TORTUGA
Publisher

Teoria delle rappresentazioni per fisici

Varietà differenziabili e gruppi di Lie. Teoria delle rappresentazioni dei gruppi.

Draft Edition March 2002

Alberto Maggi

[219,915]

55 via Lopez, 57010 Guasticce (LI)

0586 984 980

Sommario

Prefazione

La fisica teorica moderna non può prescindere dalla teoria delle rappresentazioni dei gruppi. Sfortunatamente nessun corso per fisici copre in maniera sufficiente questo argomento, perciò nello studiare autonomamente questa difficile materia ho deciso di raccogliere assieme gli appunti sui fatti indispensabili per una trattazione matematicamente corretta. Questo non significa che in queste dispense si procede a dimostrare tutto quanto si afferma, come pure dovrebbe essere, perché allora il compito sarebbe gravoso e il testo dovrebbe perlomeno mutare il titolo: si sa, infatti, che i fisici non vogliono dover studiare tutte le dimostrazioni (nemmeno qualcuna a giudicare dalla mia esperienza) che compongono una teoria, al contrario amano usare in modo errato fatti veri generalizzandoli allo stremo, per ottenere risultati formali (cioè del tutto ingiustificati).
Tuttavia, è mia ferma convinzione che le nozioni (matematicamente corrette) qui presentate sulle varietà differenziali e sui gruppi dovrebbero far parte del bagaglio culturale dello studente in fisica, perciò, pur andando a sottrarre tempo prezioso alla preparazione degli esami istituzionali, scelgo di scrivere questi appunti nell'orgogliosa speranza che questo possa essermi utile in futuro.

Punti deboli: sottovarietà (sarebbe meglio discuterle in generale); sottogruppi di Lie (legati alle sottovarietà) e G-spazi di Lie, in particolare il problema delle parentesi di Lie e dell'esponenziale; si potrebbe introdurre la derivata esterna, dimostrare Frobenius e considerarne l'applicazione che consente di legare le algebre di Lie ai gruppi di Lie; circa le omotopie si potrebbero usare il Massey per fare una trattazione un po' più soddisfacente e il lemma di Caressa (dimostrato come nell'appunto che ho lasciato nelle dispense) per dimostrare la semplice connessione di $SU(n)$. Infine, teorema di Ado?

Piano dell'opera

Capitolo I

Varietà differenziabili

Le applicazioni della teoria delle varietà differenziabili alla fisica sono moltissime, d'altra parte questi scarni appunti hanno lo scopo di fornire il sostrato per lo studio dei gruppi di Lie, perciò l'enfasi è posta su quei concetti che saranno poi riutilizzati nel seguito. In questo senso, si devono segnalare alcune importanti omissioni quali la metrica riemanniana o la derivazione esterna.

I.1 Varietà differenziabili, fibrato tangente e campi vettoriali

I.1.1 Atlanti, carte e morfismi

Cominciamo subito con la prima fondamentale

I.1 **Definizione** *Sia M un insieme. Un* **atlante** *$\mathcal{A}$ di classe $\mathcal{C}^p$ su M è una famiglia di coppie $\mathcal{A} \equiv \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Gamma}$ tali che*

(i) *per ogni $\alpha \in \Gamma$, $U_\alpha \subset M$ e gli U_α ricoprono M,*

$$\bigcup_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha = M;$$

(ii) *per ogni $\alpha \in \Gamma$, φ_α è una biiezione di U_α su un aperto di uno spazio euclideo E e per ogni coppia $\alpha, \beta \in \Gamma$ l'insieme $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ è un aperto di E;*

(iii) *la mappa*

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

è un isomorfismo di classe $\mathcal{C}^p$, per ogni coppia $\alpha, \beta \in \Gamma$.

Nel nostro studio saremo primariamente interessati agli atlanti di classe $\mathcal{C}^\infty$ o, come si dice, **lisci**. Le applicazioni $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ si dicono **mappe di transizione**.

Dimensione dell'atlante Notiamo che lo spazio E è assunto essere lo stesso per tutti gli indici in Γ. Se $\dim E = n$ allora si dice che l'atlante è n-dimensionale. D'ora in poi assumeremo che E sia finito dimensionale.

Carte Ogni coppia $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ si dice **carta** dell'atlante. Notiamo che l'inversa $\varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha) \to U_\alpha$ può essere riguardata come una parametrizzazione della porzione U_α di M da parte di un aperto euclideo.

Poiché $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, possiamo rappresentarla tramite le sue coordinate: se $m \in U$, allora

$$\varphi(m) = (\varphi_1(m), \dots \varphi_n(m)) \equiv (x_1, \dots, x_n).$$

Chiamiamo $(x_1, \dots, x_n)$ le **coordinate locali** di $m \in M$ rispetto alla carta (U, φ).

Carte compatibili Sia U un sottoinsieme di M e sia $\varphi : U \to \varphi(U)$ una biiezione di U su un aperto di E. Diciamo che (U, φ) è **compatibile** con l'atlante $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ se $\varphi(U \cap U_\alpha)$, $\varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$ sono aperti di E e se la mappa $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$ (definita su $\varphi(U \cap U_\alpha)$ e a valori in $\varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$) è un isomorfismo di classe $\mathcal{C}^p$ per ogni $\alpha \in \Gamma$.

Atlanti compatibili Due atlanti $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ su M sono **compatibili** se ogni carta di $\mathcal{A}_1$ è compatibile con $\mathcal{A}_2$. Si

verifica immediatamente che la relazione di compatibilità istituita sugli atlanti di M è una relazione di equivalenza. Si noti che dati due atlanti essi sono compatibili se e solo se la loro unione è ancora un atlante. Infatti, se (U, φ) è una carta del primo e (ψ, V) è una carta del secondo, esse sono compatibili se e solo se o $U \cap V = \emptyset$, oppure, in caso contrario se $\varphi(U \cap V)$ e $\psi(U \cap V)$ sono aperti e $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ è un $\mathcal{C}^p$-isomorfismo di aperti euclidei; ma tutto questo è verificato se e solo se possiamo aggiungere (V, ψ) al primo altante, o (U, φ) al secondo atlante, ottenendo ancora un atlante.
Detto questo poniamo la seguente

I.2 Definizione *Due $\mathcal{C}^p$-atlanti $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ su un insieme M si dicono compatibili se la loro unione è ancora un atlante. Una $\mathcal{C}^p$-***struttura differenziabile** *$\mathcal{D}$ su M è una classe di equivalenza di atlanti compatibili. L'unione $\mathcal{A}_\mathcal{D}$ di tutti gli atlanti di $\mathcal{D}$ si chiama* **atlante massimale** *di $\mathcal{D}$. Le carte che appartengono a un atlante massimale si dicono* **carte locali ammissibili**.
Se $\mathcal{A}$ è un atlante su M, l'unione di tutti gli atlanti compatibili con $\mathcal{A}$ definisce la **struttura differenziabile generata** *da $\mathcal{A}$. La coppia $M \equiv (M, \mathcal{D})$ di un insieme e di una sua struttura differenziabile su di esso si dice $\mathcal{C}^p$-***varietà differenziabile** *su M.*

Come si vede è sufficiente considerare un solo atlante per dare a un insieme la struttura di varietà. Infatti, la struttura differenziabile si ottiene considerando l'unione di tutte le carte di $\mathcal{A}$ con tutte le carte ad $\mathcal{A}$ compatibili.
Le varietà di classe $\mathcal{C}^\infty$ si dicono **varietà lisce**. Noi ci occuperemo prevalentemente di queste, dal momento che si ritrovano più spesso nelle applicazioni della fisica (relatività generale e gruppi di Lie).

Topologizzazione di una varietà

Se M è dotato di una struttura topologica, si può richiederne la consistenza con la struttura di varietà imponendo che le applicazioni $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha)$ siano omeomorfismi.
Viceversa, sia M una varietà. Diciamo che $A \subset M$ è un aperto di M se per ogni $a \in A$ esiste una carta locale ammissibile (U, φ) tale che $a \in U \subset A$. La topologia è ben definita. Per quanto concerne l'unione di aperti essa è ovviamente aperta, per l'intersezione invece, si deve sfruttare il fatto che $(U_\alpha \cap U_\beta, \varphi_\alpha)$ è una carta ammissibile.
In ogni caso, considereremo varietà che siano anche spazi di Hausdorff e che ammettano una base numerabile di aperti.

Prodotto di varietà

I.3 Definizione *Siano date due varietà $(M_1, \mathcal{D}_1)$ e $(M_2, \mathcal{D}_2)$. La varietà prodotto $(M_1 \times M_2, \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2)$ è costituita dall'insieme $M_1 \times M_2$ con la struttura differenziabile $\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$ generata dall'atlante*

$$\{(U_1 \times U_2, \varphi_1 \times \varphi_2) \,|(U_i, \varphi_i) \text{ è una carta di } (M_i, \mathcal{D}_i)\,, \, i \in J_2\}$$

In effetti, l'insieme di cui nella definizione è proprio un atlante. Questo segue semplicemente dal fatto che $\psi_1 \times \psi_2$ è un diffeomorfismo se e solo se ψ_1 e ψ_2 sono due diffeomorfismi: allora

$$(\psi_1 \times \psi_2) \circ (\varphi_1 \times \varphi_2)^{-1} = (\psi_1 \times \psi_2) \circ \left(\varphi_1^{-1} \times \varphi_2^{-1}\right) = \left(\psi_1 \circ \varphi_1^{-1}\right) \times \left(\psi_2 \circ \varphi_2^{-1}\right)$$

risulta un $\mathcal{C}^p$-isomorfismo, visto che lo sono $\left(\psi_i \circ \varphi_i^{-1}\right)$, $i \in J_2$.

Morfismi

Siano adesso M e N due varietà di classe $\mathcal{C}^p$ e sia $f : M \to N$ una mappa. Diciamo che f è una mappa di classe $\mathcal{C}^p$ da M in N se dato ogni $m \in M$ esistono una carta (U, φ) in M contenente m e una carta (V, ψ) in N contenente $f(m)$ di modo che

$$f_{U,V} \equiv \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

sia un'applicazione di classe $\mathcal{C}^p$. La mappa f si dice anche $\mathcal{C}^p$-**morfismo**. Chiameremo $\mathcal{C}^p$-**isomorfismo** un morfismo invertibile avente per inversa un $\mathcal{C}^p$-morfismo.
Se la mappa f è un morfismo solo ristretta a un intorno di m, diremo che f è un morfismo locale in m.

I.1.2 Sottovarietà immerse in uno spazio euclideo

Anziché considerare il concetto generale di sottovarietà che non ci interesserà nei nostri studi successivi, ci occuperemo adesso di un concetto comunque rilevante, quello di sottovarietà immersa in uno spazio euclideo.

Teorema di Dini Sia, come al solito, $E \equiv \mathbb{R}^n$. Sia A un aperto di E e sia $f : A \to \mathbb{R}^{n-\ell}$ una applicazione di classe $\mathcal{C}^p$, $p \geq 1$. La matrice jacobiana di f abbia rango massimo, cioè $n - \ell$, su A. Sia $\mathbf{x}_0 = \left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$ un punto di A tale che $f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{c}$. Siano $\mathbf{y} \equiv \left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-\ell}}\right)$ le variabili individuate dagli indici $i_1, \ldots, i_{n-\ell}$ che, numerano le colonne che individuano una sottomatrice quadrata della matrice jacobiana di determinante in $\mathbf{x}_0$ non nullo. Siano $\mathbf{z} \equiv (x_{j_1}, \ldots, x_{j_\ell})$ le restanti variabili. Allora, dal teorema di Dini, esistono un intorno V_1 di $\mathbf{z}_0 \equiv \left(x_{j_1}^0, \ldots, x_{j_\ell}^0\right)$, un intorno V_2 di $\mathbf{y}_0 \equiv \left(x_{i_1}^0, \ldots, x_{i_{n-\ell}}^0\right)$ e un $\mathcal{C}^p$-morfismo ϕ tra V_1 e V_2 tale che, per ogni $z \in V_1$

$$f(\mathbf{z}, \phi(\mathbf{z})) = \mathbf{c}.$$

In altri termini, se $M \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\}$, per ogni punto $\mathbf{x}$ di M individuiamo un suo intorno $M \cap (V_1 \times V_2)$ e una applicazione $\tilde{\phi} : V_1 \to M \cap (V_1 \times V_2)$, $\tilde{\phi}(\mathbf{z}) = (\mathbf{z}, \phi(\mathbf{z}))$, biunivoca, di classe $\mathcal{C}^p$ e con inversa $\mathcal{C}^p$ che corrisponde a una parametrizzazione dell'intorno detto di $\mathbf{x} \in M$. Passando all'inversa di $\tilde{\phi}$, otteniamo, grazie al teorema di Dini, un atlante su M. Infine, M è una varietà di classe $\mathcal{C}^p$.
Poniamo

I.4 Definizione *$M \subset \mathbb{R}^n$ si dice $\mathcal{C}^p$-sottovarietà immersa ℓ-dimensionale se esiste una funzione f di classe $\mathcal{C}^p$ su un aperto di $\mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{R}^{n-\ell}$ il cui jacobiano abbia rango massimo e per cui*

$$M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\}.$$

Sicché

I.1 Teorema *Una $\mathcal{C}^p$-sottovarietà immersa ℓ-dimensionale è una $\mathcal{C}^p$-varietà ℓ-dimensionale.*

Avvertenza D'ora in avanti considereremo solo varietà lisce con una struttura topologica di Hausdorff e avente una base numerabile di aperti. Una mappa liscia tra due varietà con inversa liscia sarà anche detta **diffeomorfismo**.

I.1.3 Fibrato tangente di una varietà

Vettori tangenti a una sottovarietà In questa sottosezione introdurremo il concetto di vettore tangente a una varietà. Poiché esistono definizioni molto diverse di vettore tangente, noi ci occuperemo della loro presentazione e della loro reciproca riduzione.
Il modo più naturale di definire un vettore tangente sorge nello studio delle sottovarietà immerse (ed è unicamente per questo che le abbiamo brevemente esposte).

I.5 Definizione *Una mappa liscia $\gamma : [a, b] \to M$ di un intervallo della retta reale su una varietà differenziabile si dice* **curva liscia** *sulla varietà.*

I.6 Definizione *Sia M una sottovarietà immersa in $\mathbb{R}^n$ e sia $m_0 \in M$. Un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si dice* **vettore tangente** *a M nel punto m_0 se esiste una curva liscia $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to M$ di modo che $\gamma(0) = m_0$ e $\gamma'(0) = \mathbf{v}$. Lo spazio dei vettori tangenti a M in m_0, $T_{m_0}M$, si dice* **spazio tangente** *a M in m_0.*

Come è facilissimo dimostrare, lo spazio tangente è uno spazio vettoriale, inoltre

I.2 Teorema *Se f è la funzione che definisce la sottovarietà ℓ-dimensionale M, allora un vettore $\mathbf{v} \in T_{m_0}M$ se e solo se appartiene all'ortogonale dallo spazio generato dagli $n - \ell$ gradienti di f in m_0.*

I.1 Corollario *Lo spazio tangente a un punto m_0 di una sottovarietà ℓ-dimensionale è uno spazio vettoriale ℓ-dimensionale.*

Vettori tangenti: prima definizione

Nel caso di una varietà astratta, non immersa in uno spazio euclideo, possiamo dare una definizione dei vettori tangenti, ancora usando il concetto di curva.
Sia $C(M,m)$ l'insieme di tutte le curve lisce su M passanti al tempo 0 per m. Diciamo che $\gamma_1, \gamma_2 \in C(M,m)$ sono equivalenti se e solo se per una qualche carta ammissibile (U,φ) intorno a m si ha

$$(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0).$$

La relazione introdotta non dipende dalla scelta della carta, infatti, se γ_1 e γ_2 sono equivalenti rispetto a (U,φ) e (V,ψ) è una seconda carta in m compatibile con la prima, allora

$$\psi \circ \gamma = \psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma$$

sicché

$$\begin{aligned}(\psi \circ \gamma_1)'(0) &= \left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)'(\varphi(m))\,(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = \\ &= \left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)'(\varphi(m))\,(\varphi \circ \gamma_2)'(0) = (\psi \circ \gamma_2)'(0).\end{aligned}$$

Chiaramente la relazione introdotta è una relazione di equivalenza. Dunque, è possibile porre la seguente

I.7 Definizione *Un* **vettore tangente** *a una varietà M nel punto $m \in M$ è una classe di equivalenza nell'insieme delle curve su M per m. L'insieme di tutte le suddette classi di equivalenza si dice* **spazio tangente** *a M in m e si indica con T_mM.*

Isomorfismo con E

Fissata una carta ammissibile (U,φ) in M, notiamo che esiste una corrispondenza biunivoca naturale $\Gamma_{U,\varphi}$ tra T_mM ed E. Infatti, sia $[\gamma] \in T_mM$ e sia $\gamma \in [\gamma]$, allora, poniamo

$$E \ni \mathbf{v} \equiv \Gamma_{U,\varphi}([\gamma]) \equiv (\varphi \circ \gamma)'(0).$$

La corrispondenza è suriettiva. Dato $\mathbf{w}$, considerando il moto uniforme per $\varphi(0)$ a velocità $\mathbf{w}$, costruiamo $\gamma \in C(M,m)$ per cui $\mathbf{w} = (\varphi \circ \gamma)'(0) = \Gamma_{U,\varphi}([\gamma])$. Inoltre, dati due vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ immagini di $[\gamma_1]$ e $[\gamma_2]$, abbiamo

$$(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$$

sicché $[\gamma_1] = [\gamma_2]$.
La corrispondenza istituita tra T_mM ed E dipende apparentemente dalla scelta della carta (U,φ). Tuttavia, se (V,ψ) è una carta compatibile con la data, abbiamo

$$\begin{aligned}\Gamma_{V,\psi}([\gamma]) &= \left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)'(\varphi(m))\,\Gamma_{U,\varphi}([\gamma]) \\ [\gamma] &= \Gamma^{-1}_{V,\psi}\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)'(\varphi(m))\,\Gamma_{U,\varphi}([\gamma])\end{aligned}$$

ove $\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)'(\varphi(m))$ è un'applicazione lineare invertibile.
In questo modo, possiamo dare a T_mM la struttura di spazio vettoriale,

$$[\gamma_1] + \lambda[\gamma_2] \equiv \Gamma^{-1}_{U,\varphi}\left(\Gamma_{U,\varphi}[\gamma_1] + \lambda\Gamma_{U,\varphi}[\gamma_2]\right),$$

in modo indipendente dalle carte scelte, infatti,

$$\begin{aligned}\Gamma^{-1}_{V,\psi}\left(\Gamma_{V,\psi}[\gamma_1] + \lambda\Gamma_{V,\psi}[\gamma_2]\right) &= \Gamma^{-1}_{V,\psi}\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)'(\varphi(m))\left(\Gamma_{U,\varphi}[\gamma_1] + \lambda\Gamma_{U,\varphi}[\gamma_2]\right) = \\ &= \Gamma^{-1}_{V,\psi}\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)'(\varphi(m))\,\Gamma_{U,\varphi}\left([\gamma_1] + \lambda[\gamma_2]\right) = \\ &= [\gamma_1] + \lambda[\gamma_2].\end{aligned}$$

T_mM viene ad essere isomorfo a E tramite uno qualsiasi degli $\Gamma_{U,\varphi}$.

I.3 Teorema *Lo spazio tangente a una varietà n-dimensionale M in un punto m è isomorfo allo spazio vettoriale n-dimensionale E.*

Immersione canonica: seconda definizione

Come si è potuto constatare la definizione di spazio tangente nel caso astratto è piuttosto macchinosa, questo perché non disponiamo dell'immersione in un dato spazio.
Tuttavia, ogni varietà ammette una **immersione canonica** in uno spazio infinito dimensionale. Sia $\mathcal{C}^\infty(M)$ lo spazio delle funzioni lisce su M e consideriamone il duale

$\mathcal{C}^{\infty *}(M)$. Allora possiamo considerare l'immersione canonica ι di M in $\mathcal{C}^{\infty *}(M)$ data da

$$[\iota(m)](f) \equiv f(m), \forall f \in \mathcal{C}^{\infty}(M).$$

Vedremo tra poco che, effettivamente $M \subset \mathcal{C}^{\infty *}(M)$, nel senso che ι è iniettivo.

