ -converge a φ , allora $\varphi_n(x + y)$ $\mathcal{E}$ -converge a $\varphi(x + y)$, perciò

$$\langle T_x \otimes S_y, \varphi_n(x + y) \rangle \rightarrow \langle T_x \otimes S_y, \varphi(x + y) \rangle = \langle T * S, \varphi \rangle$$

D'altra parte, $T_x \otimes S_y$ ha supporto contenuto in $\text{supp } T \times \text{supp } S$, perciò $T * S$ ha supporto compatto, essendo contenuto in $\text{supp } T + \text{supp } S$, e quindi si estende in modo unico a una distribuzione in $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

Per completezza dimostriamo la

Proposizione V.51

Se $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ allora

$$\text{supp } T \otimes S = \text{supp } T \times \text{supp } S$$

Dimostrazione

Se φ ha supporto in $(\text{supp } T)^c \times \mathbb{R}^m$, allora il supporto di $\varphi(\cdot, y)$, per ogni y , è contenuto in $(\text{supp } T)^c$. Allora

$$\langle T \otimes S, \varphi \rangle = \langle S_y, \langle T_x, \varphi(x, y) \rangle \rangle = 0$$

Ne viene che $\text{supp } T \otimes S \subset \text{supp } T \times \mathbb{R}^m$. Similmente, si ha $\text{supp } T \otimes S \subset \mathbb{R}^n \times \text{supp } S$. Perciò il supporto del prodotto tensore è contenuto nell'intersezione dei due insiemi trovati, cioè

(c.v.d.)

$$\text{supp } T \otimes S = \text{supp } T \times \text{supp } S$$

Mostriamo ora che

$$D_x^{\mathbf{p}} D_y^{\mathbf{q}} (T \otimes S) = D_x^{\mathbf{p}} T \otimes D_y^{\mathbf{q}} S$$

Basta vederlo sulle funzioni in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, per densità e continuità si conclude. Abbiamo

$$\langle D_x^{\mathbf{p}} D_y^{\mathbf{q}} (T \otimes S), \varphi \otimes \psi \rangle = (-1)^{|\mathbf{p}|+|\mathbf{q}|} \langle (T \otimes S), D_x^{\mathbf{p}} D_y^{\mathbf{q}} \varphi \otimes \psi \rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{|\mathbf{p}|+|\mathbf{q}|} \langle (T \otimes S), D_x^{\mathbf{p}} \varphi \otimes D_y^{\mathbf{q}} \psi \rangle = \\
&= (-1)^{|\mathbf{p}|+|\mathbf{q}|} \langle T, D_x^{\mathbf{p}} \varphi \rangle \langle S, D_y^{\mathbf{q}} \psi \rangle = \langle D_x^{\mathbf{p}} T, \varphi \rangle \langle D_y^{\mathbf{q}} S, \psi \rangle \\
&= \langle D_x^{\mathbf{p}} T \otimes D_y^{\mathbf{q}} S, \varphi \otimes \psi \rangle.
\end{aligned}$$

Ne viene che, ancora sfruttando continuità e densità,

$$\begin{aligned}
D^{\mathbf{p}}(T * S) &= D_x^{\mathbf{p}}(T_x \otimes S_y) = (D_x^{\mathbf{p}} T_x \otimes S_y) \\
&= D_y^{\mathbf{p}}(T_x \otimes S_y) = (T_x \otimes D_y^{\mathbf{p}} S_y)
\end{aligned}$$

cioè

$$D^{\mathbf{p}}(T * S) = (D^{\mathbf{p}} T * S) = (T * D^{\mathbf{p}} S)$$

Da cui il fondamentale

Teorema V.52 *Sia $P(D)$ un operatore differenziale a coefficienti costanti, allora*

$$P(D)(T * S) = (P(D)T) * S = T * (P(D)S)$$

Convoluzione di una distribuzione con una funzione Con qualche accorgimento sarebbe possibile definire il prodotto di convoluzione di funzioni generalizzate. A noi basterà dare senso alla convoluzione di una distribuzione con una funzione. Siano $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^\ell)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^\ell)$ poniamo

$$(T * \varphi)(x) = \langle T_y, \varphi(x - y) \rangle,$$

si ha subito che $T * \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ e che $\text{supp}(T * \varphi) \subset \text{supp} T + \text{supp} \varphi$, perciò $T * \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^\ell)$. Inoltre,

$$D^{\mathbf{p}}(T * \varphi)(x) = (D^{\mathbf{p}} T * \varphi)(x) = (T * D^{\mathbf{p}} \varphi)(x)$$

cioè

$$P(D)(T * \varphi) = (P(D)T) * \varphi(x) = T * (P(D)\varphi(x))$$

Notiamo, infine che, se $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^\ell)$

$$\begin{aligned}
\langle (T * \varphi)(x), \psi(x) \rangle &= \langle \psi(x), (T * \varphi)(x) \rangle = \langle \psi(x), \langle T_y, \varphi(x - y) \rangle \rangle = \\
&= \langle T_y, \langle \psi(x), \varphi(x - y) \rangle \rangle = \langle T_y, (\tilde{\varphi} * \psi)(y) \rangle
\end{aligned}$$

dove $\tilde{\varphi}(y) = \varphi(-y)$.

Funzione di Green Se adesso consideriamo l'equazione

$$P(D)G = \delta$$

e ne determiniamo una soluzione $G \in \mathcal{E}'$, abbiamo che

$$P(D)u = f$$

è risolta da $u = G * f$, nel caso in cui f sia a supporto compatto, infatti

$$P(D)u = P(D)(G * f) = (P(D)G) * f = \delta * f = f$$

infatti,

$$\langle \delta * f, \varphi \rangle = \langle f(y), \langle \delta(x), \varphi(x + y) \rangle \rangle = \langle f(y), \varphi(y) \rangle = \langle f, \varphi \rangle$$

cioè

$$\delta * f = f.$$

Se invece, come più spesso accade, $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^\ell)$, abbiamo che una soluzione particolare per l'equazione

$$P(D)u = f,$$

se, ancora, $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^\ell)$, è data da $G * f$. La distribuzione G si dice **soluzione fondamentale** o **funzione di Green** di $P(D)$. Il problema della dimostrazione dell'esistenza di una funzione di Green è particolarmente importante e complicato. Noi lo affronteremo solo nel semplice caso in cui $\ell = 1$, cioè $P(D)$ è un operatore che contiene solo derivate totali in una variabile.

Teorema V.53 *Sia dato il polinomio*

$$P(t) = \sum_{j=0}^m a_j t^j, \quad m \in \mathbb{N}^\times, \quad a_j \in \mathbb{C}, \quad a_m \neq 0$$

Sia φ la soluzione dell'equazione differenziale $P(D)\varphi = 0$ ai dati iniziali seguenti $\varphi^{(m-1)}(0) =$

1, $\varphi^{(j)}(0) = 0$ per $j \in J_{m-1}$. Allora la distribuzione

$$G = \frac{1}{a_m} T_{\theta\varphi}$$

è una funzione di Green per $P(D)$.

Dimostrazione

Tutte le derivate funzionali di $\theta\varphi$ sono continue nell'origine, tranne la derivata $m-1$ -esima che presenta un 1-salto. Perciò le derivate distribuzionali sono le seguenti

$$\begin{aligned} D^m(T_{\theta\varphi}) &= D(T_{\theta\varphi^{(m-1)}}) = T_{\theta\varphi^{(m)}} + \delta \\ D^k(T_{\theta\varphi}) &= T_{\theta\varphi^{(k)}}, \quad k \leq m-1 \end{aligned}$$

sicch 

$$(c.v.d.) \quad P(D)G = \frac{1}{a_m} \sum_{j=0}^m a_j D^j T_{\theta\varphi} = \frac{1}{a_m} \left[\sum_{j=0}^m a_j \theta D^j \varphi + a_m \delta \right] = \delta$$

Funzioni di Green causali

Si noti come il supporto di G sia nel semiasse positivo. In termini fisici questo comporta che il sistema descritto dalla $P(D)$   **causale**. Infatti, la risposta u del sistema dipende dall'ingresso f come segue

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-t') f(t') dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t-t') \frac{\varphi(t-t')}{a_m} f(t') dt' = \int_{-\infty}^t \frac{\varphi(t-t')}{a_m} f(t') dt'$$

cio  nell'espressione per $u(t)$ compaiono tutti i valori che l'input f ha assunto per tempi inferiori a t : $t' \leq t$. Si noti come dato $P(D)$ la funzione di Green non   unica, perch  si pu  sempre aggiungere a $G = \varphi/a_m$ una soluzione dell'omogenea. Tuttavia, se cos  si fa si perde la causalit  perch  non esistono soluzioni della omogenea che siano right-sided (ossia nulle per $t < 0$). Ne viene che la soluzione φ/a_m   **l'unica funzione di Green causale** ammessa da $P(D)$.

Soluzione dell'equazione omogenea

Consideriamo l'equazione omogenea indotta dall'operatore $P(D)$:

$$P(D)T = 0$$

Come noto, se $\deg P = m$, di essa troviamo m soluzioni linearmente indipendenti in $\mathcal{E}^n$ $u_1, \dots, u_m$. Le distribuzioni associate T_{u_i} appartengono a $\mathcal{D}'$, vogliamo vedere che ogni altra soluzione dell'omogenea   esprimibile come combinazione lineare delle T_{u_i} . Sia S una soluzione, i.e., $P(D)S = 0$, mostriamo che S   una funzione. Restringiamoci per un momento a considerare lo spazio $\mathcal{D}'(a, b)$. Sia $\varphi \in \mathcal{D}(a, b)$ una qualunque funzione test. Sia $\chi \in \mathcal{D}(a, b)$ una fissata funzione avente integrale tale che

$$\int_a^b \tilde{G}(b-x') \chi(x) dx' = 1$$

e poniamo

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - \chi(x) \int_a^b \tilde{G}(b-t) \varphi(t) dt \in \mathcal{D}(a, b)$$

Dove $\tilde{G}$   la funzione di Green, determinata nel teorema precedente, associata al problema

$$\tilde{P}(D)\Phi = \tilde{\varphi},$$

con

$$\tilde{P}(D)\Phi = \sum_{j=0}^m (-1)^j a_j D^j \Phi,$$

Poniamo ancora

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \tilde{G}(x-x') \tilde{\varphi}(x') dx'$$

allora $\Phi \in \mathcal{E}$. Siccome $\tilde{\varphi}$ ha supporto compatto, Φ ha supporto compatto in (a, b) essendo, per $x > b$

$$\Phi(x) = \int_a^b \tilde{G}(b-x') \tilde{\varphi}(x') dx'$$

$$= \int_a^b \tilde{G}(b-x') \varphi(x') dx - \int_a^b \tilde{G}(b-x') \chi(x) dx' \int_a^b \tilde{G}(b-t) \varphi(t) dt = 0$$

Dunque è possibile scrivere

$$0 = \langle P(D) S, \Phi \rangle = \langle S, \tilde{P}(D) \Phi \rangle = \langle S, \varphi \rangle - \langle S, \chi \rangle \int_a^b \tilde{G}(b-t) \varphi(t) dt$$

cioè

$$\langle S, \varphi \rangle = \int_a^b \langle S, \chi \rangle \tilde{G}(b-t) \varphi(t) dt$$

Concludiamo che in $\mathcal{D}(a, b)$ ogni soluzione distribuzionale è, in realtà, una funzione di classe $\mathcal{C}^m$. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}$. Sia T una soluzione del nostro problema su Ω . Sia $\mathcal{U}$ l'insieme degli intervalli (a, b) contenuti in Ω . Per ogni $\omega \in \mathcal{U}$ esiste $f_\omega \in \mathcal{C}^m$ tale che $T = T_{f_\omega}$. Se $\omega_1 \cap \omega_2 \neq \emptyset$, allora $f_{\omega_1} = f_{\omega_2}$ su $\omega_1 \cap \omega_2$. Perciò esiste $f \in \mathcal{C}^m$ tale che, per ogni $\omega \in \mathcal{U}$, la restrizione di f a ω è f_ω . Ne segue che ogni ω è dominio di nullità di $T - T_f$ e dunque, per il teorema sull'esistenza del massimo dominio di nullità, $T - T_f = 0$ sull'intero Ω .

Ora, visto che $T = T_f$ e $f \in \mathcal{C}^m$

$$0 = P(D) T_f = P(D) f$$

perciò f è data da una combinazione lineare delle u_i .

Proposizione V.54 *Lo spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione differenziale a coefficienti costanti $P(D) = T$ ha dimensione pari al grado di P anche nello spazio delle funzioni generalizzate.*

Risulta adesso perfettamente giustificata l'affermazione di sopra per cui esiste una e una sola funzione di Green causale per ogni $P(D)$.

V.5.7 Trasformata di Fourier delle distribuzioni temperate

In questa sottosezione focalizziamo la nostra attenzione sullo spazio delle distribuzioni temperate. Esso è infatti il massimo spazio sul quale sia possibile estendere la trasformata di Fourier

Motivazione Definiamo la trasformata di Fourier come abbiamo fatto per la derivata. Se $u \in \mathcal{S}$ e richiediamo

$$\hat{F}T_u \varphi = T_{\hat{u}} \varphi$$

abbiamo

$$\begin{aligned} \hat{F}T_u \varphi &= T_{\hat{u}} \varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\xi) \varphi(\xi) d\mu(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(\xi) \varphi(\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(\eta) u(\eta) e^{i\eta\xi} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(\eta) u(\eta) \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(\xi) \varphi(\xi) e^{i\eta\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(\eta) u(\eta) \hat{\varphi}(\eta) = T_u \hat{\varphi} \end{aligned}$$

Definizione della trasformata di Fourier delle distribuzioni

Poniamo allora per definizione, per ogni distribuzione temperata T ,

$$\langle \hat{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \hat{F}\varphi \rangle$$

Vediamo che si tratta di una buona definizione. Linearità

$$\hat{F}T(\varphi + \lambda\psi) = T\hat{F}(\varphi + \lambda\psi) = T\hat{F}\varphi + \lambda T\hat{F}\psi = \hat{F}T\varphi + \lambda\hat{F}T\psi$$

Continuità: se $\varphi_n \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{S}$, allora, per continuità di $\hat{F}$ su $\mathcal{S}$, $\hat{F}\varphi_n \rightarrow \hat{F}\varphi$ in $\mathcal{S}$, sapendo poi che T è continuo, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{F}T\varphi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T\hat{F}\varphi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T\hat{F}\varphi_n = T\hat{F}\varphi = \hat{F}T\varphi.$$

Antitrasformata Lavoro analogo si può fare per l'antitrasformata $\check{F}$. In particolare, se $u \in \mathcal{S}$, allora

$$\begin{aligned} \langle \check{F}T_u, \varphi \rangle &= \langle T_u, \check{F}\varphi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(\xi) u(\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(\eta) \varphi(\eta) e^{-i\eta\xi} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(\eta) \varphi(\eta) \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(\xi) u(\xi) e^{-i\eta\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(\eta) \varphi(\eta) \check{u}(\eta) = \\ &= \langle T_{\check{u}}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

Mostriamo adesso che $\hat{F}\check{F} = \check{F}\hat{F} = \mathbb{I}$: per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned}\langle \hat{F}\check{F}T, \varphi \rangle &= \langle T, \hat{F}\hat{F}\varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \\ \langle \check{F}\hat{F}T, \varphi \rangle &= \langle T, \hat{F}\check{F}\varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle\end{aligned}$$

Chiaramente non avremmo potuto estendere la definizione allo spazio $\mathcal{D}'$. Infatti, se $\varphi \in \mathcal{D}$ allora la trasformata di Fourier $\hat{\varphi}$ è una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$, perciò non è a supporto compatto!

Convoluzione Ricordiamo che abbiamo definito il prodotto di convoluzione di una funzione con una distribuzione come segue

$$T * \varphi(x) = \langle T_y, \varphi(x-y) \rangle$$

e che, se $\psi \in \mathcal{S}$, allora

$$\langle T * \varphi, \psi \rangle = \langle T, \tilde{\varphi} * \psi \rangle$$

con $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(-x)$.

Siccome la mappa $g \mapsto \tilde{\varphi} * g$ è continua in $\mathcal{S}$, abbiamo che $T * \varphi$ appartiene effettivamente a $\mathcal{S}'$. Si vede poi facilmente che il prodotto di convoluzione è continuo. Ora, grazie al fatto che derivazione e trasformata di Fourier sono continue in $\mathcal{S}'$ e che $\mathcal{S}$ è denso in $\mathcal{S}'$, abbiamo

$$\begin{aligned}D^\alpha(T * \varphi) &= D^\alpha T * \varphi = T * D^\alpha \varphi \\ \hat{F}(T * \varphi) &= \hat{\varphi}\hat{F}T\end{aligned}$$

In modo analogo si ha

$$\begin{aligned}\hat{F}(D^\alpha T) &= (-i\omega)^\alpha \hat{F}T \\ \hat{F}\left((ix)^k T\right) &= D^k(\hat{F}T)\end{aligned}$$

Adesso siamo pronti a vedere qualche esempio

Esempio V.15 Vogliamo calcolare la trasformata di Fourier della delta di Dirac. Abbiamo

$$\langle \hat{F}\delta_0, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \hat{F}\varphi \rangle = \left\langle \delta_0, \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{i\eta\xi} d\mu(\xi) \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) d\mu(\xi) = \langle 1, \varphi \rangle$$

cioè

$$\hat{F}\delta_0 = 1.$$

Grazie alle formule di sopra

$$\hat{F}\left(\delta_0^{(\alpha)}\right) = (-i\omega)^\alpha$$

■

Esempio V.16 (parità)

Vogliamo trovare la trasformata di Fourier di 1 (dall'esempio precedente sappiamo che la sua antitrasformata è δ_0). A questo scopo ricordiamo che, in $\mathcal{S}$, si ha

$$\hat{F}^2 = 2\pi I$$

dove I indica l'inversione spaziale

$$\varphi(x) \rightarrow I\varphi(x) = \varphi(-x)$$

perciò, in $\mathcal{S}'$

$$\langle \hat{F}^2 T, \varphi \rangle = \langle T, \hat{F}^2 \varphi \rangle = 2\pi \langle T, I\varphi \rangle = 2\pi \langle IT, \varphi \rangle$$

Dove si è definito IT come abbiamo definito derivata e trasformata. Si tratta di una buona definizione, perché se $\varphi_n \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{S}$, allora $I\varphi_n \rightarrow I\varphi$. Inoltre se u è una funzione, per esempio continua e polinomialmente dominata, allora

$$IT_u = T_{Iu}$$

infatti,

$$\begin{aligned}\langle IT_u, \varphi \rangle &= \langle T_u, I\varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) \varphi(-x) d\mu(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(-y) \varphi(y) d\mu(y) = \\ &= \langle T_{Iu}, \varphi \rangle\end{aligned}$$

Ma torniamo al nostro problema

$$2\pi I\delta_0 = \hat{F}^2\delta_0 = \hat{F}1$$

Diciamo che δ_0 è pari, cioè

$$I\delta_0 = \delta_0$$

infatti, per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\langle I\delta_0, \varphi \rangle = \langle \delta_0, I\varphi \rangle = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

In definitiva,

$$\hat{F}1 = 2\pi\delta_0.$$

Si noti come la parità della delta discende dall'invarianza per parità dello 0, ecco perché è fondamentale avere a che fare con δ_0 e non con una qualsiasi δ_{x_0} . In particolare, troviamo

$$\hat{F}(x^k) = (-i)^k D^k \hat{F}1 = (-i)^k \delta_0^{(k)}$$

■

Esempio V.17
(traslazione)

Ancora grazie alla proposizione V.14, recuperiamo i teoremi di traslazione. Se U_a è l'operatore di traslazione definito in $\mathcal{S}$, abbiamo che esso è continuo in $\mathcal{S}$ (con la convergenza di $\mathcal{S}$!). Ricordiamo che

$$(T_a\varphi)(x) = \varphi(x-a)$$

Allora è una buona definizione la

$$\langle T_a T, \varphi \rangle = \langle T, T_{-a}\varphi \rangle$$

Mostriamo che se $u \in \mathcal{S}$, allora

$$T_a T_u = T_{T_a u}$$

abbiamo, per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned} \langle T_a T_u, \varphi \rangle &= \langle T_u, T_{-a}\varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) \varphi(x+a) d\mu(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(y-a) \varphi(y) d\mu(y) = \\ &= \langle T_{T_a u}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

Dai teoremi di traslazione in $\mathcal{S}$, abbiamo

$$\hat{F}(T_a\varphi) = e^{iak} (\hat{F}\varphi)(k)$$

$$\hat{F}(e^{iax}\varphi(x)) = (\hat{F}\varphi)(k+a)$$

da cui

$$\begin{aligned} \langle \hat{F}T_a T, \varphi \rangle &= \langle T, T_{-a}\hat{F}\varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi}(k+a) \rangle = \langle T, \hat{F}(e^{iax}\varphi(x)) \rangle = \\ &= \langle \hat{F}T, e^{iax}\varphi(x) \rangle = \langle e^{iax}\hat{F}T, \varphi \rangle \end{aligned}$$

Abbiamo così ricavato che

$$\hat{F}T_a = e^{iax}\hat{F}$$

In particolare, se $T \doteq \delta_0$, allora

$$T_a\delta_0 = \check{F}(e^{iax}\hat{F}\delta_0) = \check{F}(e^{iax})$$

Notiamo che

$$T_a\delta_0 = \delta_a$$

Infatti, per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$, si ha

$$\langle T_a\delta_0, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \varphi(x+a) \rangle = \varphi(a)$$

Il risultato è coerente col fatto che si scrive δ_0 come $\delta(x)$ (come se fosse una funzione cui è associata una distribuzione), infatti

$$T_a\delta(x) = \delta(x-a) \doteq \delta_a.$$

Ne viene che

$$\hat{F}\delta_a = e^{iax}$$

o, come si può trovare scritto,

$$\hat{F}\delta(x-a) = e^{iax}$$

cioè

$$\int dx e^{ikx} \delta(x-a) = e^{iak}$$

■

Esempio V.18 Sia u una funzione dominata polinomialmente avente derivata dominata polinomialmente e generalmente continua. Se u ha una discontinuità σ finita in x_0 allora, come abbiamo visto prima,

$$DT_u = T_{u'} + \sigma \delta_{x_0}$$

allora

$$\hat{F}(DT_u) = \hat{F}(T_{u'}) + \sigma e^{ikx_0} = -ik\hat{F}(T_u)$$

■

Vediamo un altro risultato generale (che abbiamo finora mostrato in casi particolari, traslazione, parità derivazione, trasformata di Fourier):

Proposizione V.55 Se U è un'operatore lineare continuo (nella topologia di $\mathcal{S}$) definito su $\mathcal{S}$ e a valori in $\mathcal{S}$, allora l'operatore U definito su $\mathcal{S}'$ come

$$\langle UT, \varphi \rangle = \langle T, U\varphi \rangle$$

è un operatore lineare continuo da $\mathcal{S}'$ in $\mathcal{S}'$.

Dimostrazione Cominciamo a vedere che UT appartiene a $\mathcal{S}'$. Linearità: per ogni $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, si ha

$$\langle UT, \varphi + \lambda\psi \rangle = \langle T, U\varphi + \lambda U\psi \rangle = \langle T, U\varphi \rangle + \lambda \langle T, U\psi \rangle = \langle UT, \varphi \rangle + \lambda \langle UT, \psi \rangle.$$

Continuità: sia φ_n una successione in $\mathcal{S}$ convergente a φ , allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle UT, \varphi_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T, U\varphi_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} (T \circ U) \varphi_n$$

per continuità della composizione, essendo $T \in \mathcal{S}'$ continuo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle UT, \varphi_n \rangle = (T \circ U) \varphi = \langle T, U\varphi \rangle = \langle UT, \varphi \rangle$$

Vediamo che U , riguardato come operatore su $\mathcal{S}'$ è continuo. Siano $T, R \in \mathcal{S}'$, vogliamo vedere che

$$\mathcal{S}' \ni U(T + \lambda R) = UT + \lambda UR$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$, abbiamo

$$\begin{aligned} \langle U(T + \lambda R), \varphi \rangle &= \langle T + \lambda R, U\varphi \rangle = \langle T, U\varphi \rangle + \lambda \langle R, U\varphi \rangle = \\ &= \langle UT, \varphi \rangle + \lambda \langle UR, \varphi \rangle = \langle UT, \varphi \rangle + \langle \lambda UR, \varphi \rangle \\ &= \langle UT + \lambda UR, \varphi \rangle \end{aligned}$$

Vediamo, infine, che U è continuo. Cioè, se $T_n \rightarrow T$, allora $UT_n \rightarrow UT$. Infatti, se $T_n \rightarrow T$, allora, per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

ma

$$\langle UT_n, \varphi \rangle = \langle T_n, U\varphi \rangle$$

con $U\varphi \in \mathcal{S}$ essendo $R(U) \subset \mathcal{S}$, per cui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle UT_n, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, U\varphi \rangle = \langle T, U\varphi \rangle = \langle UT, \varphi \rangle$$

da cui

$$UT_n \rightarrow UT,$$

(c.v.d.) la tesi.

