LINEARITÀ DELLE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ

ALBERTO MAGGI

Abstract. In questo articolo riportiamo la dimostrazione della linearità delle trasformazioni di Lorentz, affermata dal teorema di Hegerfeldt e basata sulla semplice assunzione della costanza della velocità della luce. Il risultato ottenuto si basa sul teorema fondamentale della geometria affine, secondo il quale biiezioni tra spazi affini che mandino rette su rette sono trasformazioni affini.

1. Introduzione

1.1. **Impostazione del problema.** La teoria della relatività ristretta si basa su due ben noti assiomi, il principio di relatività di Einstein e il principio della costanza della velocità della luce:

Assioma 1.1. *I riferimenti inerziali sono fisicamente del tutto equivalenti (la fisica fatta da osservatori in riferimenti inerziali è la stessa).*

Assioma 1.2. *In ogni riferimento inerziale, la luce procede di moto rettilineo uniforme con velocità eguale a c.*

Quello che ci interessa è determinare la legge di trasformazione T tra le coordinate spaziotemporali usate in due differenti sistemi inerziali. Poiché T è una trasformazione di coordinate se ne assume la biunivocità. Se si identifica lo spaziotempo M con lo spazio affine $\mathbb{R}^n$ delle n-uple $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$, abbiamo che T è una trasformazione (passiva) di M in sé. Il problema che si pone è quello di determinare T.

Osservazione 1.1. *Si noti che oltre ai due assiomi di Einstein, abbiamo fatto due ulteriori assunzioni elementari, lo spaziotempo è uno spazio affine e le trasformazioni tra sistemi di riferimento sono biiezioni dello spaziotempo in sé.*

1.1.1. *Proprietà di T.* Per passare alla determinazione precisa di T, dobbiamo ricercare quelle che sono le proprietà fondamentali di T stessa. In particolare, vedremo che, in forza dell'assioma di costanza della velocità della luce, T è un'applicazione affine, cioè, a parte una traslazione e un cambiamento di scala, T è una trasformazione di Lorentz. Il problema della dimostrazione del fatto che T è affine è spesso sottovalutato, taciuto, oppure dimostrato in forza dell'assunzione dell'isotropia dello spazio e dell'omogeneità del tempo. In questo lavoro ci proponiamo di dare una prova rigorosa di questo risultato, sulla linea della dimostrazione data da Borchers ed Hegerfeldt [BH72].

1.2. **Il teorema di Hegerfeldt.**

Date: Ottobre 29, 2001.

1.2.1. *Spazio tempo di Minkowski.* Sia M lo spaziotempo che dotiamo della seguente forma quadratica, se $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$

$$x^2 \equiv x_0^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \tag{1.1}$$

La coppia data da M e dalla forma 1.1 (metrica di Minkowski) si dice, come è noto, **spaziotempo di Minkowski**. L'introduzione della metrica di Minkowski ci permette di riformulare l'assioma di costanza della velocità della luce nel seguente modo:

$$x^2 = 0 \Longleftrightarrow (Tx)^2 = 0$$

cioè la trasformazione di M è in sé deve preservare la relazione

$$\left\{(x-y)^2 = 0\right\} \tag{1.2}$$

1.2.2. *Teorema di Hegerfeldt.* Quello che vogliamo mostrare è che la conservazione della relazione 1.2 implica che T è affine e, dunque, a meno di una traslazione e di una riscalatura, T appartiene al gruppo di Lorentz (i.e., T conserva la metrica di Minkowski):

Teorema 1.1 (di Hegerfeldt)**.** *Sia* $\dim M \geq 3$ *e sia* T *una mappa* $1-1$ *di* M *su* M*. Se* T *e* T^{-1} *preservano la relazione* $(x-y)^2 = 0$*. Il gruppo di tutte le mappe siffatte è generato*

1. *dal gruppo di Lorentz;*
2. *dalle traslazioni;*
3. *dalle dilatazioni.*

Il programma delle prossime sottosezioni sarà quello di dimostrare il teorema sopra enunciato.