I.8 **Definizione** *Sia M una varietà e sia $m \in M$. Diciamo che un funzionale $D \in \mathcal{C}^{\infty *}(M)$ è un* **derivazione** *in m se*

$$D(fg) = D(f)\, g(m) + f(m)\, D(g)$$

per ogni $f, g \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$.

Ogni curva $\gamma \in C(M, m)$ definisce una derivazione in m: basta porre

$$D_{\gamma'(0)}(f) \equiv (f \circ \gamma)'(0) = \left.\frac{d}{dt} f(\gamma(t))\right|_{t=0}$$

per ogni $f \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$. Infatti,

$$\begin{aligned} D_{\gamma'(0)}(fg) &= (fg \circ \gamma)'(0) = \left.\frac{d}{dt}\left(f(\gamma(t))\, g(\gamma(t))\right)\right|_{t=0} = \\ &= g(m) \left.\frac{d}{dt} f(\gamma(t))\right|_{t=0} + f(m) \left.\frac{d}{dt} g(\gamma(t))\right|_{t=0} = \\ &= D_{\gamma'(0)}(f)\, g(m) + f(m)\, D_{\gamma'(0)}(g). \end{aligned}$$

Abbiamo che γ_1 è equivalente a γ_2 se e solo se $D_{\gamma_1'(0)} = D_{\gamma_2'(0)}$. Infatti,

$$D_{\gamma'(0)}(f) \equiv \left(f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma\right)'(0) = \left(f \circ \varphi^{-1}\right)'(\varphi(m))\,(\varphi \circ \gamma)'(0)$$

perciò se γ_1 è equivalente a γ_2, allora $D_{\gamma_1'(0)} = D_{\gamma_2'(0)}$. Viceversa, prendiamo per f la funzioni $\varphi_i = \pi_i \circ \varphi$ (π_i è la proiezione sull'i-esima coordinata in E), allora $f \circ \varphi^{-1} = \pi_i$ e si conclude $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$, cioè γ_1 e γ_2 sono equivalenti.
Dunque, possiamo definire un'applicazione biunivoca tra $[\gamma] \in T_m M$ e lo spazio delle derivazioni in m del tipo $D_{\gamma'(0)}$. Questo consente di riformulare (in modo **equivalente**) la definizione di vettore tangente:

I.9 **Definizione** *Un vettore tangente a una varietà M in un punto $m \in M$ è un operatore di derivazione della forma $D_{\gamma'(0)}$. Lo spazio di tali operatori in $\mathcal{C}^{\infty *}(M)$ si dice* **spazio tangente** *a M in m e si denota con $T_m M$.*

Data una curva γ per m il vettore tangente $D_{\gamma'(0)}$ si dice **velocità** della curva in m. Notiamo pure che

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\iota \circ \gamma)(t)\, f &= \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \\ (\iota \circ \gamma)'(0) &= D_{\gamma'(0)} \end{aligned}$$

perciò la derivata al tempo 0 di $\iota \circ \gamma$, una curva in $M \subset \mathcal{C}^{\infty *}(M)$ per m, è pari a $D_{\gamma'(0)}$.
Vediamo che in realtà $T_m M$ coincide con l'intero spazio delle derivazioni nel punto $m \in M$. Per far questo ci occorrono alcuni risultati preliminari.

I.1 **Lemma** *Se $f \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$ è costante e D è una derivazione in m, allora $D(f) = 0$.*

Dimostrazione Per linearità ci basta considerare la funzione $f = \mathrm{id}_M$. Abbiamo

$$D(f) = D(f \cdot f) = 2D(f)$$

(c.v.d.) da cui $D(f) = 0$.

I.2 **Lemma** *Siano $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ una sua palla di raggio prefissato ε. Allora esiste una funzione liscia a valori in $[0, 1]$, pari a 1 in $B(\mathbf{x}, \varepsilon/2]$ e nulla fuori da $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$.*

Dimostrazione Basta considerare

$$h_0(t) = \begin{cases} \exp\left(-1/\left(1-t^2\right)\right), & t \in (-1,1) \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

che è $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Sia $h_1(t) = \int_{-\infty}^{t} h_0(\tau)\, d\tau$, allora h_1 è di classe $\mathcal{C}^\infty$, è nulla per $t < -1$ e pari a 1 per $t > 1$. Riscalando ed usando due pezzi di due $h_1(t)$, otteniamo facilmente una funzione $h_2(t)$ pari a 1 per $t \le \varepsilon/2$, a valori in $[0,1]$, e nulla per $t > \varepsilon$. A questo punto, ci basta considerare $h(\mathbf{x}) = h_1^2(|\mathbf{x}|)$. **(c.v.d.)**

I.3 **Lemma** *Se due funzioni f e g su M coincidono in un intorno U di m e D è una derivazione in m, allora $D(f) = D(g)$.*

Dimostrazione Prendiamo una carta ammissibile (V,φ), tale che $V \subset U$. Sia $B(\varphi(m), r) \subset \varphi(V)$ e consideriamo la funzione h del precedente lemma con $\mathbf{x} = \varphi(m)$ e $\varepsilon = r$. Allora $g \equiv h \circ \varphi$ è una funzione liscia su M nulla al di fuori di U. Allora

$$\begin{aligned} 0 &= D(0) = D(h(f-g)) = D(h)(f(m) - g(m)) + h(m)[D(f) - D(g)] = \\ &= D(f) - D(g). \end{aligned}$$

(c.v.d.)

I.1 **Osservazione** I lemmi mostrati consentono di concludere che se $p \neq q \in M$, allora esiste una funzione liscia h che prende il valore 0 in p e 1 in q in modo che

$$\iota(p)\, h \neq \iota(q)\, h,$$

per cui ι è iniettiva ed è ben definita l'inclusione $M \subset \mathcal{C}^{\infty *}(M)$. ▪

I.2 **Osservazione** Possiamo estendere la derivazione D in m allo spazio delle funzioni lisce definite solo in un intorno di m. Se f è liscia in U, preso $U \subset V$ e h liscia ovunque, 1 in U e 0 fuori da V, possiamo porre $\tilde{f} = fh$ in U e nulla fuori da U e definire

$$D(f) \equiv D\left(\tilde{f}\right).$$

L'estensione è definita correttamente perché indipendente da h come mostra il lemma precedente.
D'ora in poi ci atterremo sempre alla convenzione di considerare le derivazioni sull'insieme delle funzioni lisce nell'intorno di un punto. Lo spazio delle funzioni lisce nell'intorno di m sarà denotato come $\mathcal{C}^\infty(m)$. ▪

I.4 **Lemma** *Sia B una palla aperta centratata nell'origine in E e $f : B \to E$ una funzione liscia. Allora esistono n funzioni lisce $g_i : B \to \mathbb{R}$, $i \in J_n$, di modo che*

$$f(\mathbf{x}) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} x_i g(\mathbf{x}), \ \forall \mathbf{x} \in B$$

e

$$g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0).$$

Dimostrazione Semplicemente

$$f(\mathbf{x}) - f(0) = \int_0^1 \frac{df(t\mathbf{x})}{dt}\, dt = \sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(t\mathbf{x})\, dt \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i g(\mathbf{x}).$$

(c.v.d.)

Finalmente, siamo in grado di dimostrare il seguente

I.4 **Teorema** *Lo spazio tangente a una varietà M nel punto $m \in M$ coincide con lo spazio delle derivazioni su $\mathcal{C}^\infty(m)$ nel punto m. Questo è uno spazio vettoriale di dimensione pari alla dimensione di M.*

Dimostrazione Fissiamo una carta (U, φ) in m. Definiamo le n derivazioni in m

$$[\partial_i (m)] (f) \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \left(f \circ \varphi^{-1}\right) (\varphi (m))$$

Mostriamo che $\{\partial_i (m)\}_{i \in J_n}$ forma una base per lo spazio delle derivazioni in m. Anzitutto le derivazioni considerate sono linearmente indipendenti. Sia

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \partial_i (m) = 0$$

applichiamo i due membri dell'eguaglianza alla funzione coordinata j-esima $(p \mapsto \varphi_j (p))$, otteniamo $\alpha_j = 0$.

Vediamo che lo spazio delle derivazioni è generato dal nostro sistema $\{\partial_i (m)\}_{i \in J_n}$. Sia $f \in \mathcal{C}^\infty (m)$ e applichiamo il lemma precedente a $f \circ \varphi^{-1}$ attorno a $\varphi (m)$, otteniamo

$$\left(f \circ \varphi^{-1}\right) (\mathbf{x}) = \left(f \circ \varphi^{-1}\right) (\varphi (m)) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - \varphi_i (m)) \, g_i (\mathbf{x})$$

con

$$g_i (\varphi (m)) = \frac{\partial \left(f \circ \varphi^{-1}\right)}{\partial x_i} (\varphi (m))$$

da cui

$$f (p) = f (m) + \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i (p) - \varphi_i (m)) \, g_i (\varphi (p))$$

Quindi,

$$\begin{aligned} D (f) &= \sum_{i=1}^{n} D (\varphi_i (p) - \varphi_i (m)) \, g_i (\varphi (m)) + \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i (m) - \varphi_i (m)) \, D (g_i \circ \varphi) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} D (\varphi_i) \frac{\partial \left(f \circ \varphi^{-1}\right)}{\partial x_i} (\varphi (m)) = \sum_{i=1}^{n} D (\varphi_i) \, \partial_i (p) . \end{aligned}$$

Dunque, dato un operatore di derivazione in m

$$D = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \partial_i (m)$$

a esso corrisponde la curva $\gamma_D (t) = \varphi^{-1} (\varphi (m) + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x})$, nel senso che $D = D_{\gamma'_D (0)}$, perciò
(c.v.d.) $D \in T_m M$.

Mappe differenziabili tra varietà Vogliamo introdurre il concetto di derivata per una mappa liscia tra varietà. A questo scopo dimostriamo il seguente

I.5 **Teorema** *Sia $F : M \to N$ una mappa liscia. Allora per ogni $m \in M$ la mappa $F^* : \mathcal{C}^\infty (F (m)) \to \mathcal{C}^\infty (m)$ definita da $F^* f \equiv f \circ F$ è un omomorfismo di algebre che induce un omorfismo $F_* : T_m M \to T_{F(m)} N$, definito da*

$$F_* (D_m) f = D_m (f \circ F)$$

per ogni $f \in \mathcal{C}^\infty (F (m))$. Quando $F : M \to M$ coincide con l'identità su M, allora sia F^* che F_* coincidono con l'isomorfismo identico sui rispettivi spazi. Infine, se $H = G \circ F$ è composizione di mappe lisce, allora $H^* = F^* \circ G^*$ e $H_* = G_* \circ F_*$.

Dimostrazione F^* è chiaramente un omomorfismo di $\mathcal{C}^\infty (F (m))$ in $\mathcal{C}^\infty (m)$, perciò concentriamoci sulla seconda parte del teorema che riguarda F_*. Sia D_m in $T_m M$, mostriamo che $F_* D_m$ definito come nell'enunciato appartiene effettivamente a $T_{F(m)} N$. Bisogna vedere che si tratta di una derivazione in $F (m)$. Siano $f, g \in \mathcal{C}^\infty (F (m))$, allora

$$\begin{aligned} F_* (D_m) (fg) &= D_m (fg \circ F) = D_m ((f \circ F) (g \circ F)) = D_m (f \circ F) \, g (F (m)) + f (F (m)) \, D_m (g \circ F) = \\ &= F_* (D_m) (f) \, g (F (m)) + f (F (m)) \, F_* (D_m) (g) . \end{aligned}$$

Vediamo che F_* è un'applicazione lineare

$$\begin{aligned} F_*\left(D_m+\lambda E_m\right)(f) &= \left(D_m+\lambda E_m\right)(f\circ F)=D_m(f\circ F)+\lambda E_m(f\circ F)\\ &= \left[F_*\left(D_m\right)+\lambda F_*\left(E_m\right)\right](f)\end{aligned}$$

Infine,

$$H_*\left(D_m\right)(f)=D_m(f\circ H)=D_m(f\circ G\circ F)=\left(F_*D_m\right)(f\circ G)=\left(G_*\circ F_*\right)\left(D_m\right)(f)$$

da cui

(c.v.d.)
$$(G\circ F)_*=G_*\circ F_*.$$

Il teorema viene usato per definire la derivata di una mappa liscia. Infatti, la mappa F_* associata a F si dice **derivata** di F.

Notato che la definizione di spazio tangente coinvolge solo le strutture locali di una varietà, di modo che se U è un aperto di M (che rigurdiamo come varietà), allora T_mM e T_mU sono identificati in modo naturale per ogni $m\in M$, concludiamo

I.2 Corollario *Se $F:M\to N$ è un diffeomorfismo di M su un aperto $U\subset N$ e se $m\in M$, allora $F_*:T_mM\to T_{F(m)}N$ è un isomorfismo di spazi lineari.*

Dimostrazione Sia G l'inversa di F da U (riguardato esso stesso come varietà) in M. Allora, sia

$$F_*\circ G_*:T_{F(m)}N\equiv T_{F(m)}U\to T_{F(m)}U$$

che

$$G_*\circ F_*:T_mM\to T_mM$$

(c.v.d.) eguagliano l'identità, di modo che F_* è un isomorfismo lineare di T_mM in $T_{F(m)}N$.

Sia adesso (U,φ) una carta ammissibile su M, allora φ induce un diffeomorfismo tra U e $\varphi(U)$ di modo che φ_* è un isomorfismo lineare tra T_mM e T_aE, dove $a\equiv\varphi(m)$ e $E=\mathbb{R}^n$ come di consueto. Viceversa, φ_*^{-1} mappa in modo isomorfo T_aE in T_mM, sicchè possiamo condiderare i vettori tangenti

$$E_{im}\equiv\varphi_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\bigg|_m\equiv\varphi_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

(chiaramente $\partial/\partial x^i\in T_aE$). Gli E_{im} forniscono la base naturale di T_mM che abbiamo prima indicato con $\partial_i(m)$. Infatti,

$$\begin{aligned}\left[\partial_i(m)\right](f) &\equiv \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f\circ\varphi^{-1}\right)(\varphi(m))\\ E_{im}f &= \varphi_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)f=\frac{\partial}{\partial x^i}\left(f\circ\varphi^{-1}\right)(\varphi(m))=\left[\partial_i(m)\right](f)\end{aligned}$$

Infine, $\partial_i(m)=\varphi_*\left(\partial/\partial x^i\right)$.

Sempre fissata una carta (U,φ), se denotiamo con $x^i(m)$ la funzione che a m associa l'i-esima coordinata di $\varphi(m)$, abbiamo che ogni $D_m\in T_mM$ si scrive

$$D_m=\sum_{i=1}^n\left(D_mx^i\right)E_{im},$$

infatti,

$$D_m=\sum_{i=1}^n\alpha_iE_{im}$$

e

$$E_{im}\left(x^j\right)=\frac{\partial}{\partial x^i}\left(x^j\circ\varphi\circ\varphi^{-1}\right)(\varphi(m))=\delta_{ij}$$

perciò

$$D_m x^i = \alpha_i.$$

È soltanto un problema di calcoli mostrare le seguenti

I.1 **Proposizione** *Consideriamo la mappa liscia* $F : M \to N$*. Siano* $E_{im} \equiv \varphi_*^{-1}\left(\partial/\partial x^i\right)$ *e* $E_{jF(m)} \equiv \psi_*^{-1}\left(\partial/\partial y^j\right)$*,* $i \in J_n$*,* $j \in J_l$*,* $n \equiv \dim M$*,* $l \equiv \dim N$*, dove* (U,φ) *e* (V,ψ) *sono mappe ammissibili per* M *e* N *in* m *e* $F(m)$*, rispettivamente. Allora*

$$F_*\left(E_{im}\right) = \sum_{j=1}^{l} \left.\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right|_{\varphi(m)} E_{jF(m)}$$

In termini di componenti, se $D_m = \sum \alpha^i E_{im}$ *e* $F_*\left(D_m\right) = \sum \beta^j E_{jF(m)}$*, allora*

$$\beta^j = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \left.\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right|_{\varphi(m)}.$$

I.2 **Proposizione** *Sia* M *una varietà liscia e siano* (U,φ) *e* $\left(\tilde{U},\tilde{\varphi}\right)$ *due carte compatibili in* M*, allora, posto,* $E_{im} \equiv \varphi_*^{-1}\left(\partial/\partial x^i\right)$ *e* $\tilde{E}_{im} \equiv \tilde{\varphi}_*^{-1}\left(\partial/\partial \tilde{x}^i\right)$*, allora*

$$\begin{aligned} E_{im} &= \left(\tilde{\varphi}\circ\varphi^{-1}\right)_* \tilde{E}_{im} = \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}\right|_{\varphi(m)} \tilde{E}_{im} \\ \tilde{E}_{im} &= \left(\varphi\circ\tilde{\varphi}^{-1}\right)_* E_{im} = \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}\right|_{\tilde{\varphi}(m)} E_{im} \end{aligned}$$

Infine, se $D_m = \sum \alpha^i E_{im} = \sum \beta^j \tilde{E}_{jm}$*, allora*

$$\alpha^i = \sum_{j=1}^{n} \beta^j \left.\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\right|_{\tilde{\varphi}(m)}, \quad \beta^j = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \left.\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}\right|_{\varphi(m)}.$$

Notiamo che se γ è una curva liscia da $I \equiv [a,b]$, allora, se $t_0 \in (a,b)$, $\left. d/dt\right|_{t_0}$ è una base per $T_{t_0} I$ e

$$\gamma_*\left(\frac{d}{dt}\right) f = \left.\frac{d}{dt}\left(f\circ\gamma\right)\right|_{t_0}$$

per ogni $f \in \mathcal{C}^\infty\left(\gamma\left(t_0\right)\right)$, di modo che $\gamma_*\left(d/dt\right)$ è quello che avevamo definito velocità di γ in $\gamma\left(t_0\right)$, cioè $D_{\gamma'(t_0)} \in T_{\gamma(t_0)} M$.

Fibrato tangente L'unione TM degli spazi tangenti $T_m M$ al variare di $m \in M$ si chiama **fibrato tangente** della varietà M:

$$TM \equiv \bigcup_{m\in M} T_m M.$$

L'applicazione $\pi : TM \to M$, che associa a ogni $q \in TM$ il punto $m \in M$ tale che $q \in T_m M$, si dice **proiezione naturale** del fibrato tangente sulla varietà.
Se $q \in TM$, allora esiste $m = \pi(q)$ e consideriamo la carta ammissibile (U,φ) in m. Rispetto a tale carta abbiamo la decomposizione univoca

$$q = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_{im}.$$

in modo che a q è individuato da m e, in (U,φ), dal vettore $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$.

Costruzione dell'atlante indotto da M su TM Per ogni carta ammissibile (U,φ) su M, consideriamo l'applicazione

$$\begin{aligned} \tau_\varphi(q) : \pi^{-1}(U) &\to \varphi(U)\times E \\ q &\mapsto \left(\varphi(m),\boldsymbol{\alpha}\right) \end{aligned}$$

L'insieme delle carte $\left(\pi^{-1}(U),\tau_\varphi\right)$ costituisce un atlante su TM. Infatti, date (U,φ) e (V,ψ)

con $U \cap V \neq \emptyset$ abbiamo $\pi^{-1}(U \cap V) = \pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) \neq \emptyset$ e

$$\begin{array}{rcl} \tau_\psi \circ \tau_\varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \times E & \to & \psi(U \cap V) \times E \\ (\varphi(m), \boldsymbol{\alpha}) & \mapsto & \left(\psi(m), \left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)'(\varphi(m))\, \boldsymbol{\alpha}\right) \end{array}$$

che è una applicazione di classe $\mathcal{C}^\infty$ visto che tale è $\psi \circ \varphi^{-1}$.
Ne viene che il fibrato tangente di M è una varietà di classe $\mathcal{C}^\infty$ di dimensione doppia rispetto a quella di M.