In particolare, la derivata, la trasformata di Fourier, la parità e le traslazioni sono operatori lineari continui da $\mathcal{S}'$ in sé.

L'esempio delle traslazioni si generalizza nel seguente

Esempio V.19
(cambio di
variabile)

Sia A un mappa lineare invertibile in $\mathbb{R}^\ell$, cioè $A \in GL(\ell, \mathbb{R})$. definiamo allora

$$V(A) : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}, (V(A)\varphi)(x) = \varphi(A^{-1}x)$$

$V(A)$ è un'applicazione lineare continua di $\mathcal{S}$ in sé. Vogliamo estendere $V(A)$ a $\mathcal{S}'$ di modo che se T_u è associata a $u \in \mathcal{S}$, allora

$$V(A)T_u = T_{V(A)u}$$

Dunque,

$$\begin{aligned} V(A) T_u \varphi &= T_{V(A)u} \varphi = \int_{\mathbb{R}^\ell} u(A^{-1}x) \varphi(x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^\ell} u(y) \varphi(Ay) \frac{d\mu(y)}{|\det A|} = \\ &= T_u \frac{V(A^{-1})}{\det A} \varphi \end{aligned}$$

ossia, poniamo per ogni $T \in \mathcal{S}'$

$$\langle V(A)T, \varphi \rangle = \left\langle T, \frac{V(A^{-1})}{|\det A|} \varphi \right\rangle$$

- in modo che $V(A)T$ è ben definito e continuo.

Diamo ancora un importante esempio di distribuzione

Esempio V.20 (parte principale)

Poniamo

$$P\left(\frac{1}{x}\right) : \varphi \mapsto \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{1}{x} \varphi(x) d\mu$$

Vogliamo mostrare che si tratta di una distribuzione temperata. Cominciamo con il notare

$$\int_{|x| > \varepsilon} \frac{1}{x} \varphi(x) d\mu = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} d\mu$$

D'altra parte l'integranda ammette limite per $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} = 2\varphi'(0)$$

perciò è $L^1(0, +\infty)$ dunque

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{1}{x} \varphi(x) d\mu = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} d\mu < \infty$$

perciò il limite ha senso per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$.

La linearità è ovvia, vediamo la continuità. Sia $\varphi \in \mathcal{S}$ allora

$$\left| \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \int_{-x}^x |\varphi'(t)| dt \leq 2\|\varphi'\|_\infty$$

perciò

$$\begin{aligned} \left| P\left(\frac{1}{x}\right) \varphi \right| &= \left| \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} d\mu \right| = \left| \int_0^1 \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} d\mu + \int_1^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} d\mu \right| \leq \\ &\leq \int_0^1 \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \right| d\mu + \left| \int_{|x| \geq 1} \frac{\varphi(x)}{x} d\mu \right| \leq 2 \int_0^1 \|\varphi'\|_\infty d\mu + \left| \int_{|x| \geq 1} \frac{x\varphi(x)}{x^2} d\mu \right| \\ &\leq 2\|\varphi'\|_\infty + \left| \int_1^{+\infty} \frac{x\varphi(x)}{x^2} d\mu \right| \leq 2\|\varphi'\|_\infty + \|x\varphi\|_\infty \end{aligned}$$

da cui si ricava la continuità di $P(1/x)$ che è perciò, a buon diritto, una distribuzione

- temperata.

Esempio V.21 Andiamo a risolvere l'equazione

$$xT = 0$$

Sia $\varphi \in \mathcal{D}$ il cui supporto non contenga lo 0, allora

$$0 = \langle xT, \varphi \rangle = \langle T, x\varphi \rangle$$

per ogni $\psi \in \mathcal{D}$ il cui supporto non contenga lo 0 vale allora

$$\langle T, \psi \rangle = 0$$

visto che $\varphi = \psi/x \in \mathcal{D}$ e

$$\langle T, \psi \rangle = \langle T, x\varphi \rangle = 0$$

Ne viene che il complementare dell'origine è contenuto nel dominio di nullità di T , perciò il supporto di T è al più ridotto al solo 0. Allora T è dato da una combinazione lineare della delta di Dirac con le sue derivate. D'altra parte, si vede subito che l'unico termine che resta nella

combinazione lineare è quello nella delta, perciò tutte e sole le soluzioni del nostro problema sono

$$T = c\delta_0$$

Siccome una soluzione particolare della

$$xT = 1$$

è $P(1/x)$ si ha che la soluzione generale di quest'ultima è

$$T = P\frac{1}{x} + c\delta_0.$$

■

Esempio V.22 Ancora sulla parte principale. Mostriamo anzitutto che essa può essere vista come limite per $\sigma \rightarrow 0$ della seguente successione di distribuzioni

$$u_\sigma(x) = \begin{cases} 0, & |x| < \sigma \\ 1/x, & |x| > \sigma \end{cases}$$

Infatti

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \langle u_\sigma, \varphi \rangle = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} u_\sigma \varphi d\mu = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{|x| > \sigma} \frac{1}{x} \varphi d\mu = \left\langle P\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle$$

Grazie a questo fatto e alla continuità della trasformata di Fourier distribuzionale, possiamo passare a calcolare

$$\hat{F}P\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \hat{F}u_\sigma.$$

Siccome u_σ appartiene a L^2 per ogni σ la sua trasformata di Fourier (è facile verificarlo) è la trasformata di Fourier della u_σ intesa come funzione

$$\hat{F}u_\sigma = Fu_\sigma$$

Usando il lemma di Jordan si conclude facilmente che

$$\hat{F}P\left(\frac{1}{x}\right) = \pi i \operatorname{sign} k$$

$$\check{F}P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2i} \operatorname{sign} k$$

■

Esempio V.23 Vogliamo risolvere la seguente equazione differenziale

$$\dot{y} = \delta(t)$$

Come sappiamo (lo abbiamo dimostrato quando abbiamo introdotto la funzione di Green), una soluzione particolare del problema è $\theta(t)$. La soluzione generale è, lo abbiamo dimostrato,

$$y(t) = \theta(t) + k$$

Passiamo in trasformata di Fourier. In questo modo non perdiamo alcuna soluzione visto che $y \in \mathcal{S}'$. Abbiamo

$$-i\omega \hat{y} = 1$$

da cui

$$\hat{y} = iP\frac{1}{\omega}$$

questa è solo una soluzione particolare. L'operatore $-i\omega$ ha kernel non vuoto essendo pari a $c\delta(\omega)$, $c \in \mathbb{C}$. Allora

$$\hat{y} = iP\frac{1}{\omega} + c\delta(\omega)$$

In definitiva, abbiamo

$$\hat{F}(\theta) = iP\frac{1}{\omega} + c\delta(\omega)$$

D'altra parte, antitrasformando

$$\theta(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sign} x + \frac{c}{2\pi}$$

perciò, posto $x = 1$,

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{c}{2\pi} \Rightarrow c = \pi$$

Sicché

$$\hat{F}(\theta) = iP \frac{1}{\omega} + \pi \delta(\omega)$$

Si ha poi anche

$$\check{F}(\theta) = -\frac{i}{2\pi} P \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \delta(x)$$

■

Esempio V.24 Un altro risultato utile che riguarda la parte principale è il seguente

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \pm i\varepsilon} = P \frac{1}{x} \mp \pi i \delta_0$$

che si dimostra subito osservando che

$$\frac{1}{x - i\varepsilon} = \check{F}(u_\varepsilon(\omega))$$

dove $u_\varepsilon = 2\pi i \theta(\omega) e^{-\varepsilon \omega}$.

Infatti,

$$\hat{F}\left(\frac{1}{x - i\varepsilon}\right) = \int \frac{e^{i\omega x}}{x - i\varepsilon} dx$$

Applichiamo il lemma di Jordan. Si ha un polo nel semipiano superiore (visto che $\varepsilon > 0$). Per $\omega > 0$ si chiude il semicerchio nel semipiano immaginario positivo e perciò

$$\int \frac{e^{i\omega x}}{x - i\varepsilon} dx = 2\pi i e^{-\varepsilon \omega}$$

mentre per $\omega < 0$ si deve chiudere nel semipiano inferiore ove l'integranda è olomorfa, per cui si ottiene 0. In definitiva si ha quanto preannunciato. D'altra parte u_ε tende a $2\pi i \theta(\omega)$.

Sicché

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x - i\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \check{F}(u_\varepsilon) = \check{F} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u_\varepsilon = 2\pi i \check{F} \theta(\omega) = \\ &= P \frac{1}{x} + \pi i \delta(x) \end{aligned}$$

■

Equazioni differenziali

Un'importante applicazione della trasformata di Fourier è la soluzione di problemi agli operatori differenziali (ordinari o parziali). Se consideriamo l'operatore a coefficienti costanti $P(D)$ abbiamo che l'equazione

$$P(D)u = f$$

si legge in trasformata come

$$P(-ik) \hat{u} = \hat{f}$$

che è un'equazione algebrica. Si noti come tuttavia nel passare in trasformata si richiede che u ed f siano trasformabili. Questo comporta, in generale, la perdita di alcune (molte?!) soluzioni. Per esempio, la soluzione dell'omogenea associata contiene degli esponenziali, ebbene essi non sono trasformabili, perciò la trasformata di Fourier seleziona al più la soluzione particolare (fatto comunque rilevante, visto che nei sistemi dissipativi, quelli **fisici**, la soluzione dell'omogenea decade in un tempo caratteristico breve, perciò, più che a questa fase transiente, si è proprio interessati alla soluzione particolare).

Nonostante in trasformata ci si riduca a un'equazione algebrica, le difficoltà non sono poi scomparse. In effetti, si è costretti ad operare una divisione che non è detto abbia senso. Se per esempio $P(-ik) = k$, non è possibile moltiplicare ambo i membri per $1/k$ dal momento che $1/k$ **non** è una distribuzione temperata. Bisogna, invero, dire che la difficoltà non è insormontabile, dal momento che vale

$$k P \frac{1}{k} = 1,$$

formula che può essere generalizzata al caso di zeri multipli.

Ricerca della funzione di Green causale via Fourier

Prima abbiamo accennato al fatto che la soluzione ottenuta via trasformata di Fourier perde le soluzioni dell'omogenea associata e fornisce (se la fornisce!) la soluzione particolare. D'altra parte, come abbiamo visto, quello che interessa il fisico è la soluzione causale del problema in cui $f = \delta$. Vediamo se riusciamo a catturare almeno questa con il metodo della trasformata.

Come abbiamo dimostrato precedentemente, la funzione di Green associata a $P(D)$ è il prodotto di $\theta(x)$ con la soluzione φ del problema di Cauchy ai dati iniziali $\varphi^{(m)} = 0$, $m < \deg P - 1$ e $\varphi^{(m)} = 1$, $m = \deg P - 1$. Quello che vogliamo mostrare è che sotto certe condizioni la soluzione dell'equazione $P(D)u = \delta$ è proprio quella che si ottiene passando in trasformata.

Dobbiamo metterci in una condizione fisicamente sensata. Supporremo allora che il sistema sia dissipativo o, almeno, che all'infinito raggiunga l'equilibrio (nel senso di Lyapunov: la funzione si mantiene limitata per tempi grandi). In questo caso le soluzioni dell'omogenea sono caratterizzate da esponenziali decrescenti, cioè le radici λ_i del polinomio secolare $P(z) = 0$ sono tali che

$$\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0, i \in J_{\deg P}$$

In queste condizioni $G(x) = \theta(x)\varphi(x)$ è certamente Fourier trasformabile visto che è, per ipotesi, limitata sulla retta reale e continua (perciò localmente sommabile).

Ora, nell'ipotesi in cui per tutte le radici valga $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, la soluzione che si ottiene via Fourier è **unica** ed è (allora) proprio la funzione di Green causale del sistema. Infatti, in trasformata l'equazione diventa

$$P(-i\omega)\hat{G} = 1$$

dove $\omega \in \mathbb{R}$. Ora, gli zeri di P si hanno per $\omega_i = i\lambda_i$, cioè si trovano nel semipiano immaginario negativo. Questo comporta

- (i) $P(-i\omega)$ ha inversa che è ancora una distribuzione, perciò

$$\hat{G} = \frac{1}{P(-i\omega)}$$

- (ii) $\hat{G}$ è olomorfa nel semipiano immaginario positivo.

Antitrasformiamo $\hat{G}$, abbiamo

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{P(-i\omega)} d\omega$$

Per $t < 0$, dal lemma di Jordan, dobbiamo chiudere il semicerchio nel semipiano positivo, ivi $1/P(-i\omega)$ è olomorfa, perciò

$$G(t) = 0, t < 0$$

da cui la causalità.

Nel caso in cui qualche λ_i appartenga all'asse reale avremo da aggiungere qualche parte principale e allora $\hat{G}$ dipenderà da dei parametri c_i che andranno a moltiplicare le delta di Dirac. Perdiamo così l'unicità della funzione di Green fornita via trasformata. Tuttavia, scegliendo opportunamente i c_i potremo far comparire termini del tipo

$$P\left(\frac{1}{\omega}\right) + \pi\delta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega + i\varepsilon}$$

che, come limiti $\mathcal{S}'$ di trasformate di funzioni a supporto in $(0, +\infty)$, sono trasformate di funzioni a valori in $(0, +\infty)$. In definitiva, seppure dobbiamo selezionarla tra tante, la funzione di Green causale si ottiene ancora dalla risoluzione del problema in trasformata di Fourier.

**Traslazione nel
tempo e diago-
nalizzazione
in trasformata**

Prima di chiudere, ancora un'importante osservazione sull'uso della trasformata di Fourier nello studio dei sistemi lineari.

Consideriamo un operatore lineare T continuo su $L^2(\mathbb{R})$. Si debba risolvere il problema

$$Tf(t) = g(t)$$

Adesso, se T commuta con le traslazioni nel tempo, allora, in trasformata di Fourier esso è un'operatore di moltiplicazione (e come tale è diagonalizzato). Ricordiamo che se T è un operatore, allora il suo trasformato è $\hat{T}$ tale che

$$\hat{T}\hat{f} = \hat{g}$$

perciò

$$FTF^{-1}Ff(t) = Fg(t) \Rightarrow \hat{T} = FTF^{-1}$$

Ora, se T commuta con le traslazioni nel tempo, cioè con T_a per ogni a , allora $\hat{T}$ commuta

con l'operatore di moltiplicazione per $e^{i\omega a}$. Infatti, dall'equazione $TT_a = T_aT$, troviamo

$$\begin{aligned}(FTF^{-1})(FT_aF^{-1}) &= (FT_aF^{-1})(FTF^{-1}) \\ \hat{T}(FT_aF^{-1}) &= (FT_aF^{-1})\hat{T}\end{aligned}$$

D'altra parte

$$FT_aF^{-1} = e^{-i\omega a}$$

da cui, per ogni a

$$\hat{T}e^{i\omega a} = e^{i\omega a}\hat{T}$$

Ammettiamo, lo dimostreremo tra poco, che l'equazione di sopra, implichi che, per ogni $g(\omega) \in \mathcal{C}_c^\infty$ risulti

$$\hat{T}g(\omega) = g(\omega)\hat{T}$$

dove $g(\omega)$ è inteso, come prima $e^{i\omega a}$, come operatore di moltiplicazione. Fissiamo adesso la funzione $\chi \in \mathcal{S}$ (per esempio, $\chi = e^{-\omega^2}$) che sia sempre diversa da 0. Allora abbiamo

$$\hat{T}(g\chi) = g(\hat{T}\chi)$$

Poniamo adesso $\psi \doteq \hat{T}\chi$. Abbiamo

$$\hat{T}(g\chi) = g\psi = g\frac{\psi}{\chi}\chi = \frac{\psi}{\chi}(g\chi)$$

dove ψ/χ ha perfettamente senso, visto che χ è una funzione fissata che non si annulla mai. Ora, l'insieme delle funzioni del tipo $g\chi$ coincide ancora con $\mathcal{C}_c^\infty$ visto che χ non si annulla mai. Dunque, posto $h(\omega) = \psi/\chi$ abbiamo che l'operatore $\hat{T}$ è un operatore di moltiplicazione sul denso $\mathcal{C}_c^\infty$, cioè

$$\hat{T}\varphi = h\varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty.$$

Siccome T è un operatore continuo, $\hat{T}$ è esso stesso un operatore continuo, dunque h è una funzione limitata e l'operatore $h\varphi$ si estende per continuità a tutto lo spazio. In definitiva $\hat{T} = h$.

Dobbiamo vedere che

$$\hat{T}e^{i\omega a} = e^{i\omega a}\hat{T} \quad \forall a \in \mathbb{R} \implies \hat{T}g(\omega) = g(\omega)\hat{T} \quad \forall g \in \mathcal{C}_c^\infty.$$

Ora, ogni funzione $g(\omega)$ in $\mathcal{C}_c^\infty$ si espande in serie di Fourier sugli intervalli $[-L, L]$ che, preso L abbastanza grande, vanno a comprendere l'intero supporto di g . Poniamo

$$g_{N,L} = \begin{cases} \sum_{-N}^N c_n^{(L)} e^{i2\pi n\omega/L}, & \omega \in (-L, L) \\ 0, & \omega \notin (-L, L) \end{cases}$$

Si vede subito che $g_{N,L}$ converge uniformemente a g per $N, L \rightarrow \infty$. Allora, per ogni N e per L sufficientemente grande (a fissata g) si ha

$$\hat{T}(g_{N,L}\chi) = g_{N,L}(\hat{T}\chi)$$

Ora, dalla continuità di $\hat{T}$ si ha che il primo membro tende a

$$\hat{T}(g_{N,L}\chi) \rightarrow \hat{T}g\chi$$

per $N, L \rightarrow \infty$. A secondo membro, invece, la convergenza di $g_{N,L}$ in senso operatoriale è a g in senso uniforme visto che $g_{N,L}$ converge, come funzione, a g in senso uniforme. In definitiva

$$\hat{T}g\chi = g\hat{T}\chi$$

e abbiamo la tesi.

Complementi

In questo capitolo, che funge da appendice, discutiamo brevemente alcuni argomenti complementari a quelli trattati nei capitoli precedenti. Lo stile con cui affronteremo i nuovi aspetti è molto diverso dal solito: ci permetteremo di dare solo un quadro generale e privo di dimostrazioni complete.

VI.1 Operatori di derivazione e moltiplicazione in L^2

In questa sezione applichiamo i concetti appresi nel corso del capitolo sulla teoria degli operatori lineari. Gli operatori di derivazione e moltiplicazione sono molto importanti, specie in meccanica quantistica. Riportiamo l'argomento in questa sede, perché la trattazione è sbrigativa e mancano alcune dimostrazioni (una su tutte, il lemma di Sobolev).

VI.1.1 Operatori di moltiplicazione

Con $(X, \mathcal{A}, \mu)$ intendiamo uno spazio di misura σ -finita (ricordiamo che ciò significa che X ammette un ricoprimento costituito da insiemi misurabili, di misura finita). Data la funzione h misurabile, consideriamo l'insieme

$$D(h) \doteq \left\{ f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu) \mid \int |hf|^2 d\mu < \infty \right\}$$

Esso è una varietà lineare in $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$. Infatti, se $f, g \in D(h)$ allora hf e $hg \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$, perciò $hf + hg \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$, dunque $f + g \in D(h)$.

Proposizione VI.1 *L'insieme $D(h)$ è denso in $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$.*

Dimostrazione Si consideri la seguente successione di sottoinsiemi incapsulati di X

$$E_n \doteq \{x \in X \mid |h(x)| \leq n\}$$

Si ha subito che

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

Sia $f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$. Consideriamo ora la successione $\{f_n\} \subset L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$, dove $f_n \doteq \chi_{E_n} f$. La successione f_n converge a f . Infatti, si ha convergenza puntuale quasi ovunque e, inoltre,

$$|f - f_n|^2 = |f - \chi_{E_n} f|^2 \leq |f|^2 \in L^1$$

(c.v.d.) da cui, applicando il teorema di Lebesgue, si perviene alla tesi.

Siamo allora in grado di definire l'**operatore di moltiplicazione** associato alla funzione h misurabile come

$$\begin{aligned} M_h : D(h) &\rightarrow L^2(X, \mathcal{A}, \mu) \\ f(x) &\mapsto h(x)f(x), \forall x \in X \end{aligned}$$

Talvolta denoteremo M_h con h confondendo funzione ed operatore.

Veniamo alle prime proprietà di tale operatore

Teorema VI.2 *Sia h una funzione misurabile definita sullo spazio di misura σ -finita $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Su $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ consideriamo l'operatore di moltiplicazione M_h associato a h . Abbiamo*

(i) M_h è aggiuntabile e il suo aggiunto è M_{h^*} ;

(ii) M_h è chiuso:

(iii) M_h è continuo se e solo se $h \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$. In questo caso $\|M_h\| = \|h\|_{L^\infty}$.

Dimostrazione

Vediamo (i). Siccome, come dimostrato nella proposizione precedente, $D(h)$ è denso, si ha che M_h è aggiuntabile. Per calcolare l'aggiunto di M_h , cominciamo a mostrare che $M_{h^*} \subset M_h^\dagger$. Abbiamo

$$(g, M_h f) = \int g^* h f d\mu = \int (gh)^* f d\mu = (M_{h^*} g, f)$$

se $g \in D(h^*)$. Per mostrare l'inclusione opposta, ci basta vedere che $D(M_h^\dagger) \subset D(h^*)$. Sia, allora, $g \in D(M_h^\dagger)$, allora esiste $\bar{g}$ tale che

$$(g, M_h f) = (\bar{g}, f) \quad \forall f \in D(h)$$

cioè, per ogni $f \in D(h)$, si ha

$$0 = (g, M_h f) - (\bar{g}, f) = \int_X (h^* g - \bar{g})^* f d\mu$$

Se riconsideriamo la successione incapsulata ricoprente, definita nella dimostrazione della proposizione di prima, possiamo definire il sottospazio di $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$

$$L^2(E_n) = \{f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu) \mid f(x) = 0, \text{ q.o. in } E_n\}$$

Che $L^2(E_n)$ sia una varietà lineare è ovvio. Inoltre, se $\{g_n\} \subset L^2(E_n)$ è una successione convergente a $g \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$, essa ammette una sottosuccessione che converge puntualmente quasi ovunque a g . Ma allora g è quasi ovunque nulla in E_n , perciò $g \in L^2(E_n)$. Ora, per ogni $f \in L^2(E_n)$ abbiamo

$$0 = \int_{E_n} (h^* g - \bar{g})^* f d\mu = ((h^* g - \bar{g})|_{E_n}, f)$$

visto che $(h^* g - \bar{g})|_{E_n} \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$. Ne viene che

$$(h^* g - \bar{g})|_{E_n} = 0$$

dove lo 0 è inteso come elemento dello spazio di Hilbert $L^2(E_n)$. Dall'arbitrarietà di n , troviamo

$$\bar{g} = h^* g$$

quasi ovunque in X . Perciò $h^* g = \bar{g} \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$, $g \in D(h^*)$.

La (ii) segue immediatamente dalla (i) essendo l'aggiunto di un operatore chiuso.

Infine, (iii). Se $h \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ allora è $D(h) = L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$. Abbiamo

$$\|hf\|_{L^2} \leq \|h\|_{L^\infty} \|f\|_{L^2}$$

da cui M_h è continuo. Si ha $\|M_h\| = \|h\|_{L^\infty}$. Infatti, supponiamo $\rho \doteq \|h\|_{L^\infty} > 0$ (altrimenti la tesi è banale). Per ogni $n > 1$ troviamo dei sottoinsiemi F_n misurabili di X con le proprietà $0 < \mu(F_n) < \infty$ e tali che

$$\rho - \frac{1}{n} \leq |h(x)| \leq \rho, \quad x \in F_n$$

per ogni $x \in F_n$. Infatti, consideriamo

$$\mathcal{F}_n \doteq \{x \in X \mid \rho - 1/n \leq |h(x)| \leq \rho\}$$

ciascuno di questi insiemi non può avere misura nulla, altrimenti avremmo $\rho = 0$. D'altra parte, essi potrebbero avere misura infinita. Se X_i è la successione di insiemi di misura finita che ricorrono X , è sempre possibile trovare un X_i tale che $\mu(X_i \cup \mathcal{F}_n)$, altrimenti

$$\mu(\mathcal{F}_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(X_i \cup \mathcal{F}_n) = 0$$

Poniamo allora

$$f_n \doteq \frac{\chi_{F_n}}{\mu(F_n)^{1/2}}$$

f_n è una successione di funzioni di L^2 di norma unitaria. Perciò

$$\|M_h\| = \sup_{\|f\|_{L^2}=1} \|M_h f\|_{L^2} \geq \|M_h f_n\|_{L^2} \geq \rho - \frac{1}{n}$$

da cui

$$\|M_h\| \geq \rho = \|h\|_{L^\infty}$$

come volevamo.