1.2.3. *Notazioni e terminologia.* Un vettore $x \in M$ si dice di tipo spazio se $x^2 < 0$, di tipo tempo se $x^2 > 0$ e di tipo luce se $x^2 = 0$ (vettore isotropo).

C_a denota il cono luce di origine in a, i.e.,

$$C_a = \left\{x \in M \,\middle|\, (x-a)^2 = 0\right\}$$

L'interno di C_a (propriamente l'insieme la cui frontiera è C_a) si denoterà con $\hat{C}_a$, dunque,

$$\hat{C}_a = \left\{x \in M \,\middle|\, (x-a)^2 > 0\right\}.$$

Infine, $\hat{C}_a^+$ è il cono positivo,

$$\hat{C}_a^+ = \left\{x \in M \,\middle|\, (x-a)^2 > 0 \,\&\, x_0 > a_0\right\}$$

mentre $\hat{C}_a^-$ è il cono negativo.

Indicheremo i trasformati secondo T con un apice, per esempio, porremo $x' \equiv Tx$.

2. Dimostrazione del teorema di Hegerfeldt

2.1. **Risultati preliminari.** Prima di procedere alla dimostrazione del teorema ci occorrono tre lemmi che esaminiamo qui di seguito

Lemma 2.1. *Sia W una linea di tipo luce in M, $W = \{x = \lambda w + a,\, \lambda \in \mathbb{R}\}$, dove $w^2 = 0$, e consideriamo l'iperpiano $H_W \equiv \{x\,|w \cdot (x-a) = 0\}$ che contiene W. Allora H_W è tangente a ogni cono con vertice in W e l'unione di tutti questi coni è $M\setminus(H_W \setminus W)$.*

Prova. Sia

$$C_\tau \equiv \left\{x \,\middle|\, (x - \tau w - a)^2 = 0\right\}$$

un cono luce con vertice in W (nel punto $\tau w + a$). Sia $y \notin H_W$, allora $y \in C_\tau$ con

$$\tau = \frac{(y-a)^2}{2w \cdot (y-a)}$$

Vediamo l'inclusione inversa, se

$$y \in H_W^c \cap \bigcup_\tau C_\tau$$

allora abbiamo finito. Viceversa,

$$y \in H_W \cap \bigcup_\tau C_\tau,$$

allora esiste τ_0 per cui

$$0 = (y - \tau_0 w - a)^2 = (y-a)^2 - 2\tau_0 w \cdot (y-a) = (y-a)^2 \tag{2.1}$$

Dunque, per ogni τ risulta

$$(y - \tau_0 w - a)^2 = (y-a)^2 - 2\tau_0 w \cdot (y-a) = (y-a)^2 = 0$$

cioè

$$y \in \bigcap_\tau C_\tau = W,$$

da cui,

$$\bigcup_\tau C_\tau = M\setminus(H_W \setminus W)\,.$$

∎

Se T mappa coni luce in coni luce, cioè preserva la relazione $(x-y)^2 = 0$, allora mappa linee luce su linee luce (visto che queste sono intersezioni di coni luce), cioè W su W'. Combinando questo con il lemma 2.1, T mappa $M\setminus(H_W \setminus W)$ su $M\setminus(H_{W'} \setminus W')$. Perciò, in definitiva, T mappa H_W su $H_{W'}$. Più tardi faremo un uso decisivo di questa semplice osservazione.

Lemma 2.2. *H_W contiene solo linee di spazio e di tipo luce. Queste ultime sono tutte parallele a W.*

Prova. Sia $W_1 \subset H_W$ una linea,

$$W_1 = \{x = \lambda w_1 + b,\, \lambda \in \mathbb{R}\}\,.$$

Dopo uno spostamento parallelo, possiamo assumere che $b = a$. Se w_1 è di tipo luce, il fatto che

$$w \cdot (\lambda w_1 + a - a) = 0$$

implica, tramite l'equazione 2.1 con $y = \lambda w_1 + a$, che $\lambda w_1 + a \in \bigcap_\tau C_\tau = W$. Ne deriva che $W_1 \subset W$.