I.1.4 Campi vettoriali

I campi vettoriali non sono altro che equazioni differenziali ordinarie sulle varietà. Cominciamo con il porre la seguente

I.10 Definizione *Un* **campo vettoriale liscio** *su una varietà M è una mappa liscia X da M nel suo fibrato tangente tale che, per ogni $m \in M$*

$$X(m) \in T_m M.$$

Lo spazio $\mathfrak{X}(M)$ Ovviamente lo spazio dei campi vettoriali su M è un $\mathbb{R}$-spazio lineare posto, per ogni $m \in M$,

$$\begin{array}{rcl} (X + Y)(m) & \equiv & X(m) + Y(m) \\ (\lambda X)(m) & \equiv & \lambda X(m) \end{array}$$

Possiamo pure moltiplicare i campi vettoriali per funzioni lisce definendo, se $f : M \to \mathbb{R}$ ed X è un campo,

$$(fX)(m) \equiv f(m)\, X(m)$$

Denoteremo con $\mathfrak{X}(M)$ lo spazio dei campi vettoriali lisci su M.

Rappresentazione locale di un campo Come sappiamo, associata alla carta ammissibile (U, φ) vi è la base di $T_m M$, $m \in U$, data da $\left\{E_{im} = \varphi_*^{-1}\left(\partial / \partial x^i\right)\right\}_{i \in J_n}$. Per ogni indice $i \in J_n$, per ogni $m \in U$, l'applicazione $\partial_i \equiv E_i : m \mapsto E_{im} \equiv \partial_i(m)$ è un campo vettoriale locale in m. Dunque, ogni campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ può essere localmente scritto come

$$\sum_{i=1}^{n} X_i E_i$$

ove le X_i sono funzioni lisce su U che si dicono **componenti** del campo vettoriale.

Campi vettoriali come endomorfismi di $\mathcal{C}^\infty(M)$ Visto che i vettori tangenti sono derivazioni in un punto, i campi vettoriali possono essere considerati come operatori da $\mathcal{C}^\infty(M)$ in sé, cioè come endomorfismi lineari dello spazio delle funzioni lisce su M, a questo scopo basta porre in modo del tutto naturale

$$[\xi_X(f)](m) \equiv [X(m)](f)$$

fissato $X \in \mathfrak{X}(M)$, per ogni $f \in \mathcal{C}^\infty(m) \subset \mathcal{C}^\infty(M)$, $m \in M$.
Visto in questo modo un campo vettoriale è un endomorfismo di $\mathcal{C}^\infty(M)$ che soddisfa la regola di Leibniz

$$X(fg) = X(f)\, g + f X(g).$$

Viceversa, sia dato $\xi \in \operatorname{End} \mathcal{C}^\infty(M)$ tale da soddisfare la regola di Leibniz, allora consideriamo $X_\xi : M \to TM$ tale che

$$X_\xi(m)\, f = \xi(f)(m)$$

per ogni $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Poiché ξ soddisfa la regola di Leibniz, $X_\xi(m)$ è una derivazione in m, perciò appartiene a $T_m M$. Infine, se $X_\xi = X_\zeta$, allora per ogni m e per ogni f

$$\xi(f)(m) = \zeta(f)(m)$$

cioè $\xi(f) = \zeta(f)$, ossia $\xi = \zeta$.
In definitiva,

I.3 Proposizione *Esiste una corrispondenza biunivoca tra i campi vettoriali su M e gli* *endomorfismi su $\mathcal{C}^{\infty}(M)$ che soddisfano la regola di Leibniz.*

In vista di questa facile proposizione dimenticheremo la distinzione notazionale X_ξ o ξ_X e indicheremo con lo stesso simbolo un campo vettoriale oppure un endomorfismo soddisfacente la regola di Leibniz. Inoltre, considereremo, di volta in volta, quella delle due definizioni equivalenti di campo vettoriale che ci sarà più utile, senza previa avvertenza.

Campi correlati Vediamo l'interazione tra i campi su due varietà M e N e i morfismi tra queste ultime. Sia $F : N \to M$ una mappa liscia, allora a F è associato l'omomorfismo $F^* : T_pN \to T_{F(p)}M$. Se X è un campo vettoriale su N, allora $F_*(X(p))$ è un vettore in $T_{F(p)}M$. Chiaramente, non è detto che $p \mapsto F_*(X(p))$ sia un campo, visto che non è neppure detto che tale applicazione sia ben definita. Si pone allora la seguente

I.11 **Definizione** *Usando le notazioni di sopra, se Y è un campo vettoriale su M tale che per ogni $q \in M$ e $p \in F^{-1}(q) \subset N$ si ha $F_*(X(p)) = Y(q)$, allora diciamo che X e Y sono F-correlati e scriviamo*

$$Y = F_*(X).$$

I.6 **Teorema** *Se $F : N \to M$ è un diffeomorfismo, allora a ogni campo vettoriale X su N corrisponde uno e un solo campo Y su M tale che X e Y sono F-correlati.*

Dimostrazione Poiché F è un diffeomorfismo, ammette un inversa $G : M \to N$ e $F_* : T_pN \to T_{F(p)}M$ è un isomorfismo lineare con G_* come inversa. Dunque, dato un campo vettoriale liscio X su N, è univocamente determinata l'applicazione

$$Y(q) \equiv F_*(X(G(q))),$$

Per concludere ci basta dimostrare che Y è un campo vettoriale. Siano $f, g \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$, allora

$$\begin{aligned} Y(q)(fg) &= F_*(X(G(q)))(fg) = X(G(q))[(f\circ F)(g\circ F)] = \\ &= [X(G(q))(f\circ F)](g\circ F)(G(q)) + (f\circ F)(G(q))[X(G(q))(g\circ F)] = \\ &= [F_*(X(G(q)))(f)]\,g(q) + f(q)\,[F_*(X(G(q)))(g)] = \\ &= Y(q)(f)\,g(q) + f(q)\,Y(q)(g). \end{aligned}$$

(c.v.d.)

Dunque, se F è un diffeomorfismo tra N e M e $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$, si ha $Y = F_*(X)$ se e solo se

$$Y(F(n)) = F_*(X(n))$$

per ogni $n \in N$. Infine, introduciamo un'altra nozione che ci sarà utile per definire l'algebra di Lie di un gruppo di Lie,

I.12 **Definizione** *Se $F : M \to M$ è un diffeomorfismo e $X \in \mathfrak{X}(M)$ è tale che $X = F_*X$, allora X si dice F-***invariante**.

Azione di un gruppo su una varietà Prima di occuparci dei gruppi a un parametro sulle varietà, vediamo come si definisce in generale l'azione di un gruppo su un insieme

I.13 **Definizione** *Sia G un gruppo e sia X un insieme. Allora si dice che G agisce su X se esiste una mappa $\theta : G \times X \to X$ tale che*

(i) *se e è l'identità in G, allora*

$$\theta(e, x) = x,\ \forall x \in X;$$

(ii) *se $g_1, g_2 \in G$, allora*

$$\theta(g_1, \theta(g_2, x)) = \theta(g_1 g_2, x),\ \forall x \in X.$$

L'applicazione θ si dice **azione** *di G su X.*

Gruppi a un parametro globali Specializziamo la definizione al caso che ci interessa, in cui G è $(\mathbb{R},+)$ e X è una varietà M. Ponendo $\theta(t,m) \equiv \theta_t(m)$, la richiesta che G agisca su M si traduce nei requisiti

(i) $\theta_0(m) = m$, $\forall m \in M$;

(ii) $\theta_t \circ \theta_s(m) = \theta_{t+s}(m)$, $\forall m \in M$.

(iii) aggiungiamo anche la richiesta naturale che θ sia una mappa $\mathcal{C}^\infty$ da $(\mathbb{R},+) \times M$ in M.

Ammettiamo che una tale azione $\mathcal{C}^\infty$ esista, allora essa definisce un campo vettoriale liscio che chiameremo **generatore infinitesimo** dell'azione, nel modo seguente

$$X(m) f \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(\theta_{\Delta t}(m)) - f(m)}{\Delta t} = \left.\frac{d}{dt}(f \circ \theta_t)(m)\right|_{t=0}.$$

Possiamo vedere in modo diretto che X è proprio un campo vettoriale. Procediamo come segue. Sia (U,φ) una carta ammissibile in $m \in M$. Sia poi $B(0,\delta) \times V$ un intorno di $(0,m)$ in $\mathbb{R} \times M$, tale che $\theta(B(0,\delta) \times V) \subset U$. In particolare, $p \in \theta_0(V) = V \subset U$. Restringendoci all'aperto $B(0,\delta) \times V$, sciriviamo θ in coordinate

$$\mathbf{y} \equiv \mathbf{h}(t,\mathbf{x}) = \varphi\left(\theta_t\left(\varphi^{-1}(\mathbf{x})\right)\right).$$

La funzione $\mathbf{h} : B(0,\delta) \times \varphi(V) \to \varphi(U)$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ ed è tale che

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(0,\mathbf{x}) &= \mathbf{x}; \\ \mathbf{h}(t_1 + t_2,\mathbf{x}) &= \mathbf{h}(t_1, \mathbf{h}(t_2,\mathbf{x})). \end{aligned}$$

Posto $\hat{f}(\mathbf{x}) = f\left(\varphi^{-1}(\mathbf{x})\right)$, allora, se $\mathbf{x} = \varphi(m)$

$$\frac{f(\theta_{\Delta t}(m)) - f(m)}{\Delta t} = \frac{\hat{f}(\mathbf{h}(\Delta t,\mathbf{x})) - \hat{f}(\mathbf{x})}{\Delta t}$$

per cui

$$X(m) f = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\hat{f}(\mathbf{h}(\Delta t,\mathbf{x})) - \hat{f}(\mathbf{x})}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{n} \dot{h}^i(0,\mathbf{x}) \left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial x^i}\right)_{\varphi(m)}$$

cioè

$$X(m) = \sum_{i=1}^{n} \dot{h}^i(0,\mathbf{x}) E_{im}$$

ed essendo i coefficienti di classe $\mathcal{C}^\infty$, X è un campo vettoriale liscio.

I.14 Definizione *Se $\theta : G \times M \to M$ è un'azione su M, allora un campo vettoriale X su M si dice invariante sotto l'azione di G (o G-invariante) se X è invariante sotto ciascun diffeomorfismo θ_g di M al variare di $g \in G$. In altri termini, se $\theta_{g*}(X) = X$.*

I.7 Teorema *Se $\theta : \mathbb{R} \times M \to M$ è un'azione liscia di $(\mathbb{R},+)$ su M, allora il suo generatore infinitesimo X è invariante sotto tale azione, $\theta_{t*}(X(m)) = X(\theta_t(m))$.*

Dimostrazione Sia $f \in \mathcal{C}^\infty(\theta_t(m))$ e calcoliamo $\theta_{t*}(X(m)) f$:

$$\begin{aligned} \theta_{t*}(X(m)) f &= X(m)(f \circ \theta_t(m)) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(\theta_{t+\Delta t}(m)) - f(\theta_t(m))}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(f \circ \theta_{\Delta t})(\theta_t(m)) - f(\theta_t(m))}{\Delta t} = X(\theta_t(m)) f \end{aligned}$$

(c.v.d.) come si voleva dimostrare.

I.3 Corollario *Se $X(m) = 0$, allora per ogni p nell'orbita di m risulta $X(p) = 0$.*

Dimostrazione

Infatti, se p appartiene all'orbita di m, allora esiste t talché $p = \theta_t(m)$, infine,

$$X(p) = X(\theta_t(m)) = \theta_{t*}(X(m))$$

(c.v.d.) $X(p) = 0$ se e solo se $X(m) = 0$ visto che θ_{t*} è un isomorfismo lineare.

Fissato un punto su M consideriamo l'applicazione liscia da $\mathbb{R}$ in M definita da

$$\gamma(t) \equiv \theta_t(m)$$

la cui immagine rappresenta l'orbita di m. Fissiamo $t_0 \in \mathbb{R}$ e sia d/dt la base di $T_{t_0}\mathbb{R}$. Presa $f \in \mathcal{C}^\infty(F(t_0))$ abbiamo

$$\gamma_*\left(\frac{d}{dt}\right)f = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)\bigg|_{t_0} = X(\theta_{t_0}(m))f = X(\gamma(t_0))f$$

Notiamo allora che $F_*(d/dt) \neq 0$ se e solo se $X(m) \neq 0$.
La formula

$$\gamma_*\left(\frac{d}{dt}\right) = X(\gamma(t_0))$$

mostra che, per ogni $m \in M$, $X(m)$ è il vettore tangente all'orbita per m, nel senso che $F_*(d/dt)$ è la velocità in $m = F(t_0)$ della curva $F(t)$ per definizione. Per essere più precisi scriveremo pure

$$\dot{\gamma}(t_0) \equiv \gamma_*\left(\frac{d}{dt}\right) = \gamma_*\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t_0}\right)$$

Curve integrali Dato un gruppo a un parametro ne abbiamo finora studiato il generatore infinitesimo. Il problema più importante è, naturalmente, quello inverso.

I.15 **Definizione** *Dato $X \in \mathfrak{X}(M)$, diremo che la curva liscia $t \mapsto \gamma(t)$ definita su un qualche intervallo aperto $J \subset \mathbb{R}$ è una* **curva integrale** *per X se $\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))$ per ogni $t \in J$.*

Come si vede ogni curva integrale è connessa. Ne viene che ogni orbita di un'azione è una curva integrale per il suo generatore infinitesimo.
Il problema diviene adesso quello di individuare i campi vettoriali che sono generatori infinitesimi di gruppi a un parametro. Come vedremo il problema è equivalente a quello della determinazione di soluzioni globali per equazioni differenziali ordinarie, perciò ci si aspetta che ogni campo dia luogo a gruppi a un parametro **locali** e che solo certe condizioni sull'intera varietà garantiscano l'esistenza globale.

Curve integrali e ODE Dato un campo X, ammettiamo che esista una sua curva integrale γ definita sull'intervallo $J \equiv (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ e tale che $\gamma(t_0) = m$. Sia (U, φ) una carta in m, e, restringendo ε è sempre possibile supporre che $\gamma(J) \subset U$. Dunque, dalla proposizione I.1,

$$\gamma_*\left(\frac{d}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\varphi^i \circ \gamma\right)\bigg|_t E_{i\gamma(t)}$$

ma

$$\gamma_*\left(\frac{d}{dt}\right) = X(\gamma(t)) = X_i(\gamma(t))\, E_{i\gamma(t)}$$

da cui γ esiste se e solo se esiste la soluzione dell'equazione differenziale ordinaria

$$\frac{d}{dt}\left(\varphi^i \circ \gamma\right) = X_i(\gamma(t))$$

Ecco spiegato perché l'esistenza di curve integrali in piccolo si traduce con l'esistenza di soluzioni di equazioni differenziali su uno spazio euclideo.
Poiché siamo interessati a definire le curve integrali su intervalli reali più ampi possibile, cercheremo soluzioni massimali delle equazioni differenziali collegate.

Gruppi a un parametro locali Per uniformare il linguaggio a quello usato precedentemente nel caso di gruppi a un parametro globali. In primo luogo, una convenzione: con $W \subset \mathbb{R} \times M$ indichiamo un aperto tale che per ogni $m \in M$ esista un intervallo $J_m = (-t_m^-, t_m^+)$, con $t_m^\pm > 0$, di modo che

$W \cap (\mathbb{R} \times \{m\}) = J_m \times \{m\}$. In altri temini, si richiede a W di essere della forma

$$W = \bigcup_{m \in M} J_m \times \{m\}$$

(perciò W è connesso). Mantenendo d'ora in poi per W questa convenzione, poniamo la

I.16 **Definizione** *Un* **gruppo locale a un parametro** *o* **flusso** *su una varietà M è una mappa liscia $\theta : W \to M$ talché*

(i) $\theta_0(m) = m$, *per ogni* $m \in M$;

(ii) *se* $(s, m) \in W$, *allora* $t^{\pm}_{\theta_s(m)} = t^{\pm}_m \pm s$ *e per ogni* $t \in J_{\theta_s(m)}$ *risulta ben definito* $\theta_{t+s}(m)$ *di modo che*

$$(\theta_t \circ \theta_s)(m) = \theta_{t+s}(m).$$

Come per i gruppi globali, possiamo dimostrare che $\theta_{t*}(X(m)) = X(\theta_t(m))$ per ogni m per cui $(t, m) \in W$. La curva $\gamma(t) \equiv \theta_t(m)$ è liscia e ben definita su J_m e corrisponde a una curva integrale per X, generatore infinitesimo.
Il problema che ci poniamo allora è di vedere se ogni campo vettoriale definisce un gruppo locale a un parametro su M. La risposta è affermativa, visto che, passando in coordinate, si tratta di determinare l'esistenza e unicità di soluzioni per equazioni differenziali ordinarie.
Detto questo, basta tradurre nel linguaggio delle varietà la teoria delle equazioni differenziali per ottenere

I.8 **Teorema** *Siano M una varietà e X un campo vettoriale liscio su di essa, allora*

(i) **(esistenza ed unicità)** *per ogni $m \in M$ esiste un'unica curva integrale massimale $\gamma_m : J_m \equiv (-t^-_m, t^+_m) \to M$ di X tale che $\gamma(0) = m$;*

(ii) **(rettificazione)** *sia $m \in M$ tale che $X(m) \neq 0$, allora esiste una carta (U, φ) intorno a m di modo che $X = E_1$;*

(iii) **(fuga dai compatti)** *se t^-_m (risp. t^+_m) è finito, allora non esiste alcun compatto di M che contenga l'immagine $\gamma_m((-t^-_m, 0))$ (risp. $\gamma_m((0, t^+_m))$). In particolare, se M è compatta, allora $t^{\pm}_m$ sono entrambi infiniti.*

(iv) **(dipendenza regolare dal dato iniziale)** *posto*

$$V_t \equiv \{m \in M \,|\, t \in J_m\}$$

abbiamo che V_t è un aperto di M e l'applicazione $\theta_t : V_t \to M$ data da

$$\theta_t(m) = \gamma_m(t)$$

è un diffeomorfismo tra V_t e V_{-t}; se è definita l'espressione $\theta_{t_1}\theta_{t_2}(m)$ allora essa eguaglia $\theta_{t_1+t_2}(m)$ e $\theta_{t_2}\theta_{t_1}(m)$; in altri termini, θ_t è un gruppo locale a un parametro.

Si noti che X è il generatore infinitesimo di θ_t: infatti,

$$\begin{aligned} \gamma_{m*}\left(\frac{d}{dt}\right) f &= X(\gamma_m(t)) f \\ \frac{d}{dt}(f \circ \gamma_m(t)) &= X(\gamma_m(t)) f \\ \lim_{t \to 0} \frac{f \circ \theta_t(m) - f(m)}{t} &= X(m) f \end{aligned}$$

I.1.5 L'algebra di Lie dei campi vettoriali su una varietà

Algebra di Lie di un campo vettoriale

Poniamo un'altra importante

I.17 **Definizione** *Siano A e $B \in \operatorname{End} \mathcal{C}^\infty(M)$, allora l'endomorfismo*

$$[A, B] \equiv A \circ B - B \circ A$$

si dice **commutatore** *di A e B.*

Si ottiene banalmente la seguente

I.4 Proposizione *Il commutatore di endomorfismi lineari sullo spazio vettoriale V soddisfa le seguenti proprietà*

(i) *è un applicazione bilineare da* $\operatorname{End} V \times \operatorname{End} V$ *in* $\operatorname{End} V$*;*

(ii) $[A, B] = -[B, A]$*;*

(iii) *vale l'identità di Jacobi:*

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$

I.18 Definizione *Uno spazio lineare sul quale sia definita un'applicazione bilineare soddisfacente le proprietà (i), (ii) e (iii) di cui nella proposizione, si dice* **algebra di Lie**, *mentre l'applicazione bilineare si dice* **parentesi di Lie**.