Vediamo adesso che se M_h è continuo, allora $h \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$. h sia, per assurdo, non essenzialmente limitata. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, consideriamo i sottoinsiemi

$$\mathcal{M}_n \doteq \{x \in X \mid n \leq |h(x)| \leq n+1\}$$

Ovviamente, tali sottoinsiemi sono misurabili. Se da un certo n in poi essi avessero misura nulla la funzione h sarebbe essenzialmente limitata, perciò esistono infiniti n per cui questi sottoinsiemi hanno misura positiva. Passando eventualmente a una sottosuccessione, essi hanno tutti misura positiva. Intersecandoli poi con i sottoinsiemi X_i , come prima, otteniamo una successione $\mathcal{N}_n$ di insiemi di misura positiva finita all'interno dei quali $n \leq |h(x)| \leq n+1$. Gli elementi

$$f_n = \frac{\chi_{\mathcal{N}_n}}{\mu(\mathcal{N}_n)^{1/2}}$$

stanno in $D(h)$ e hanno norma pari a 1. La successione dei trasformati, però, non è limitata essendo $\|M_h f_n\| \geq n$ per ogni n . L'operatore M_h non può perciò essere continuo. (c.v.d.)

Abbiamo il seguente

Corollario VI.3 *L'operatore di moltiplicazione associato alla funzione misurabile h è autoaggiunto se e solo se h è a valori reali.*

Si noti che $D(h) = D(h^*)$ e $R(h) = R(h^*)$. Talvolta, con abuso di notazione, si scrive $M_h^\dagger = h^\dagger = h^*$.

Veniamo all'invertibilità di M_h . Cominciamo con l'introdurre la seguente funzione misurabile

$$\frac{1}{h} : X \rightarrow \mathbb{C}, \quad \frac{1}{h}(x) \doteq \begin{cases} 1/h(x), & h(x) \neq 0 \\ 0, & h(x) = 0 \end{cases}$$

Abbiamo

Teorema VI.4 *Per un operatore di moltiplicazione M_h sono affermazioni equivalenti*

- (i) M_h è invertibile;
- (ii) $\mu(\{x \in X \mid h(x) = 0\}) = 0$;
- (iii) M_h ha immagine densa in $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Se M_h è invertibile, il suo inverso è $M_{1/h}$.

Dimostrazione (ii) implica (i) Poiché

$$\ker M_h = \{f \in D(h) \mid h(x)f(x) = 0 \text{ q.o.}\}$$

se vale (ii), allora $f(x) = 0$ quasi ovunque, e il kernel di M_h è banale.

(i) implica (ii) Ammettiamo che valga (i) ma che la misura dell'insieme su cui h si annulla sia positiva. Esiste sempre (al solito, intersecando con gli X_i) un insieme $E \subset \{x \in X \mid h(x) = 0\}$ di misura finita e non nulla. La funzione $\chi_E \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$, è non nulla, e appartiene al kernel di M_h che quindi risulta non banale. Assurdo.

(i) implica (iii) Abbiamo

$$R(M_h)^\perp = \ker(M_h^\dagger) = \ker(M_{h^*}) = \ker(M_h)$$

il kernel è banale se e solo se la chiusura di $R(M_h)$ coincide con $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$, come si voleva.

Sia M_h è invertibile. Se $g(x)$ appartiene all'immagine di M_h , allora esiste $f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ tale che

$$g(x) = f(x) h(x)$$

perciò, quasi ovunque, grazie alla (ii),

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

da cui $M_{1/h}g \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$. Ne viene che $g \in D(1/h)$. Il viceversa è altrettanto evidente.

(c.v.d.) Ne viene che $D(1/h) = R(h)$. Adesso è immediato vedere che $(M_h)^{-1} = M_{1/h}$.

VI.1.2 L'operatore posizione della meccanica quantistica

Uno degli esempi più importanti di operatori di moltiplicazione, è l'**operatore posizione** della meccanica quantistica. Sia

$$D(q) \doteq \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid xf \in L^2(\mathbb{R})\}$$

e consideriamo l'operatore di moltiplicazione definito su $D(q)$ dato da $q \doteq M_x$. Grazie alla discussione della sottosezione precedente, troviamo

Teorema VI.5
(operatore
posizione)

L'operatore posizione q gode delle seguenti proprietà

- (i) è *autoaggiunto*;
- (ii) è *non limitato*;
- (iii) è *invertibile con inverso non limitato*.

Torna utile definire l'operatore posizione come chiusura di uno dei due seguenti operatori

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{D}} : \mathcal{D}(\mathbb{R}) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto xf \end{aligned}$$

oppure

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{S}} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto xf \end{aligned}$$

Essenziale
autoaggiunzione
di $q_{\mathcal{S}}$ e $q_{\mathcal{D}}$

Entrambi questi operatori sono **essenzialmente autoaggiunti** e la loro chiusura è q . Si vede subito che sono operatori simmetrici. Infatti, sono densamente definiti e hanno valori di aspettazione reali. Abbiamo adesso che, limitandoci a $q_{\mathcal{S}}$, $q_{\mathcal{S}}^\dagger = q$. Infatti, si ha subito che $q \subset q_{\mathcal{S}}^\dagger$, essendo

$$(f, q_{\mathcal{S}}g) = \int f^* xg \, d\mu = \int (xf)^* g \, d\mu = (qf, g)$$

se $f \in D(q)$. Vediamo adesso che $D(q_{\mathcal{S}}^\dagger) \subset D(q)$. Sia $f \in D(q_{\mathcal{S}}^\dagger)$ allora esiste $\bar{f} \in L^2(\mathbb{R})$ per cui

$$(f, q_{\mathcal{S}}g) = (\bar{f}, g) \quad \forall g \in D(q_{\mathcal{S}})$$

Ne viene che

$$\int (xf - \bar{f})^* g \, d\mu = 0$$

per ogni $g \in \mathcal{S}$ e, dunque, $g \in \mathcal{D}$. Ora, per ogni $E \subset \mathbb{R}$ limitato, si ha che $xf - \bar{f} \in L^2(E) \cap L^1(E)$, perciò, per il lemma di Du Bois-Reymond, si conclude $xf = \bar{f}$ q.o., da cui $f \in D(q)$. In definitiva,

$$q = q_{\mathcal{S}}^\dagger.$$

Passando agli aggiunti, abbiamo

$$q = \overline{q_{\mathcal{S}}}$$

Si ha così anche l'essenziale autoaggiunzione di $q_{\mathcal{S}}$.

VI.1.3 Operatori di derivazione in $L^2(a, b)$

Funzioni
assolutamente
continue

Sia $(a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto generalizzato (cioè eventualmente illimitato). Con $A_n(a, b)$ intendiamo lo spazio lineare delle funzioni definite su (a, b) a valori in $\mathbb{C}$, tali che esistono e sono **assolutamente continue** le derivate di ordine strettamente inferiore a n .

Ricordiamo che $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$, definita in un intervallo **chiuso e limitato**, si dice assolutamente continua se è continua, derivabile quasi ovunque in $[\alpha, \beta]$, e la sua derivata è integrabile su $[\alpha, \beta]$ e, per ogni $c \in [\alpha, \beta]$, vale

$$f(x) = f(c) + \int_c^x f'(y) d\mu(y), \quad \forall x \in [\alpha, \beta].$$

Una funzione definita su un intervallo aperto è detta assolutamente continua, se è assolutamente continua su ogni intervallo chiuso contenuto nell'intervallo aperto di definizione.

Spazio di Sobolev

Consideriamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la seguente varietà lineare in $L^2(a, b)$

$$W_n(a, b) \doteq \left\{ f \in A_n(a, b) \mid f^{(k)} \in L^2(a, b), \forall k \in J_n^0 \right\}$$

Vale la seguente stima

Lemma VI.6
(disuguaglianza di Sobolev)

Sia $f \in A_n(a, b)$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $C > 0$ tale che

$$\int_a^b |f^{(k)}|^2 d\mu \leq \varepsilon \int_a^b |f^{(n)}|^2 d\mu + C \int_a^b |f|^2 d\mu, \quad \forall j \in J_{n-1}^0$$

Dimostrazione
(c.v.d.)

Omessa

In virtù del lemma di Sobolev, abbiamo

$$W_n(a, b) \doteq \left\{ f \in A_n(a, b) \cap L^2(a, b) \mid f^{(n)} \in L^2(a, b) \right\}$$

Teorema VI.7

Sia $W_n(a, b)$; per ogni $j = 0, \dots, n-1$ esiste finito

$$\lim_{x \rightarrow a} f^{(j)}(x)$$

che è nullo se $a = -\infty$. Analoghe proprietà per b .

Dimostrazione

Sia $c \in (a, b)$ e $a > -\infty$. Per ogni $x \in (a, b)$

$$f^{(j)}(x) = f^{(j)}(c) + \int_c^x f^{(j+1)}(y) d\mu(y)$$

da cui

$$\lim_{x \rightarrow a} f^{(j)}(x) = f^{(j)}(c) + \int_c^a f^{(j+1)}(y) d\mu(y)$$

che esiste finito dal momento che $f^{(j+1)} \in L^2(a, b)$ e perciò $L^2(a, c)$ e che (a, c) è un intervallo finito.

Sia, invece, $a = -\infty$. Integrando per parti, si ha

$$\int_c^x f^{(j)}(y) f^{(j+1)}(y) d\mu(y) = \left[f^{(j)}(x) \right]^2 - \left[f^{(j)}(c) \right]^2 - \int_c^x f^{(j)}(y) f^{(j+1)}(y) d\mu(y)$$

da cui

$$\int_c^x f^{(j)}(y) f^{(j+1)}(y) d\mu(y) = \frac{1}{2} \left\{ \left[f^{(j)}(x) \right]^2 - \left[f^{(j)}(c) \right]^2 \right\}$$

Ora, siccome $f^{(j)}$ e $f^{(j+1)}$ appartengono a $L^2(-\infty, b)$, si ha che il loro prodotto è un elemento di $L^1(-\infty, b)$. Esiste allora finito il limite per $x \rightarrow -\infty$ di $f^{(j)}(x)$. Ovviamente tale limite

(c.v.d.)

non può essere diverso da 0, visto che $f^{(j)} \in L^2(-\infty, b)$.

Osservazione VI.1

Rimarchiamo che se a (oppure b) è finito, allora le funzioni $f \in W_n(a, b)$ ammettono, grazie al teorema dimostrato, insieme alle loro derivate, estensione continua all'intervallo $[a, b]$. Noi faremo questa estensione e denoteremo con $f^{(j)}(a)$ il limite per $x \rightarrow a$ di $f^{(j)}(x)$.

■

$W_n(a, b)$ appare la più vasta varietà lineare densa di $L^2(a, b)$ sul quale definire un operatore di derivazione di ordine n che abbia immagine in $L^2(a, b)$. Altre varietà dense sulle quali è possibile definire la derivata appaiono $\mathcal{D}$ ed $\mathcal{S}$.

Poniamo, per ogni intero $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} p_{n,\mathcal{D}} : \mathcal{D}(a,b) &\rightarrow L^2(a,b) \\ f &\mapsto p_{n,\mathcal{D}} f \doteq (-i)^n f^{(n)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} p_n : W_n(a,b) &\rightarrow L^2(a,b) \\ f &\mapsto p_n f \doteq (-i)^n f^{(n)} \end{aligned}$$

Come nel caso dell'operatore posizione, vedremo che $p_{n,\mathcal{D}}$ è simmetrico e ha come aggiunto p_n . $p_{n,\mathcal{D}}$ si chiama operatore di derivazione **minimale**, mentre p_n si dice **massimale**. Ci occorrono due lemmi.

Lemma VI.8 Per l'immagine di $p_{n,\mathcal{D}}$ vale

$$R(p_{n,\mathcal{D}}) = \left\{ f \in \mathcal{D}(a,b) \left| \int_a^b x^k f(x) d\mu = 0, k = 0, \dots, n-1 \right. \right\} \doteq I_n$$

Dimostrazione Sia $f \in R(p_{n,\mathcal{D}})$, allora esiste $g \in \mathcal{D}(a,b)$ per cui $f = (-i)^n g^{(n)}$, allora integrando successivamente per parti, visto che i termini di bordo sono nulli,

$$\int_a^b x^k f(x) d\mu = (-i)^n \int_a^b x^k g^{(n)} d\mu = 0$$

Dobbiamo adesso vedere che $I_n \subset R(p_{n,\mathcal{D}})$. Procediamo per induzione su n . Sia $n = 1$. Sia $f \in I_1$ e sia $\text{supp } f \subset [\alpha, \beta]$. Definiamo

$$g(x) = i \int_a^x f(y) d\mu(y)$$

Allora, ovviamente $g(x) = 0$ per $x \notin [\alpha, \beta]$. Ne viene che $g \in \mathcal{D}(a,b)$. Immediatamente, $p_{\mathcal{D}} g = f$.

Supponiamo ora che $I_{n-1} = R(p_{n-1,\mathcal{D}})$. Sia $f \in I_n$. A maggior ragione $f \in I_{n-1}$, dunque, esiste $\bar{g} \in \mathcal{D}(a,b)$ tale che

$$f = (-i)^{n-1} \bar{g}^{(n-1)}$$

D'altra parte, $\bar{g} \in I_1$, infatti

$$0 = \int_a^b x^n f(x) d\mu(x) = (-i)^{n-1} \int_a^b x^n \bar{g}^{(n-1)} d\mu(x) = (-1)^n (-i)^{n-1} \int_a^b x \bar{g} d\mu(x)$$

(c.v.d.) Allora $\bar{g} = -ih'$ per qualche $h \in \mathcal{D}(a,b)$, da cui $f = (-i)^n h^{(n)}$.

Il secondo lemma è un risultato di algebra lineare.

Lemma VI.9 Sia E un $\mathbb{K}$ -spazio lineare e $\{u_i\}_{i \in J_n}$ una famiglia finita di funzionali lineari. Se u è un funzionale lineare, talché

$$\bigcap_{i=1}^n \ker u_i \subset \ker u$$

allora

$$u \in \text{Span} \langle u_i \rangle_{i \in J_n}.$$

Dimostrazione Omessa
(c.v.d.)

Veniamo finalmente al

Teorema VI.10 Per ogni intero $n \geq 1$, l'operatore $p_{n,\mathcal{D}}$ è simmetrico e $p_{n,\mathcal{D}}^\dagger = p_n$.

Dimostrazione La simmetria segue dalla densità del dominio e dal fatto che

$$(f, p_{n,\mathcal{D}} g) = \int_a^b f^* (-i)^n g^{(n)} d\mu = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[f^{*(n-k-1)} g^{(k)} \right]_b^a + (-1)^n (-i)^n \int_a^b \left(f^{(n)} \right)^* g d\mu$$

per ogni $f, g \in \mathcal{D}(a, b)$. In modo del tutto analogo si vede che

$$(f, p_n g) = (p_n, \mathcal{D} f, g)$$

per ogni $f \in \mathcal{D}(a, b)$ e $g \in W_n(a, b)$. Dunque, $p_n \subset p_{n, \mathcal{D}}^\dagger$.

Sia, ora, $g \in D(p_{n, \mathcal{D}}^\dagger)$. Esiste, allora $\bar{g} \in L^2(a, b)$ tale che

$$(p_n, \mathcal{D} f, g) = (f, \bar{g})$$

per ogni $f \in \mathcal{D}(a, b)$. Siano $c \in (a, b)$ e h la funzione su (a, b) data da

$$h(x) = (i)^n \int_c^x d\mu(x_n) \int_c^{x_n} d\mu(x_{n-1}) \dots \int_c^{x_2} d\mu(x_1) \bar{g}(x_1)$$

Per costruzione, $h \in A_n(a, b)$ e $(-i)^n h^{(n)} = \bar{g}$. Integrando per parti il secondo membro dell'eguaglianza

$$(p_n, \mathcal{D} f, g) = (f, \bar{g})$$

otteniamo

$$\int_a^b f^{(n)*} (g - h) d\mu = 0, \forall f \in \mathcal{D}(a, b).$$

Adesso consideriamo i seguenti funzionali definiti su $\mathcal{D}(a, b)$

$$u(f) \doteq \int_a^b f(g - h) d\mu$$

e per $i = 0, \dots, n-1$

$$u_i(f) = \int_a^b x^i f(x) d\mu(x)$$

Applicando i due lemmi, si ha che esiste un polinomio P di grado al più $n-1$ tale che

$$\int_a^b f(g - h - P) d\mu = 0, \forall f \in \mathcal{D}(a, b)$$

Restringendoci su intervalli finiti $[\alpha, \beta]$, interpretando l'integrale come prodotto scalare su $L^2(\alpha, \beta)$, per la densità di $\mathcal{D}(\alpha, \beta)$, si conclude, usando l'arbitrarietà di α e β ,

$$g(x) = h(x) + P(x), \text{ q.o. in } [\alpha, \beta]$$

(c.v.d.) Donde $g \in A_n(a, b)$. Poiché $g, \bar{g} \in L^2(a, b)$ si conclude dal lemma di Sobolev, che $g \in W_n(a, b)$.

Abbiamo come conseguenza due teoremi.

Teorema VI.11 Se $(a, b) = \mathbb{R}$ allora per ogni $n \geq 1$, p_n è autoaggiunto, $p_{n, \mathcal{D}}$ è essenzialmente autoaggiunto ed ha chiusura pari a p_n .

Dimostrazione Poiché $p_{n, \mathcal{D}} \subset p_n$, dal teorema precedente abbiamo

$$p_n^\dagger \subset p_{n, \mathcal{D}}^\dagger = p_n$$

Basta provare che p_n è simmetrico per averne l'autoaggiunzione. Ma, come abbiamo visto, le funzioni in $W_n(a, b)$ sono infinitesime all'infinito, sicché, integrando per parti si trova la simmetria.

Siccome poi

$$p_{n, \mathcal{D}}^\dagger = p_n$$

aggiuntando

$$(c.v.d.) \quad \overline{p_{n, \mathcal{D}}} = p_{n, \mathcal{D}}^{\dagger\dagger} = p_n.$$

Osservazione VI.2 Per $(a, b) = \mathbb{R}$ e $n \geq 1$ si possono ripetere esattamente tutti i ragionamenti fatti andando a sostituire $\mathcal{S}$ con $\mathcal{D}$. L'essenziale autoaggiunzione di $p_{n, \mathcal{S}}$ discende dal fatto che

$$\begin{aligned} p_n &= \overline{p_{n, \mathcal{D}}} \subset \overline{p_{n, \mathcal{S}}} \\ \overline{p_{n, \mathcal{S}}} &\subset p_n. \end{aligned}$$

■

Se $(a, b) \neq \mathbb{R}$ le cose cambiano molto

Teorema VI.12 Sia $(a, b) \neq \mathbb{R}$, per ogni $n \geq 1$ la chiusura di $p_{n, \mathcal{D}}$ è l'operatore

$$p_{n,0} = (-i)^n f^{(n)}$$

definito sull'insieme $W_n^0(a, b)$ dato da (se a, b sono finiti)

$$W_n^0(a, +\infty) = \left\{ f \in W_n(a, b) \mid f^{(j)}(a) = 0, j = 0, \dots, n-1 \right\}$$

$$W_n^0(-\infty, b) = \left\{ f \in W_n(a, b) \mid f^{(j)}(b) = 0, j = 0, \dots, n-1 \right\}$$

$$W_n^0(a, b) = \left\{ f \in W_n(a, b) \mid f^{(j)}(a) = f^{(j)}(b) = 0, j = 0, \dots, n-1 \right\}$$

In questo caso $p_{n,0} \neq p_n$ e nessuno di questi operatori è autoaggiunto. $p_{n,0}$ è simmetrico chiuso e vale

$$\begin{aligned} p_{n,0} &= p_n^\dagger \\ p_{n,0}^\dagger &= p_n \end{aligned}$$

Dimostrazione (c.v.d.) Omessa, perché noiosa.

Vediamo un ultimo esempio di operatore di derivazione che si incontra molto spesso negli esercizi.

Proposizione VI.13 L'operatore $p_{(a,b)}$ di derivazione nell'intervallo finito $(a, b) \subset \mathbb{R}$ con dominio

$$D(a, b) \doteq \{ f \in L^2(a, b) \cap A_1(a, b) \mid f' \in L^2(a, b), f(a) = f(b) \}$$

(operatore di derivazione con condizioni di periodicità al contorno), estende p_0 ed è autoaggiunto.

Dimostrazione Mostrare la simmetria è banale, integrando per parti. Dal fatto che $p_{\mathcal{D}} \subset p_{(a,b)}$ si ha

$$p_{(a,b)}^\dagger \subset p$$

Quindi, se $g \in D(p_{(a,b)}^\dagger)$ allora $g \in W_1(a, b)$ e $p_{(a,b)}^\dagger g = (-i)g'$. Da

$$(p_{(a,b)} f, g) = (f, -ig'), \forall f \in D(a, b)$$

si ottiene, integrando per parti il secondo membro,

$$f^*(b)g(b) - f^*(a)g(a) = 0 \forall f \in D(a, b)$$

tenendo conto delle condizioni di periodicità per f

$$f^*(b)(g(b) - g(a)) = 0 \forall f \in D(a, b)$$

(c.v.d.) da cui $g(b) = g(a)$, sicché $g \in D(p_{(a,b)})$.

VI.1.4 Equivalenza unitaria di posizione ed impulso

Impulso e posizione Probabilmente, dalla meccanica quantistica, è noto al lettore che posizione ed impulso sono operatori unitariamente equivalenti. Ricordiamo che l'operatore di moltiplicazione è q ed è M_x , mentre l'operatore impulso è l'operatore di derivazione p su $L^2(\mathbb{R})$ di cui nella precedente sottosezione.

Equivalenza unitaria Dicevamo che impulso e posizione sono unitariamente equivalenti: questo significa che esiste un operatore unitario U tale che $q = UpU^\dagger$.

Ora, in generale due operatori unitariamente equivalenti hanno le stesse proprietà geometriche e topologiche. Siano, infatti, A, B due operatori connessi dalla trasformazione unitaria U , cioè sia $A = UBU^\dagger$, da cui $B = U^\dagger AU$. B è continuo se e solo se A è continuo, essendo il prodotto di operatori continui un operatore continuo. Ancora B è chiudibile se e solo se A è chiudibile. Sia B chiudibile, allora per ogni successione x_n convergente a 0 tale che la successione $Bx_n \rightarrow y$,

si ha $y = 0$. Ora, sia x_n una successione convergente a 0 tale che $Ax_n \rightarrow y$. Ne viene che la successione $U^\dagger Ax_n \rightarrow U^\dagger y$ per la continuità di $U^\dagger$. Adesso, abbiamo $U^\dagger Bx_n \rightarrow U^\dagger y$, ma B è chiudibile, perciò $U^\dagger y = 0$, ossia $y = 0$, per l'iniettività di $U^\dagger$. Ne viene anche che

$$\bar{A} = U \bar{B} U^\dagger$$

Ragionamenti analoghi per la chiusura.

Sia poi B autoaggiunto, allora A è densamente definito avendo come dominio $U(D(B))$, perciò è aggiuntabile, dunque

$$A^\dagger = U B U^\dagger = A$$

dove si è usato il teorema per cui se C è continuo, allora $(CB)^\dagger = B^\dagger C^\dagger$. Analogamente si mostra che se B è simmetrico o essenzialmente autoaggiunto, A è della stessa natura.

Teorema VI.14 *Siano $A, B \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$ due operatori unitariamente equivalenti. Allora B è continuo, chiuso, densamente definito, simmetrico, essenzialmente autoaggiunto o autoaggiunto, se e solo se A è della stessa natura.*

**Equivalenza
di posizione
ed impulso**

Forti delle considerazioni precedenti, passiamo a vedere l'unitaria equivalenza di impulso e posizione. Se andiamo a considerare le restrizioni di posizione ed impulso ad $\mathcal{S}$, abbiamo che, se F è la trasformata di Fourier, allora

$$q_{\mathcal{S}} = F^\dagger p_{\mathcal{S}} F$$

Perciò,

$$\overline{q_{\mathcal{S}}} = F^\dagger \overline{p_{\mathcal{S}}} F$$

infine,

$$q = F^\dagger p F$$

Si noti che avremmo potuto usare la sola trasformata di Fourier e la trattazione degli operatori di moltiplicazione per ottenere che $p_{\mathcal{S}}$ è essenzialmente autoaggiunto, e che la sua chiusura, che sarebbe stato lecito definire direttamente come l'operatore impulso, $p \doteq \overline{p_{\mathcal{S}}}$, è autoaggiunta e unitariamente equivalente a q .