Sia $W_1 \subset H_W$ di tipo tempo. Abbiamo $w_1 \cdot w = 0$, ma $w_1^2 > 0$ e $w^2 = 0$, il che è assurdo:

$$\begin{aligned} w_1 \cdot w = 0 \quad &\Longrightarrow \quad w_1^0 w^0 = \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w} \Longrightarrow \left|w_1^0\right| \left|w^0\right| = |\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}| \le |\mathbf{w}_1|\,|\mathbf{w}| = |\mathbf{w}_1|\,\left|w^0\right| \\ &\Longrightarrow \quad \left|w_1^0\right| \le |\mathbf{w}_1| \Longrightarrow w_1^2 \le 0. \end{aligned}$$

∎

Lemma 2.3. *Ogni linea di tipo spazio W è l'intersezione di $n-1$ iperpiani H_{W_i}.*

Prova. Assumiamo

$$W = \{x = \lambda w,\, \lambda \in \mathbb{R}\}\,,\ w^2 < 0.$$

Fissiamo una base di M che abbia il vettore x_{n-1} parallelo a w. Adesso, vogliamo trovare $n-1$ vettori indipendenti di tipo luce che siano ortogonali a w. I vettori cercati devono essere ortogonali a $(0, \dots, 1)$ perciò, banalmente,

$$(1, 1, \dots, 0)\,, (1, 0, 1, \dots, 0)\,, \dots, (1, 0, \dots, 1, 0)\,, \left(1, \sqrt{1/2}, \sqrt{1/2}, \dots, 0\right).$$

Chiamiamo gli $n-1$ vettori di tipo luce linearmente indipendenti, allora w_i con $w \cdot w_i = 0$. Se W_i sono le linee per l'origine parallele a w_i, basta prendere gli $n-1$ iperpiani H_{W_i} per avere la tesi. ∎

2.2. Prova del teorema di Hegerfeldt.

2.2.1. *Linee spazio su linee spazio.* Veniamo, infine, all'attesa prova del teorema di Hegerfeldt. Come osservato, dal lemma 2.1 segue che H_W è mappato su $H_{W'}$ per ogni linea luce W. Grazie al lemma 2.3, allora, ogni linea spazio è mappata su una linea spazio.

2.2.2. *Piani in piani.* Adesso vogliamo vedere che i piani (sottospazi affini bidimensionali) sono mappati su piani da T. A questo scopo usiamo il fatto che ogni piano contiene sempre tre direzioni spaziali (non parallele) tra loro. Sia dato, dunque, un piano π. Siano s_1, s_2 e s_3 le tre rette spaziali non parallele individuate su π. Sia O l'intersezione di s_1 e s_2. Consideriamo $\tilde{\pi}$ il piano generato dalle immagini di s_1 e s_2. Adesso consideriamo un qualunque punto Q in π. Consideriamo la retta $s_{3\mathrm{Q}}$ parallela a s_3 per Q. Essa è di tipo spazio e incide s_1 e s_2 in A e B. $s'_{3\mathrm{Q}}$ passa per A$'$ e B$'$ che appartengono a $\tilde{\pi}$, perciò $s'_{3\mathrm{Q}}$ è contenuto in $\tilde{\pi}$. Infine, Q$' \in s'_{3\mathrm{Q}}$ appartiene a $\tilde{\pi}$. Concludiamo che $\pi' \subset \tilde{\pi}$. In particolare, s'_3 appartiene a $\tilde{\pi}$. Adesso ragionando analogamente su T^{-1} e $\tilde{\pi}$, usando s'_1, s'_2 e s'_3, troviamo che ogni punto di $\tilde{\pi}$ è immagine secondo T di un punto di π. Perciò $\pi' = \tilde{\pi}$. T manda piani su piani.

2.2.3. *Rette in rette.* Poiché le rette sono intersezioni di due piani,ogni retta di M è mappata su una retta di M. Per il teorema fondamentale della geometria affine [CP99], siccome T è biunivoco e mappa rette su rette, T è affine. Cioè $Tx = Ax + a$, con A matrice n-dimensionale.