Se mostriamo che $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$, ne abbiamo che $\mathfrak{X}(M)$ diviene un'algebra di Lie rispetto al commutatore. A questo scopo ci basta mostrare la regola di Leibniz

$$\begin{aligned}
[X, Y](fg) &= X(Y(fg)) - Y(X(fg)) = X(Y(f)g + fY(g)) - Y(X(f)g + fX(g)) = \\
&= X \circ Y(f)g + Y(f)X(g) + X(f)Y(g) + fX \circ Y(g) - Y \circ X(f)g - X(f)Y(g) + \\
&\quad -Y(f)X(g) - fY \circ X(g) \\
&= [X, Y](f)g + f[X, Y](g).
\end{aligned}$$

I.5 Proposizione *Lo spazio $(\mathfrak{X}(M), [\cdot, \cdot])$ è un'algebra di Lie.*

I.6 Proposizione *Scegliamo una carta ammissibile su M, $\varphi(m) = (x_1, \ldots, x_n)(m)$. Siano $E_1, \ldots, E_n$ le coordinate dei campi vettoriali associate. Allora abbiamo*

(i) $[E_i, E_j] = 0$*;*

(ii) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$*, per ogni* $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$*,* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$*;*

(iii) *se* $X = \sum_{i \in J_n} f_i E_i$ *e* $Y = \sum_{i \in J_n} g_i E_i$*, allora*

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^n (X(g_i) - Y(f_i)) E_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n f_j \frac{\partial g_i}{\partial x_j} - g_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) E_i.$$

Dimostrazione Il punto (i) è equivalente al teorema di Schwarz sull'inversione dell'ordine di derivazione. Vediamo (ii). Sia $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$, allora

$$\begin{aligned}
[fX, gY]h &= fX(gY(h)) - gY(fX(h)) = fgXY(h) + fX(g)Y(h) - gY(f)X(h) - fgYX(h) = \\
&= fg[X, Y](h) + fX(g)Y(h) - gY(f)X(h).
\end{aligned}$$

Infine, (iii). Usando (i) e (ii) otteniamo

$$\begin{aligned}
[X, Y] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [f_i E_i, g_j E_j] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \{(f_i E_i g_j) E_j - (g_j E_j f_i) E_i\} = \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (f_j E_j g_i) - (g_j E_j f_i) \right) E_i = \sum_{i=1}^n (X(g_i) - Y(f_i)) E_i.
\end{aligned}$$

(c.v.d.)

Derivata di Lie Introduciamo ora il concetto di **derivata di Lie** di un campo vettoriale

I.19 Definizione *Il campo vettoriale $L_X Y$,* **derivata di Lie** *di Y rispetto a X, si definisce per ogni $m \in M$ come*

$$\begin{aligned} (L_X Y)(m) &\equiv \lim_{t\to 0} \frac{\theta_{-t*}(Y(\theta_t(m))) - Y(m)}{t} = \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{Y(m) - \theta_{t*}(Y(\theta_{-t}(m)))}{t} \end{aligned}$$

dove θ_t è il flusso associato a X.

Se poniamo $Z_m(t) \equiv \theta_{-t*}(Y(\theta_t(m)))$, allora, visto che $\theta_{-t*} : T_{\theta_t(m)}M \to T_m M$, abbiamo che $Z_m(t)$ è una curva in $T_m M$ e $(L_X Y)(m) = \dot{Z}_m(0)$.
Per vedere che la definizione è ben posta ci occorrono almeno il seguente

I.5 Lemma *Sia X un campo vettoriale su M e θ il corrispondente flusso definito da $W \subset \mathbb{R} \times M$ su M. Dato $m \in M$ e $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, U aperto contenente m, possiamo scegliere $\delta > 0$ e un intorno V di m contenuto in U, talché $\theta(B(0,\delta) \times V) \subset U$. Allora esiste una funzione $\mathcal{C}^\infty(B(0,\delta)\times V)$ per cui, per ogni $t \in B(0,\delta)$ e $q \in V$, risulti*

$$\begin{aligned} f(\theta_t(q)) &= f(q) + tg(t,q) \\ X(q) f &= g(0,q) \end{aligned}$$

I.6 Lemma *Detrminato il richiesto $\tilde{V} \equiv B(0,\delta)\times V$ consideriamo la funzione $r(t,q) = f(\theta_t(q)) - f(q)$ che è $\mathcal{C}^\infty\left(\tilde{V}\right)$ e $r(0,q) = 0$. Definiamo*

$$g(t,q) = \int_0^1 \dot{r}(ts,q)\, ds,$$

allora $g \in \mathcal{C}^\infty\left(\tilde{V}\right)$ come si può verificare passando in coordinate. Dal teorema fondamentale del calcolo

$$tg(t,q) = \int_0^1 \dot{r}(ts,q)\, t\, ds = r(t,q) - r(0,q) = r(t,q)\,.$$

Infine,

$$f(\theta_t(q)) = f(q) + tg(t,q)\,.$$

Dalla definizione del generatore infinitesimo

$$g(0,q) = \lim_{t\to 0} g(t,q) = \lim_{t\to 0} \frac{r(t,q)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\theta_t(q)) - f(q)}{t} = X(q) f.$$

La definizione di derivata di Lie è ben posta come segue dal seguente

I.9 Teorema *Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, alloea*

$$L_X Y = [X,Y]\,.$$

Dimostrazione Per ogni $m \in M$ e $f \in \mathcal{C}^\infty(m)$, abbiamo per qualche $\delta > 0$ e $|t| < \delta$

$$\frac{Y(m) - \theta_{t*}(Y(\theta_{-t}(m)))}{t} f = \frac{Y(m) f - Y(\theta_{-t}(m))(f\circ\theta_t)}{t}.$$

Si tratta di vedere che il limite per $t \to 0$ a secondo membro eguaglia $[X,Y](m) f$. Dal lemma precedente, posto $g(t,q) \equiv g_t(q)$,

$$\begin{aligned} \frac{Y(m) f - Y(\theta_{-t}(m))(f\circ\theta_t(m))}{t} &= \frac{Y(m) f - Y(\theta_{-t}(m))(f + tg_t)}{t} = \\ &= \frac{Y(m) f - Y(\theta_{-t}(m)) f}{t} - Y(\theta_{-t}(m))\, g_t = \\ &= \frac{(Y(f))(m) - (Y(f))(\theta_{-t}(m))}{t} - Y(\theta_{-t}(m))\, g_t = \end{aligned}$$

Il primo limite vale $X(m)(Y(f))$. Per il secondo, abbiamo, $\theta_{-t}(m) \to m$ e $g_t \to X(f)$, sicché

$$\begin{aligned}(L_X Y)(m) f &\equiv \lim_{t\to 0} \frac{Y(m) - \theta_{t*}(Y(\theta_{-t}(m)))}{t} f = X(Y(f))(m) - Y(X(f)(m)) = \\ &= [X,Y](m) f.\end{aligned}$$

(c.v.d.)

Prima di chiudere ancora u risultato interessante

I.10 Teorema *Sia $F : N \to M$ una mappa liscia e siano $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(N)$ e $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$ di modo che $Y_i = F_*(X_i)$, $i \in J_2$. Allora anche $[X_1, X_2]$ e $[Y_1, Y_2]$ sono F-correlati, cioè*

$$F_*[X_1, X_2] = [F_*(X_1), F_*(X_2)].$$

Dimostrazione Cominciamo notando che condizione necessaria e sufficiente affinché X e Y siano F-correlati è che per ogni g liscia su un aperto V di M

$$(Yg) \circ F = X(g \circ F)$$

su $F^{-1}(V)$. Se $q \in F^{-1}(V)$, allora

$$\begin{aligned}F_*(X(q)) g &= X(q)(g \circ F) = X(g \circ F)(q) = \\ &= (Yg) \circ F(q) = Y(F(q)) g.\end{aligned}$$

Sia $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$. Dobbiamo far vedere che

$$([Y_1, Y_2] f) \circ F = [X_1, X_2](f \circ F),$$

ma

$$\begin{aligned}([Y_1, Y_2] f) \circ F &= (Y_1(Y_2(f))) \circ F - (Y_2(Y_1(f))) \circ F = X_1((Y_2(f)) \circ F) - X_2((Y_1(f)) \circ F) = \\ &= X_1(X_2(f \circ F)) - X_2(X_1(f \circ F)) = \\ &= [X_1, X_2](f \circ F).\end{aligned}$$

(c.v.d.)

I.2 Tensori

I.2.1 Campi di covettori

Duale di uno spazio vettoriale Cominciamo con il richiamare qualche nozione sui covettori di uno spazio lineare V. Ora e nel seguito supporremo che V sia finito dimensionale e porremo $n \equiv \dim V$.
Il duale di V, V^*, i.e., lo spazio delle applicazioni lineari da V in $\mathbb{R}$, si dice spazio dei covettori di V, e un covettore non è altro che un elemento di V^*. Se $\sigma \in V^*$ allora si scrive

$$\sigma(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \sigma \rangle \in \mathbb{R}$$

per ogni $\mathbf{v} \in V$.
Dall'algebra lineare sono ben noti i tre seguenti fatti

(i) se $F_* : V \to W$ è una mappa lineare, allora è univocamente determinata la mappa duale $F^* : W^* \to V^*$ tale che

$$\langle \mathbf{v}, F^*(\sigma) \rangle = \langle F_*(\mathbf{v}), \sigma \rangle$$

per ogni $\mathbf{v} \in V$ e $\sigma \in W^*$. Se F_* è iniettiva (risp. suriettiva), allora F^* è suriettiva (risp. iniettiva). Inoltre, $(G_* \circ F_*)^* = F^* \circ G^*$;

(ii) se $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in J_n}$ è una base di V, allora è univocamente definita la base duale di V^* data da $\{\omega^i\}_{i \in J_n}$ talché

$$\omega^i(\mathbf{e}_j) = \delta^i_j;$$

(iii) V e V^{**} sono canonicamente isomorfi secondo l'isomorfismo

$$\mathbf{v} \mapsto \langle \mathbf{v}, \cdot \rangle.$$

Covettori su una varietà e campi covettoriali Sia M una varietà (come al solito liscia) e sia $m \in M$. Denotiamo con $T^*_m M$ il duale di $T_m M$. $\sigma_m \in T^*_m M$ se e solo se $\sigma(m) : T_m M \to \mathbb{R}$ è un'applicazione lineare.
Fissata una base $E_{1m}, \ldots, E_{nm}$ di $T_m M$ è univocamente determinata la base duale $\left\{\omega^i_m\right\}_{i \in J_n}$ e si ha banalmente

$$\sigma(m) = \sum_{i=1}^{n} \sigma(m)(E_{im})\,\omega^i_m.$$

Definiamo ora il fibrato cotangente come

$$T^* M = \bigcup_{m \in M} T^*_m M$$

che, come TM (basta considerare le basi duali nella costruzione delle carte), ammette una struttura differenziabile e può essere riguardato come varietà differenziabile liscia.
A questo punto è facile porre la seguente

I.20 Definizione *Un* **campo covettoriale** *su una varietà M è un'applicazione liscia $\sigma : M \to T^* M$ talché, per ogni $m \in M$, risulti $\sigma(m) \in T^*_m M$.*

Notiamo che σ agisce in modo naturale sui campi vettoriali a dare funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty(M)$.
Preso $X \in \mathfrak{X}(M)$, basta porre

$$(\sigma(X))(m) \equiv (\sigma(m))(X(m)).$$

La mappa $\sigma : \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ è lineare e tale che se $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, allora

$$\sigma(fX + gY) = f\sigma(X) + g\sigma(Y),$$

infatti,

$$\begin{aligned} \sigma(fX + gY)(m) &= \sigma(m)(f(m)X(m) + g(m)Y(m)) = f(m)\sigma(m)(X(m)) + g(m)\sigma(m)(Y(m)) = \\ &= (f\sigma(X))(m) + (g\sigma(Y))(m). \end{aligned}$$

Differenziale di una funzione Se f è una funzione $\mathcal{C}^\infty$, allora definisce in modo naturale un campo covettoriale liscio df:

$$\langle D_m, df \rangle = D_m(f)$$

per ogni $D_m \in T_m M$, per ogni $m \in M$. Se $X \in \mathfrak{X}(M)$, allora

$$df(X)(m) = X(m)(f)$$

cioè

$$df(X) = X(f).$$

Il campo covettoriale df si chiama **differenziale** di f e $df(m) \in T^*_m M$ si chiama **differenziale** di f in m.
Per M consideriamo un aperto U di $\mathbb{R}^n$. Siano $x^1, \ldots, x^n$ le funzioni coordinate su U. Una base di TM è data da $\left\{\partial/\partial x^i\right\}$. Inoltre,

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, dx^j \right\rangle = \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \delta^j_i$$

di modo che $\left\{dx^i\right\}$ è la base duale di $\left\{\partial/\partial x^i\right\}$.
In particolare, se $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, allora $df = \lambda_i dx^i$, ma

$$\frac{\partial f}{\partial x^j} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^j}, df \right\rangle = \lambda_i \left\langle \frac{\partial}{\partial x^j}, dx^i \right\rangle = \lambda_j,$$

perciò

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

e la definizione di differenziale coincide con quella che solitamente si dà in $\mathbb{R}^n$.

Campi covettoriali e morfismi Studiamo l'interazione di morfismi e campi covettoriali. Sia $F : M \to N$ una mappa liscia e sia $m \in M$. Allora è ben definita l'applicazione lineare $F_* : T_m M \to T_{F(m)} N$. Ma F_*

individua subito l'applicazione duale $F^* : T^*_{F(m)}N \to T^*_m M$ tale che

$$F^* \left(\sigma \left(F \left(m\right)\right)\right) \left(X_m\right) = \sigma \left(F \left(m\right)\right) \left(F_* \left(X_m\right)\right).$$

Mentre F_* non mappa sempre campi vettoriali su campi vettoriali, per i campi covettoriali vale il

I.11 **Teorema** *Sia $F : M \to N$ una mappa liscia e sia σ un campo covettoriale su N. Allora è ben definito $F^* \left(\sigma\right)$ campo covettoriale su M dato da*

$$\left(F^* \left(\sigma\right)\right) \left(m\right) \left(X_m\right) \equiv F^* \left(\sigma \left(F \left(m\right)\right)\right) \left(X_m\right) = \sigma \left(F \left(m\right)\right) \left(F_* \left(X_m\right)\right)$$

per ogni $m \in M$, $X_m \in T_m M$.

Dimostrazione L'associazione $m \mapsto F(m)$ è univoca, perciò $F^*(\sigma)$ è definito in ogni punto $m \in M$. Inoltre,

$$\left(F^* \left(\sigma\right)\right) \left(m\right) = \sigma \left(F \left(m\right)\right) \circ F_*$$

perciò l'applicazione $M \to T^*M$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$.

Lavorando in coordinate, possiamo ridimostrare il teorema. Fissiamo $p_0 \in M$ e sia (U, φ) una carta in p_0 tale che $F(U) \subset V$ dove (V, ψ) è una carta in $F(p_0)$. Denotiamo con $\left(x^1, \ldots, x^m\right)$ le ccordinate in $\varphi(U)$ e con $\left(y^1, \ldots, y^n\right)$ le coordinate in $\psi(V)$. Sia f la rappresentazione in coordinate di F. L'espressione locale di $\sigma(q)$ sia

$$\sigma \left(q\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(q\right) \tilde{\omega}^i_q$$

con $\tilde{\omega}^i_q$ base duale di $\tilde{E}_{iq} = \psi_*^{-1} \left(\partial/\partial y^i\right)$.

Allora

$$\left(F^* \left(\sigma\right)\right) \left(p\right) \left(E_{jp}\right) = \sigma \left(F \left(p\right)\right) \left(F_* \left(E_{jp}\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(F \left(p\right)\right) \tilde{\omega}^i_{F(p)} \left(F_* \left(E_{jp}\right)\right),$$

ma

$$F_* \left(E_{jp}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial y^k}{\partial x^j}\right)_{\varphi(p)} \tilde{E}_{kF(p)}$$

perciò

$$\left(F^* \left(\sigma\right)\right) \left(p\right) \left(E_{jp}\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(F \left(p\right)\right) \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)_{\varphi(p)}$$

(c.v.d.) di modo che $F^*(\sigma)$ è ben definito essendo liscio.

Dal teorema si ottengono anche le seguenti formule, se $F^*(\sigma) = \sum_{j \in J_m} \beta_j \omega^j$,

$$\begin{aligned} F^* \left(\tilde{\omega}^i\right) &= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \omega^j; \\ \beta_j &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \alpha_i. \end{aligned}$$

Utilizzando la nozione di campo covettoriale come applicazione sui campi vettoriali a dare funzioni lisce, possiamo riformulare il teorema come segue, nel caso F sia un **diffeomorfismo**,

$$\begin{aligned} \left(F^* \sigma\right) \left(X\right) &= \left(\sigma \circ F\right) \left(F_* X\right) \\ \langle X, F^* \sigma \rangle &= \langle F_* X, \sigma \circ F \rangle \end{aligned}$$

Notiamo che se F è un diffeomorfismo a valori in $\mathbb{R}^n$, allora

$$\left\langle X, F^* dx^i \right\rangle = \left\langle F_* X, dx^i \right\rangle = \left(F_* X\right) \left(x^i\right) = X \left(x^i \circ F\right) = \left\langle X, d \left(x^i \circ F\right) \right\rangle$$

cioè

$$F^* dx^i = dF^i.$$

Infine, fissiamo una carta (U,φ) e sia $U' \equiv \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Come sappiamo $E_i = \varphi_*^{-1}\left(\partial/\partial x^i\right)$, per cui $\varphi_*(E_i) = \partial/\partial x^i$, dunque

$$\left\langle E_i, \varphi^*\left(dx^j\right)\right\rangle = \left\langle \varphi_*(E_i), dx^j\right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, dx^j\right\rangle = \delta_i^j$$

di modo che la base locale duale ω^i di E_i è eguale a $\varphi^*\left(dx^i\right)$.

I.2.2 Tensori su uno spazio vettoriale

I.21 Definizione *Un* **tensore** Φ *sullo spazio lineare* V *è una mappa multilineare*

$$\Phi : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{r \text{ volte}} \times \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{s \text{ volte}} \to \mathbb{R}$$

r si dice **ordine covariante** *di Φ, mentre s è l'***ordine controvariante**. *Il tensore Φ si dice anche di* **tipo** (r,s).

Ad esempio, per $r = 1$ e $s = 0$, $\Phi \in V^*$, per $r = 0$ e $s = 1$, invece, $\Phi \in V^{**}$. Fissata la coppia (r,s) l'insieme dei tensori di tipo (r,s) si denota con $\mathcal{T}_s^r(V)$ ed è chiaramente uno spazio vettoriale.
I tensori in cui $s = 0$ si dicono **covarianti**, i tensori in cui $r = 0$, si dicono **controvarianti**. Seppur con qualche eccezione importante, noi ci occuperemo principalmente dei tensori covarianti (che definiscono le forme differenziali).
Cominciamo con il seguente semplice

I.12 Teorema *L'insieme dei tensori di ordine (r,s) su V è uno spazio vettoriale di dimensione* $(\dim V)^{r+s}$.