**Definizione
alternativa
dell'operatore
impulso**

Questo punto di vista (che ci eviterebbe di introdurre gli spazi di Sobolev e, a posteriori, ci porta a sdrammatizzare il fatto che non abbiamo dimostrato la disuguaglianza di Sobolev) ha un inconveniente. Il dominio dell'operatore impulso è espresso in termini di trasformata di Fourier: esso è dato dall'immagine via Fourier dello spazio delle funzioni tali che $xf \in L^2$. Se volessimo determinare esplicitamente il dominio dell'impulso, ci troveremmo di fronte a un nuovo difficile problema, la cui soluzione è comunque W_1 .

VI.2 Relazioni di dispersione

Questa sezione sulle relazioni di dispersione si connette all'analisi di Fourier. Si tratta di un argomento di grande interesse fisico, perciò lo studieremo più con l'occhio del fisico che con l'occhio del matematico (seppure non è la via più costruttiva, è senz'altro quella che ci consente di svolgere buona parte di quello che ci interessa nella maniera più succinta possibile).

VI.2.1 Introduzione

**Sistemi
fisici lineari**

Nel capitolo sull'analisi di Fourier abbiamo introdotto le funzioni di Green per risolvere il problema generale

$$P(D)T = f$$

dove P è un polinomio nelle derivate (parziali od ordinarie). La soluzione del problema, T , è la risposta del sistema governato dall'equazione differenziale di sopra, alla sollecitazione esterna f . Si pensi ad esempio ad un pendolo nell'approssimazione di piccole oscillazioni: T sarà la legge oraria del pendolo forzato dalla f .

Quello che caratterizza un sistema regolato da un'equazione del tipo $P(D)T = f$ è la linearità. In questa sezione ci occuperemo in generale di **sistemi fisici lineari**, il cui comportamento non sia necessariamente controllato da un'equazione differenziale lineare.

Ci interessa studiare la risposta, o **output**, che il sistema fornisce di fronte a una data sollecitazione, o **input**. Nel seguito intenderemo di avere a che fare con sistemi che evolvono nel tempo, perciò l'input e l'output saranno funzioni dipendenti dal tempo.

Ipotesi di lavoro

Supponiamo di non conoscere nulla sul sistema che esaminiamo, salvo le seguenti ipotesi

- (i) l'output è una funzione lineare dell'input, cioè vale il **principio di sovrapposizione**;
- (ii) l'output dipende in modo fisico dall'input, cioè **causalmente**;
- (iii) le proprietà interne del sistema sono indipendenti dal tempo, cioè si richiede che, per il problema in esame, il tempo sia omogeneo: dare l'input oggi o domani non varia l'output che si ottiene oggi rispetto a quello che si otterrà domani.

Le tre ipotesi sono molto ragionevoli e allo stesso tempo assai poco restrittive. L'ipotesi più forte (più difficile da verificare) resta senza dubbio la (i) che è poi quella che ci consentirà di raggiungere la maggior parte delle conclusioni. In effetti, nessun sistema è rigorosamente lineare, ma, vicino alle condizioni di equilibrio molti sistemi fisici assumono un comportamento lineare. È il caso, per esempio, della circuiteria elettrica (passiva).

Anche l'ipotesi di omogeneità del tempo non è banalmente verificata: si pensi ad un materiale che viene riscaldato, le sue proprietà cambiano nel tempo in modo tipico. Così anche le resistenze (che abbiamo citato prima come elementi lineari) sono ben lungi dal verificare il principio di sovrapposizione se la temperatura cambia in modo considerevole.

L'ipotesi di causalità sembra, d'altra parte, la più solida. Fisicamente, non ha alcun senso che la risposta possa dipendere dal futuro della sollecitazione. In termini spazio-temporali, il vincolo di causalità è assicurato dal limite alla velocità di propagazione dei segnali dato dalla velocità della luce.

Traduzione
matematica
euristica
delle ipotesi

Cominciamo con l'ipotesi di linearità. Denotiamo con $a(t)$ l'input e con $b(t)$ l'output. Consideriamo, per un momento, un input dato da un impulso all'istante t' . La linearità implica che $b(t)$ deve essere proporzionale ad $a(t')$: cioè $b(t) = G(t, t') a(t')$. Per un input qualsiasi, basta scomporre in impulsi e poi sommare gli effetti:

$$b(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, t') a(t') dt'$$

dove per ora la nostra è solo una scrittura formale.

L'ipotesi di causalità restringe l'intervallo di integrazione a $(-\infty, t)$, mentre l'ipotesi di omogeneità del tempo implica che la costante di proporzionalità $G(t, t')$ tra $b(t)$ e $a(t')$ vada a dipendere solo dalla differenza di t e t' .

In definitiva, troviamo

$$b(t) = \int_{-\infty}^t G(t - t') a(t') dt'$$

che si può anche scrivere come

$$b(t) = \int_0^{+\infty} G(\tau) a(t - \tau) d\tau = G * a$$

dove la funzione $G(t)$ è supposta nulla per $t < 0$, come richiede l'ipotesi di causalità.

Abbiamo detto che questa è la traduzione matematica del nostro problema. Bisogna però notare che di matematico c'è ben poco. In realtà, quello che abbiamo fatto è supporre che ogni problema lineare ammetta la funzione di Green $G(t, t')$.

Traduzione
matematica
rigorosa
delle ipotesi

Se formuliamo il problema in uno spazio distribuzionale quale $\mathcal{S}'$, la dimostrazione della formula di sopra segue - in modo del tutto rigoroso - dall'applicazione della trasformata di Fourier. Infatti, l'omogeneità del tempo unita alla linearità, ci consente di usare il risultato ottenuto alla fine del capitolo sull'analisi di Fourier: l'operatore lineare che connette l'input all'output, diciamo L tale che $b = La$, in trasformata, è un operatore di moltiplicazione, cioè

$$\hat{b}(\omega) = \hat{G}(\omega) \hat{a}(\omega)$$

da cui, in antitrasformata,

$$b(t) = (G * a)(t)$$

Facciamo intervenire, ora, l'ipotesi di causalità. Abbiamo

$$b(t) = \langle G_{t'}, a(t - t') \rangle$$

Consideriamo adesso un qualsiasi input $a \in \mathcal{D}$ con $\text{supp } a \subset (0, +\infty)$. Per ogni istante inferiore

a 0, la b dipende linearmente da una funzione nulla. Questo comporta

$$0 = b(0) = \langle G_{t'}, a(-t') \rangle = \langle G_{t'}, \tilde{\varphi}(t') \rangle$$

Cioè, ogni funzione a supporto in $(-\infty, 0)$ appartiene al dominio di nullità di G . Ne deriva che G ha supporto in $(0, +\infty)$.

Proposizione VI.15 Ogni sistema lineare, omogeneo e causale ammette una funzione di Green a supporto in $(0, +\infty)$.

Vediamo alcuni esempi

Esempio VI.1 Il sistema *finestra aperta* ha come funzione di Green la delta di Dirac:

$$b(t) = a(t) \Rightarrow b(t) = \langle \delta(t'), a(t-t') \rangle = (\delta_0 * a)(t)$$

■

Esempio VI.2 Il sistema *derivatore* ha come funzione di Green la derivata della delta di Dirac.

$$b(t) = \frac{d}{dt}a(t) \Rightarrow b(t) = \langle \delta'(t'), a(t-t') \rangle = (\delta'_0 * a)(t)$$

■

VI.2.2 Teorema di Titchmarsh

In questa sottosezione esporremo un risultato molto importante: il teorema di Titchmarsh. Purtroppo però non lo dimostreremo.

Introduzione Le ipotesi fisiche stabilite nella proposizione di prima (con l'aggiunta di considerare ingressi e risposte nello spazio $\mathcal{S}'$), stabiliscono che G , la funzione di Green del sistema è una distribuzione temperata a supporto in $(0, +\infty)$. Per discutere il teorema di Titchmarsh dobbiamo rafforzare le ipotesi **matematiche** (non quelle fisiche, beninteso) e richiedere che $G \in L^2(0, +\infty)$. Richiediamo pure che G sia reale (come, in una trattazione fisica, è del tutto ragionevole supporre).

**Condizioni
equivalenti alle
tre ipotesi fisiche**

Le condizioni tracciate sono dunque

$$(*) \quad \begin{cases} b(t) = (G * a)(t) \\ G(t) = 0, t < 0 \\ G(t) \in \mathbb{R}, G \in L^2(0, +\infty) \end{cases}$$

Il teorema di Titchmarsh consente di determinare condizioni equivalenti a (*).

Tanto per cominciare, passiamo in trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned} \hat{G}(\omega) &= L^2 - \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N G(t) e^{i\omega t} dt \\ \hat{G}^*(\omega) &= L^2 - \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N G(t) e^{-i\omega t} dt = \hat{G}(-\omega) \end{aligned}$$

Posto $\hat{G}' \doteq \text{Re } \hat{G}$ e $\hat{G}'' \doteq \text{Im } \hat{G}$, abbiamo che $\hat{G}'$ è una funzione pari, mentre $\hat{G}''$ è dispari. Questo risultato è molto importante perché ci consente di studiare le due funzioni solo per $\omega > 0$, cioè per **frequenze positive**: le frequenze negative non sono misurabili, perché non fisiche, ebbene, dal punto di vista matematico, non hanno alcuna rilevanza.

Riguardiamo adesso $\hat{G}(\omega)$ come funzione sul piano complesso, cioè consentiamo ad ω di variare in $\mathbb{C}$. Abbiamo

$$\hat{G}^*(\omega) = L^2 - \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N G(t) e^{-i\omega' t} e^{-\omega'' t} dt = L^2 - \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N G(t) e^{-i(\omega' - i\omega'') t} dt = \hat{G}(-\omega^*)$$

**Olo-morfia di
 $\hat{G}$ in $\omega'' > 0$**

Proviamo adesso che $\hat{G}$ è olomorfa nel semipiano $\omega'' > 0$. Per ogni N andiamo a calcolare le derivate parziali nella variabile reale e in quella immaginaria di $\hat{G}_N$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \omega'} \hat{G}_N(\omega) &= \frac{\partial}{\partial \omega'} \int_0^N G(t) e^{i\omega' t} e^{-\omega'' t} dt \\ \frac{\partial}{\partial \omega''} \hat{G}_N(\omega) &= \frac{\partial}{\partial \omega''} \int_0^N G(t) e^{i\omega' t} e^{-\omega'' t} dt \end{aligned}$$

Volendo applicare il teorema di derivabilità sotto segno, poniamo $\omega'' > \varepsilon > 0$, abbiamo

$$|G(t)e^{i\omega t}| \leq |G(t)e^{-\varepsilon t}|$$

quest'ultima funzione, come prodotto di due L^2 , è L^1 , perciò la funzione è dominata. Dobbiamo vedere che sono dominate anche le derivate parziali. Si procede nel medesimo modo.

$$\begin{aligned} |itG(t)e^{i\omega' t}e^{-\omega'' t}| &\leq |G(t)te^{-\omega'' t}| \leq |G(t)te^{-\varepsilon t}| \\ |-tG(t)e^{i\omega' t}e^{-\omega'' t}| &\leq |G(t)te^{-\omega'' t}| \leq |G(t)te^{-\varepsilon t}| \end{aligned}$$

e la tesi segue ancora dalla disuguaglianza di Hölder e dal fatto che $te^{-\varepsilon t}$ è una funzione L^2 . Dunque,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \omega'} \hat{G}_N(\omega) &= it \int_0^N G(t)e^{i\omega t} dt \\ \frac{\partial}{\partial \omega''} \hat{G}_N(\omega) &= -t \int_0^N G(t)e^{i\omega t} dt \end{aligned}$$

Siccome la derivazione è chiusa, passando al limite L^2

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \omega'} \hat{G}(\omega) &= it\hat{G}(\omega) \\ \frac{\partial}{\partial \omega''} \hat{G}(\omega) &= -t\hat{G}(\omega) \end{aligned}$$

Si noti come deve sempre essere $\omega'' > 0$, altrimenti la tesi non è valida. In definitiva,

Proposizione VI.16 *L'ipotesi (*) implica che $\hat{G}$ è una funzione appartenente a $L^2(\mathbb{R})$, olomorfa nel semipiano $\text{Im } \omega > 0$.*

**Inversione della
proposizione
e teorema di
Titchmarsh**

La proposizione non s'inverte, basta considerare il controesempio

$$\hat{G}(\omega) = \frac{e^{-i\omega}}{1-i\omega}$$

che è olomorfa per $\omega'' > -1$ ma non è causale avendo supporto in $(-1, +\infty)$.

Se si aggiunge alle ipotesi $\hat{G} \in L^2(\mathbb{R})$ e $\hat{G}$ olomorfa in $\omega'' > 0$, il fatto che

$$\sup_{\omega'' > 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{G}(\omega' + i\omega'')|^2 d\omega' < +\infty$$

troviamo un secondo gruppo di ipotesi, che chiameremo (**), che equivalgono a (*). Si ha di più (*) e (**) equivalgono a (***) : $\hat{G}$ appartiene a L^2 e per ogni $\omega \in \mathbb{R}$

$$\hat{G}(\omega) = \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{G}(\nu)}{\nu - \omega} d\nu.$$

Per dare un'idea di quest'ultimo fatto, supponiamo che $\hat{G}(\nu)$ sia olomorfa anche sull'asse reale. Chiamiamo

$$\hat{F}(\nu) \doteq \frac{\hat{G}(\nu)}{\nu - \omega},$$

allora $\hat{F}$ è olomorfa in $\text{Im } \nu \geq 0$ privato del punto $\nu = \omega$. Applicando la teoria dei residui, chiudendo nel semipiano superiore e scavalcando il punto ω con una semicirconferenza di raggio $\varepsilon \rightarrow 0$, troviamo proprio la (**), se ammettiamo che il contributo del cerchio grande vada correttamente a 0, come ci si aspetta guardando le ipotesi (**). La (***) può anche essere riscritta come segue

$$\begin{aligned} \hat{G}'(\omega) &= \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{G}''(\nu)}{\nu - \omega} d\nu \\ \hat{G}''(\omega) &= -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{G}'(\nu)}{\nu - \omega} d\nu \end{aligned}$$

si dice anche che $\hat{G}'$ e $-\hat{G}''$ sono la **trasformata di Hilbert** l'una dell'altra.

Abbiamo così una parzialissima dimostrazione del

Teorema VI.17
(di Titchmarsh)

Sono fatti equivalenti

$$[(*)]$$

(*) $G(t) = 0$ per $t < 0$, $G(t)$ reale e $G(t) \in L^2$;

(**) $\hat{G}(\omega') \in L^2(\mathbb{R})$; $\hat{G}(\omega')$ è il limite per $\omega'' \rightarrow 0$ di una funzione $\hat{G}(\omega' + i\omega'')$ olomorfa in $\omega'' > 0$ e tale che

$$\sup_{\omega'' > 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{G}(\omega' + i\omega'')| d\omega' < +\infty;$$

(***) $\hat{G}'$ e $-\hat{G}''$ sono funzioni $L^2(\mathbb{R})$ e sono le trasformate di Hilbert l'una dell'altra.

VI.2.3 Le relazioni di Kramers e Kronig

Le relazioni che legano $\hat{G}'$ e $\hat{G}''$ furono ottenute per la prima volta da Kramers e Kronig. Esse sono note come **relazioni di dispersione** e, come abbiamo visto, sono una formulazione equivalente dei principi di sovrapposizione, omogeneità e causalità.

Consideriamo, come esempio di applicazione, un mezzo dielettrico sottoposto a un'onda elettromagnetica. Vogliamo studiare la risposta del mezzo alla sollecitazione. Come risposta del sistema, scegliamo di misurare la polarizzazione. Allora $a(t) = E(t)$ e $b(t) = P(t)$. Per quanto visto abbiamo, posto $\hat{G}(\omega) \doteq \chi(\omega)$, abbiamo

$$\hat{P}(\omega) = \chi(\omega) \hat{E}(\omega).$$

L'uso tipico delle relazioni di dispersione è dato dal fatto esse collegano due quantità fisicamente rilevanti e misurabili. Infatti, nell'esempio del mezzo dielettrico, $\chi'(\omega)$ è legato all'indice di rifrazione del mezzo, mentre $\chi''(\omega)$ è proporzionale all'indice di assorbimento.

Infatti, come noto dal corso di Fisica Generale II, si ha

$$n \approx \sqrt{\varepsilon\mu} \approx \sqrt{\varepsilon}$$

dove ε è la permeabilità dielettrica del mezzo:

$$\begin{aligned}\varepsilon' &= 1 + 4\pi\chi' \\ \varepsilon'' &= 4\pi\chi''\end{aligned}$$

quindi,

$$\begin{aligned}n'^2 - n''^2 &\approx \varepsilon' \\ 2n'n'' &\approx \varepsilon''\end{aligned}$$

Siccome il coefficiente di assorbimento n'' è generalmente piccolo, abbiamo

$$\begin{aligned}n' &\approx \sqrt{\varepsilon'} \\ n'' &\approx \frac{\varepsilon''}{2n'}\end{aligned}$$

L'andamento di un'onda piana, che nel vuoto avesse una lunghezza d'onda λ_0 , nel mezzo è del tipo $\exp(ik_0(x - vt))$, dove $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ e

$$v = \frac{c}{n} \approx c \frac{n' - in''}{n'^2 + n''^2} \approx \frac{c}{n'} - i \frac{cn''}{n'^2}$$

sicché, l'andamento diviene

$$\exp(ik_0x) \exp\left(-ik_0 \frac{c}{n'}\right) \exp(-\alpha n'')$$

il che mostra la misurabilità di n' e n'' e perciò di χ' e χ'' .

Una serie di osservazioni.

Osservazione VI.3

Tanto per cominciare, abbiamo trovato sopra che

$$\chi'(\omega) = \chi'(-\omega); \quad \chi''(\omega) = -\chi''(-\omega);$$

dunque, le relazioni di Kramers e Kronig divengono

$$\chi'(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_0^{+\infty} \frac{\chi''(\nu)}{\nu - \omega} d\nu + \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^0 \frac{\chi''(\nu)}{\nu - \omega} d\nu =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} P \int_0^{+\infty} \frac{\chi''(\nu)}{\nu - \omega} d\nu + \frac{1}{\pi} P \int_{+\infty}^0 \frac{-\chi''(-\nu)}{-\nu - \omega} d\nu = \\
&= \frac{1}{\pi} P \int_0^{+\infty} \frac{\chi''(\nu)}{\nu - \omega} d\nu + \frac{1}{\pi} P \int_0^{+\infty} \frac{\chi''(\nu)}{\nu + \omega} d\nu = \\
&= \frac{2}{\pi} P \int_0^{+\infty} \frac{\nu \chi''(\nu)}{\nu^2 - \omega^2} d\nu
\end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\chi''(\omega) = -\frac{2}{\pi} \omega P \int_0^{+\infty} \frac{\chi'(\nu)}{\nu^2 - \omega^2} d\nu$$

relazioni che hanno il vantaggio di contenere solo integrazioni a frequenze positive (cioè fisiche).

■

Osservazione VI.4 Un mezzo trasparente in qualche zona dello spettro, deve necessariamente essere assorbente in altre zone: cioè $\chi(\omega)$ non può essere puramente reale.

■

Osservazione VI.5 In vicinanza di una frequenza di assorbimento, la curva $\chi''(\omega)$ presenta tipicamente una forma piccata. Andando allora a calcolare $\chi'(\omega)$ troviamo che per ω inferiori alla frequenza di assorbimento, lontano dal picco l'integrale - e perciò χ' - è positivo, viceversa per ω oltre il picco, χ' diventa negativo. Si ha perciò l'andamento usuale della **dispersione anomala**.

■

Osservazione VI.6 Preso ω in una zona di trasparenza, possiamo togliere la parte principale alla formula trovata nella prima osservazione. Amesso che χ'' sia positivo (come risulta dal fatto che esso è proporzionale all'energia dissipata), si ha, derivando che

$$\frac{d\chi'}{d\omega} > 0$$

■ cioè nelle regioni di trasparenza, l'indice di rifrazione cresce con la frequenza.

Osservazione VI.7 Sempre nelle regioni di trasparenza, ragionando in modo analogo a prima, troviamo

$$\frac{d}{d\omega} (\omega^2 \chi') > 0$$

essendo $\chi' = (n'^2 - 1)/4\pi$ abbiamo

$$\frac{d}{d\omega} (\omega^2 n'^2) - 2\omega > 0$$

$$\omega n' \frac{dn'}{d\omega} + n'^2 - 1 > 0$$

$$n' + \omega \frac{dn'}{d\omega} > \frac{1}{n'}$$

Se v_g è la velocità di gruppo dell'onda che si propaga nel mezzo, abbiamo

$$\frac{1}{v_g} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c} \frac{d}{d\omega} (n'(\omega) \omega) = \frac{1}{c} \left[n' + \omega \frac{dn'}{d\omega} \right]$$

da cui

$$v_g < cn'$$

In modo analogo, la $d\chi'/d\omega > 0$ dà

$$\frac{dn'}{d\omega} > \frac{1}{n'}$$

perciò

$$\frac{1}{v_g} > \frac{1}{c} \left[n' + \frac{\omega}{n'} \right]$$

sicché

$$v_g < \frac{c}{n'}$$

Le due disuguaglianze trovate mostrano che, sia che $n' < 1$, sia che $n' > 1$, vale

$$v_g \leq c$$

- che è espressione del principio di causalità.

Osservazione VI.8 Si supponga di avere una zona di trasparenza compresa tra due frequenze ω_1 e ω_2 . Preso, se possibile, $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$, si ha

$$\chi'(\omega) \approx -\frac{2}{\pi} \int_0^{\omega_1} \nu \chi''(\nu) d\nu + \frac{2}{\pi} \int_{\omega_2}^{\infty} \chi''(\nu) \frac{d\nu}{\nu^2} = A - \frac{B}{\omega^2}$$

- con A e B positive (ancora, dispersione normale).

Osservazione VI.9 Se, infine, ω è molto maggiore di tutte le frequenze di assorbimento, si ottiene

$$\chi' \approx -\frac{C}{\omega^2}$$

da cui

$$\varepsilon' \approx 1 - \frac{4\pi C}{\omega^2}$$

- che è l'andamento che si trova sperimentalmente nei plasmi.

**Presenza di
singolarità
nella $\chi(\omega)$**

Vogliamo adesso vedere come si modificano i ragionamenti del teorema di Titchmarsh nel caso in cui $\chi(\omega)$ venga a presentare una singolarità. Lo facciamo andando a considerare un esempio dello stesso tenore di quelli visti finora. Consideriamo un mezzo conduttore. Quando questo è sottoposto a un campo elettrico E , esso viene percorso da una densità di corrente totale pari a

$$J_{\text{tot}} = \sigma E + \frac{dP}{dt} \doteq \frac{dP_{\text{eff}}}{dt}$$

Ne viene

$$\sigma \hat{E}(\omega) - i\omega \hat{P}(\omega) = -i\omega \hat{P}_{\text{eff}}$$

posto

$$\hat{P}_{\text{eff}} = \tilde{\chi}(\omega) \hat{E}(\omega)$$

abbiamo

$$\tilde{\chi}(\omega) = \chi(\omega) + i\frac{\sigma}{\omega}$$

Al posto di $\chi(\omega)$ possiamo usare la $\tilde{\chi}(\omega)$ (fatto fisicamente notevole, visto che le misure che si fanno non distinguono certo la corrente di polarizzazione dalla corrente di conduzione), tuttavia $\tilde{\chi}(\omega)$ presenta una singolarità nell'origine a differenza di prima. Perciò per ottenere le relazioni di dispersione bisogna modificare il percorso di integrazione, andando a saltare con una semicirconferenza anche l'origine.

Otteniamo

$$P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\chi}}{\nu - \omega} d\nu = \pi i \frac{i\sigma}{-\omega} + \pi i \tilde{\chi}(\omega) = \frac{\pi\sigma}{\omega} + i\pi \tilde{\chi}(\omega)$$

che è l'analoga della relazione trovata nell'ambito del teorema di Titchmarsh.

**Modello
dell'elettrone
legato
elasticamente**

Giusto per completezza, vediamo un modello microscopico semplice per spiegare gli effetti della polarizzazione di un mezzo dielettrico che noi abbiamo trattato finora dal punto di vista macroscopico.