2.2.4. *Linearità e gruppo di Lorentz.* La legge di trasformazione tra due riferimenti inerziali è, dunque, affine. Se adesso facciamo in modo che al tempo zero, le origini dei due sistemi di riferimento inerziali coincidano, ne abbiamo che $T = A$, cioè T è lineare. Ora, abbiamo

Proposizione 2.4. *Se $x^2 = 0$ implica $(Tx)^2 = 0$ per ogni $x \in M$, con T lineare, allora $(Tx)^2 = kx^2$, per $k \in \mathbb{R}$ e per ogni $x \in M$.*

Prova. Lavoriamo in notazione matriciale. Sia perciò $g = \operatorname{diag}(1, -1, \ldots, -1)$ il tensore metrico di Minkowski. Abbiamo

$$x^t g x = 0 \Longleftrightarrow x^t T^t g T x = 0$$

dalla quale vogliamo ricavare

$$x^t T^t g T x = k\, x^t g x,$$

cioè

$$T^t g T = kg.$$

Sia

$$\mathcal{M} \equiv T^t g T = \left(\begin{array}{c|c} m_0 & \mathbf{m}^t \\ \hline \mathbf{m} & M \end{array} \right)$$

con $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $M \in S(n-1; \mathbb{R})$, essendo $\mathcal{M}$ simmetrica. Sia $x = (x_0, \pm\mathbf{x})$ talché $x^t g x = 0$, abbiamo

$$0 = x^t \mathcal{M} x = \left(x_0, \pm\mathbf{x}^t\right) \left(\begin{array}{c} m_0 x_0 \pm \mathbf{x} \cdot \mathbf{m} \\ x_0 \mathbf{m} \pm M\mathbf{x} \end{array} \right) = m_0 x_0^2 \pm 2x_0 \mathbf{x} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{x}^t M \mathbf{x}$$

Siccome $x_0 = |\mathbf{x}|^2$, sommiamo e sottraiamo le due equazioni ottenute sopra,

$$\begin{aligned} m_0 x_0^2 + \mathbf{x}^t M \mathbf{x} &= 0 \Longrightarrow \mathbf{x}^t \left(m_0 \mathbb{I}_{n-1} + M\right) \mathbf{x} = 0 \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{m} &= 0 \Longrightarrow \mathbf{m} = 0 \end{aligned}$$

dove la seconda implicazione segue dall'arbitrarietà di $\mathbf{x}$. Sempre in forza dell'arbitrarietà di $\mathbf{x}$, abbiamo

$$M = -m_0 \mathbb{I}_{n-1},$$

infine,

$$T^t g T = m_0 g$$

ponendo $k \equiv m_0$, abbiamo la tesi. ∎

Per $\dim M > 2$, l'esterno di C_0 è connesso, al contrario dell'interno. Poiché A è continuo, non può mappare l'interno di C_0 nell'esterno di C_0, dunque, $k > 0$. Ne viene che $T = k^{1/2}\Lambda$ con $(\Lambda x)^2 = x^2$, cioè Λ è una trasformazione di Lorentz. Questo conclude la dimostrazione del teorema di Hegerfeldt.

Scelte opportune unità di misura, fissate in tutti i riferimenti, concludiamo $k = 1$.

References

[BH72] **Borchers, Hegerfeldt**, Structure of spacetime trasnformations, *Communications in Mathematical Physics*, **28**, 259-266 (1972).

[He72] **Hegerfeldt**, The Lorentz transformations: Derivation of linearity and scale factor, *Il Nuovo Cimento A*, **10**, 257-267 (1972).

[CP99] **Chubarev, Pinelis,** Fundamental theorem of geometry without 1-1 assumption, *Procedings of the AMS* **127**, 2735-2744 (1999).

[CP00] **Chubarev, Pinelis,** Linearity of spacetime transformations, *Commun. Math. Phys.* **215**, 433-441 (2000).

55 via Lopez, 57010 Guasticce (LI)

E-mail address: q.alberto@inwind.it