Dimostrazione Sia $\dim V \equiv n$ e fissiamo una base $\{\mathbf{e}_i\}_{i\in J_n}$ in V e sia $\left\{\omega^i\right\}_{i\in J_n}$ la base duale corrispondente. Andiamo a calcolare $\Phi\left(\mathbf{v}_1,\ldots \mathbf{v}_r;\sigma^1,\ldots \sigma^s\right)$, certamente

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_i &= \sum_{j=1}^n \alpha_i^j \mathbf{e}_j \\ \sigma^k &= \sum_{l=1}^n \beta_l^k \omega^l\end{aligned}$$

sicché, dalla multilinearità dell'applicazione Φ, abbiamo

$$\Phi\left(\mathbf{v}_1,\ldots \mathbf{v}_r;\sigma^1,\ldots \sigma^s\right) = \sum_{\substack{j_1,\ldots,j_r\\ l_1,\ldots,l_s}} \alpha_1^{j_1}\ldots\alpha_r^{j_r}\beta_{l_1}^1\ldots\beta_{l_s}^s \Phi\left(\mathbf{e}_{j_1},\ldots,\mathbf{e}_{j_r};\omega^{l_1},\ldots,\omega^{l_s}\right)$$

gli n^{r+s} numeri $\Phi\left(\mathbf{e}_{j_1},\ldots,\mathbf{e}_{j_r};\omega^{l_1},\ldots,\omega^{l_s}\right)$ si dicono componenti del tensore nella base $\{\mathbf{e}_i\}$.
Definiamo ora $\Omega_{l_1,\ldots,l_s}^{j_1,\ldots,j_r} \in \mathcal{T}_s^r(V)$ dato da

$$\Omega_{l_1,\ldots,l_s}^{j_1,\ldots,j_r}\left(\mathbf{e}_{k_1},\ldots,\mathbf{e}_{k_r};\omega^{i_1},\ldots,\omega^{i_s}\right) = \begin{cases} 1, & j_p = k_p \text{ e } l_q = i_q,\ \forall p \in J_r, q \in J_s \\ 0, & \text{altrimenti}\end{cases}$$

e da

$$\Omega_{l_1,\ldots,l_s}^{j_1,\ldots,j_r}\left(\mathbf{v}_1,\ldots \mathbf{v}_r;\sigma^1,\ldots \sigma^s\right) = \alpha_1^{j_1}\ldots\alpha_r^{j_r}\beta_{l_1}^1\ldots\beta_{l_s}^s.$$

Poiché la formula è lineare in ciascuna fissata componente di $\mathbf{v}_i$ o ω^j si conclude che $\Omega_{l_1,\ldots,l_s}^{j_1,\ldots,j_r}$ è un tensore.
Mostriamo che l'insieme $\left\{\Omega_{l_1,\ldots,l_s}^{j_1,\ldots,j_r}\right\}$ forma una base di $\mathcal{T}_s^r(V)$, di modo che avremo la tesi sulla dimensione.
Cominciamo dalla lineare indipendenza. Se vale

$$\sum_{\substack{j_1,\ldots,j_r\\ l_1,\ldots,l_s}} \gamma_{l_1\ldots l_r}^{j_1\ldots j_r}\Omega_{l_1,\ldots,l_s}^{j_1,\ldots,j_r} = 0$$

allora calcolando l'espressione di sopra successivamente su $\left(\mathbf{e}_{j_1},\ldots,e_{j_r};\omega^{l_1},\ldots,\omega^{l_s}\right)$ otteniamo, dalla definizione di Ω, $\gamma^{j_1\ldots j_r}_{l_1\ldots l_r}=0$, da cui la lineare indipendenza.

Infine, dato Φ e posto $\varphi^{j_1\ldots j_r}_{l_1\ldots l_r}=\Phi\left(\mathbf{e}_{j_1},\ldots,e_{j_r};\omega^{l_1},\ldots,\omega^{l_s}\right)$ otteniamo che Φ e il tensore

$$\sum_{\substack{j_1,\ldots,j_r\\ l_1,\ldots,l_s}}\varphi^{j_1\ldots j_r}_{l_1\ldots l_r}\Omega^{j_1,\ldots,j_r}_{l_1,\ldots,l_s}$$

assumono gli stessi valori su gli elementi della base di modo che coincidono ovunque e abbiamo
(c.v.d.) la tesi.

I.2.3 Campi tensoriali

Definizione di campo tensoriale Sia M una varietà liscia. Andando a definire come al solito

$$\mathcal{T}^r_s(M)\equiv\bigcup_{m\in M}\mathcal{T}^r_s(T_mM)$$

abbiamo che $\mathcal{T}^r_s(M)$ è ancora una varietà, perciò possiamo definire un **campo tensoriale** Φ come un'applicazione liscia da M in $\mathcal{T}^r_s(M)$ di modo che

$$\Phi(m)\in\mathcal{T}^r_s(T_mM).$$

Campi tensoriali e funzioni lisce Se $f\in\mathcal{C}^\infty(M)$ e $\Phi\in\mathcal{T}^r_s(M)$, allora possiamo definire $f\Phi$ come

$$m\mapsto f(m)\,\Phi(m)\,;$$

inoltre, se $X_1,\ldots,X_r\in\mathfrak{X}(M)$ e se $\alpha^1,\ldots,\alpha^s$ sono campi covettoriali, possiamo definire la funzione da M in $\mathbb{R}$,

$$\Phi\left(X_1,\ldots,X_r;\alpha^1,\ldots,\alpha^s\right)$$

come

$$\Phi\left(X_1,\ldots,X_r;\alpha^1,\ldots,\alpha^s\right)(m)\equiv\Phi(m)\left(X_1(m),\ldots,X_r(m);\alpha^1(m),\ldots,\alpha^s(m)\right).$$

Ebbene $f\Phi\in\mathcal{T}^r_s(M)$ e $\Phi\left(X_1,\ldots,X_r;\alpha^1,\ldots,\alpha^s\right)\in\mathcal{C}^\infty(M)$, come si vede passando in coordinate locali.

Tensori covarianti e morfismi Concentriamoci sui tensori covarianti, tali cioè che $s=0$ e, considerata $F:M\to N$, vediamo come agiscono sui tensori F^* e F_*.
Considerata l'applicazione lineare F_* tra gli spazi lineari V e W, abbiamo che essa induce la mappa lineare tra $\mathcal{T}^r(W)$ e $\mathcal{T}^r(V)$ definita come

$$(F^*\Phi)(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_r)\equiv\Phi(F_*(\mathbf{v}_1),\ldots,F_*(\mathbf{v}_r))$$

Così, data la mappa liscia F tra le varietà M e N, troviamo la mappa liscia $F^*:\mathcal{T}^r(N)\to\mathcal{T}^r(M)$ definita come

$$(F^*\Phi)(m)(X_{1m},\ldots,X_{rm})\equiv\Phi(F(m))(F_*(X_{1m}),\ldots,F_*(X_{rm})).$$

La proprietà per cui F^* mappa un tensore covariante in un tensore covariante, come abbiamo avuto modo di notare, dipende fortemente dalla covarianza essendo falsa nel caso controvariante dato da $\mathfrak{X}(M)=\mathcal{T}_1(M)$ (l'identificazione dello spazio col suo biduale consente quest'ultima qguaglianza che è in realtà una identificazione). La dimostrazione del fatto che F^* è ben definita è una noiosa generalizzazione dello stesso fatto dimostrato nel caso dei campi di covettori.
Prima di proseguire introduciamo la seguente

I.22 Definizione *Sia V uno spazio vettoriale. Diciamo che $\Phi\in\mathcal{T}^r(V)$ è* **simmetrico** *se per ogni $i,j\in J_r$ abbiamo*

$$\Phi(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_i,\ldots,\mathbf{v}_j,\ldots,\mathbf{v}_r)=\Phi(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_j,\ldots,\mathbf{v}_i,\ldots,\mathbf{v}_r).$$

Diciamo che Φ è **antisimmetrico** *o* **alternante** *se nell'operazione di scambio si ha un cambiamento di segno, cioè se*

$$\Phi(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_i,\ldots,\mathbf{v}_j,\ldots,\mathbf{v}_r)=-\Phi(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_j,\ldots,\mathbf{v}_i,\ldots,\mathbf{v}_r).$$

I tensori covarianti alternanti si dicono anche **forme esterne**.

Un campo tensoriale è simmetrico (risp. alternante) se è simmetrico (risp. alternante) in ogni punto di M.

Si noti come F^* conservi la simmetria o l'antisimmetria di un campo tensoriale.

Simmetrizzazione e antisimmetrizzazione

Torniamo al caso dei tensori su uno spazio vettoriale V. Notiamo che se Φ_1 e Φ_2 sono entrambi simmetrici o alternante ogni loro combinazione lineare è ancora simmetrica o alternante, perciò gli insiemi dei tensori simmetrici o alternanti sono spazi lineari. Denotiamo lo spazio dei tensori simmetrici con $\sum^r(V)$ mentre lo spazio dei tensori antisimmetrici con $\bigwedge^r(V)$. Questi due sottospazio di $\mathcal{T}^r(V)$ hanno in comune il solo tensore nullo.

Sia σ una permutazione degli indici $(1,\ldots,r)$, sappiamo (corso di Geometria, per esempio) che essa è data dal prodotto di trasposizioni cioè di permutazioni costituite da scambi di due soli indici. Nonostante la rappresentazione come prodotto di trasposizioni non sia unica, la parità (cioè il fatto che il numero dei fattori sia pari o dispari) è univocamente determinata. Sia $|\sigma|$ è la parità della permutazione, 0 nel caso il numero di trasposizioni sia pari, 1 altrimenti. Il segno della permutazione sarà allora $(-1)^{|\sigma|}$. L'applicazione $\sigma \mapsto (-1)^{|\sigma|}$ è una ben definito omomorfismo del gruppo delle permutazioni di r oggetti, $\mathfrak{S}_r$, nel gruppo $\mathbb{Z}_2$.

Alla luce di questi fatti, possiamo riformulare la definizione di tensori simmetrici o antisimmetrici come segue, Φ è **simmetrico** se

$$\Phi\left(\mathbf{v}_{\sigma(1)},\ldots,\mathbf{v}_{\sigma(r)}\right) = \Phi\left(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_r\right),$$

mentre è **alternante** se

$$\Phi\left(\mathbf{v}_{\sigma(1)},\ldots,\mathbf{v}_{\sigma(r)}\right) = (-1)^{|\sigma|}\,\Phi\left(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_r\right).$$

A questo punto siamo in grado di definire le mappe lineari simmetrizzanti e antisimmetrizzanti, $\mathcal{S}$ e $\mathcal{A}$, su $\mathcal{T}^r(V)$, come

$$\begin{aligned}(\mathcal{S}\Phi)\left(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_r\right) &= \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\Phi\left(\mathbf{v}_{\sigma(1)},\ldots,\mathbf{v}_{\sigma(r)}\right);\\ (\mathcal{A}\Phi)\left(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_r\right) &= \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}(-1)^{|\sigma|}\,\Phi\left(\mathbf{v}_{\sigma(1)},\ldots,\mathbf{v}_{\sigma(r)}\right).\end{aligned}$$

Abbiamo la seguente facile

I.7 Proposizione *Considerate le mappe $\mathcal{A}$ ed $\mathcal{S}$ abbiamo*

(i) *$\mathcal{A}$ ed $\mathcal{S}$ sono proiettori, i.e., $\mathcal{A}^2=\mathcal{A}$ e $\mathcal{S}^2=\mathcal{S}$;*

(ii) *$R(\mathcal{A})=\bigwedge^r V$ e $R(\mathcal{S})=\sum^r(V)$;*

(iii) *Φ è simmetrico se e solo se $\mathcal{S}\Phi=\Phi$, Φ è alternante se e solo se $\mathcal{A}\Phi=\Phi$;*

(iv) *se $F_*: V\to W$ è lineare, allora $\mathcal{A}$ ed $\mathcal{S}$ commutano con $F^*:\mathcal{T}^r(W)\to\mathcal{T}^r(V)$.*

Dimostrazione Gli enunciati sono molto simili per $\mathcal{A}$ e $\mathcal{S}$, perciò li vediamo solo nel caso di $\mathcal{A}$. Sia $\mathcal{A}$ alternante, abbiamo

$$\Phi\left(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_r\right) = (-1)^{|\sigma|}\,\Phi\left(\mathbf{v}_{\sigma(1)},\ldots,\mathbf{v}_{\sigma(r)}\right)$$

perciò sommando su tutte le permutazioni ambo i membri troviamo

$$r!\Phi\left(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_r\right) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}(-1)^{|\sigma|}\,\Phi\left(\mathbf{v}_{\sigma(1)},\ldots,\mathbf{v}_{\sigma(r)}\right)$$

perciò

$$\Phi\left(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_r\right) = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}(-1)^{|\sigma|}\,\Phi\left(\mathbf{v}_{\sigma(1)},\ldots,\mathbf{v}_{\sigma(r)}\right) = \mathcal{A}\Phi\left(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_r\right).$$

Sia adesso Φ un tensore qualsiasi e sia τ una permutazione, allora

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}\Phi)\left(\mathbf{v}_{\tau(1)},\ldots,\mathbf{v}_{\tau(r)}\right) &= \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}(-1)^{|\sigma|}\,\Phi\left(\mathbf{v}_{\sigma\tau(1)},\ldots,\mathbf{v}_{\sigma\tau(r)}\right) = \\ &= \frac{1}{r!}(-1)^{|\tau|}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}(-1)^{|\sigma\tau|}\,\Phi\left(\mathbf{v}_{\sigma\tau(1)},\ldots,\mathbf{v}_{\sigma\tau(r)}\right)\end{aligned}$$

poiché $(-1)^{|\sigma|}$ è un omomorfismo e $(-1)^{|\tau|}(-1)^{|\tau|}=1$, infine, visto che mentre σ descrive $\mathfrak{S}_r$ $\sigma\tau$ descrive $\mathfrak{S}_r$, concludiamo

$$(\mathcal{A}\Phi)\left(\mathbf{v}_{\tau(1)},\ldots,\mathbf{v}_{\tau(r)}\right) = (-1)^{|\tau|}\,\Phi\left(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_r\right)$$

di modo che $\mathcal{A}\Phi$ è alternante.

Questo mostra che $R(\mathcal{A})\subset\bigwedge^r V$, d'altra parte, visto che ogni antisimmetrico è autovettore di $\mathcal{A}$ all'autovalore 1, concludiamo che vale l'eguaglianza.

Non ci resta che dimostrare (iv). Abbiamo

$$\begin{aligned}F^*\Phi\left(\mathbf{v}_{\sigma(1)},\ldots,\mathbf{v}_{\sigma(r)}\right) &= \Phi\left(F^*\mathbf{v}_{\sigma(1)},\ldots,F^*\mathbf{v}_{\sigma(r)}\right)\\ (-1)^{|\sigma|}F^*\Phi\left(\mathbf{v}_{\sigma(1)},\ldots,\mathbf{v}_{\sigma(r)}\right) &= (-1)^{|\sigma|}\,\Phi\left(F^*\mathbf{v}_{\sigma(1)},\ldots,F^*\mathbf{v}_{\sigma(r)}\right)\\ \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}(-1)^{|\sigma|}F^*\Phi\left(\mathbf{v}_{\sigma(1)},\ldots,\mathbf{v}_{\sigma(r)}\right) &= \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}(-1)^{|\sigma|}\,\Phi\left(F^*\mathbf{v}_{\sigma(1)},\ldots,F^*\mathbf{v}_{\sigma(r)}\right)\\ \mathcal{A}\left(F^*\Phi\right) &= F^*\left(\mathcal{A}\Phi\right).\end{aligned}$$

(c.v.d.)

Entrambe le mappe, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{S}$, possono essere estese a mappe sui campi tensoriali sulle varietà semplicemente definendole come nel caso vettoriale punto per punto. Verificando che ambo i membri delle relazioni di cui nelle proprietà (i)-(iv) definiscono funzioni lisce una volta applicate sui campi (che sostituiscono i vettori $\mathbf{v}_i$), si riottiene la proposizione precedente nel caso delle varietà:

I.13 Teorema *Le mappe $\mathcal{A}$ e $\mathcal{S}$ definite su $\mathcal{T}^r(M)$ soddisfano le proprietà (i)-(iv).*

I.2.4 Moltiplicazione di tensori

Come abbiamo visto $\mathcal{T}^r(M)$ è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale ed è anche un $\mathcal{C}^\infty$-modulo. Conveniamo che $\mathcal{T}^0(V)=\mathbb{R}$ e che $\mathcal{T}^0=\mathcal{C}^\infty(M)$, dove M è una varietà liscia e V uno spazio vettoriale.
Ricordiamo che il nostro punto di vista preferito è quello di considerare i tensori come funzioni su $\mathbb{R}$ (un corpo) nel caso lineare, o su $\mathcal{C}^\infty(M)$ (un'algebra), nel caso delle varietà.
Ha dunque senso considerare il prodotto dei tensori, visto che essi hanno per immagini oggetti che possono essere moltiplicati.
Cominciamo come sempre dal caso lineare che poi esporteremo senza troppa spesa al caso non lineare.

Moltiplicazioni di tensori su spazi lineari

Sia V uno spazio è banalmente ben posta la seguente

I.23 Definizione *Il prodotto $\varphi\in\mathcal{T}^r(V)$ e $\psi\in\mathcal{T}^s(V)$, denotato come $\varphi\otimes\psi$, è un tensore di rango $r+s$ definito da*

$$(\varphi\otimes\psi)\left(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_r,\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_s\right)=\varphi\left(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_r\right)\psi\left(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_s\right).$$

Il prodotto definisce una mappa $(\cdot\otimes\cdot):\mathcal{T}^r(V)\times\mathcal{T}^s(V)\to\mathcal{T}^{r+s}(V)$.

I.14 Teorema *La mappa $(\cdot\otimes\cdot):\mathcal{T}^r(V)\times\mathcal{T}^s(V)\to\mathcal{T}^{r+s}(V)$ è bilineare e associativa. Se $\left\{\omega^i\right\}_{i\in J_n}$ è una base per $V^*\equiv\mathcal{T}^1(V)$, allora $\left\{\omega^{i_1}\otimes\ldots\otimes\omega^{i_r}\right\}$ è una base per $\mathcal{T}^r(V)$. Infine, se F_* è un'applicazione lineare tra V e W, la duale associata F^* è tale che*

$$F^*(\varphi\otimes\psi)=(F^*\varphi)\otimes(F^*\psi).$$

Dimostrazione

Vediamo la linearità nella prima variabile (per l'altra si procede analogamente)

$$\begin{aligned}(\varphi_1+\alpha\varphi_2)\otimes\psi(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{w}_s) &= (\varphi_1(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_r)+\alpha\varphi_2(\mathbf{v}_1,\ldots\mathbf{v}_r))\,\psi(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_s)=\\ &= (\varphi_1\otimes\psi)(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{w}_s)++\alpha(\varphi_2\otimes\psi)(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{w}_s)=\\ &= [(\varphi_1\otimes\psi)+\alpha(\varphi_2\otimes\psi)](\mathbf{v}_1,,\ldots,\mathbf{w}_s)\,.\end{aligned}$$

La proprietà associativa è analoga:

$$\begin{aligned}((\varphi\otimes\psi)\otimes\zeta)(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{z}_t) &= (\varphi\otimes\psi)(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{w}_s)\,\zeta(\mathbf{z}_1,\ldots,\mathbf{z}_t)=\\ &= \varphi(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_r)\,\psi(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_s)\,\zeta(\mathbf{z}_1,\ldots,\mathbf{z}_t)=\\ &= \varphi(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_r)\,(\psi(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_s)\,\zeta(\mathbf{z}_1,\ldots,\mathbf{z}_t))=\\ &= \varphi(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_r)\,(\psi\otimes\zeta)(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{z}_t)=\\ &= \varphi\otimes(\psi\otimes\zeta)(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{z}_t)\,.\end{aligned}$$

Visto che vale la proprietà associativa possiamo tirare via le parentesi. Per controllare la seconda parte del teorema, ricordiamo che fissata la base $\{\omega^i\}$ di V^* duale della $\{\mathbf{e}_i\}$ di V, abbiamo che $\{\Omega^{i_1,\ldots,i_r}\}$ è una base per $\mathcal{T}^r(V)$ data da

$$\Omega^{i_1,\ldots,i_r}(\mathbf{e}_{j_1},\ldots,\mathbf{e}_{j_r})=\begin{cases}1, & j_l=i_l\ \forall l\in J_r\\ 0, & \text{altrimenti}\end{cases}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}\left(\omega^{i_1}\otimes\ldots\otimes\omega^{i_r}\right)(\mathbf{e}_{j_1},\ldots,\mathbf{e}_{j_r}) &= \omega^{i_1}(\mathbf{e}_{j_1})\ldots\omega^{i_r}(\mathbf{e}_{j_r})=\\ &= \delta^{i_1}_{j_1}\ldots\delta^{i_r}_{j_r}=\Omega^{i_1,\ldots,i_r}(\mathbf{e}_{j_1},\ldots,\mathbf{e}_{j_r})\end{aligned}$$

da cui

$$\omega^{i_1}\otimes\ldots\otimes\omega^{i_r}=\Omega^{i_1,\ldots,i_r}$$

e abbiamo la tesi.