Il modello che usiamo è quello dell'elettrone legato elasticamente. Si suppone che ogni elettrone (massa m e carica e) sia legato tramite una forza elastica al suo nucleo controbilanciata da uno smorzamento comprendente i vari effetti di irraggiamento ed urto. Se $x(t)$ è lo spostamento dalla posizione di equilibrio dell'elettrone, abbiamo

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = eE(t)$$

Se N è il numero di elettroni contenuti nell'unità di volume, la polarizzazione del mezzo vale

$$P(t) = Nex(t)$$

Eseguita la trasformata di Fourier, abbiamo

$$\hat{P} = \chi(\omega) \hat{E}(\omega) = Ne\hat{x}(\omega)$$

tenendo conto del fatto che

$$-m\omega^2 - i\omega\beta + k\hat{x} = e\hat{E}$$

si ha

$$\chi(\omega) = \frac{Ne^2}{k - m\omega^2 - i\omega\beta} = \frac{Ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

dove abbiamo definito $\omega_0^2 \doteq k/m$ (frequenza propria dell'elettrone) e $\gamma \doteq \beta/m$.

Si noti come la forma di $\chi(\omega)$ ha le caratteristiche discusse nelle osservazioni precedenti e presenta una zona di assorbimento attorno a ω_0 . Inoltre, il modello posto è causale, visto che $\chi(\omega)$ ha due poli nel semipiano inferiore. I poli si hanno infatti per i valori di ω che risolvono la seguente equazione

$$\omega^2 + i\gamma\omega - \omega_0^2 = 0$$

il cui discriminante vale $\Delta = 4\omega_0^2 - \gamma^2$. Nel caso in cui $\Delta > 0$, poniamo $a^2 \doteq \Delta$ e troviamo che i poli sono situati in

$$\omega_{1,2} = \pm a^2 - i\frac{\gamma}{2}$$

se $\Delta < 0$, poniamo $-\alpha^2 \doteq \Delta$, allora

$$\omega_{1,2} = -i\left(\frac{\gamma}{2} \pm \alpha\right)$$

Se invece $\Delta = 0$, abbiamo un polo doppio in $-i\gamma/2$. Si verifica in un attimo che le funzioni di Green associate sono tutte esponenzialmente decrescenti e che solo quella a $\Delta > 0$ ha andamento oscillante.

Infine, nel caso particolare in cui l'elettrone non sia legato, $\omega_0 = 0$, troviamo per $\chi(\omega)$ l'andamento ricavato nel caso dei materiali conduttori, dove, appunto, l'elettrone non è legato al nucleo.

Un qualsiasi modello per la polarizzazione di un materiale deve tornare a fornire i risultati della teoria di Kramers e Kronig, visto che essi seguono da ipotesi del tutto generali di causalità e linearità.

VI.3 Autovalori e autovettori

In questa sezione non affronteremo la teoria spettrale degli operatori rimandandola a corsi superiori (Meccanica Quantistica, per esempio), ma ci limiteremo a vedere una serie di casi particolari per farci un'idea della complessità del soggetto.

VI.3.1 Autovalori e autovettori in dimensione finita

Autovalori e autovettori: ripasso delle nozioni generali

Presentiamo, inizialmente, una rassegna delle nozioni note al lettore dal corso di Geometria (o Algebra Lineare).

Consideriamo un $\mathbb{C}$ -spazio di prodotto scalare in dimensione finita $n \in \mathbb{N}$. Se consideriamo un operatore lineare T su tale spazio, si dice che $\lambda \in \mathbb{C}$ è un **autovalore** di T se esiste un vettore $x \neq 0$ talché

$$Tx = \lambda x$$

in questo caso si dice anche che x è un **autovettore** di T all'autovalore λ . L'insieme degli autovettori di T a un dato autovalore forma, banalmente, un sottospazio che denoteremo con $E(\lambda, T)$ oppure con $E(\lambda)$ quando questo non dia luogo ad equivoci. $E(\lambda, T)$ si dice **autospatio** di T all'autovalore λ . La lettera E per designare un autospatio discende dal prefisso tedesco *eigen* che sostituisce il nostro *auto*.

Notiamo subito che

$$E(\lambda, T) = \ker(T - \lambda\mathbb{I}),$$

allora λ è autovalore di T se e solo se l'applicazione $T - \lambda\mathbb{I}$ ha kernel non banale, cioè se e solo se

$$\det(T - \lambda\mathbb{I}) = 0$$

L'equazione di sopra si dice **secolare**. Siccome $\det(T - \lambda\mathbb{I})$ è un polinomio, in λ , a coefficienti complessi di cui cerchiamo le radici nel campo $\mathbb{C}$, abbiamo che ogni operatore lineare ammette almeno un autovalore e perciò un autovettore.

Operatori diagonalizzabili

Si chiama **degenerazione** (geometrica) dell'autovalore λ la dimensione di $E(\lambda, T)$. Un operatore si dice **diagonalizzabile** quando è simile a un operatore che ammette una base di

autovettori, cioè quando esiste un automorfismo V per cui

$$V^{-1}TV = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ovviamente, due endomorfismi simili ammettono gli stessi autovalori con le stesse degenerazioni. Infatti, se $A = V^{-1}BV$ e x è un autovettore all'autovalore a di A , allora

$$Ax = V^{-1}BVx = ax \implies B(Vx) = a(Vx)$$

siccome V è iniettivo, essendo $x \neq 0$, vale $Vx \neq 0$. Da questo si ricava pure che

$$E(a, B) = V(E(a, A))$$

da cui, visto che V è un automorfismo,

$$\dim E(a, B) = \dim E(a, A).$$

Detto questo, l'operatore T di cui sopra, ammette come autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ciascuno con degenerazione pari al numero di volte in cui compare.

Ricordiamo che vale il seguente

Teorema VI.18
(di diagonalizzazione)

T , operatore lineare su uno spazio lineare n -dimensionale, è diagonalizzabile se e solo se esso l'equazione secolare ammette n radici λ_i tali che la loro molteplicità algebrica eguagli la loro degenerazione (come autovalori di T).

Osservazione VI.10

Osserviamo che se T è un operatore su un $\mathbb{C}$ -spazio lineare di dimensione n , allora ammette sempre n radici (senza contare le ripetizioni) in virtù del teorema fondamentale del calcolo.

Operatori triangolari

Sul campo $\mathbb{C}$ ogni operatore A è comunque sempre **triangolabile**. Ciò significa che esiste sempre un automorfismo V tale che

$$V^{-1}AV = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Consideriamo un operatore A e sia T un operatore triangolare simile ad A . Se cerchiamo gli autovalori di A , ci basta trovare quelli di T . Allora, per induzione, è facile vedere che

$$\det(T - \lambda \mathbb{I}) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda)^n$$

perciò gli autovalori di A sono gli elementi sulla diagonale della matrice associata a T . Siccome la traccia e il determinante si conservano per similitudine, abbiamo

$$\text{Tr } A = \text{Tr } T = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

che è, a parte il segno, il coefficiente di grado $n-1$ del polinomio secolare, e

$$\det A = \det T = \prod_{i=1}^n \lambda_i^n$$

che è il termine noto del polinomio secolare di A .

Diagonalizzazione e prodotto scalare

Finora non abbiamo usato il fatto che il nostro spazio è uno spazio di prodotto scalare. Evidentemente, saranno interessanti quegli operatori che ammettono basi ortonormali di autovettori, cioè tali che si diagonalizzano tramite operatori unitari. Ebbene, abbiamo

Lemma VI.19

Se T è normale e λ è un autovalore di T , allora anche λ^ è un autovalore di $T^\dagger$.*

Dimostrazione

Sia $0 \neq x \in E(\lambda, T)$, abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= \|Tx - \lambda x\|^2 = ((T - \lambda \mathbb{I})x, (T - \lambda \mathbb{I})x) = ((T^\dagger - \lambda^* \mathbb{I})(T - \lambda \mathbb{I})x, x) = \\ &= ((T - \lambda \mathbb{I})(T^\dagger - \lambda^* \mathbb{I})x, x) = ((T - \lambda \mathbb{I})(T^\dagger - \lambda^* \mathbb{I})x, x) = \end{aligned}$$

$$= ((T^\dagger - \lambda^* \mathbb{I})x, (T^\dagger - \lambda^* \mathbb{I})x) = \|T^\dagger x - \lambda^* x\|^2$$

(c.v.d.) da cui $T^\dagger x = \lambda^* x$.

**Teorema
VI.20 (diag-
onalizzazione
unitaria)**

In uno spazio di prodotto scalare n -dimensionale, condizione necessaria e sufficiente affinché un operatore sia diagonalizzabile unitariamente è che sia normale, cioè che

$$TT^\dagger = T^\dagger T.$$

Dimostrazione

Sia T un operatore normale. E esso, come dimostrato sopra, ammette almeno un autovalore λ_1 . Allora esiste un autovettore x_1 appartenente a $E(\lambda_1, T)$. Sia allora

$$V_2 = (\text{Span } \langle x_1 \rangle)^\perp.$$

Preso $y \in V_2$, abbiamo

$$(x_1, Ty) = (T^\dagger x_1, y) = (\lambda_1^* x_1, y) = \lambda_1^* (x_1, y) = 0$$

$$(x_1, T^\dagger y) = (Tx_1, y) = (\lambda_1 x_1, y) = \lambda_1 (x_1, y) = 0$$

Perciò $T(V_2) \subset V_2$ e $T^\dagger(V_2) \subset V_2$, ossia V_2 è T e $T^\dagger$ invariante. Scelta una qualunque base di V_2 , aggiunto il vettore x , abbiamo che in tale base l'operatore T diviene

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & T|_{V_2} \end{array} \right)$$

Se consideriamo le restrizioni di T e $T^\dagger$ allo spazio V_2 , abbiamo che

$$T|_{V_2} T|_{V_2}^\dagger = T|_{V_2}^\dagger T|_{V_2}$$

perciò $T|_{V_2}$ è normale. Possiamo allora ripetere l'intero ragionamento su V_2 . Siccome lavoriamo solo sulla base di V_2 , alla fine dell'induzione avremo diagonalizzato T .

Viceversa, sia T diagonalizzabile unitariamente. Allora esiste $V \in U(n, \mathbb{C})$ (con questo simbolo intendiamo l'insieme delle applicazioni unitarie sul nostro spazio di prodotto scalare) tale che

$$V^\dagger T V = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

allora

$$V^\dagger T^\dagger V = \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \right)^\dagger = \begin{pmatrix} \lambda_1^* & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^* \end{pmatrix}$$

perciò

$$\begin{aligned} TT^\dagger &= (VV^\dagger) T (VV^\dagger)^\dagger T^\dagger (VV^\dagger)^\dagger = V (V^\dagger T V) (V^\dagger T^\dagger V) V^\dagger = \\ &= V (V^\dagger T^\dagger V) (V^\dagger T V) V^\dagger = T^\dagger T. \end{aligned}$$

(c.v.d.)

**Decomposizione
spettrale**

Allora, se T è normale, i suoi autospazi sono ortogonali e la loro somma diretta dà l'intero spazio. Su ogni spazio T è pari a λ_i volte l'identità, cioè se P_i è il proiettore ortogonale su $E(\lambda_i, T)$ abbiamo che

$$T = \sum_{i=1}^r \lambda_i P_i$$

che si dice **decomposizione spettrale** di T . In dimensione infinita, questa somma diviene un integrale, noi non ce ne occuperemo.

VI.3.2 Esempi in dimensione infinita

Per quello che riguarda la dimensione infinita ci limitiamo a una serie di esempi, comunque interessanti. Fissiamo $\mathcal{H}$ il nostro $\mathbb{C}$ -spazio di Hilbert.

**Esempio VI.3
(Proiettori
ortogonali)**

Sia $\mathcal{H} = H_1 \oplus H_2$ e sia P il proiettore su H_1 . Allora

$$\begin{aligned} P|_{H_1} &= \mathbb{I}|_{H_1} \\ P|_{H_2} &= 0 \end{aligned}$$

ne viene che P ammette come autovalori 1 e 0, il primo ammette come autospazio H_1 , il secondo, H_2 .

Esempio VI.4
(Operatore di posizione)

Consideriamo l'operatore di moltiplicazione per la variabile indipendente x . Su $L^2(\mathbb{R})$ esso coincide con l'operatore posizione ed è illimitato. Su $L^2(0, a)$ esso è invece limitato. In ogni caso è autoaggiunto. In dimensione finita, questo implicherebbe la diagonalizzazione di ciascuno dei due. In dimensione infinita non è così. Consideriamo l'equazione agli autovalori, con $\lambda \in \mathbb{C}$ e $f(x) \neq 0$ (q.o.)

$$M_x f = \lambda f$$

se e solo se, quasi ovunque,

$$(x - \lambda) f(x) = 0$$

se e solo se $f(x) = 0$ quasi ovunque. Ne viene che M_x non ammette autovalori (e perciò autovettori) in L^2 .

D'altronde, se consideriamo l'operatore x in $\mathcal{S}'$, abbiamo

$$xT = \lambda T \iff (x - \lambda)T = 0$$

perciò, come dimostrato nel capitolo V,

$$T = c\delta(x - \lambda).$$

Gli autovettori appartenenti ad $\mathcal{S}'$ di operatori definiti in $L^2(\mathbb{R})$ si dicono **autovettori generalizzati**.

Esempio VI.5
(Traslazione)

Consideriamo l'operatore di traslazione in $L^2(\mathbb{R})$,

$$U_a f(x) = f(x - a)$$

Come sappiamo, si tratta di un operatore unitario che, in trasformata di Fourier, è un operatore di moltiplicazione associato alla funzione e^{iax} , perciò non ammette autovalori (ammettendo come autovettori solo funzioni non nulle in un insieme a misura nulla). Vogliamo dimostrarlo senza far uso della trasformata di Fourier. Ci occorre il lemma che segue questo esempio.

Lemma VI.21

Se U è un operatore unitario e λ è un autovalore di U , allora $|\lambda| = 1$.

Dimostrazione

Sia $x \neq 0$ autovettore di U all'autovalore λ , allora $Ux = \lambda x$. D'altra parte, siccome U è isometrico,

$$|\lambda| \|x\| = \|Ux\| = \|x\|$$

(c.v.d.) siccome $x \neq 0$, $|\lambda| = 1$.

Osservazione VI.11

Tornando all'esempio sull'operatore di traslazione, abbiamo che se f è autovettore di U_a , allora

$$|f(x - a)| = |f(x)|$$

perciò $|f|$ è una funzione a -periodica positiva. Dunque, essendo $L^2(\mathbb{R})$, $|f| = 0$ quasi ovunque.

Esempio VI.6

Sia dato un operatore T che ammetta un s.o.n.c. di autovettori $\{e_n\}$. Vale allora

$$Te_n = c_n e_n$$

dove $\{c_n\} \subset \mathbb{C}$. Vediamo in quale relazione sta la successione $\{c_n\}$ con la norma di T . Assumiamo come dominio di T l'insieme delle combinazioni lineari finite dei vettori e_n . Se tale norma è finita, vorrà dire che T si estenderà per continuità su tutto lo spazio $\mathcal{H}$. Abbiamo

$$\|T\|^2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|^2}{\|x\|^2} = \sup_{x \neq 0} \frac{\sum_{n=0}^N |x_n|^2 |c_n|^2}{\sum_{n=0}^N |x_n|^2} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |c_n|^2$$

Ammettiamo che tale sup sia finito e chiamiamolo $|c|^2$. È facile vedere che $\|T\| = |c|$. Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste ν tale che

$$|c_\nu|^2 - |c|^2 < \varepsilon$$

perciò preso il vettore e_ν abbiamo

$$\|Te_\nu\|^2 = |c_\nu|^2$$

da cui la tesi.

Se invece il sup è infinito, si può analogamente far vedere che $\|Tx\|$ può essere fatta diventare grande quanto si vuole e perciò T è un operatore illimitato. In definitiva,

$$\|T\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |c_n|.$$

Detto questo, vediamo se è possibile scrivere

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n$$

dove P_k è il proiettore sullo spazio $\text{Span}\langle e_k \rangle$. Mettiamoci nell'ipotesi in cui il sup dei $|c_k|$ è reale. Allora T è continuo. Vediamo che l'eguaglianza di sopra è vera in senso forte.

$$\begin{aligned} \left\| Tx - \sum_{n=0}^N c_n P_n x \right\|^2 &= \left\| T \sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n - \sum_{n=0}^N c_n x_n e_n \right\|^2 = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} c_n x_n e_n - \sum_{n=0}^N c_n x_n e_n \right\|^2 = \\ &= \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n x_n e_n \right\|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n x_n|^2 \leq |c|^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Occupiamoci della convergenza in norma. Se consideriamo l'operatore

$$T - \sum_{n=0}^N c_n P_n$$

esso ha come autovettori il s.o.n.c. e_n . I primi $N+1$ vettori, all'autovalore 0, i successivi ai vari c_k . Perciò

$$\left\| T - \sum_{n=0}^N c_n P_n \right\| = \sup_{k > N} |c_k|$$

sicché

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| T - \sum_{n=0}^N c_n P_n \right\| = \limsup_{N \rightarrow \infty} |c_k|$$

- Se tale limite superiore è nullo (per esempio, i $c_k \rightarrow 0$) allora si ha convergenza in norma.

Esponiamo due esempi opposti e significativi:

Esempio VI.7 Consideriamo l'operatore $T \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$ tale che

$$Te_n = e_{n+1}$$

dove $\{e_n\} \subset \mathcal{H}$ è un s.o.n.c. Tanto per cominciare, notiamo che T è definito almeno sulle combinazioni lineari finite degli elementi del s.o.n.c. Calcoliamone la norma, abbiamo

$$\left\| T \sum_{n=0}^N x_n e_n \right\|^2 = \left\| \sum_{n=0}^N x_n e_{n+1} \right\|^2 = \sum_{n=0}^N |x_n|^2$$

da cui $\|T\| = 1$. Ne viene che T è continuo. D'altra parte,

$$T \sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n$$

implica, come si vede immediatamente per induzione, che $x_n = 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Infine, T

- non ammette autovalori.

Esempio VI.8 Consideriamo, ora, il seguente operatore

$$\begin{aligned} Te_0 &= 0 \\ Te_n &= e_{n-1}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

che è continuo.

Scrivendo l'equazione agli autovalori troviamo

$$x_1 e_0 + x_2 e_1 + \dots = \lambda (x_0 e_0 + \dots)$$

perciò, fissato $x_0 \neq 0$, troviamo

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda x_0 \\ x_2 &= \lambda x_1 = \lambda^2 x_0 \\ &\vdots \\ x_n &= \lambda^n x_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

dunque, un possibile autovettore all'autovalore λ è, se appartiene ad $\mathcal{H}$,

$$x = x_0 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n e_n$$

Ma x appartiene a $\mathcal{H}$ se e solo se $\lambda^n \in \ell^2$, cioè se e solo se $|\lambda| < 1$. Infine, tutti i numeri complessi di modulo inferiore a λ sono autovalori di T .

Se in dimensione finita gli autovalori di un operatore erano in numero finito ed erano punti isolati di $\mathbb{C}$ (come zeri di un polinomio, cioè di una funzione olomorfa), adesso troviamo che esistono operatori che ammettono un continuo di autovalori.

**Spettro e
risolvente di
un operatore**

Introduciamo, giusto a titolo di informazione, la nozione di spettro e risolvente di un operatore:

Definizione VI.1 Sia T un operatore su un $\mathbb{C}$ -spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Definiamo risolvente di T l'insieme $\rho(T)$ dei punti $\lambda \in \mathbb{C}$ tali che l'operatore $(T - \lambda \mathbb{I})$ è invertibile, ha immagine densa in $\mathcal{H}$ ed ha inversa limitata.

Si definisce spettro di T il complementare sul campo complesso del risolvente di T .

Lo spettro si partisce in modo naturale nell'insieme ρ' dei punti λ per cui $(T - \lambda \mathbb{I})$ ha inversa limitata ed ha immagine pari a $\mathcal{H}$ e nell'insieme ρ'' dei punti λ per cui $(T - \lambda \mathbb{I})$ ha inversa limitata e immagine densa, ma diversa da $\mathcal{H}$.

**Classificazione
dello spettro**

Il caso più semplice affinché $\lambda \in \sigma(T)$ si verifica quando $T - \lambda \mathbb{I}$ non è neppure invertibile, cioè non è iniettivo. In questo caso,

$$\ker(T - \lambda \mathbb{I}) \neq \{0\}$$

da cui λ è un autovalore di T . Perciò, tutti gli autovalori di T appartengono allo spettro di T . L'insieme degli autovalori di T si indica con $\sigma_P(T)$ e si dice **spettro puntuale** di T , come detto

$$\sigma_P \subset \sigma.$$

Può, d'altra parte, accadere che $(T - \lambda \mathbb{I})$ sia invertibile e abbia immagine densa, ma $(T - \lambda \mathbb{I})^{-1}$ sia non continuo. I punti che soddisfano queste condizioni fanno parte dell'insieme $\sigma_C \subset \sigma$, **spettro continuo** di T .

Infine, può essere che $(T - \lambda \mathbb{I})$ sia invertibile, ma abbia immagine non densa. Si dice che $\lambda \in \sigma_R$, **spettro residuo** di T . Ovviamente,

$$\sigma = \sigma_P \cup \sigma_C \cup \sigma_R$$

Esempio VI.9 Torniamo a considerare l'operatore tale che

$$T e_n = e_{n+1}$$

allora esso è iniettivo, ma $R(T) = \text{Span} \langle e_0 \rangle^\perp$, perciò $0 \in \sigma_R(T)$. Inoltre, come visto prima,

■ $\sigma_P = \emptyset$.

Esempio VI.10 Consideriamo adesso l'operatore

$$T e_n = \frac{1}{n} e_n, \quad n \geq 1$$

dove $\{e_n\}_{n \geq 1}$ è un s.o.n.c. L'operatore T è iniettivo, continuo ed ha range denso, infatti $\mathcal{V}\mathcal{V}\{e_n\} \subset R(T)$. D'altra parte, T^{-1} è non limitato. Infatti,

$$T^{-1}e_n = ne_n.$$

- Ne viene che $0 \in \sigma_C(T)$.

**Spettro puntuale
di un operatore
simmetrico**

Notiamo, in primo luogo, che lo spettro puntuale di un operatore simmetrico è reale. Infatti, se λ è un autovalore e x un corrispondente autovettore di T simmetrico, abbiamo

$$\begin{aligned}(Tx, x) &= (x, Tx) \\ \lambda^*(x, x) &= \lambda(x, x)\end{aligned}$$

siccome $x \neq 0$, λ è reale.

Siano ora λ_1 e λ_2 due autovalori distinti di T simmetrico, allora se $x_1 \in E(\lambda_1)$ e $x_2 \in E(\lambda_2)$, abbiamo

$$Tx_1 = \lambda_1 x_1; \quad Tx_2 = \lambda_2 x_2;$$

Moltiplichiamo scalarmente la prima per x_2 e la seconda per x_1 ,

$$\begin{aligned}(x_2, Tx_1) &= \lambda_1 (x_2, x_1) \\ (x_1, Tx_2) &= \lambda_2 (x_1, x_2)\end{aligned} \tag{VI.1}$$

prendiamo la complessa coniugata della seconda

$$(Tx_2, x_1) = \lambda_2 (x_2, x_1)$$

da cui, sfruttando la simmetria di T ,

$$(x_2, Tx_1) = \lambda_2 (x_2, x_1)$$

sottraendo membro con la (VI.1), abbiamo

$$(\lambda_2 - \lambda_1)(x_2, x_1) = 0$$

visto che avevamo supposto $\lambda_2 \neq \lambda_1$, concludiamo

$$(x_2, x_1) = 0$$

perciò

Proposizione VI.22 *Gli autovalori di un operatore simmetrico sono reali e autospazi corrispondenti ad autovalori distinti sono ortogonali.*

Siccome in uno spazio di Hilbert separabile, un sistema ortogonale ha al più cardinalità numerabile, concludiamo

Proposizione VI.23 *Lo spettro puntuale di un operatore simmetrico è reale ed è al più numerabile.*

**Operatori con
un s.o.n.c. di
autovettori**

Vogliamo ora studiare gli operatori $T \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$ di cui si sappia solo che su un s.o.n.c. $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di $\mathcal{H}$, vale

$$Te_n = c_n e_n.$$

Cominciamo col vedere che succede se $\{c_n\} \subset \mathbb{R}$. In primo luogo, fissiamo come dominio di T l'insieme, denso, delle combinazioni lineari finite dei vettori e_n , $D \doteq \mathcal{V}\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Sia $x \in D$, allora

$$\begin{aligned}(x, Tx) &= \left(\sum_{n=0}^N x_n e_n, \sum_{m=0}^N x_m T e_m \right) = \sum_{n=0}^N x_n^* \sum_{m=0}^N c_m x_m (e_n, e_m) = \sum_{n=0}^N x_n^* \sum_{m=0}^N c_m x_m \delta_{nm} = \\ &= \sum_{n=0}^N c_n |x_n|^2\end{aligned}$$

perciò, dato che i c_n sono reali, per ogni $x \in D$, il valor medio di T su x è reale. Siccome T è anche densamente definito, concludiamo che T è simmetrico.