Veniamo all'ultima parte. Abbiamo

$$\begin{aligned}F^*(\varphi\otimes\psi)(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{w}_s) &= (\varphi\otimes\psi)(F^*\mathbf{v}_1,\ldots,F^*\mathbf{w}_s)=\\ &= \varphi(F^*\mathbf{v}_1,\ldots,F^*\mathbf{v}_r)\,\psi(F^*\mathbf{w}_1,\ldots,F^*\mathbf{w}_s)=\\ &= (F^*\varphi)(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_r)\,(F^*\psi)(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_s)=\\ &= (F^*\varphi)\otimes(F^*\psi)(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{w}_s)\,.\end{aligned}$$

(c.v.d.)

Un modo più elegante (e sofisticato) di ridire i contenuti del teorema precedente deriva dalla seguente definizione. Poniamo

$$\mathcal{T}(V)=\bigoplus_{r=0}^{+\infty}\mathcal{T}^r(V)$$

e identifichiamo ogni $\mathcal{T}^r(V)$ con la sua (naturale) immagine isomorfa in $\mathcal{T}(V)$. Un elemento di $\mathcal{T}(V)$ si dice di ordine r se esso appartiene a $\mathcal{T}^r(V)$. Ogni φ è dunque dato da $\sum_r\varphi^{i_r}$ dove $\varphi^{i_r}\in\mathcal{T}^{i_r}(V)$. Questo consente di definire la somma (componente per componente) in $\mathcal{T}(V)$. Estendendo la mappa $\otimes$ su $\mathcal{T}(V)$ in modo da renderla distributiva, possiamo anche moltiplicare gli elementi di $\mathcal{T}(V)$. Questo fa di $\mathcal{T}(V)$ un'algebra associativa su $\mathbb{R}$ con unità $(1\in\mathbb{R}\equiv\mathcal{T}^0(V))$. Riassumendo

I.15 Teorema *Lo spazio $\mathcal{T}(V)$ è un'algebra associativa con unità su $\mathbb{R}$. Esso è generato da $\mathcal{T}^0(V)$ e da $\mathcal{T}^1(V)$. Ogni mappa lineare $F_*:W\to V$ induce un omomorfismo $F^*:\mathcal{T}(V)\to\mathcal{T}(W)$ che coincide con l'identità su $\mathcal{T}^0(V)$ e con la mappa duale di F_* su $\mathcal{T}^1(V)$.*

Moltiplicazione di campi tensoriali

Veniamo al caso dei campi tensoriali su una varietà liscia M. Se $\varphi\in\mathcal{T}^r(M)$ e $\psi\in\mathcal{T}^s(M)$ allora possiamo definire $\varphi\otimes\psi\in\mathcal{T}^{r+s}(M)$ usando in ogni punto di M la definizione del caso lineare. In altri termini,

$$(\varphi\otimes\psi)(m)\equiv\varphi(m)\otimes\psi(m)\in\mathcal{T}^{r+s}(T_mM)\,.$$

La definizione è ben posta se l'applicazione $m \mapsto \varphi(m) \otimes \psi(m)$ è liscia. Ora, in coordinate locali, le componenti di $\varphi \otimes \psi$ sono, per la definizione data,

$$(\varphi \otimes \psi)(E_{i_1}, \ldots, E_{j_s}) = \varphi(E_{i_1}, \ldots, E_{i_r})\,\psi(E_{j_1}, \ldots, E_{j_s})$$

e poiché il prodotto di due funzioni lisce è liscio, abbiamo la tesi. Per completezza facciamo vedere come si trova la formula di sopra,

$$\begin{aligned}(\varphi \otimes \psi)(E_{i_1}, \ldots, E_{j_s})(m) &\equiv (\varphi \otimes \psi)(m)(E_{i_1}m, \ldots, E_{j_s}m) = \\ &= \varphi(m)(E_{i_1}m, \ldots, E_{i_r}m)\,\psi(m)(E_{j_1}m, \ldots, E_{j_s}m) = \\ &= \varphi(E_{i_1}, \ldots, E_{i_r})(m)\,\psi(E_{j_1}, \ldots, E_{j_s})(m).\end{aligned}$$

Abbiamo poi la seguente (ovvia) generalizzazione dei risultati del caso lineare

I.16 **Teorema** *Il prodotto* $(\cdot \otimes \cdot) : \mathcal{T}^r(M) \times \mathcal{T}^s(M) \to \mathcal{T}^{r+s}(M)$ *è bilineare e associativo. Se* $\{\omega^i\}_{i \in J_n}$ *è una base (locale) di* $\mathcal{T}^1(M)$*, allora ogni elemento di* $\mathcal{T}^r(M)$ *può essere (localmente) espresso come combinazione con coefficienti lisci di* $\{\omega^{i_1} \otimes \ldots \otimes \omega^{i_r}\}$*. Se* $F : N \to M$ *è una mappa liscia,* $\varphi \in \mathcal{T}^r(M)$ *e* $\psi \in \mathcal{T}^s(M)$*, allora* $F^*(\varphi \otimes \psi) = (F^*\varphi) \otimes (F^*\psi)$ *è un campo tensoriale su* N.

Moltiplicazione esterna di tensori alternanti

Torniamo al caso lineare, per definire un'altra nozione fondamentale. Conveniamo che $\bigwedge^0(V) = \mathcal{T}^0(V) = \mathbb{R}$ e che $\bigwedge^1(V) = \mathcal{T}^1(V) = V^*$. Come nel caso dello spazio dei tensori, definiamo

$$\bigwedge(V) = \bigoplus_{r=0}^{+\infty} \bigwedge^r(V)$$

L'insieme $\bigwedge(V)$ è uno spazio vettoriale, ma non è un'algebra, perché non è chiuso sotto il prodotto di tensori. Vi è un modo naturale per definire un prodotto di tensori alternanti in modo da ottenere un tensore alternante. Basta utilizzare l'operatore di antisimmetrizzazione $\mathcal{A}$:

I.24 **Definizione** *La mappa* $(\cdot \wedge \cdot) : \bigwedge^r(V) \times \bigwedge^s(V) \to \bigwedge^{r+s}(V)$*, definita da*

$$\varphi \wedge \psi \equiv \frac{(r+s)!}{r!s!}\mathcal{A}(\varphi \otimes \psi)$$

si dice **prodotto esterno** *(o* **alternante***) di* φ *e* ψ.

I.7 **Lemma** *Il prodotto esterno è bilineare e associativo.*

Dimostrazione La bilinearità discende dal fatto che il prodotto esterno è dato dalla composizione di una mappa lineare e di una mappa bilineare. Occupiamoci allora della proprietà associativa.

Cominciamo con il vedere che se $\varphi \in \mathcal{T}^r(V)$, $\psi \in \mathcal{T}^s(V)$ e $\zeta \in \mathcal{T}^t(V)$, allora

$$\mathcal{A}(\varphi \otimes \psi \otimes \zeta) = \mathcal{A}(\mathcal{A}(\varphi \otimes \psi) \otimes \zeta) = \mathcal{A}(\varphi \otimes \mathcal{A}(\psi \otimes \zeta))$$

Poniamo$\mathfrak{S} \equiv \mathfrak{S}_{r+s+t}$ il gruppo delle permutazioni degli indici $(1, \ldots, r+s+t)$. Indichiamo con $\mathfrak{S}'$ il sottogruppo che lascia invariati gli ultimi t indici. Denotiamo con $\sigma \mapsto \sigma'$ l'isomorfismo del gruppo $\mathfrak{S}_{r+s}$ su $\mathfrak{S}'$. Allora

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\varphi \otimes \psi) \otimes \zeta(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{r+s+t}) &= \frac{1}{(r+s)!}\left[\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+s}} (-1)^{|\sigma|}\varphi\left(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \ldots\right)\psi\left(\mathbf{v}_{\sigma(r+1)}, \ldots\right)\right] \cdot \\ &\quad \cdot \zeta(\mathbf{v}_{r+s+1}, \ldots, \mathbf{v}_{r+s+t}) \\ &= \frac{1}{(r+s)!}\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+s}} (-1)^{|\sigma|}\varphi\left(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \ldots\right)\psi\left(\mathbf{v}_{\sigma(r+1)}, \ldots\right) \cdot \\ &\quad \cdot \zeta(\mathbf{v}_{r+s+1}, \ldots, \mathbf{v}_{r+s+t}) \\ &= \frac{1}{(r+s)!}\sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}'} (-1)^{|\sigma'|}\varphi\left(\mathbf{v}_{\sigma'(1)}, \ldots\right)\psi\left(\mathbf{v}_{\sigma'(r+1)}, \ldots\right) \cdot\end{aligned}$$

$$\cdot\zeta\left(\mathbf{v}_{\sigma'(r+s+1)},\ldots,\mathbf{v}_{\sigma'(r+s+t)}\right)$$

Dunque,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\left(\mathcal{A}\left(\varphi\otimes\psi\right)\otimes\zeta\right)\left(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{r+s+t}\right) &= \frac{1}{(r+s+t)!}\frac{1}{(r+s)!}\cdot\\ &\cdot\sum_{\tau\in\mathfrak{S}}\sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}'}(-1)^{|\tau\sigma'|}\varphi\left(\mathbf{v}_{\tau\sigma'(1)},\ldots\right)\psi\left(\mathbf{v}_{\tau\sigma'(r+1)},\ldots\right)\cdot\\ &\cdot\zeta\left(\mathbf{v}_{\tau\sigma'(r+s+1)},\ldots,\mathbf{v}_{\tau\sigma'(r+s+t)}\right)\end{aligned}$$

sommando prima sulle permutazioni τ

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\left(\mathcal{A}\left(\varphi\otimes\psi\right)\otimes\zeta\right)\left(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{r+s+t}\right) &= \frac{1}{(r+s)!}\sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}'}\mathcal{A}\left(\varphi\otimes\psi\otimes\zeta\right)\left(\mathbf{v}_1,\ldots\right)=\\ &= \mathcal{A}\left(\varphi\otimes\psi\otimes\zeta\right)\left(\mathbf{v}_1,\ldots\mathbf{v}_{r+s+t}\right)\end{aligned}$$

Allo stesso modo si prova l'altra eguaglianza. Infine,

$$\begin{aligned}(\varphi\wedge\psi)\wedge\zeta &\equiv \frac{(r+s+t)!}{(r+s)!t!}\frac{(r+s)!}{r!s!}\mathcal{A}\left(\mathcal{A}\left(\varphi\otimes\psi\right)\otimes\zeta\right)=\\ &= \frac{(r+s+t)!}{r!s!t!}\mathcal{A}\left(\varphi\otimes\mathcal{A}\left(\psi\otimes\zeta\right)\right)=\\ &= \frac{(r+s+t)!}{r!\,(s+t)!}\mathcal{A}\left(\varphi\otimes\left(\psi\wedge\zeta\right)\right)=\varphi\wedge\left(\psi\wedge\zeta\right).\end{aligned}$$

(c.v.d.)

Dalla dimostrazione del teorema ricaviamo

I.4 Corollario *Siano* $\varphi_i\in\bigwedge^{r_i}(V)$, $i\in J_k$. *Allora*

$$\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_k=\frac{(r_1+\ldots+r_k)!}{r_1!\ldots r_k!}\mathcal{A}\left(\varphi_1\otimes\ldots\otimes\varphi_k\right).$$

Estendiamo $\wedge$ a $\bigwedge(V)$ nel modo seguente, se

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_1+\ldots+\varphi_k,\ \varphi_i\in\bigwedge^{r_i}(V)\\ \psi &= \psi_1+\ldots+\psi_l,\ \psi_j\in\bigwedge^{s_j}(V)\end{aligned}$$

allora

$$\varphi\wedge\psi\equiv\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\varphi_i\wedge\psi_j,$$

in questo modo otteniamo

I.5 Corollario $\bigwedge(V)$ *con il prodotto esterno è un'algebra associativa su* $\mathbb{R}$.

L'algebra $\bigwedge(V)$ si dice **algebra esterna** o **algebra di Grassman**. Diversamente da $\mathcal{T}(V)$ essa è finito-dimensionale. Vediamolo introducendo su tale algebra una base.

I.8 Lemma *Se* $\varphi\in\bigwedge^{r}(V)$ *e* $\psi\bigwedge^{s}(V)$, *allora*

$$\varphi\wedge\psi=(-1)^{rs}\,\psi\wedge\varphi.$$

Dimostrazione Si tratta di far vedere che

$$\mathcal{A}\left(\varphi\otimes\psi\right)=(-1)^{rs}\,\mathcal{A}\left(\psi\otimes\varphi\right).$$

Abbiamo

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\left(\varphi\otimes\psi\right)\left(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{r+s}\right) &= \frac{1}{(r+s)!}\sum_{\sigma}(-1)^{|\sigma|}\varphi\left(\mathbf{v}_{\sigma(1)},\ldots,\mathbf{v}_{\sigma(r)}\right)\psi\left(\mathbf{v}_{\sigma(r+1)},\ldots,\mathbf{v}_{\sigma(r+s)}\right)=\\ &= \frac{1}{(r+s)!}\sum_{\sigma}(-1)^{|\sigma|}\psi\left(\mathbf{v}_{\sigma(r+1)},\ldots,\mathbf{v}_{\sigma(r+s)}\right)\varphi\left(\mathbf{v}_{\sigma(1)},\ldots,\mathbf{v}_{\sigma(r)}\right)\end{aligned}$$

Ora, se τ è la permutazione che manda $(1,\ldots,r,r+1,\ldots,r+s)$ in $(r+1,\ldots,r+s,1,\ldots,r)$, allora

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\varphi\otimes\psi)(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{r+s}) &= \frac{(-1)^{|\tau|}}{(r+s)!}\sum_\sigma (-1)^{|\sigma\tau|}\psi\left(\mathbf{v}_{\sigma\tau(1)},\ldots,\mathbf{v}_{\sigma\tau(s)}\right)\varphi\left(\mathbf{v}_{\sigma\tau(r+1)},\ldots,\mathbf{v}_{\sigma\tau(r+s)}\right) = \\ &= (-1)^{|\tau|}\mathcal{A}(\psi\otimes\varphi)(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{r+s})\end{aligned}$$

(c.v.d.) ma $(-1)^{|\tau|} = (-1)^{rs}$, da cui la tesi.

I.17 Teorema *Se $r > n \equiv \dim V$, allora $\bigwedge^r(V) = \{0\}$, per $0 \le r \le n$, $\dim\bigwedge^r(V) = \binom{n}{r}$. Se $\omega^1,\ldots,\omega^n$ è una base di $\bigwedge^1(V)$, allora*

$$\left\{\omega^{i_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{i_r}\right\}_{1\le i_1<\ldots<i_r\le n}$$

è una base di $\bigwedge^r(V)$. Infine, $\dim\bigwedge(V) = 2^n$.

Dimostrazione Sia $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ una base di V. Se φ è un tensore covariante alternante di ordine $r > \dim V$, allora

$$\varphi(\mathbf{e}_{i_1},\ldots,\mathbf{e}_{i_r}) = 0$$

perché devono esserci due indici ripetuti. Siccome il tensore φ ha componenti nulle, esse è nullo, sicché $\bigwedge^r(V) = \{0\}$.

Sia $r \le n$. Sia ω^i la base duale della $\mathbf{e}_i$. Poiché $\mathcal{A}$ mappa $\mathcal{T}^r(V)$ su $\bigwedge^r(V)$, abbiamo che l'immagine della base $\left\{\omega^{i_1}\otimes\ldots\otimes\omega^{i_r}\right\}$ genera $\bigwedge^r(V)$. Abbiamo

$$r!\mathcal{A}\left(\omega^{i_1}\otimes\ldots\otimes\omega^{i_r}\right) = \omega^{i_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{i_r}.$$

Le permutazioni degli indici causano solo un cambiamento di segno. Ne segue che l'insieme degli $\binom{n}{r}$ elementi della forma $\omega^{i_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{i_r}$ con $1\le i_1<\ldots<i_r\le n$ genera $\bigwedge^r(V)$.

D'altra parte tale insieme è linearmente indipendente, infatti, sia

$$\sum_{i_1<\ldots<i_r}\alpha_{i_1\ldots i_r}\omega^{i_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{i_r} = 0$$

allora, presi $k_1<\ldots<k_r$, abbiamo

$$0 = \sum_{i_1<\ldots<i_r}\alpha_{i_1\ldots i_r}\omega^{i_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{i_r}(\mathbf{e}_{k_1},\ldots,\mathbf{e}_{k_r}) = \alpha_{k_1\ldots k_r}.$$

Infine,

$$\dim\bigwedge(V) = \sum_{r=0}^n\dim\bigwedge^r(V) = \sum_{r=0}^n\binom{n}{r} = 2^n.$$

(c.v.d.)

Infine, ricordando che $\mathcal{A}\circ F^* = F^*\circ\mathcal{A}$, abbiamo

I.18 Teorema *Siano V e W spazi lineari finito-dimensionali. Sia $F_*: W\to V$ una mappa lineare. Allora $F^*:\mathcal{T}(V)\to\mathcal{T}(W)$ mappa $\bigwedge(V)$ in $\bigwedge(W)$ ed è un omomorfismo tra queste due algebre esterne.*

Forme differenziali su una varietà Estendiamo il concetto di algebra esterna alle varietà. Prima un po' di terminologia

I.25 Definizione *Un campo tensoriale covariante e alternante di ordine r sulla varietà liscia M si dice* **forma differenziale** *(esterna) di grado r su M, o, più semplicemente, r-forma su M.*

L'insieme delle r-forme, $\bigwedge^r(M)$ è un sottoinsieme di $\mathcal{T}^r(V)$. I teoremi provati nel caso lineare si esportano come al solito al caso delle varietà senza difficoltà.

I.19 Teorema *Sia $\bigwedge(M)$ l'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale di tutte le forme differenziali su M. Allora per $\varphi\in\bigwedge^r(M)$ e $\psi\bigwedge^r(M)$ la formula $(\varphi\wedge\psi)(m)\equiv\varphi(m)\wedge\psi(m)$ definisce un prodotto* *associativo soddisfacente la regola* $\varphi\wedge\psi = (-1)^{rs}\,\psi\wedge\varphi$. *Con tale prodotto* $\bigwedge(M)$ *è un'algebra su* $\mathbb{R}$. *Se* $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, *abbiamo pure* $(f\varphi)\wedge\psi = f(\varphi\wedge\psi) = \varphi\wedge(f\psi)$. *Se* $\omega^1,\ldots,\omega^n$ *è una base locale di* $\bigwedge^1(M) = \mathcal{T}^1(M)$, *allora l'insieme* $\left\{\omega^{i_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{i_r}\right\}_{1\le i_1<\ldots<i_r\le n}$ *è una base locale per* $\bigwedge^r(M)$.

I.20 **Teorema** *Se* F *è una mappa liscia tra* M *e* N, *allora* $F^*:\bigwedge(N)\to\bigwedge(M)$ *è un omomorfismo di algebre.*

Cambiamento di coordinate In coordinate locali, una forma ω è allora data da

$$\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_r} g_{i_1\ldots i_r}\omega^{i_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{i_r} = \sum_{i_1<\ldots<i_r} g_{i_1\ldots i_r}\varphi^*\left(dx^{i_1}\right)\wedge\ldots\wedge\varphi^*\left(dx^{i_r}\right)$$

dove le $g_{i_1\ldots i_r}$ sono funzioni lisce dove (U,φ) è un carta. In coordinate, la forma si legge

$$\left(\varphi^{-1*}\omega\right)(\mathbf{x}) = \sum_{i_1<\ldots<i_r} g_{i_1\ldots i_r}\left(\varphi^{-1}(\mathbf{x})\right)\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_r}.$$

Se (V,ψ) è una carta compatibile e chiamiamo $\mathbf{y} = \psi(m)$, abbiamo su $U\cap V$, $\mathbf{x} = \varphi\circ\psi^{-1}(\mathbf{y})$ di modo che

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}dy^j$$

di modo che

$$\begin{aligned}\left(\varphi^{-1*}\omega\right)\left(\varphi\circ\psi^{-1}(\mathbf{y})\right) &= \sum_{i_1<\ldots<i_r} g_{i_1\ldots i_r}\left(\psi^{-1}(\mathbf{y})\right)\left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^j}dy^j\right)\wedge\ldots\wedge\left(\frac{\partial x^{i_r}}{\partial y^j}dy^j\right) = \\ &= \left(\psi^{-1*}\omega\right)(\mathbf{y}),\end{aligned}$$

nel caso di una n-forma, svolgendo i conti otteniamo per $\left(\varphi^{-1*}\omega\right)(\mathbf{x}) = g\left(\varphi^{-1}(\mathbf{x})\right)\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n$

$$\begin{aligned}\left(\psi^{-1*}\omega\right)(\mathbf{y}) &= g\left(\psi^{-1}(\mathbf{y})\right)\left(\det\frac{\partial\varphi\circ\psi^{-1}}{\partial\mathbf{y}}\right)(\mathbf{y})\,dy^1\wedge\ldots\wedge dy^n = \\ &= g\left(\psi^{-1}(\mathbf{y})\right)\Delta_{\varphi\circ\psi^{-1}}(\mathbf{y})\,dy^1\wedge\ldots\wedge dy^n.\end{aligned}$$

che è la formula di cambiamento di variabile per le forme differenziali.

Sia invece adesso $F: M\to N$ un diffeomorfismo e sia $\tilde\omega$ una n-forma differenziale su N. Siano (U,φ) una carta in m (con coordinate x^i) e (V,ψ) una carta in $F(m)$ (con coordinate y^i). Se $\omega^i = \varphi^*\left(dx^i\right)$ e $\tilde\omega^i = \varphi^*\left(dy^i\right)$, avremo, per $n\in V$

$$\tilde\omega(n) = \tilde f(n)\,d\tilde\omega^1\wedge\ldots\wedge d\tilde\omega^n$$

Ora, considerando la formula di cui nel teorema I.11, abbiamo

$$\begin{aligned}\omega(m) &\equiv (F^*\tilde\omega)(m) = \tilde f(F(m))\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\psi\circ F\circ\varphi^{-1}\right)^1 d\omega^j\right)\wedge\ldots\wedge\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\psi\circ F\circ\varphi^{-1}\right)^n d\omega^j\right) = \\ &= \tilde f(F(m))\det\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\left(\psi\circ F\circ\varphi^{-1}\right)\Big|_{\varphi(m)}\omega^1\wedge\ldots\wedge\omega^n \qquad ((*))\end{aligned}$$

I.3 Integrazione sulle varietà

I.3.1 Partizioni dell'unità

In questa sottosezione entra in modo decisivo l'assunzione topologica fatta sulle varietà. Sia M una varietà liscia. Come al solito, chiameremo funzione ogni mappa liscia tra M e $\mathbb{R}$. Chiamiamo supporto di una funzione la chiusura dell'insieme dei punti m per i quali $f(m)\neq 0$. Sia M uno spazio topologico. Un ricoprimento di M è detto **localmente finito** se ogni punto di M ha un intorno che interseca solo un numero finito di elementi del ricoprimento.

Un **raffinamento** $\{V_\beta\}$ di un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ di M è un ricoprimento tale che ogni V_β è contenuto in qualche U_α. Si dice pure che $\{V_\beta\}$ è suboridinato al ricoprimento $\{U_\alpha\}$.

I.26 **Definizione** *Si dice* **partizione dell'unità** *di una varietà M la coppia formata da un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$ di M e una famiglia $\{\psi_\alpha\}$ di funzioni lisce tali che*

(i) *per ogni $x \in M$, $\psi_\alpha(x) \geq 0$;*

(ii) *il supporto di ψ_α è contenuto in U_α;*

(iii) *il ricoprimento è localmente finito;*

(iv) *per ogni $x \in M$ abbiamo $\sum \psi_\alpha(x) = 1$.*

La somma di cui al punto (iv) è in realtà finita grazie a (iii). Abbiamo subito il seguente

I.21 **Teorema** *Sia M una varietà la cui topologia sia di Hausdorff e ammetta una base numerabile. Dato un ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ di M, esiste un atlante $\{(V_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ tale che*

(i) *il ricoprimento $\{V_\alpha\}$ è localmente finito e subordinato a $\mathcal{U}$;*

(ii) *$\varphi_\alpha(V_\alpha)$ è la palla aperta di raggio 3 e centro l'origine;*

(iii) *gli aperti $W_\alpha \equiv \varphi_\alpha^{-1}(B(0,1))$ ricoprono M.*

Dimostrazione Sia $\{U_n\}$ una base numerabile per gli aperti di M tale che ciascun U_n^a è compatto. Una tale base può essere deetrminata grazie al fatto che M è localmente compatto. Per induzione costruiamo una successione $\{A_n\}$ di compatti che ricoprono M e tali che $A_i \subset A_{i+1}$. A questo scopo, poniamo $A_1 \equiv U_1^a$. Supposti costruiti $A_1, \ldots, A_i$, sia j il più piccolo indice di modo che A_i è contenuto in $U_1 \cup \ldots \cup U_j$, allora poniamo

$$A_{i+1} \equiv U_1^a \cup \ldots \cup U_j^a \cup U_{i+1}^a.$$

Per ogni punto $x \in M$ troviamo una carta ammissibile arbitrariamente piccola, $\{V_x, \varphi_x\}$ in x e tale che $\varphi_x(V_x)$ è la palla di centro l'origine e raggio 3. Possiamo sempre supporre che V_x sia contenuto in un U_n, restringendo V_x e poi restringendolo ancora in modo che la sua immagine sia una palla (al solito passiamo alle controimmagini...) e passando a moltiplicare l'omeomorfismo possiamo far in modo che la palla abbia raggio 3. Per ogni i e ogni x nell'aperto

$$\operatorname{int}(A_{i+2}) \backslash A_{i-1}$$

selezioniamo V_x in tale aperto. Sia $W_x \equiv \varphi_x^{-1}(B(0,1))$. Possiamo ricoprire l'insieme compatto

$$A_{i+1} \backslash \operatorname{int}(A_i)$$

con un numero finito di $W_{x_1}, \ldots W_{x_m}$. Sia $\mathcal{B}_i$ la famiglia $\{V_{x_1}, \ldots, V_{x_m}\}$ e sia $\mathcal{B}$ l'unione delle $\mathcal{B}_i$. Allora $\mathcal{B}$ è un ricoprimento aperto di M, localmente finito e subordinato a $\mathcal{U}$ e tale da soddisfare le richieste del teorema. **(c.v.d.)**

I.6 **Corollario** *Sia M una varietà che sia uno spazio di Hausdorff e che ammetta una base numerabile. Allora M ha una partizione dell'unità subordinata a un dato ricoprimento $\mathcal{U}$.*

Dimostrazione Sia $\{(V_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ il ricoprimento di cui nel teorema precedente e sia $W_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(B(0,1))$, ancora, come nel teorema precedente.

Come mostrato in precedenza, possiamo trovare una funzione di classe $\mathcal{C}^p$, ψ_α, compresa tra 0 e 1, che valga 1 su W_α e 0 fuori da V_α.

A questo punto, poniamo

$$\psi \equiv \sum \psi_\alpha.$$

La somma risulta finita e non nulla in ogni punto e, posto, $\gamma_\alpha \equiv \psi_\alpha / \psi$, abbiamo che $\{(V_\alpha, \gamma_\alpha)\}$ è la partizione dell'unità richiesta. **(c.v.d.)**

I.7 **Corollario** *Se una varietà M ammette partizione dell'unità subordinata ad ogni dato ricoprimento, allora, dati due chiusi disgiunti A e B su M, esiste una funzione f tale che*

$$0 \leq f \leq 1$$
$$f(x) = 1, \forall x \in A$$
$$f(x) = 0, \forall x \in B$$

Dimostrazione Per ogni $x \in A$ sia U_x un intorno di x non intersecante B. Sia $\{\alpha_i\}$ la partizione dell'unità subordinata al ricoprimento dato da $\{U_x\}_{x \in A}$ e da A^c. Sia J l'insieme degli indici j tali che

$$\operatorname{supp} \alpha_j \subset U_{x(j)}$$

per qualche $x(j) \in A$. Sia

$$f = \sum_{j \in J} \alpha_j$$

Per ogni $x \in M$ c'è solo un numero finito di funzioni α_j tali che $\alpha_j(x) \neq 0$, perciò la nostra somma è finita. Se $x \in A$ e $\operatorname{supp} \alpha_i \subset A^c$, allora $\alpha_i(x) = 0$, perciò, per definizione di partizione dell'unità, $f = 1$ su A. Chiaramente, $f = 0$ su B. Ancora per definizione di partizione dell'unità si ha $0 \leq f \leq 1$, visto che prendiamo la somma solo una parte degli indici.
(c.v.d.)

I.3.2 Orientamento di una varietà

Spazio vettoriale orientato Cominciamo con l'introdurre la nozione di orientamento sugli spazi vettoriali. Sia V uno spazio vettoriale e siano$\{\mathbf{e}_i\}$ e $\{\mathbf{f}_i\}$ due basi di V. Allora è ben definita la matrice α data da

$$\mathbf{f}_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_i^j \mathbf{e}_j$$

Si dice che le due basi hanno lo stesso orientamento se il determinante della matrice α è positivo. Si vede subito che la relazione "avere lo stesso ordinamento" è di equivalenza.

I.27 **Definizione** *Un spazio vettoriale orientato è dato dalla coppia di uno spazio vettoriale e di una classe di equivalenza di basi aventi lo stesso orientamento.*

Il concetto di orientamento è collegato alla scelta di una base Ω nello spazio unidimensionale $\bigwedge^n(V)$. Per vedere il perché basta dimostrare i seguenti ovvi risultati:

I.9 **Lemma** *Se $\Omega \neq 0$ è un tensore alternante covariante su V di ordine $n \equiv \dim V$. Se $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in J_n}$ è una base di V, allora per ogni insieme di vettori $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in J_n}$ con $\mathbf{v}_i = \alpha_i^j \mathbf{e}_j$, abbiamo*

$$\Omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \det\left(\alpha_i^j\right) \Omega(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n).$$

I.8 **Corollario** *Un elemento non nullo $\Omega \in \bigwedge^n(V)$ ha lo stesso segno calcolato su due basi con orientamento eguale e segno opposto calcolato su due basi con diverso orientamento. Perciò la scelta di $\Omega \neq 0$ su V determina un orientamento su V. $\Omega_1, \Omega_2 \in \bigwedge^n(V)$ determinano lo stesso orientamento se e solo se esiste $\lambda > 0$ di modo che $\Omega_2 = \lambda \Omega_1$.*

Notiamo che se $\Omega \neq 0$, allora $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti se e solo se $\Omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) \neq 0$.

Orientamento di una varietà Una varietà può essere orientata orientando tutti i suoi spazi tangenti e provando poi a far concordare gli orientamenti definiti. Non tutte le varietà sono orientabili.

I.28 **Definizione** *Se M è una varietà liscia diremo che è orientabile se è possibile determinare una n-forma liscia su M di modo che sia non nulla in ogni punto. Data una tale forma si dice che essa orienta M.*

Diffeomorfismi che conservano l'orientamento

Dal corollario precedente, abbiamo che la forma Ω trovata orienta ogni spazio tangente. Naturalmente ogni forma $\Omega' = \lambda\Omega$ con λ funzione liscia sempre positiva determina su M lo stesso orientamento.
Su $\mathbb{R}^n$ è definito un orientamento naturale individuato dalla forma $\Omega = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$. Un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ eredita l'orientamento di $\mathbb{R}^n$, scegliendo come forma orientante $\Omega_U \equiv \Omega|_U$.
Dati due aperti $U, V \subset \mathbb{R}^n$, si dice che un diffeomorfismo F tra essi **conserva l'orientamento** se esiste $\lambda \in \mathcal{C}^\infty$, $\lambda > 0$, di modo che $F^*\Omega_V = \lambda\Omega_U$. Notiamo che

$$F^*\Omega_V = d\left(x^1 \circ F\right) \wedge \ldots \wedge d\left(x^n \circ F\right) = \det \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = \det \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} \Omega_U,$$

dunque F conserva l'orientamento se e solo se il suo determinante jacobiano è positivo.
Più in generale se M_i è una varietà orientata dalla forma Ω_i, si dice che il diffeomorfismo $F : M_1 \to M_2$ conserva l'orientamento se esiste $\lambda > 0$ in $\mathcal{C}^\infty(M_1)$ di modo che $F^*\Omega_2 = \lambda\Omega_1$.
Un modo molto naturale di definire un atlante orientato è quello di richiedere che tutte le sue mappe di transizione conservino l'orientamento (abbiano jacobiani sempre positivi). Una varietà orientata sarà un insieme dotato di una classe di equivalenza di atlanti coerentemente orientati. Questa seconda definizione equivale alla prima

I.22 Teorema *Una varietà M è orientabile se e solo se ammette un atlante orientato.*

Dimostrazione Supponiamo che M sia orientabile e che Ω sia una n-forma non nulla su M che ne determina un possibile orientamento. Scegliamo pure un atlante $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ le cui coordinate locali siano $x^1_\alpha, \ldots, x^n_\alpha$. Se con Ω_U indichiamo la restrizione di Ω ad U, allora in U_α la rappresentazione locale di Ω_U è

$$\varphi_\alpha^{-1*}\Omega_{U_\alpha} = \lambda_\alpha(\mathbf{x})\, dx^1_\alpha \wedge \ldots \wedge dx^n_\alpha$$

con $\lambda_\alpha > 0$ (l'altra unica alternativa, $\lambda_\alpha < 0$, si elimina cambiando un segno a una x^i; le alternative sono due perché altrimenti esisterebbe un punto in U_α dove $\lambda_\alpha = 0$ cioè $\Omega_{U_\alpha} = 0$).
Se $\left(U_\beta, \varphi_\beta\right)$ è un'altra carta, allora su $U_\alpha \cap U_\beta$ abbiamo, come dimostrato in precedenza,

$$\lambda_\alpha \det \frac{\partial \mathbf{x}_\alpha}{\partial \mathbf{x}_\beta} = \lambda_\beta.$$

Infine, poiché λ_α e λ_β sono ambedue positivi, abbiamo che il determinante jacobiano è positivo, la tesi.

Passiamo al viceversa. Sia $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlante orientato. Consideriamo una partizione dell'unità ad esso subordinata $\{f_i\}$ e passiamo a costruire la forma Ω mai nulla.

Per ogni i scegliamo una carta $\left(U_{\alpha_i}, \varphi_{\alpha_i}\right) \equiv (U_i, \varphi_i)$ di modo che $\operatorname{supp} f_i \subset U_{\alpha_i}$. In questo modo otteniamo un atlante più piccolo $\{(U_i, \varphi_i)\}$. Per ipotesi il determinante jacobiano di $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ è positivo su $U_i \cap U_j$. Definiamo

$$\Omega = \sum_i f_i \varphi_i^* \left(dx^1_i \wedge \ldots \wedge dx^n_i\right).$$

Mostriamo che $\Omega(p) \neq 0$ per ogni $p \in M$. Grazie alla locale finitezza, troviamo una carta (V, ψ) in p che interseca solo un numero finito di $\operatorname{supp} f_i$, diciamo per $i = i_1, \ldots, i_k$, e che è coerentemente orientata con gli (U_i, φ_i). Siano $y^1, \ldots, y^n$ le coordinate su V, allora

$$\begin{aligned} \Omega(p) &= \sum_{j=1}^{k} f_{i_j}(p)\, \varphi_{i_j}^* \left(dx^1_i \wedge \ldots \wedge dx^n_i\right) = \\ &= \sum_{j=1}^{k} f_{i_j}(p) \det \left(\frac{\partial x^k_{i_j}}{\partial y^l}\right)_{\psi(p)} \psi_{i_j}^* \left(dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n\right) \end{aligned}$$

(c.v.d.) poiché $f_{i_j} > 0$ per qualche j e poiché i determinanti sono tutti positivi, abbiamo la tesi.

I.3.3 Integrazione di forme differenziali

Integrazione Vogliamo introdurre una misura sulla nostra varietà. A questo scopo premettiamo il seguente

I.10 Lemma (localizzazione) *Sia $\{W_\alpha\}$ un ricoprimento dello spazio topologico di Hausdorff avente base numerabile, M. Per ogni indice α, sia λ_α un funzionale su $\mathcal{C}_c(W_\alpha)$. Assumiamo che per ogni coppia di indici α, β, λ_α e λ_β siano eguali su $\mathcal{C}_c(W_\alpha \cap W_\beta)$. Allora esiste un unico funzionale λ su M la cui restrizione a $\mathcal{C}_c(W_\alpha)$ sia eguale a λ_α. Se ogni λ_α è positivo, tale è λ.*

Dimostrazione Sia $f \in \mathcal{C}_c(M)$ e sia K il supporto di f. Sia $\{h_i\}$ una partizione dell'unità di K subordinata al ricoprimento di K da parte di un numero finito di W_α. Allora ogni $h_i f$ ha supporto in qualche $W_{\alpha(i)}$ e possiamo definire

$$\lambda(f) \equiv \sum_i \lambda_{\alpha(i)}(h_i f).$$

Se mostriamo che λ non dipende né dalla scelta degli $\alpha(i)$ né da quella della partizione dell'unità, abbiamo la tesi, dal momento che è evidente che λ rispetti i requisiti della tesi.

Anzitutto sia $W'_{\alpha(i)}$ un altro aperto nel quale il supporto di $h_i f$ è contenuto. Allora $h_i f$ ha supporto in $W'_{\alpha(i)} \cap W_{\alpha(i)}$, perciò, per ipotesi, il funzionale non cambia.

Sia $\{g_k\}$ una seconda partizione dell'unità subordinata a uno dei ricoprimenti finiti di K. Per ogni i

$$h_i f = \sum_k g_k h_i f$$

e

$$\sum_i \lambda_{\alpha(i)}(h_i f) = \sum_i \sum_k \lambda_{\alpha(i)}(g_k h_i f)$$

Poiché la somma non dipende dalla scelta degli $\alpha(i)$, la scrittura a secondo membro è simmetrica rispetto alle due partizioni, da cui la tesi.
(c.v.d.)

I.23 Teorema *Sia $\dim M = n$ e sia ω una n-forma continua su M. Allora esiste un unico funzionale positivo λ su $\mathcal{C}_c(M)$ tale che, se (U, φ) è una carta ammissibile e*

$$\varphi^{-1*}(\omega)\left(\varphi^{-1}(\mathbf{x})\right) = f(\mathbf{x})\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

è la rappresentazione locale della forma ($m \in M$ e $\mathbf{x} \equiv \varphi(m)$), allora, per ogni $g \in \mathcal{C}_c(M)$ con supporto tutto contenuto in U, vale

$$\lambda(g) = \int_{\varphi(U)} g\left(\varphi^{-1}(\mathbf{x})\right) |f(\mathbf{x})|\, d^n\mathbf{x}$$

e $d^n\mathbf{x}$ è la misura di Lebesgue su $\varphi(U)$.