**Chiusura di
un operatore
con un s.o.n.c.
di autovettori**

Visto che T è simmetrico, è chiudibile. Perciò consideriamone l'estensione per chiusura $\bar{T}$. Vogliamo determinare il dominio di $\bar{T}$.

Ragioniamo in generale: gli autovalori c_n siano qualsiasi, e T sia chiudibile per ipotesi. Sia $\bar{T}$ la sua chiusura. A livello ingenuo si può scrivere

$$\bar{T} \sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n \stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} x_n T e_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x_n e_n$$

l'ultimo vettore scritto appartiene ad $\mathcal{H}$, se e solo se $c_n x_n \in \ell^2$, cioè

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x_n|^2 < \infty$$

Diciamo allora che

$$D(\bar{T}) = \{x \in \mathcal{H} \mid \{c_n(e_n, x)\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2\}.$$

Dimostriamolo. $x \in D(\bar{T})$ se e solo se esiste una successione $\{x_N\} \subset D$, tale che $\{\bar{T}x_N\}$ converga. Fissiamo $x \in \mathcal{H}$ talché $\{c_n(e_n, x)\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$. Consideriamo la successione $\{x_N\} \subset D$ data da

$$x_N = \sum_{n=0}^N (e_n, x) e_n,$$

essa converge a x . Ora,

$$\bar{T}x_N = \sum_{n=0}^N c_n (e_n, x) e_n,$$

perciò $\{\bar{T}x_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ converge, visto che $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un s.o.n.c. e che $\{c_n(e_n, x)\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$.

**Dimostrazione
dell'inclusione
opposta**

La dimostrazione dell'inclusione opposta non è altrettanto semplice. Cominciamo con il notare che

$$\mathcal{G}(T) = \mathcal{V}\{e_n \oplus c_n e_n\} \subset \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$$

Consideriamo il sistema $\{e_n \oplus c_n e_n\}$: esso è ortogonale, infatti

$$(e_n \oplus c_n e_n, e_m \oplus c_m e_m)_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}} = (1 + |c_n|^2) \delta_{nm}$$

ne viene che

$$\mathcal{G}(T) = \mathcal{V}\left\{\frac{1}{\sqrt{1 + |c_n|^2}}(e_n \oplus c_n e_n)\right\} \doteq \mathcal{V}\{u_n\}$$

u_n è un sistema ortonormale. Per il teorema sull'identità di Parseval (capitolo II), si ha

$$\mathcal{G}(T)^a = \mathcal{G}(\bar{T}) = \text{Span}\langle u_n \rangle = \left\{v \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \mid v = \sum_{n=0}^{\infty} (u_n, v) u_n\right\}$$

ma, siccome $v = x \oplus y$, abbiamo

$$\frac{1}{\sqrt{1 + |c_n|^2}}(e_n \oplus c_n e_n, x \oplus y) = \frac{1}{\sqrt{1 + |c_n|^2}}[(e_n, x) + c_n^*(e_n, y)]$$

Perciò se $x \oplus y \in \mathcal{G}(T)^a$, allora

$$x \oplus y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(e_n, x) + c_n^*(e_n, y)][e_n \oplus c_n e_n]}{1 + |c_n|^2}$$

sicché

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(e_n, x) + c_n^*(e_n, y)]}{1 + |c_n|^2} e_n \\ y &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[c_n(e_n, x) + |c_n|^2(e_n, y)]}{1 + |c_n|^2} e_n \end{aligned}$$

Dal momento che $\{e_n\}$ è un s.o.n.c. in $\mathcal{H}$, abbiamo, dalla seconda equazione,

$$\begin{aligned} c_n(e_n, x) + |c_n|^2(e_n, y) &= (1 + |c_n|^2)(e_n, y) \\ c_n(e_n, x) &= (e_n, y) \end{aligned}$$

sostituendo nella seconda equazione

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n (1 + |c_n|^2) (e_n, x)}{1 + |c_n|^2} e_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (e_n, x) e_n$$

sicché, per il teorema di Riesz-Fischer

$$\{c_n (e_n, x)\} \in \ell^2$$

come si voleva. Riassumendo

Teorema VI.24 Sia dato un operatore $T \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$ chiudibile tale che

$$T e_n = c_n e_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

dove $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un s.o.n.c. di $\mathcal{H}$. Allora la chiusura di $T, \bar{T}$, ha dominio

$$D(\bar{T}) = \{x \in \mathcal{H} \mid \{c_n (e_n, x)\} \in \ell^2\}$$

e, se $x \in D(\bar{T})$,

$$\bar{T}x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (e_n, x) e_n.$$

Osservazione VI.12 Siccome se $x \oplus y \in \mathcal{G}(T)^a$ allora

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (e_n, x) e_n$$

- si ha che, se i c_n sono tutti diversi da 0, $y = 0$ implica $x = 0$ e perciò T è chiudibile.

Teorema VI.25 Sia dato un operatore $T \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$ tale che

$$T e_n = c_n e_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

dove $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un s.o.n.c. di $\mathcal{H}$. Se $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, allora T è simmetrico. La chiusura di $T, \bar{T}$, ha dominio

$$D(\bar{T}) = \{x \in \mathcal{H} \mid \{c_n (e_n, x)\} \in \ell^2\}$$

e, se $x \in D(\bar{T})$,

$$\bar{T}x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (e_n, x) e_n.$$

VI.3.3 Diagonalizzazione simultanea

Un operatore in uno spazio di Hilbert di dimensione infinita si dice **diagonalizzabile** se ammette un s.o.n.c. di autovettori.

Consideriamo due operatori simmetrici diagonalizzabili T ed S . Diciamo che essi sono **diagonalizzabili simultaneamente** se esiste un s.o.n.c. di autovettori simultanei di T e di S .

In dimensione infinita, chiamiamo degenerazione di un autovalore λ , la dimensione ortogonale dell'autospazio relativo $E(\lambda, T)$.

Se T ed S sono simultaneamente diagonalizzabili, allora commutano. Infatti, sia e_n il s.o.n.c. di autovettori comuni, abbiamo

$$T e_n = t_n e_n; S e_n = s_n e_n$$

sull'insieme delle combinazioni lineari finite degli e_n è banale verificare la commutazione. Se invece con T ed S intendiamo direttamente la loro estensione chiusa, abbiamo che, usando l'ultimo teorema della sottosezione precedente

$$D([T, S]) = \{x \in \mathcal{H} \mid \{(e_n, x) t_n s_n\}, \{(e_n, x) t_n\}, \{(e_n, x) s_n\} \in \ell^2\}$$

e

$$TSx = T \sum_{n=0}^{\infty} s_n (e_n, x) e_n = \sum_{n=0}^{\infty} t_n s_n (e_n, x) e_n$$

$$STx = S \sum_{n=0}^{\infty} t_n (e_n, x) e_n = \sum_{n=0}^{\infty} s_n t_n (e_n, x) e_n = TSx.$$

Viceversa, se T ed S commutano e sono diagonalizzabili, allora lo sono simultaneamente.

Lemma VI.26 Se $[A, B] = 0$, $x \in E(a, A)$ e $x \in D([A, B])$, allora $Bx \in E(a, A)$.

Dimostrazione Abbiamo

$$Ax = ax$$

ma $Ax, x \in D(B)$, perciò

$$BAx = aBx$$

dall'ipotesi di commutatività

$$A(Bx) = a(Bx)$$

(c.v.d.) perciò $Bx \in E(a, A)$.

Abbiamo

$$Te_n = t_n e_n$$

$$Su_n = s_n u_n$$

e poniamoci nell'ipotesi semplificatrice in cui $|t| = \sup |t_n|$ e $|s| = \sup |s_n|$ siano finiti. Allora T, S sono limitati ed essendo densamente definiti, si estendono a un operatore continuo su $\mathcal{H}$. Siano T ed S tali operatori. Allora $T, S \in L(\mathcal{H})$. Sia T non degenere, allora dal lemma, Se_n appartiene a $E(t_n, T)$, ma tale autospazio ha dimensione ortogonale 1, perciò

$$Se_n \in \text{Span} \langle e_n \rangle \iff Se_n = \lambda e_n,$$

ne viene che e_n è un s.o.n.c. di autovettori anche per S .

Vediamo cosa succede nel caso degenere. Poniamo

$$Te_n^{(i)} = t_i e_n^{(i)}$$

con n che descrive un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ dettato dall'indice i . Abbiamo

$$E(t_i, T) = \text{Span} \langle e_n^{(i)} \rangle_n$$

Infatti, siccome T è continuo e definito su $\mathcal{H}$, allora T è chiuso, perciò $E(t_i, T)$ è chiuso. Inoltre,

$$T \sum_{n,i} (e_n^{(i)}, x) e_n^{(i)} = t_j \sum_{n,i} (e_n^{(i)}, x) e_n^{(i)}$$

se e solo se

$$(t_i - t_j) (e_n^{(i)}, x) = 0 \iff (e_n^{(i)}, x) = 0, \forall i \neq j.$$

Dunque,

$$\mathcal{H} = \bigoplus_i E(t_i, T)$$

$\{u_m\}$ è il s.o.n.c. di autovettori di S . Poniamo

$$u_m = u_m^{(i)} + u_m^\perp$$

dove $u_m^{(i)} \in E(t_i, T)$ e $u_m^\perp \in E(t_i, T)^\perp$.

Vogliamo vedere che gli $u_m^{(i)}$ formano un s.o.n.c. di $E(t_i, T)$. Se così fosse l'insieme

$$\{u_m^{(i)}\}_{m,i}$$

sarebbe il s.o.n.c. simultaneo cercato.

Abbiamo

$$S(u_m^{(i)} + u_m^\perp) = s_m(u_m^{(i)} + u_m^\perp)$$

ma siccome, per il lemma, gli autospazi di T sono S -invarianti, per l'unicità della decomposizione ortogonale,

$$\begin{aligned} Su_m^{(i)} &= s_m u_m^{(i)} \\ Su_m^\perp &= s_m u_m^\perp \end{aligned}$$

Sia ora $y \in E(t_i, T)$ ortogonale a tutti gli $u_m^{(i)}$. Ma allora, siccome $y \in E(t_i, T)$, y è ortogonale a tutti gli $u_m^\perp$ e in definitiva a tutti gli u_m . Allora $y = 0$.

Teorema VI.27 *Siano $T, S \in L(\mathcal{H})$ diagonalizzabili. Allora T e S sono diagonalizzabili simultaneamente se e solo se commutano.*

VI.3.4 Operatori compatti

Un operatore $T \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$ si dice **compatto** se manda successioni debolmente convergenti in successioni fortemente convergenti. Cioè, T è compatto, se per ogni $\{x_n\} \subset D(T)$ tale che

$$w - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

si ha

$$s - \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = Tx$$

Ne ricaviamo subito che un operatore compatto è continuo, perciò un operatore compatto densamente definito appartiene a $L(\mathcal{H})$. Si ha subito che l'identità non è un operatore compatto, infatti, se e_n è un s.o.n. esso converge debolmente, ma non fortemente. Se ne ricava subito una conseguenza interessante. Sia T compatto e sia $\lambda \neq 0$ un autovalore di T , allora λ ha degenerazione finita. Se così non fosse, in $E(\lambda, T)$, che è uno spazio di Hilbert separabile, avremmo che T è pari a λ volte l'identità, perciò non sarebbe ivi compatto: assurdo.

Teorema VI.28 *Gli autovalori non nulli relativi a un operatore compatto sono finitamente degeneri.*

Inoltre,

Teorema VI.29 *T sia un operatore diagonalizzabile con degenerazione finita, il cui spettro puntuale ammetta 0 come punto di accumulazione. Allora T è compatto.*

Dimostrazione In primo luogo, notiamo che T è (estendibile a un operatore) continuo avendo norma finita ed essendo densamente definito. Dall'ipotesi, possiamo scrivere, riordinando i vettori del s.o.n.c.,

$$Te_n = \lambda_n e_n; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0.$$

Sia $\{x_k\} \subset \mathcal{H}$ una successione debolmente convergente a 0. Vogliamo dimostrare che $Tx_k \rightarrow 0$ in senso forte. Posto

$$\alpha_k^{(n)} \doteq (e_n, x_k) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty;$$

abbiamo

$$x_k = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_k^{(n)} e_n$$

Valutiamo Tx_k :

$$Tx_k = T \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_k^{(n)} e_n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \alpha_k^{(n)} e_n$$

Da cui

$$\|Tx_k\|^2 = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \alpha_k^{(n)} e_n \right\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n \alpha_k^{(n)}|^2$$

Riguardiamo $(x_k, \cdot)$ come un funzionale (continuo!) su $\mathcal{H}$, allora per ogni $x \in \mathcal{H}$ fissato, abbiamo

$$|(x_k, x)| \leq M_x$$

perciò, dal teorema dell'uniforme limitatezza (Banach-Steinhaus), abbiamo

$$\|x_k\| \leq M$$

perciò

$$|\alpha_k^{(n)}| \leq M, \quad \forall n, k \in \mathbb{N}$$

Ora, fissato $\varepsilon > 0$ esiste N per cui $|\lambda_n| < \varepsilon$ se $n \geq N$. Inoltre,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \lambda_n \alpha_k^{(n)} \right|^2 = \sum_{n=0}^N \left| \lambda_n \alpha_k^{(n)} \right|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \lambda_n \alpha_k^{(n)} \right|^2$$

Il primo addendo tende a 0 per $k \rightarrow \infty$ come somma finita di quantità infinitesime, perciò esiste k_0 per cui se $k \geq k_0$ allora esso è minore di ε^2 . Per il secondo abbiamo

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \lambda_n \alpha_k^{(n)} \right|^2 = \|TP_N x_k\|^2 \leq M^2 \|TP_N\|^2 = M^2 \sup_{n>N} |\lambda_n|^2 \leq M^2 \varepsilon^2$$

dove P_N è il proiettore sullo spazio generato dagli autovettori e_n con $n > N$. Allora, fissato $\varepsilon > 0$ esiste k_0 per cui se $k \geq k_0$ allora

$$\|Tx_k\|^2 = \sum_{n=0}^N \left| \lambda_n \alpha_k^{(n)} \right|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \lambda_n \alpha_k^{(n)} \right|^2 \leq (1 + M^2) \varepsilon^2.$$

(c.v.d.)

Teorema VI.30 *Sia T un operatore normale e compatto, allora ammette un s.o.n.c. di autovettori.*

Dimostrazione Omessa. Occorrerebbe una trattazione molto più approfondita della teoria spettrale.
(c.v.d.)

VI.4 Proprietà di simmetria: cenni alla teoria delle rappresentazioni

VI.4.1 Gruppi

Al lettore è ben nota la nozione di gruppo. Perciò in questa sottosezione passeremo brevemente in rassegna i suoi aspetti fondamentali.

Definizione di gruppo Un **gruppo** G è un insieme nel quale sia istituita una legge di composizione interna $\cdot : G \times G \rightarrow G$ che a ogni $a, b \in G$ associa $ab \doteq a \cdot b \in G$. La legge di composizione deve essere **associativa**, deve ammettere **elemento neutro** $e \in G$ e deve essere tale che per ogni elemento $a \in G$ ne esista un altro, $a^{-1} \in G$, per cui $aa^{-1} = a^{-1}a = e$. Qualora valga la proprietà commutativa, il gruppo si dice **abeliano**.
Si verifica facilmente la seguente

Proposizione VI.31 *Sia G un gruppo, allora*

- (i) *l'elemento neutro è unico;*
- (ii) *fissato $a \in G$, l'inverso a^{-1} è unico;*
- (iii) *preso $a \in G$, $(a^{-1})^{-1} = a$.*

Dimostrazione Siano e, e' elementi neutri di G . Siccome e' è elemento neutro, allora

$$ee' = e,$$

ma anche e è neutro, perciò

$$ee' = e',$$

in definitiva, $e' = e$.

Sia b tale che $ab = ba = e$. Allora

$$b = eb = a^{-1}ab = a^{-1}e = a^{-1}.$$

Infine,

$$a^{-1}a = aa^{-1} = e$$

(c.v.d.) da cui, la tesi.

Sottogruppi Un sottoinsieme non vuoto H di G si dice **sottogruppo** se è, a sua volta, un gruppo rispetto alla legge di composizione di G , $\cdot$ ristretta a $H \times H$. Ne viene che H è un sottogruppo se è chiuso per $\cdot$, cioè, per ogni $a, b \in H$, risulta $ab \in H$, e se $a \in H$ implica $a^{-1} \in H$. Infatti, se valgono queste ultime due ipotesi, si ha $aa^{-1} = a^{-1}a = e \in H$, perciò H contiene l'elemento neutro, mentre la proprietà associativa è banalmente verificata.

Omomorfismi Un'applicazione Φ da un gruppo G in un gruppo G' si dice **omomorfismo** se, per ogni $a, b \in G$, risulta

$$\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)$$

cioè, se Φ conserva le operazioni di G e G' .

Proposizione VI.32 *Un omomorfismo mappa l'elemento neutro del dominio nell'elemento neutro del codominio.*

Dimostrazione Sia $\Phi : G \rightarrow G'$ e siano $e \in G$ e $e' \in G'$ i rispettivi elementi neutri. Vogliamo mostrare che $\Phi(e) = e'$. Abbiamo

$$\Phi(e) = \Phi(ee) = \Phi(e)\Phi(e)$$

da cui, moltiplicando ambo i membri per $[\Phi(e)]^{-1}$, abbiamo

$$(c.v.d.) \quad e' = \Phi(e).$$

Proposizione VI.33 *Sia $a \in G$ e sia $\Phi : G \rightarrow G'$ un omomorfismo, allora $[\Phi(a)]^{-1} = \Phi(a^{-1})$.*

Dimostrazione

Si ha

$$\begin{aligned} e' &= \Phi(aa^{-1}) = \Phi(a)\Phi(a^{-1}) \\ &= \Phi(a^{-1}a) = \Phi(a^{-1})\Phi(a) \end{aligned}$$

(c.v.d.) la tesi.

Proposizione VI.34 *Immagine e kernel di un omomorfismo sono sottogruppi rispettivamente del codominio e del dominio.*

Dimostrazione Cominciamo dall'immagine. Siano a' e $b' \in R(\Phi)$, allora esistono $a, b \in G$ tali che $\Phi(a) = a'$ e $\Phi(b) = b'$. Allora

$$a'b' = \Phi(a)\Phi(b) = \Phi(ab),$$

essendo $ab \in G$, si ha $a'b' \in R(\Phi)$. Inoltre, $a'^{-1} \in R(\Phi)$ visto che $a'^{-1} = \Phi(a^{-1})$ come visto prima.

Per quanto concerne il nucleo, siano $a, b \in \ker \Phi$, allora

$$\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b) = e'e' = e'$$

da cui $ab \in \ker \Phi$. Infine,

$$\Phi(aa^{-1}) = \Phi(e) = e'$$

(c.v.d.) sicché $a^{-1} \in \ker \Phi$.

Proposizione VI.35 *Un omomorfismo è iniettivo se e solo se ha kernel banale, cioè ridotto al solo e .*

Dimostrazione Sia Φ è iniettivo, allora a elementi distinti del dominio corrispondono elementi distinti dell'immagine, perciò, se $a \neq e$, allora $\Phi(a) \neq \Phi(e) = e'$, perciò il kernel è banale.

Viceversa, sia il kernel banale, e sia $\Phi(a) = \Phi(b)$. Allora

$$e' = [\Phi(a)]^{-1}\Phi(b) = \Phi(a^{-1})\Phi(b) = \Phi(a^{-1}b)$$

perciò $a^{-1}b \in \ker \Phi$, dunque

$$a^{-1}b = e$$

(c.v.d.) ossia, $b = a$: Φ è iniettivo.

Coniugazione Due elementi a, b di un gruppo si dicono **coniugati** se esiste $h \in G$ per cui

$$a = h b h^{-1}$$

Il predicato “essere coniugato” istituisce una relazione di equivalenza su G . Si tratta infatti di una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva, come si verifica in un attimo. Come relazione di equivalenza, la coniugazione, partisce G in classi di equivalenza denominate **classi di coniugazione**.

Sottogruppi invarianti Due sottogruppi G_1 e G_2 di G si dicono a loro volta coniugati se esiste $h \in G$ tale che

$$G_2 = h G_1 h^{-1}$$

dove l'eguaglianza è da intendersi in senso insiemistico. Un sottogruppo H si dice **invariante** se è coniugato a se stesso rispetto a ogni $h \in G$, cioè

$$HG = GH$$

Se un sottogruppo invariante (si dice anche **normale**) è non banale, contiene un elemento diverso dall'identità, perciò contiene tutta la classe di equivalenza cui appartiene quell'elemento. In definitiva, un sottogruppo invariante è composto da unione di classi di coniugazione (ma, ovviamente, non vale il viceversa, a meno che tale unione non sia un sottogruppo).

Esempio VI.11 Consideriamo il gruppo G delle rotazioni nello spazio tridimensionale. Ogni elemento di G è univocamente determinato da un versore (che individua l'asse di rotazione) e da un angolo (tra 0 e π). È facile vedere che le classi di coniugazione di G sono formate da tutte

- le rotazioni di un fissato angolo attorno a qualsiasi asse. Ora, componendo due rotazioni di angolo α , è possibile ottenere una rotazione di angolo compreso tra 0 e 2α . Ne viene che, scelto $\alpha = \pi/2$, ogni rotazione è ottenibile come composizione di due rotazioni di $\pi/2$. Sia allora H un sottogruppo invariante di G . Se esso è non banale, conterrà almeno una classe di coniugazione. Componendo opportunamente gli elementi di tale classe, come mostrato sopra, è possibile ottenere una rotazione di angolo $\pi/2$. In questo modo H contiene tutte le rotazione di angolo $\pi/2$, e perciò $H = G$.

L'esempio di cui sopra mostra che il gruppo delle rotazioni non ammette sottogruppi invarianti non banali, in questo caso si dice che G è semplice.

Proposizione VI.36 *Il nucleo di un omomorfismo è un sottogruppo invariante.*

Dimostrazione Sia Φ un omomorfismo da G in G' . Sia $g \in \ker \Phi$, vogliamo mostrare che per ogni $h \in G$, $hgh^{-1} \in \ker \Phi$:

$$(c.v.d.) \quad \Phi(hgh^{-1}) = \Phi(h)\Phi(g)\Phi(h^{-1}) = \Phi(h)\Phi(h)^{-1} = e'.$$

VI.4.2 Rappresentazioni di un gruppo

Automorfismi di uno spazio lineare Consideriamo uno spazio lineare V (definito sul campo $\mathbb{K}$, complesso o reale). Si dice **automorfismo** di V un'applicazione lineare da V in sé che sia iniettiva e suriettiva. L'insieme degli automorfismi di V , $\text{Aut } V$ costituisce un gruppo rispetto alla composizione di applicazioni.

Rappresentazioni di un gruppo Sia ora G un qualunque gruppo. Si dice **rappresentazione** di G un omomorfismo $\mathcal{D}$ da G in $\text{Aut } V$. Una rappresentazione fa, dunque, corrispondere a ogni elemento $g \in G$ un automorfismo $\mathcal{D}(g)$ di V . Se V ha dimensione finita, $n = \dim V$, visto che $\text{Aut } V$ è isomorfo a $GL(n; \mathbb{K})$, si ha che una rappresentazione fa corrispondere a ogni elemento $g \in G$ una matrice invertibile $n \times n$.

La dimensione di V si dice anche **dimensione della rappresentazione** e V si dice **supporto** della rappresentazione. Se $\mathcal{D}$ è iniettiva, allora la rappresentazione si dice **fedele**.

Se V è uno spazio con prodotto scalare, la rappresentazione si dice **unitaria** se l'immagine secondo $\mathcal{D}$ di G è il sottogruppo unitario di $\text{Aut } V$.

Rappresentazioni equivalenti Torniamo all'ambientazione matriciale delle rappresentazioni. Come noto, l'isomorfismo tra $\text{Aut } V$ e $GL(n; \mathbb{R})$ è definito una volta che sia stata scelta una base di V . Se cambiamo base, ogni matrice M è mappata in AMA^{-1} , con $A \in GL(n; \mathbb{R})$ che rappresenta il cambiamento di base. In generale, due rappresentazioni $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'$ tali che, per ogni $g \in G$, esiste $\varphi \in \text{Aut } V$ (o $A \in GL(n; \mathbb{R})$) per cui

$$\mathcal{D}'(g) = \varphi \mathcal{D}(g) \varphi^{-1}$$

si dicono **equivalenti**.

Esempio VI.12 Consideriamo il gruppo delle rotazioni nello spazio tridimensionale reale $\mathbb{R}^3$. Fissata una base di $\mathbb{R}^3$, a ogni rotazione si associa una matrice ortogonale a determinante 1. Ne viene che il gruppo delle rotazioni ammette una rappresentazione su $GL(3; \mathbb{R})$ che ha immagine in $SO(3; \mathbb{R})$. Tale rappresentazione è chiaramente fedele. Perciò il gruppo delle rotazione è isomorfo a $SO(3; \mathbb{R})$. Per questo, solitamente si confondono il gruppo *astratto* delle rotazioni e $SO(3; \mathbb{R})$.

Esempio VI.13 Consideriamo il sottogruppo del gruppo delle rotazioni, formato dalle rotazioni attorno a un asse fissato. Nella rappresentazione di sopra, si ha che la matrice associata a ciascun elemento del gruppo si decompone a blocchi

$$\left(\begin{array}{cc|c} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

ne viene che si possono associare al gruppo una rappresentazione bidimensionale fedele coincidente con il blocco superiore, che mappa il gruppo su $SO(2; \mathbb{R})$, e una rappresentazione unidimensionale banale.

Si noti, infine, che il gruppo ammette pure una rappresentazione fedele unidimensionale sul campo complesso che a ogni elemento associa $e^{-i\alpha}$.

Riduzione di rappresentazioni

Consideriamo ancora la rappresentazione tridimensionale del gruppo delle rotazioni intorno a un asse fissato o del suo isomorfo $SO(2; \mathbb{R})$. Come si può notare, ogni elemento della rappresentazione, $\mathcal{D}(g)$ ammette come autovettore il versore lungo l'asse z , cioè lascia invariato il sottospazio generato da tale vettore e il suo ortogonale. Ne viene che esistono due sottospazi globalmente invarianti sotto tutta la rappresentazione, per di più la somma diretta di questi due sottospazi esaurisce lo spazio V . Il fenomeno è del tutto generale:

Definizione VI.2 *Un sottospazio proprio V' di V si dice invariante per la rappresentazione, se per ogni $g \in G$ risulta*

$$\mathcal{D}(g)V' \subset V'.$$

Definizione VI.3 *Una rappresentazione che ammette un sottospazio invariante si dice riducibile.*

Sia $\mathcal{D}$ una rappresentazione di G e sia V' un sottospazio invariante di V (che per ora supponiamo abbia dimensione finita). Fissiamo una base in V' ed estendiamola a base di V . In questo modo otteniamo che, per ogni $g \in G$, sia

$$\mathcal{D}(g) = \left(\begin{array}{c|c} A(g) & B(g) \\ \hline 0 & C(g) \end{array} \right)$$

dove A e C sono matrici quadrate, $A(g) \in GL(\dim V', \mathbb{K})$, $C(g) \in GL(\dim V - \dim V', \mathbb{K})$. Sia V'' lo spazio supplementare di V' , cioè sia $V = V' \oplus V''$. Allora, se V' e V'' sono simultaneamente invarianti sotto $\mathcal{D}$, si ha

$$\mathcal{D}(g) = \left(\begin{array}{c|c} A(g) & 0 \\ \hline 0 & C(g) \end{array} \right)$$

e la rappresentazione $\mathcal{D}$ si spezza in due ulteriori rappresentazioni: la $A(g)$ su V' e la $C(g)$ su V'' . Se si verifica questa situazione, $\mathcal{D}$ si dice **completamente riducibile** e si scrive

$$\mathcal{D} = A \oplus C$$

È questo il caso che si è verificato con $SO(2; \mathbb{R})$, la cui rappresentazione su $\mathbb{R}^3$ si è spezzata nella somma diretta di una rappresentazione su $\mathbb{R}^2$ e di una rappresentazione unidimensionale. La rappresentazione unidimensionale è certamente irriducibile, ma, come appare evidente, anche la rappresentazione bidimensionale risulta irriducibile. Anche la rappresentazione fondamentale del gruppo delle rotazioni con $SO(3; \mathbb{R})$ è irriducibile: ogni versore di $\mathbb{R}^3$ può essere mandato in un qualsiasi altro tramite un elemento di $SO(3; \mathbb{R})$.

Esempio VI.14 Non tutte le rappresentazioni riducibili lo sono completamente. Si consideri il gruppo delle trasformazioni rigide su $\mathbb{R}^3$: ciascuno dei suoi elementi è individuato da una trasformazione ortogonale A composta con una traslazione b . Esso ammette la seguente rappresentazione quadridimensionale

$$\left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$$

- con $A \in O(3; \mathbb{R})$ e $b \in \mathbb{R}^3$. Essa è riducibile, ma non completamente.

Esempio VI.15 La rappresentazione di un gruppo induce sul supporto della rappresentazione stessa una legge di trasformazione. Ad esempio la rappresentazione di $SO(3; \mathbb{R})$ su $\mathbb{R}^3$ induce la seguente legge

$$v'^i = R_j^i v_j$$

per ogni $R \in SO(3; \mathbb{R})$.

Se anziché considerare $\mathbb{R}^3$ consideriamo l'insieme dei tensori a due indici, abbiamo che la seguente legge di trasformazione

$$T'^{ij} = R_k^i R_l^j T^{kl}$$

è una rappresentazione 9-dimensionale di $SO(3; \mathbb{R})$. La legge di trasformazione di sopra, conserva le proprietà di simmetria dei tensori. Ne viene che lo spazio dei tensori simmetrici viene mappato in sé dalla rappresentazione, come, del resto lo spazio dei tensori antisimmetrici. Siccome i due spazi sono in somma diretta, abbiamo ridotto la rappresentazione 9-dimensionale in somma diretta di due rappresentazioni, una 3-dimensionale e l'altra 6-dimensionale. Inoltre, i tensori simmetrici non individuano una rappresentazione irriducibile. Infatti, il tensore **isotropo** δ^{ij} viene mandato in sé. Si ha dunque, una ulteriore decomposizione in somma diretta: infatti, ogni tensore simmetrico può essere scritto come

$$T^{ij} = \left(T^{ij} - \frac{1}{3} \text{Tr } T^{ij} \delta_{ij} \right) + \frac{1}{3} \text{Tr } T^{ij} \delta_{ij}$$

In definitiva, abbiamo decomposto la nostra rappresentazione 9-dimensionale, in somma di una rappresentazione unidimensionale, 3-dimensionale e 5-dimensionale.

Rappresentazioni unitarie

Ci concentriamo un attimo sulle rappresentazioni unitarie: oltre ad avere un grande interesse fisico, sono le uniche rappresentazioni vere per un gruppo finito, come vedremo nella prossima sottosezione.

Vale il seguente semplice, ma fondamentale

Teorema VI.37 Una rappresentazione unitaria riducibile è sempre completamente riducibile.

Dimostrazione

Sia $V' \subset V$ il sottospazio invariante della rappresentazione unitaria $\mathcal{D}$. Vogliamo mostrare che il complemento ortogonale V'' di V' è, a sua volta, invariante sotto $\mathcal{D}$. Infatti, sia $v_2 \in V''$. Per ogni $v_1 \in V'$ risulta

$$(v_1, \mathcal{D}(g)v_2) = (\mathcal{D}(g)^\dagger v_1, v_2) = (\mathcal{D}(g)^{-1} v_1, v_2) = (\mathcal{D}(g^{-1}) v_1, v_2) = 0$$

(c.v.d.) poiché $\mathcal{D}(g^{-1}) v_1 \in V' \perp V''$. Ne viene che $\mathcal{D}(g)v_2 \in V'^\perp = V''$.

Si noti come il teorema resti valido se V è uno spazio hilbertiano infinito-dimensionale.

VI.4.3 Cenni alla rappresentazione dei gruppi finiti

Gruppi finiti

Un gruppo si dice finito se ha cardinalità finita. La cardinalità di un gruppo finito si dice ordine del gruppo e si indica con $\text{ord } G$. Un teorema molto importante per lo studio della rappresentazione dei gruppi finiti è il seguente

Teorema VI.38 Ogni rappresentazione finito-dimensionale di un gruppo finito è equivalente a una rappresentazione unitaria.

Dimostrazione

Sia $\mathcal{D}$ la nostra rappresentazione. Poniamo

$$\Delta \doteq \sum_{g \in G} \mathcal{D}(g)^\dagger \mathcal{D}(g)$$

Allora Δ è somma finita di matrici hermitiane definite positive: infatti,

$$(v, A^\dagger A v) = \|Av\|^2 \geq 0$$

da cui $A^\dagger A$ è semidefinita positiva; d'altra parte A è non singolare, perciò $A^\dagger A$ ha kernel banale e dunque $A^\dagger A$ è definita positiva. Ne viene che Δ è hermitiana definita positiva. Come tale Δ è diagonalizzabile ed ha autovalori strettamente positivi. Prese le radici degli autovalori di Δ è facile costruire la matrice hermitiana definita positiva C tale che $C^2 = \Delta$.

Osserviamo poi che

$$\mathcal{D}(h)^\dagger \Delta \mathcal{D}(h) = \sum_{g \in G} [\mathcal{D}(g) \mathcal{D}(h)]^\dagger [\mathcal{D}(g) \mathcal{D}(h)] = \sum_{g \in G} \mathcal{D}(gh)^\dagger \mathcal{D}(gh) = \Delta$$

perché, mentre g descrive G , hg descrive G . Ne viene che

$$\mathcal{D}(h)^\dagger C^2 \mathcal{D}(h) = C^2.$$

Posto

$$\mathcal{D}'(h) \doteq C \mathcal{D}(h) C^{-1}$$

abbiamo che $\mathcal{D}'$ è equivalente a $\mathcal{D}$ ed è unitaria, infatti

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'(h)^\dagger \mathcal{D}'(h) &= (C^{-1})^\dagger \mathcal{D}(h)^\dagger C^\dagger C \mathcal{D}(h) C^{-1} = (C^\dagger)^{-1} \mathcal{D}(h)^\dagger C^2 \mathcal{D}(h) C^{-1} = \\ &= C^{-1} C^2 C^{-1} = \mathbb{I}. \end{aligned}$$

(c.v.d.)

Digressione:
gruppi compatti

Questo teorema si dimostra anche per i **gruppi compatti**. La dimostrazione va (ovviamente!) modificata. Anzitutto, si deve introdurre la nozione di gruppo topologico: esso è un gruppo dotato di una topologia rispetto alla quale la composizione e l'inversione sono continue. Si deve poi dimostrare che su un gruppo topologico può essere definita univocamente una misura invariante (misura di Haar). Un gruppo compatto ha misura finita. Precisato che la rappresentazione di un gruppo topologico deve essere un omomorfismo continuo, si deve sostituire, nella dimostrazione precedente, la somma finita con un integrale.

Si deve notare che una rappresentazione fedele a dimensione finita di un gruppo non compatto, **non** può essere unitaria: infatti, un gruppo di matrici unitarie è sempre compatto. Il gruppo di Lorentz è un esempio di gruppo non compatto, esso perciò non ammette rappresentazioni fedeli finito-dimensionali unitarie.

Carattere di una
rappresentazione

Consideriamo una rappresentazione finita $\mathcal{D}$ di un gruppo finito G . Si definisce **carattere** la funzione $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}$ tale che

$$\chi(g) \doteq \text{Tr } \mathcal{D}(g).$$

Proposizione VI.39 *Il carattere è una funzione di classe.*

Dimostrazione

Dobbiamo mostrare che esso assume valore costante sugli elementi di ogni classe di coniugazione:

$$\begin{aligned} \chi(hgh^{-1}) &= \text{Tr } \mathcal{D}(hgh^{-1}) = \text{Tr } [\mathcal{D}(h) \mathcal{D}(g) \mathcal{D}(h^{-1})] = \text{Tr } [\mathcal{D}(h) \mathcal{D}(h)^{-1} \mathcal{D}(g)] = \\ &= \text{Tr } \mathcal{D}(g) = \chi(g). \end{aligned}$$

(c.v.d.)

Proposizione VI.40 *Rappresentazioni equivalenti, hanno carattere eguali.*

Dimostrazione

Per ogni g , sia $\mathcal{D}'(g) = A \mathcal{D}(g) A^{-1}$, abbiamo

$$\chi_{\mathcal{D}'}(g) = \text{Tr } (A \mathcal{D}(g) A^{-1}) = \text{Tr } (A A^{-1} \mathcal{D}(g)) = \text{Tr } (\mathcal{D}(g)) = \chi_{\mathcal{D}}(g).$$

(c.v.d.)

Poich il gruppo è finito, lo è anche il numero m delle classi. Con il pedice c indichiamo le classi di coniugazione e con n_c la cardinalità della classe c -esima. Se $N \doteq \text{ord } G$, si ha

$$\sum_c n_c = N.$$

Notiamo, poi, che $\chi(e) = \text{Tr } \mathcal{D}(e) = \text{Tr } \mathbb{I} = \dim V \doteq d$. Fissate le notazioni, abbiamo

Teorema
VI.41 (di
ortogonalità à)

Se indichiamo con $\chi^{(r)}$ il carattere della rappresentazione irriducibile r , valgono le seguenti relazioni di ortonormalità

$$\begin{aligned} \sum_c n_c \chi_c^{(r)*} \chi_c^{(r')} &= N \delta_{rr'} \\ n_c \sum_r \chi_c^{(r)*} \chi_c^{(r)} &= N \delta_{cc'} \end{aligned}$$

Dimostrazione

Omessa.

(c.v.d.)

In particolare, se poniamo $c = c' = e$ dove e la classe di coniugazione dell'elemento neutro (che si riduce al solo elemento neutro), abbiamo

$$\sum_r d^{(r)2} = N$$

che è il

Teorema VI.42
(di Burnside)

Se $d^{(r)}$ indica la dimensione della rappresentazione irriducibile r , al variare delle r inequivalenti si ha

$$\sum_r d^{(r)2} = \text{ord } G.$$

Introdotti i **caratteri ridotti**,

$$\bar{\chi}_c^{(r)} = \sqrt{\frac{n_c}{N}} \chi_c^{(r)}$$

si riscrivono le relazioni di ortogonalità come segue

$$\sum_c \bar{\chi}_c^{(r)*} \bar{\chi}_c^{(r')} = \delta_{rr'} \quad (\text{VI.2})$$

$$\sum_r \bar{\chi}_c^{(r)*} \bar{\chi}_{c'}^{(r)} = \delta_{cc'} \quad (\text{VI.3})$$

Per la (VI.2), i vettori di $\mathbb{C}^m$, $\bar{\chi}^{(r)}$ e $\bar{\chi}^{(r')}$ sono ortonormali e perciò indipendenti, ne viene che il numero di rappresentazioni irriducibili inequivalenti di G è al più pari a m . Ne viene che gli m vettori $\bar{\chi}_c$, che appartengono a $\mathbb{C}^m$, per quanto detto, sono indipendenti, perciò formano una base di $\mathbb{C}^m$, grazie a (VI.3). Sicché, il numero di rappresentazioni irriducibili e inequivalenti di G è proprio m :

Corollario VI.43 *L'insieme dei vettori $\bar{\chi}^{(r)} \subset \mathbb{C}^m$ al variare di r nelle rappresentazioni irriducibili inequivalenti di G , è una base ortonormale di $\mathbb{C}^m$.*

Corollario VI.44 *Il numero delle rappresentazioni finite irriducibili inequivalenti di un gruppo finito è pari al numero delle sue classi di coniugazione.*

Prima, abbiamo visto che due rappresentazioni equivalenti hanno caratteri eguali. Consideriamo ora due rappresentazioni irriducibili aventi caratteri eguali. Se esse fossero inequivalenti i loro caratteri dovrebbero essere ortogonali, invece sono paralleli:

Proposizione VI.45 *Due rappresentazioni irriducibili sono equivalenti se e solo se hanno caratteri eguali.*

Veniamo alla riduzione di rappresentazioni finite di gruppi finiti. Cominciamo con il dimostrare il seguente

Teorema VI.46 *Il carattere della somma diretta di due rappresentazioni è la somma dei caratteri delle due rappresentazioni.*

Dimostrazione Sia $\mathcal{D} = r_1 \oplus r_2$, allora, per ogni g si ha

$$\mathcal{D}(g) = \left(\begin{array}{c|c} r_1(g) & 0 \\ \hline 0 & r_2(g) \end{array} \right)$$

da cui

$$\chi^{(\mathcal{D})}(g) = \text{Tr } \mathcal{D}(g) = \text{Tr } r_1(g) + \text{Tr } r_2(g) = \chi^{(r_1)}(g) + \chi^{(r_2)}(g).$$

(c.v.d.)

Corollario VI.47 *La decomposizione di una rappresentazione riducibile in somma diretta di rappresentazioni irriducibili è unica.*

Dimostrazione Consideriamo una rappresentazione riducibile $\mathcal{D}$ tale che

$$\mathcal{D} = \bigoplus_r a_r r.$$

Allora, dal teorema precedente,

$$\bar{\chi}^{(\mathcal{D})} = \sum_r a_r \bar{\chi}^{(r)},$$

noi dobbiamo vedere che i coefficienti a_r sono unici, ma, grazie alle relazioni di ortonormalità,

$$a_r = \sum_c \bar{\chi}_c^{(r)*} \bar{\chi}_c^{(\mathcal{D})}$$

(c.v.d.) da cui l'univocità di a_r essendo fissate $\bar{\chi}^{(r)}$ e $\bar{\chi}^{(\mathcal{D})}$.

Prendiamo ora due rappresentazioni $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ e decomponiamole,

$$\mathcal{D}_1 = \bigoplus_r a_r r$$

$$\mathcal{D}_2 = \bigoplus_r b_r r$$

abbiamo

$$a_r = \sum_c \bar{\chi}_c^{(r)*} \bar{\chi}_c^{(\mathcal{D}_1)}$$

$$b_r = \sum_c \bar{\chi}_c^{(r)*} \bar{\chi}_c^{(\mathcal{D}_2)}$$

se adesso supponiamo che $\bar{\chi}^{(\mathcal{D}_1)} = \bar{\chi}^{(\mathcal{D}_2)}$, abbiamo che $a_r = b_r$, perciò $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ hanno la stessa decomposizione, perciò sono equivalenti:

Teorema VI.48 Due rappresentazioni (anche riducibili) sono equivalenti se e solo se hanno gli stessi caratteri.

Digressione:
gruppi compatti

La definizione di carattere si applica anche al caso di gruppi infiniti; in particolare, se G è un gruppo compatto, valgono ancora i teoremi di ortonormalità e completezza di cui sopra. Ovviamente, alle somme si dovrà sostituire l'integrale sulla misura di Haar. Si ottiene che

- (i) le rappresentazioni finite sono un'infinità numerabile;
- (ii) i caratteri di due rappresentazioni irriducibili inequivalenti sono ortogonali;
- (iii) i caratteri di tutte le rappresentazioni irriducibili inequivalenti formano un set completo (nel senso della norma L^2) nello spazio delle funzioni di classe;
- (iv) scelti due elementi $g_1, g_2 \in G$ non coniugati, si trova sempre una rappresentazione irriducibile per la quale $\chi^{(r)}(g_1) \neq \chi^{(r)}(g_2)$.

VI.4.4 I lemmi di Schur

Quelli che stiamo per presentare sono risultati semplici quanto importanti. Ne vedremo un'applicazione allo studio delle simmetrie in meccanica quantistica.

Lemma VI.49
(primo,
di Schur)

Dato un gruppo G e due sue rappresentazioni irriducibili r_1 e r_2 , sugli spazi, ordinatamente, V_1 e V_2 , ogni omomorfismo $\omega \in \text{Hom}(V_1, V_2)$ per cui

$$\forall g \in G : \omega r_1(g) = r_2(g) \omega$$

se non è identicamente nullo, è un isomorfismo di V_1 in V_2 .

Dimostrazione Sia $V'_1 = \ker \omega$. Allora $\omega V'_1 = 0$. Applichiamo $r_2(g)$ e otteniamo

$$0 = r_2(g) \omega V'_1 = \omega r_1(g) V'_1$$

ne viene che l'insieme $r_1(g) V'_1$ appartiene al kernel di ω , cioè

$$r_1(g) V'_1 \subset V'_1$$

Ne viene che V'_1 è uno spazio r_1 -invariante. Siccome r_1 è irriducibile, abbiamo due casi: o $V'_1 = V_1$ e in tal caso $\omega = 0$ identicamente, oppure $V'_1 = \{0\}$, e ω è iniettivo. In questo secondo caso, si deve vedere che $V'_2 = R(\omega) = V_2$, cioè che ω è suriettivo. Abbiamo

$$r_2(g) V'_2 = r_2(g) \omega V_1 = \omega r_1(g) V_1 = \omega V_1 = V'_2$$

(c.v.d.) Anche V'_2 è un sottospazio r_2 -invariante, avendo escluso $V'_2 = \{0\}$, si ha $V'_2 = V_2$, la tesi.

In termini matriciali,

Lemma VI.50
(primo,
di Schur)

Date due rappresentazioni r_1 e r_2 irriducibili di un gruppo G , se esiste la matrice A tale che

$$\forall g \in G : A r_1(g) = r_2(g) A$$

allora A è una matrice quadrata e invertibile, oppure è la matrice nulla.

Veniamo al

Lemma VI.51
(secondo,
di Schur)

Dato un gruppo G e una sua rappresentazione irriducibile r sul $\mathbb{C}$ -spazio V a dimensione finita, ogni endomorfismo $\varphi \in \text{End } V$ che commuti con ciascun $r(g)$, $g \in G$, è multiplo dell'identità.

Dimostrazione Applichiamo il primo lemma con

$$r_1 = r_2 = r; \quad \omega = \varphi - \lambda \mathbb{I}$$

abbiamo che ω è un automorfismo, oppure è identicamente nullo. Siccome V è uno spazio lineare complesso, φ ammette almeno un autovalore $\mu \in \mathbb{C}$. Siccome il risultato di prima vale per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, deve valere anche per $\lambda \doteq \mu$. In tal caso, però $\ker \omega$ è non banale, perciò ω non è iniettivo, cioè non è un automorfismo. In definitiva, ω è nullo. Cioè

$$(c.v.d.) \quad \varphi = \mu \mathbb{I}.$$

Il fatto che la rappresentazione abbia da essere complessa è importantissimo (come si è visto nella dimostrazione). Un semplice controesempio è fornito dal gruppo $SO(2; \mathbb{R})$. La sua rappresentazione reale bidimensionale è certamente irriducibile, inoltre, siccome il gruppo è abeliano, ogni matrice $SO(2; \mathbb{R})$ commuta con tutte le altre, ma non è certo multipla dell'identità necessariamente.

Il controesempio suggerisce, peraltro

Corollario VI.52 *Le rappresentazioni irriducibili complesse di un gruppo abeliano sono tutte unidimensionali.*

Dimostrazione Poiché G è commutativo, tutti gli automorfismi $r(g)$ commutano tra di loro, perciò sono multipli dell'identità per il secondo lemma di Schur. Dunque, ogni sottospazio di V è

(c.v.d.) invariante, ma questo contrasta con l'ipotesi di irriducibilità, a meno che $\dim V = 1$.

**Generalizzazione
del lemma
di Schur**

Sia $\mathcal{D}$ una rappresentazione riducibile a somma diretta di rappresentazioni irriducibili inequivalenti $r_1, \dots, r_n$ aventi supporto in $V_1, \dots, V_n$ (che possiamo sempre supporre ortogonali). A commuti con $\mathcal{D}$. Vogliamo determinare la struttura di A .

Per semplicità supponiamo che sia $V = V_1 \oplus V_2$, allora, per ogni g , abbiamo

$$\mathcal{D}(g) = \left(\begin{array}{c|c} r_1(g) & 0 \\ \hline 0 & r_2(g) \end{array} \right)$$

e poniamo

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right)$$

dall'ipotesi di commutazione otteniamo

$$\left(\begin{array}{c|c} r_1(g) & 0 \\ \hline 0 & r_2(g) \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} r_1(g) A_{11} & r_1(g) A_{12} \\ \hline r_2(g) A_{21} & r_2(g) A_{22} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} r_1(g) & 0 \\ \hline 0 & r_2(g) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A_{11}r_1(g) & A_{12}r_2(g) \\ \hline A_{21}r_1(g) & A_{22}r_2(g) \end{array} \right)$$

per il secondo lemma di Schur, abbiamo

$$A_{11} = \lambda_1 \mathbb{I}_1; \quad A_{22} = \lambda_2 \mathbb{I}_1$$

Per il primo lemma di Schur, abbiamo invece che A_{12} e A_{21} sono invertibili oppure nulle. Siccome r_1 e r_2 inequivalenti, dobbiamo ammettere che $A_{12} = 0$, $A_{22} = 0$, infine

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 \mathbb{I}_1 & 0 \\ \hline 0 & \lambda_2 \mathbb{I}_2 \end{array} \right)$$

In generale, avremo

$$A = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n$$

dove $P_1, \dots, P_n$ sono i proiettori su $V_1, \dots, V_n$.

Simmetrie e lemma di Schur

Se A è una proprietà del sistema fisico, e il gruppo G descrive una simmetria del sistema, certamente per ogni $g \in G$, l'azione della simmetria sul sistema lo lascerà invariato, cioè

$$A = \mathcal{D}(g) A \mathcal{D}(g)^{-1}$$

ossia, A commuterà con $\mathcal{D}$. A questo punto dobbiamo aspettarci una degenerazione minima per gli autovalori di A (che peraltro dovrà risultare diagonalizzabile), infatti ogni autovalore avrà come degenerazione almeno la dimensione dei sottospazi invarianti di $\mathcal{D}$. Abbiamo detto almeno, perché se accadesse che $\lambda_1 = \lambda_2$, la degenerazione diverrebbe maggiore (**degenerazione accidentale**).

La degenerazione accidentale è particolarmente importante: se un sistema isotropo ed omogeneo viene immerso in un campo costante (effetto Stark o Zeeman), la simmetria residua del nostro sistema fisico sarà $SO(2; \mathbb{R})$. Siccome quest'ultimo è commutativo, ammetterà solo rappresentazioni (complesse) unidimensionali. Ci aspettiamo allora che gli autovalori siano tutti non degeneri, ma questo non è vero se si ha degenerazione accidentale (come avviene per l'atomo di idrogeno nell'effetto Stark).

Una tipica applicazione

Vogliamo studiare i modi normali di vibrazione di un sistema dotato di proprietà di simmetria. Consideriamo tre particelle eguali vincolate su un piano le cui forze di interazione siano di tipo elastico. La configurazione di equilibrio è costituita da un triangolo equilatero. La simmetria del problema è data dal gruppo di simmetria G del triangolo equilatero. Le configurazioni del sistema sono descritte da un vettore di $\mathbb{R}^6$, perciò ci occorre una rappresentazione su $\mathbb{R}^6$ di G . Abbiamo, se $x \in \mathbb{R}^6$,

$$m\ddot{x} = -Kx$$

dove K è una matrice 6-dimensionale i cui autovettori costituiscono i modi normali di vibrazione e i cui autovalori k sono legati alle pulsazioni di piccola oscillazione ω dalla ben nota formula

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Siccome il sistema all'equilibrio presenta la simmetria del triangolo equilatero, avremo che $\mathcal{D}(g)K = K\mathcal{D}(g)$ per ogni $g \in G$, perciò ci interessa decomporre $\mathcal{D}(g)$ su $\mathbb{R}^6$ in modo da contare le possibili degenerazioni delle autofrequenze del sistema.

Il gruppo G è composto da 6 elementi: l'identità, le due rotazioni attorno al baricentro di $2/3\pi$, le tre riflessioni rispetto alle tre altezze. Il modo in cui abbiamo enumerato gli elementi di G , costituisce anche la suddivisione di G in classi di coniugazione: le classi sono perciò 3. Ne viene che le rappresentazioni irriducibili del gruppo sono 3, le indicheremo con e, r e p . Dal teorema di Burnside abbiamo

$$6 = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2,$$

perciò le tre rappresentazioni hanno dimensioni 1, 1 e 2. Chiaramente abbiamo

$$\chi_e^{(1)} = 1, \quad \chi_e^{(2)} = 1, \quad \chi_e^{(3)} = 2,$$

tenendo conto delle relazioni di ortogonalità i caratteri delle 3 rappresentazioni saranno

$$\begin{array}{ccc} & e & r & p \\ R_1 & 1 & 1 & 1 \\ R_2 & 1 & 1 & -1 \\ R_3 & 2 & -1 & 0 \end{array}$$

Passiamo a scrivere i caratteri di $\mathcal{D}$, abbiamo, come è facile verificare,

$$\begin{array}{ccc} & e & r & p \\ \mathcal{D} & 6 & 0 & 0 \end{array}$$

Ora, non tutti gli spostamenti delle tre particelle corrispondono a vibrazioni del sistema: occorre escludere le trasformazioni rigide. Tali movimenti sono descritti dalle rappresentazioni R_2 (rotazioni: dimensione 1) e R_3 (traslazioni dimensione 2). Sottraendo i rispettivi caratteri da $\mathcal{D}$, si ottiene che il moto vibrazionale del sistema si decompone in somma diretta di R_1 e R_3 , perciò si ha un'autofrequenza con degenerazione 1 e una autofrequenza con degenerazione 2.

VI.4.5 Gruppi di Lie

Concluso lo studio dei gruppi finiti, vogliamo sbrigativamente introdurre alcune importanti nozioni su una particolare categoria di gruppi infiniti: i **gruppi di Lie**. Quanto segue è un'esposizione a carattere divulgativo degli aspetti principali sui gruppi di Lie: non solo non ci addentreremo nelle dimostrazioni dei risultati che daremo, ma neppure saremo in grado di definire precisamente le nozioni nuove che incontreremo. Sconsigliamo la lettura del seguito ai deboli di stomaco (chi si scrive si è premunito con qualche kg di bicarbonato).

Un gruppo di Lie è una sorta di gruppo continuo, tale cioè che ogni suo elemento (almeno nei pressi dell'identità) sia individuato da un numero finito di parametri (coordinate) variabili con continuità e tali che i parametri di $g_1 g_2$ siano esprimibili tramite funzioni analitiche dei parametri di g_1 e g_2 . I gruppi di matrici sono, evidentemente, gruppi di Lie (e quasi esclusivamente di essi ci occuperemo).

Interessanti sono i gruppi di Lie che sono per di più compatti, essi, come anticipato, hanno rappresentazioni che sono equivalenti a rappresentazioni unitarie. Queste ultime sono sempre completamente riducibili in rappresentazioni irriducibili a dimensione finita.

Sono compatti i gruppi $U(n)$, $SU(n)$, $O(n)$, $SO(n)$, mentre non è compatto il gruppo delle traslazioni. Intuitivamente, i gruppi di Lie compatti sono tali che l'insieme dei parametri che occorrono per descrivere ogni elemento occupa un volume finito (descrive un compatto).

Sia G un gruppo di Lie (di matrici $n \times n$). Si può mostrare che, almeno in un intorno dell'identità ogni matrice M del gruppo può essere scritta nella forma

$$M = e^A$$

Facciamo la dimostrazione nel caso in cui M sia diagonalizzabile. In questo caso,

$$M = SDS^{-1},$$

dove $D_{ij} = m_i \delta_{ij}$. Siccome ogni $m_i \neq 0$, abbiamo $m_i = e^{\alpha_i}$. Si ha, allora, posto $\bar{A}_{ij} = \alpha_i \delta_{ij}$

$$D = e^{\bar{A}}$$

da cui

$$M = S e^{\bar{A}} S^{-1} = e^{S \bar{A} S^{-1}}.$$

Si noti che $e^{A+B} \neq e^A e^B$, a meno che A e B commutino. Inoltre, $(e^A)^{-1} = e^{-A}$, $(e^A)^t = e^{A^t}$ e $\det e^A = e^{\text{Tr } A}$.

La corrispondenza $M \rightarrow A$ è biunivoca e bicontinua fra un intorno dell'identità di G e un intorno dello 0 dello spazio delle matrici in cui varia A al variare di M nel gruppo di matrici. Lo spazio cui appartiene A , che si denota con $\mathcal{A}$, è uno spazio vettoriale che si dice anche **spazio tangente**. Il contenuto di tutte le ultime affermazioni proviene dal cosiddetto **primo teorema di Lie**. Fissata una base di $\mathcal{A}$ che denotiamo con $A_1, \dots, A_r$ abbiamo

$$M = \exp \left(\sum_{i \in J_r} a_i A_i \right)$$

e gli a_i sono i parametri di cui parlavamo all'inizio della sottosezione e si dicono anche **parametri di Lie**.

Vediamo un esempio. Sia $G = SU(n)$. Per ogni $M \in G$ si ha $M = e^A$, $A \in \mathcal{A}$. Caratterizziamo $\mathcal{A}$. Abbiamo $MM^\dagger = M^\dagger M = \mathbb{I}$, perciò

$$e^A e^{A^\dagger} = e^{A^\dagger} e^A = e^{A+A^\dagger} = e^0$$

da cui $A = -A^\dagger$, perciò $\mathcal{A}$ è un sottoinsieme dell'insieme delle matrici antihermitiane. D'altra parte, si ha pure $\det M = 1$, da cui $\text{Tr } A = 0$, perciò $\mathcal{A}$ è costituito dalle matrici stracciate antihermitiane. Le condizioni $A = -A^\dagger$ e $\text{Tr } A = 0$ sono lineari, a testimonianza del fatto che $\mathcal{A}$ è uno spazio vettoriale.

Nel caso di $SU(3)$, si ha $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{A} = 3 \times 2 + 3 - 1 = 8$, perciò $SU(3)$ è un gruppo a 8 parametri (8 si dice **dimensione di Lie** del gruppo). Nel caso in cui si consideri $SO(n)$, $\mathcal{A}$ risulta dato dall'insieme delle matrici antisimmetriche (le quali hanno ovviamente traccia nulla). $SO(3)$ è perciò un gruppo a tre parametri (due per l'asse di rotazione, uno per l'angolo di rotazione).

VI.4.6 Generatori infinitesimi di un gruppo di Lie

Se G è un gruppo di Lie e M è vicina all'identità, si ha

$$M \approx \mathbb{I} + \sum_{i=1}^r a_i A_i$$

Consideriamo, al variare di t , i seguenti elementi di G

$$g_i(t) = e^{tA_i}$$

essi formano un sottogruppo abeliano a un parametro di G . Le matrici A_i si dicono **generatori infinitesimi** di G .

I generatori infinitesimi di un gruppo si ottengono come segue

$$\left. \frac{\partial}{\partial a_j} M \right|_{a=0} = A_j.$$

Poniamo ora $M_j = \mathbb{I} + \varepsilon A_j + o(\varepsilon)$ e consideriamo $g \in G$ talché

$$g = \exp \left(\sum_{i=1}^r a_i A_i \right)$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned} g' &= M_j g M_j^{-1} = (\mathbb{I} + \varepsilon A_j + o(\varepsilon)) \exp \left(\sum_{i=1}^r a_i A_i \right) (\mathbb{I} - \varepsilon A_j + o(\varepsilon)) = \\ &= \mathbb{I} + \sum_{i=1}^r a_i A_i + \varepsilon \sum_i a_i A_j A_i - \varepsilon \sum_i a_i A_i A_j + \dots = \\ &= \mathbb{I} + \sum_{i=1}^r a_i A_i - \varepsilon \sum_i a_i [A_i, A_j] + \dots \end{aligned}$$

Derivando in a_i ambo i membri si ha

$$\left. \frac{d}{da_i} g' \right|_{a=0} = A_i - \varepsilon [A_i, A_j]$$

siccome il primo membro appartiene a $\mathcal{A}$, si ha che (**secondo teorema di Lie**) il commutatore di due qualsiasi elementi di $\mathcal{A}$ appartiene ad $\mathcal{A}$.

Si può dimostrare che $\mathcal{A}$ è un'algebra di Lie (la cui struttura è nota dal corso di Istituzione di Fisica Teorica) e si ha, ovviamente,

$$[A_i, A_j] = \sum_k c_{ijk} A_k$$

le costanti c_{ijk} si dicono **costanti di struttura del gruppo**. Le formule di sopra si dicono **regole di commutazione**.

Finora, l'algebra di Lie è stata introdotta a partire da un gruppo di matrici: si potrebbe far vedere che questo è possibile a partire dal gruppo astratto, in ogni modo un gruppo di Lie

ammette sempre una rappresentazione fedele nello spazio delle matrici (**teorema di Ado**).

In ogni caso, le costanti di struttura non dipendono dalla rappresentazione matriciale che si usa, ma sono individuate esclusivamente dalle proprietà del gruppo.

Accanto al problema di determinare e classificare le rappresentazioni irriducibili di un gruppo di Lie, si pone il problema di determinare le matrici che soddisfano le regole di commutazione e che costituiscono la rappresentazione matriciale dell'algebra di Lie. Mentre ogni rappresentazione del gruppo individua una rappresentazione dell'algebra, non è detto che valga il viceversa.

Esempio VI.16 Come è noto, per esempio dal corso di Meccanica Razionale, i generatori infinitesimi del gruppo $SO(3)$ sono tre le matrici tridimensionali $[A_i]_{jk} = \varepsilon_{ijk}$. Le regole di commutazione sono

$$[A_i, A_j] = -\varepsilon_{ijk} A_k$$

In fisica è consuetudine porre $J_k = -iA_k$ in modo che i generatori divengano hermitiani, allora

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k.$$

■

VI.4.7 Rappresentazioni differenziali di rotazioni e traslazioni

Sia V lo spazio vettoriale sul quale opera il nostro gruppo di Lie di matrici e consideriamo lo spazio di Hilbert delle funzioni da V in $\mathbb{C}$, $L^2(V)$.

Per ciascun $g \in G$ consideriamo la trasformazione

$$T_g : L^2(V) \rightarrow L^2(V)$$

data da

$$(T_g f)(x) = f(g^{-1}x), \quad \forall x \in V.$$

La trasformazione T_g è ovviamente lineare. Inoltre,

$$(T_{g_1}(T_{g_2}f))(x) = (T_{g_2}f)(g_1^{-1}x) = f(g_2^{-1}g_1^{-1}x) = f((g_1g_2)^{-1}x) = (T_{g_1g_2}f)(x)$$

da cui

$$T_{g_1}T_{g_2} = T_{g_1g_2}$$

cioè $g \mapsto T_g$ è una rappresentazione (in dimensione infinita) del gruppo G .

Per esempio, sia $V = \mathbb{R}$ e sia G il gruppo delle traslazioni sulla retta. G non è compatto, né è un gruppo di matrici. Inoltre,

$$(T_a f)(x) = f(x - a)$$

l'operatore T_a è banalmente unitario su $L^2(\mathbb{R})$. Il gruppo T_a è un gruppo a un parametro di operatori unitari, perciò, **teorema di Stone**, esiste un operatore autoaggiunto H tale che

$$T_a = e^{iaH}.$$

Si ha che iH è il generatore infinitesimo del gruppo delle traslazioni su L^2 .

Vogliamo determinare il generatore infinitesimo iH . Passiamo in trasformata

$$\hat{F}(T_a f) = e^{iak} \hat{f}(k)$$

supposto che f fosse $\mathcal{C}^1$, con derivata L^2 , abbiamo che la funzione $k\hat{f} \in L^2$. Adesso, noi dobbiamo calcolare

$$L^2 - \lim_{a \rightarrow 0} \frac{T_a f - f}{a}$$

che in trasformata diventa

$$L^2 - \lim_{a \rightarrow 0} \frac{e^{iak} - 1}{iak} ik\hat{f} = ik\hat{f}$$

da cui

$$L^2 - \lim_{a \rightarrow 0} \frac{T_a f - f}{a} = -\frac{d}{dx} f$$

cioè

$$iH = -\frac{d}{dx} \implies H = i\frac{d}{dx}$$

che, appunto, è autoaggiunto.

Occupiamoci ora della rappresentazione del gruppo $SO(2)$ sullo spazio $L^2_{2\pi}$. Ogni elemento di $SO(2)$ è individuato dall'angolo α di rotazione. Poniamo allora, sulle funzioni con condizioni al bordo periodiche,

$$(T_\alpha f)(\theta) = f(\theta + \alpha)$$

si verifica facilmente che l'applicazione $\alpha \mapsto T_\alpha$ è una rappresentazione di $SO(2)$ su $L^2_{2\pi}$. Vogliamo ottenere la decomposizione della rappresentazione data.

Cominciamo con il determinare il generatore infinitesimo:

$$\frac{T_\alpha - \mathbb{I}}{\alpha} f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n(T_\alpha f) - c_n(f)}{\alpha} e^{in\theta}$$

abbiamo

$$c_n(T_\alpha f) = \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(\theta + \alpha) d\theta = e^{in\alpha} \int_\alpha^{2\pi+\alpha} e^{-in\psi} f(\psi) d\psi = e^{in\alpha} c_n(f)$$

da cui

$$\frac{T_\alpha - \mathbb{I}}{\alpha} f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{in\alpha} - 1}{\alpha} c_n(f) e^{in\theta}$$

Vogliamo calcolare il limite

$$L^2 - \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{T_\alpha - \mathbb{I}}{\alpha} f$$

calcoliamo allora

$$\ell^2 - \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{e^{in\alpha} - 1}{\alpha} c_n(f)$$

Il limite puntuale (a n fissato) di sopra vale $inc_n(f)$, perciò, se supponiamo che f sia tale che $\{nc_n(f)\} \in \ell^2$, cioè f appartiene al dominio della derivata con condizioni al bordo periodiche, troviamo, per il teorema di Lebesgue,

$$\ell^2 - \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{e^{in\alpha} - 1}{\alpha} c_n(f) = inc_n(f)$$

da cui, per la chiusura della derivata sul dominio detto,

$$L^2 - \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{T_\alpha - \mathbb{I}}{\alpha} f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} inc_n(f) e^{in\theta} = \frac{d}{d\theta} f$$

Ne viene che il generatore infinitesimo del gruppo è $d/d\theta$. Per ridurre la rappresentazione dobbiamo determinare i sottospazi invarianti sotto ogni T_α . Procediamo, invece, a calcolare i sottospazi invarianti sotto il generatore infinitesimo. Si tratta cioè di risolvere l'equazione agli autovalori per $d/d\theta$:

$$\frac{d}{d\theta} F = \lambda F$$

Notiamo subito che $d/d\theta$ ammette un set completo di autovettori:

$$\frac{d}{d\theta} e^{in\theta} = in e^{in\theta}$$

e questo conclude il problema della ricerca di autovalori e autospazi: i sottospazi invarianti sotto generatori infinitesimi sono $\text{Span} \langle e^{in\theta} \rangle$ al variare di $n \in \mathbb{Z}$.

Nella base degli $e^{in\theta}$ abbiamo

$$T_\alpha e^{in\theta} = e^{in\alpha} e^{in\theta}$$

perciò, in tale base, la rappresentazione è diagonale

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} \begin{array}{cc|cc} e^{i\alpha} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} & & & \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc|cc} 0 & e^{2i\alpha} & 0 & \ddots & \vdots \\ & 0 & e^{-2i\alpha} & & \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc|cc} 0 & \vdots & \ddots & & 0 \\ & 0 & & \dots & e^{ni\alpha} & 0 \\ 0 & & 0 & & 0 & e^{-ni\alpha} \end{array} \end{pmatrix}$$

Occupiamoci, per concludere di $SO(3)$. Ancora, poniamo

$$(T_g f)(x) = f(g^{-1}x)$$

e andiamo così a rappresentare (il fatto che si tratta di una rappresentazione si dimostra come al solito) $SO(3)$ in modo **unitario** su $L^2(\mathbb{R}^3)$. Visto che il gruppo è compatto la rappresentazione si deve decomporre in infinite rappresentazioni irriducibili di dimensione finita.

Andiamo a calcolare i generatori infinitesimi del gruppo. Isoliamo il sottogruppo delle rotazioni attorno a un asse: per esempio l'asse x_3 in modo da avere ancora a che fare con un sottogruppo a un parametro (per il quale vale il teorema di Stone!) troviamo, se φ è l'angolo di rotazione e φ è piccolo

$$f(x_1 - x_2\varphi; x_1\varphi + x_2; x_3) = f(x) + \varphi x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} f - \varphi x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} f$$

da cui (e stavolta non ci addentriamo nelle questioni di dimostrare che il limite puntuale è anche il limite forte)

$$A_3 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}$$

Naturalmente si ottengono relazioni analoghe per A_1 e A_2 . Si verifica facilmente che i generatori trovati soddisfano le regole di commutazione trovate in precedenza (come doveva essere). Inoltre, si riconosce che $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$ commuta con ciascuno degli A_i . Ma questo significa che A^2 commuta con ciascun elemento del gruppo, perciò, su ogni rappresentazione irriducibile del gruppo stesso, per il lemma di Schur, deve essere semplicemente un multiplo dell'identità. Questo fatto è di capitale importanza, perché consente di determinare le rappresentazioni irriducibili del gruppo semplicemente risolvendo il problema agli autovalori per A^2 . Passando in coordinate polari il problema può essere risolto.

In ogni modo, è noto dalla meccanica quantistica che A^2 ammette come autovalori $\lambda = \ell(\ell + 1)$ al variare di $\ell \in \mathbb{N}$ e che l'autospazio $E(\ell, A^2)$ ha dimensione $2\ell + 1$.

VI.4.8 Prodotto tensoriale di rappresentazioni

Siano V e W due spazi vettoriali e siano $\{e_i\}$ e $\{f_j\}$ le basi di V e W , ordinatamente. Allora lo spazio $V \otimes W$ dei vettori

$$\sum_{i,j} \lambda_{ij} (e_i \otimes f_j)$$

si chiama **prodotto tensore** dei due spazi (se i due spazi sono di Hilbert il prodotto tensore è il completamento dello spazio detto). Il prodotto tensore contiene vettori entangled come quello scritto sopra e vettori fattorizzabili come

$$v \otimes w = \sum_{i,j} v_i w_j (e_i \otimes f_j)$$

La base del prodotto tensore, $\{e_i \otimes f_j\}$ è data da vettori fattorizzati.

Se V e W sono i supporti delle rappresentazioni R e S del gruppo G , è naturale considerare la rappresentazione prodotto $R \otimes S$ che agisce su $V \otimes W$ come segue

$$(R \otimes S)(v \otimes w) = (Rv) \otimes (Sw)$$

Perciò, sui vettori entangled si ha

$$(R \otimes S) \sum_{i,j} \lambda_{ij} (e_i \otimes f_j) = \sum_{i,j} \lambda_{ij} (Re_i) \otimes (Sf_j)$$

In generale $R \otimes S$ sarà riducibile anche se R ed S sono irriducibili.

Se $V = W = \mathbb{R}^n$ allora $V \otimes W$ risulta isomorfo allo spazio delle matrici reali quadrate $n \times n$ intese come spazio vettoriale. Infatti, ogni vettore dello spazio tensore è individuato univocamente dalla combinazione λ_{ij} che è una matrice reale. Ora, un po' di notazione: tiriamo via gli e_i ed f_j . Sia R la nostra rappresentazione, essa associ al vettore v il vettore v' come segue

$$v'_i = R_{ij}(g) v_j$$

allora

$$\lambda'_{kl} = [(R \otimes R) \lambda_{ij}]_{kl} = \lambda_{ij} (Re_i) \otimes (Re_j) = \lambda_{ij} R_{ki} R_{lj}$$

cioè

$$\lambda'_{kl} = R_{ki} R_{lj} \lambda_{ij}$$

Se G è $SO(n)$ e se ne considera la naturale rappresentazione su $\mathbb{R}^n$

$$v'_i = M_{ij} v_j$$

allora la rappresentazione $R \otimes R$ operante su $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$ associa a T la matrice T' data da

$$T'_{ij} = M_{ik} M_{jl} T_{kl}$$

cioè

$$T' = MTM^t = MTM^{-1} \in \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n.$$

Partite da una rappresentazione irriducibile siamo giunti a una rappresentazione riducibile, così come abbiamo fatto in precedenza nel caso $SO(3)$.

Bibliografia

1. **Kôsaku Yosida**, *Functional Analysis*, Springer-Verlag;
2. **Maria Cristina Abbati, Renzo Cirelli**, *Metodi matematici per la fisica, operatori lineari negli spazi di Hilbert*, Città Studi Edizioni;
3. **Michael Reed, Barry Simon**, *Modern Methods of Mathematical Physics*, (volume 1) *Functional Analysis*, Academic Press;
4. **Michael Reed, Barry Simon**, *Modern Methods of Mathematical Physics*, (volume 2) *Fourier Analysis, Self-Adjointness*, Academic Press;
5. **Walter Thirring**, *A course in Mathematical Physics 3: Quantum Mechanics of atoms and molecules*, Springer-Verlag;
6. **Paolo Caressa**, *Meccanica Quantistica*, appunti dal web math.unifi.it/~caressa;
7. **A. A. Kirillov, A. D. Gvišiani**, *Teoremi e problemi dell'analisi funzionale*, MIR;
8. **Serge Lang**, *Real and Functional Analysis*, GTM, Springer;
9. **Francis Hirsch, Gilles Lacombe**, *Elements of Functional Analysis*, GTM, Springer;
10. **Ciro Ciliberto**, *Algebra lineare*, Bollati Boringhieri;
11. **Mariano Giaquinta, Giuseppe Modica**, *Analisi*, Pitagora;
12. **Enrico Giusti**, *Analisi II*, Bollati Boringhieri;
13. **Giuseppe De Marco**, *Analisi Due*, Decibel;
14. **Hans F. Weinberger**, *A first course on partial differential equations*, Blaisdell Publishing Company;
15. **Giampaolo Cicogna**, *Appunti di metodi matematici della fisica*, SEU;
16. **Alberto Maggi**, *Analisi II per Fisici*.