Dimostrazione L'integrale a secondo membro definisce un funzionale positivo su $\mathcal{C}_c(U)$. Le formule di cambiamento di variabile in un integrale e in una forma, mostrano che il valore dell'integrale non cambia se (V, ψ) è una carta compatibile con la (U, φ) e g ha supporto in $U \cap V$. Infatti, passando alla variabile $\mathbf{x} \equiv \varphi \circ \psi^{-1}(\mathbf{y})$, abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi(U)} g\left(\varphi^{-1}(\mathbf{x})\right) |f(\mathbf{x})|\, d^n\mathbf{x} &= \int_{\varphi(U\cap V)} g\left(\varphi^{-1}(\mathbf{x})\right) |f(\mathbf{x})|\, d^n\mathbf{x} = \\
&= \int_{\psi(U\cap V)} g\left(\psi^{-1}(\mathbf{y})\right) \left|f\left(\varphi\circ\psi^{-1}(\mathbf{y})\right) \Delta_{\varphi\circ\psi^{-1}}(\mathbf{y})\right| d^n\mathbf{y} = \\
&= \int_{\psi(V)} g\left(\psi^{-1}(\mathbf{y})\right) |h(\mathbf{y})|\, d^n\mathbf{y}
\end{aligned}$$

dove $h(\mathbf{y}) = f\left(\varphi\circ\psi^{-1}(\mathbf{y})\right) \Delta_{\varphi\circ\psi^{-1}}(\mathbf{y})$ è la rappresentazione locale di ω rispetto alla (V, ψ).

Perciò il valore del funzionale definito dall'integrale è indipendente dalla carta scelta. Per il lemma di localizzazione, abbiamo un funzionale ben definito e positivo sull'intera varietà, una volta definito il funzionale sugli aperti di un singolo atlante.
(c.v.d.)

Dal teorema di Riesz-Markov segue che a ogni forma differenziale su una varietà corrisponde una misura $d\mu_{|\omega|}$ boreliana regolare sulla varietà di modo che, se $\lambda_{|\omega|}$ è il funzionale su $\mathcal{C}_c(M)$ di cui nel teorema,

$$\lambda_{|\omega|}(g) = \int_M g(m)\, d\mu_{|\omega|}(m)$$

I.24 **Teorema** *Sia* $\dim M = n$ *e sia* M *una varietà orientata. Sia* ω *una* n*-forma continua su* M*. Esiste un unico funzionale* λ_ω *definito su* $\mathcal{C}_c(M)$ *di modo che se* (U,φ) *è una carta ammissibile, e, posto,* $\mathbf{x} = \varphi(m)$*, vale*

$$\varphi^{*-1}(\omega)\left(\varphi^{-1}(\mathbf{x})\right) = f(\mathbf{x})\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

allora, se $g \in \mathcal{C}_c(U)$*,*

$$\lambda_\omega(g) = \int_{\varphi(U)} g\left(\varphi^{-1}(\mathbf{x})\right) f(\mathbf{x})\, d^n\mathbf{x}.$$

A λ_ω *è associata un'unica misura* $d\mu_\omega$ *boreliana regolare su* M *tale che, se* $g \in \mathcal{C}_c(M)$*,*

$$\lambda_\omega(g) = \int_M g(m)\, d\mu_\omega(m).$$

Chiudiamo con il seguente teorema che è una conseguenza diretta della formula di cambiamento di variabile in $\mathbb{R}^n$.

I.25 **Teorema (cambiamento di variabile globale)** *Se* f *è un diffeomorfismo che conserva l'orientamento tra le varietà lisce orientate* M *e* N*, allora*

$$\int_N g(n)\, d\mu_\omega(n) = \int_M g(f(m))\, d\mu_{f^*\omega}(m)$$

per ogni $g \in \mathcal{C}_c(N)$ *e ogni* ω n*-forma su* N*.*

Dimostrazione Usiamo la formula $(*)$. Se ω è definita localmente su (V,ψ) (carta in $f(m)$) da $\tilde{f}$, abbiamo che $f^*\omega$ è definita su (U,φ) (carta in m) come

$$(f^*\omega)(m) = \tilde{f}(f(m)) \det \frac{\partial \hat{f}}{\partial \mathbf{x}}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

dove $\hat{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$. Allora se g ha supporto contenuto in $f(U) \subset V$,

$$\begin{aligned} \lambda_{f^*\omega}(g \circ f) &= \int_{\varphi(U)} g\left(f\left(\varphi^{-1}(\mathbf{x})\right)\right) \left(\tilde{f} \circ f \circ \varphi^{-1}\right)(\mathbf{x}) \det \frac{\partial \hat{f}}{\partial \mathbf{x}}\, d^n\mathbf{x} = \\ &= \int_{\psi(V)} g\left(\psi^{-1}(\mathbf{y})\right) \tilde{f}\left(\psi^{-1}(\mathbf{y})\right) d^n\mathbf{y} = \lambda_\omega(g) \end{aligned}$$

dove siamo passati a $\mathbf{y} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(\mathbf{x}) = \hat{f}(\mathbf{x})$, cioè $\mathbf{x} = \varphi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}(\mathbf{y})$. Infine,

$$\int_M g(f(m))\, d\mu_{f^*\omega}(m) = \int_N g(n)\, d\mu_\omega(n).$$

(c.v.d.)

Capitolo II

Gruppi di Lie

Un gruppo di Lie non è altro che un insieme sul quale siano istituite in modo coerente le strutture di varietà e di gruppo. Perciò lo studio dei gruppi di Lie si fonda pesantemente su quello delle varietà. Ne deriva che il capitolo sulle varietà deve essere usato come continuo riferimento nella lettura della trattazione che segue.

II.1 Gruppi

In questa sezione ci preoccupiamo di richiamare i fatti principali sui gruppi, giusto per fissare la notazione.

II.1.1 Definizione di gruppo

È ben nota la definizione di gruppo:

II.1 **Definizione** *Un* **gruppo** *G è un insieme dotato di due mappe, il prodotto definito su $G \times G$ a valori in G, dato da $(x, y) \mapsto xy$, e l'inversa, definita su G a valori in G, data da $x \mapsto x^{-1}$, tali che*

(i) *il prodotto è associativo, i.e., $x\,(yz) = (xy)\,z$, per ogni $x, y, z \in G$;*

(ii) *esiste un elemento neutro $e \in G$, i.e., per ogni $x \in G$, $xe = ex = x$;*

(iii) *per ogni $x \in G$, $xx^{-1} = x^{-1}x = e$.*

Alcune annotazioni. La cardinalità di G si dice **ordine del gruppo** e si denota $\mathrm{o}\,(G) \equiv \#G$. L'applicazione di inversa è biunivoca. Un gruppo per il quale valga la proprietà commutativa si dice **abeliano**.
Uno spazio topologico che sia anche un gruppo per il quale prodotto e inversa siano funzioni continue si dice **gruppo topologico**. Nel corso di questo capitolo ci occuperemo dei gruppi di Lie che sono gruppi topologici e, contemporaneamente, varietà lisce.

II.2 **Definizione** *Dato un gruppo, un suo sottoinsieme non vuoto si dice* **sottogruppo** *se è chiuso sotto il prodotto e sotto l'inversa.*

II.3 **Definizione** *Una mappa φ tra i gruppi G e G' si dice* **omomorfismo** *di gruppi se*

$$\varphi\,(xy) = \varphi\,(x)\,\varphi\,(y)$$

per ogni $x, y \in G$. Un omomorfismo biiettivo si dice **isomorfismo**. *Un isomorfismo di G in sé si dice* **automorfismo** *di G. L'insieme degli omomorfismi di G in G' si indica con $\mathrm{Hom}\,(G, G')$, mentre l'insieme degli automorfismi di G in sé con $\mathrm{Aut}\,G$.*

Si noti che se φ è un omomorfismo allora $\varphi\,(e_G) = e_{G'}$ e $\varphi\left(x^{-1}\right) = \varphi\,(x)^{-1}$. L'insieme $\mathrm{Aut}\,G$ è un gruppo rispetto alla composizione.

II.1.2 G-spazi

Torniamo al concetto di azione, come abbiamo visto nel capitolo sulle varietà

II.4 **Definizione** *Sia G un gruppo. Un G-**spazio** è un insieme S con una mappa $\tau : G \times S \to S$ tale che*

(i) $\tau(e, s) = s$, *per ogni $s \in S$;*

(ii) $\tau(g, \tau(h, s)) = \tau(gh, s)$, *per ogni $s \in S$ e $g, h \in G$.*

Terminologia Spesso si scrive $\tau(g, s) \equiv \tau_g(s)$ di modo che $\tau_g : S \to S$ talché $\tau_g \circ \tau_h = \tau_{gh}$. Poiché $\tau_e = \mathrm{id}_S$, si ha che ogni τ_g è una biiezione di S. Poiché le biiezioni di S formano un gruppo sotto l'operazione di composizione, si ha che $g \mapsto \tau_g$ è un omomorfismo di gruppo tra G e il gruppo delle biiezioni su S. L'applicazione τ si dice **azione** di G su S.

Gruppi finiti Sia G un gruppo finito e $a \in G$. Consideriamo allora la successione $\{a^n\}$. Poiché G è finito, per qualche n, m deve risultare $a^n = a^m$, perciò $a^{n-m-1} = a^{-1}$, cioè $a^{-1} = a^k$ per qualche $k \geq 0$. Dunque, $H \subset G$ è un sottogruppo se e solo se $HH \subset H$. Inoltre, se G è un gruppo finito, per ogni $a \in G$ esiste un minimo $n \geq 1$ tale che $a^n = e$. n si dice **ordine** di a.

Definizione di G/H e teorema di Lagrange

Veniamo alla seguente

II.5 **Definizione** *Sia H un sottogruppo di G. Si definisce G/H l'insieme delle* **classi laterali sinistre**, *cioè l'insieme degli elementi distinti di $\{xH \mid x \in G\}$.*

G/H è, dunque, un insieme di sottoinsiemi di G. Notiamo che $xH = yH$ se e solo se $x^{-1}y \in H$. Infatti, $xH = yH$ se e solo se $x^{-1}yH = H$, se e solo se $x^{-1}y \in H$. Ora, la relazione $x \equiv y$ se e solo se $x^{-1}y \in H$, è una relazione di equivalenza. Perciò le classi laterali sinistre sono le classi di equivalenza di $\equiv$. Infatti, se $D = [x]$, allora $y \in D$ se e solo se $x^{-1}y \in H$, cioè se e solo se $y \in xH$, infine, $D = xH$.
A questo punto, definiamo un G-spazio su G/H tramite l'azione $\tau : G \times G/H \to G/H$ definita da

$$\tau_g(xH) = gxH.$$

Un risultato fondamentale è il

II.1 **Teorema (di Lagrange)** *Sia H un sottogruppo finito di G. Allora gli elementi di G/H sono sottoinsiemi disgiunti di G la cui unione è G. Ogni classe è formata da $\#H$ elementi, sicché, in particolare,*

$$\#G = (\#H)(\#G/H).$$

L'indice di H, $iH \equiv \#(G/H)$, è $\#G/\#H$ e $\#H$ divide $\#G$.

Dimostrazione Gli elementi di G/H sono le classi di equivalenza della relazione $\equiv$. Perciò, visti come sottoinsiemi di G, gli elementi di G/H sono disgiunti e la loro unione dà l'intero G. L'applicazione $L_x(g) \equiv xg$ è una biiezione di G, perciò $L_x : H \to xH$ è una biiezione. Allora $\#H = \#(xH)$. Per la prima parte del teorema, considerando che le classi di equivalenza sono $\#(G/H)$ e che ciascuna è formata da $\#H$ elementi, abbiamo $\#G = (\#H)(\#G/H)$. **(c.v.d.)**

Notiamo che se $a \in G$ e n è l'ordine di a, allora $H = \{e, a, \ldots, a^{n-1}\} \subset G$ è un sottogruppo di G, perciò l'ordine di a divide la cardinalità di G.

Orbite e spazi omogenei

II.6 **Definizione** *Sia S un G-spazio sotto l'azione τ. Sia $s \in S$, allora definiamo $O_s^\tau \equiv \{\tau_x(s) \mid x \in G\}$* **orbita** *di s sotto τ. Se $O_s^\tau = S$, allora l'azione si dice* **transitiva**. *Un G-spazio transitivo si dice* **spazio omogeneo** *per G.*

Possiamo istituire la seguente relazione su S: $t \equiv s$ se e solo se "t giace nell'orbita per s". Visto che $\tau_x(s) = t$ se e solo se $s = \tau_{x^{-1}}(t)$, si conclude che la relazione introdotta è di equivalenza. Una conseguenza immediata di questo fatto è data dalla

II.1 Proposizione *Ogni G-spazio è dato dall'unione delle sue orbite, le quali risultano disgiunte.*

Dimostrazione Si tratta solo di vedere che ogni orbita è una classe di equivalenza per la relazione $\equiv$ su S, ma questo è veramente ovvio: sia $D = [s]$, mostriamo che $D = O_s^\tau$; $t \equiv s$ se e solo se esiste x per cui $\tau_x(s) = t$, se e solo se $t \in O_s^\tau$. **(c.v.d.)**

Su G fissiamo il sottogruppo H. Riguardiamo G come un G-spazio per azione di H (o, sinteticamente, come H-spazio) secondo

$$R_h(g) \equiv gh.$$

Allora le classi laterali sinistre di H sono proprio le orbite secondo R:

$$O_g^R = \{gh \,|h \in H\} = gH.$$

Se riguardiamo G/H come G-spazio per azione di $\tau_g(xH) = gxH$, possiamo considerare l'orbita per $H \in G/H$, troviamo

$$O_H^\tau = \{\tau_g(H) \,|g \in G\} = \{gH \,|g \in G\} = G/H,$$

ne viene che G/H è uno spazio omogeneo per G.

Sottogruppo e stabilizzatore Vediamo ancora una semplice

II.7 Definizione *Sia S un G-spazio e sia $s \in S$. Si definisce* **sottogruppo isotropo** *o* **stabilizzatore** *di s il sottoinsieme I_s di G dato da*

$$I_s \equiv \{x \in G \,|\tau_x(s) = s\}.$$

Il fatto che la definizione sia ben posta, cioè che I_s sia un sottogruppo, è evidente. Tornando a considerare l'esempio del G-spazio omogeneo G/H, abbiamo

$$I_H = \{x \in G \,|xH = H\} = H.$$

II.8 Definizione *Siano (S,τ) e $\left(\tilde{S},\tilde{\tau}\right)$ due G-spazi. Diciamo che essi sono isomorfi se e solo se esiste una biiezione $\varphi : S \to \tilde{S}$, talché*

$$\tilde{\tau}_x(\varphi(s)) = \varphi(\tau_x(s)),$$

per ogni $x \in G$ e $s \in S$.

II.2 Teorema (fondamentale dei G-spazi) *Sia (S,τ) un G-spazio transitivo. Sia I_s lo stabilizzatore di qualche $s \in S$. Allora (S,τ) è isomorfo a G/I_s. In particolare,*

$$\#S = \frac{\#G}{\#I_s}.$$

Dimostrazione Fissiamo $s \in S$. Sia $s' \in S$ e definiamo

$$Q_{s'} \equiv \{x \in G \,|\tau_x(s) = s'\}.$$

Fissiamo $x \in Q_{s'}$. Ora, $y \in Q_{s'}$ se e solo se $\tau_y(s) = \tau_x(s)$, se e solo se $x^{-1}y \in I_s$, se e solo se $y \in xI_s$. Allora $Q_{s'} = xI_s \in G/I_s$. Definiamo, dunque, $\varphi : S \to G \backslash I_s$ come

$$\varphi(s') \equiv Q_{s'}.$$

Abbiamo

$$\begin{aligned}\varphi(\tau_x(s')) &= \{y \in G \,|\tau_x(s') = \tau_y(s)\} = \left\{y \in G \,\middle|s' = \tau_{x^{-1}y}(s)\right\} = \\ &= \left\{y \in G \,\middle|x^{-1}y \in Q_{s'}\right\} = xQ_{s'} = x\varphi(s') = \tilde{\tau}_x(\varphi(s')).\end{aligned}$$

L'ultima parte del teorema si ottiene applicando il teorema di Lagrange

$$\#S = \#\left(G/I_s\right) = \frac{\#G}{\#I_s}.$$

(c.v.d.)

Due sottogruppi H e H' si dicono **coniugati** se e solo se $H' = xHx^{-1}$ per qualche $x \in G$.

II.2 Proposizione *G/H e G/H' sono isomorfi se e solo se H e H' sono coniugati.*

Dimostrazione Siano i due G-spazi isomorfi secondo φ. Allora esiste $x^{-1} \in G$ di modo che

$$\varphi(H) = x^{-1}H'$$

visto che $\varphi : G/H \to G/H'$, perciò $x\varphi(H) = H'$. Tuttavia, visto che φ è un isomorfismo, allora

$$H' = x\varphi(H) = \varphi(xH)$$

Ora,

$$\varphi(yxH) = yH' = H' \iff y \in H',$$

siccome φ è iniettivo

$$y \in H' \iff yxH = xH \iff y \in I_{xH}$$

e

$$y \in H' \iff x^{-1}yxH = H \iff x^{-1}yx \in H$$

da cui $H' = xHx^{-1}$.

Viceversa, basta considerare $\varphi(yH) = yx^{-1}H'$, in tal caso infatti

$$\varphi(zyH) = zyx^{-1}H' = z\varphi(yH).$$

(c.v.d.)

Ci chiediamo quando G/H sia esso stesso un gruppo di modo che $x \mapsto xH$ sia un omomorfismo di gruppi. La condizione detta si verifica se e solo se $(xH)(yH) = xyH$. Dal momento che $(xH)(yH) = xy\left(y^{-1}Hy\right)H$, si ha che la condizione si verifica se $y^{-1}Hy \subset H$, cioè se H è normale. Viceversa, se $(xH)(yH) = xyH$, in particolare $xHx^{-1} = xH\left(x^{-1}e\right) \subset (xH)\left(x^{-1}H\right) = H$, dunque

II.3 Proposizione *G/H può essere riguardato come gruppo, di modo che $x \mapsto xH$ sia un omomorfismo, se e solo se H è un sottogruppo normale di G.*

Se H è normale, G/H si dice **sottogruppo quoziente**.

II.2 Gruppi e algebre di Lie

II.2.1 Definizione e prime proprietà

Cominciamo con il definire un gruppo di Lie.

II.9 Definizione *Un gruppo G si dice di Lie se ammette una struttura di varietà differenziabile liscia rispetto alla quale le operazioni di prodotto, $(g,h) \mapsto gh$, e di inverso, $h \mapsto h^{-1}$, siano funzioni lisce.*

Per ogni $g \in G$, definiamo le seguenti due mappe lisce $L_g : G \to G$ e $R_g : G \to G$ di modo che

$$\begin{aligned} L_g(h) &\equiv gh \\ R_g(h) &\equiv hg^{-1} \end{aligned}$$

Si noti come

$$\begin{aligned} L_{gh} &= L_g \circ L_h \\ R_{gh} &= R_g \circ R_h \end{aligned}$$

da cui le due mappe sono diffeomorfismi, visto che $L_e = R_e = \mathrm{id}_G$, se $e \in G$ indica l'elemento neutro di G.

Campi invarianti a destra e a sinistra Poiché L_g e R_g sono diffeomorfismi, dato un campo vettoriale liscio X su G, è ben definito il campo vettoriale $L_{g*}X$. Ricordiamo che $L_{g*}X$ è individuato dall'eguaglianza

$$(L_{g*}X)(L_g m) = L_{g*}(X(m))$$

Veniamo adesso alla importantissima

II.10 Definizione *Sia G un gruppo di Lie. Un campo vettoriale su G si dice* **invariante a sinistra** *se è L_g-invariante per ogni $g \in G$. Analogamente, si dice* **invariante a destra** *se è R_g-invariante per ogni $g \in G$.*

Un campo vettoriale X in G si dice allora invariante a sinistra se $L_{g*}X = X$, cioè se e solo se, per ogni $g, m \in G$,

$$(L_{g*}X)(L_g m) = L_{g*}(X(m)) = X(L_g m),$$

equivalentemente, se e solo se, per ogni $g, m \in G$,

$$L_{g*}(X(m)) = X(gm).$$

Consideriamo l'insieme $\mathfrak{g}$ dei campi invarianti a sinistra. Mostriamo che $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ è un'algebra di Lie. Poiché $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{X}(G)$, algebra di Lie sotto commutatore, basta vedere che $\mathfrak{g}$ è chiuso sotto commutatore, cioè che se X e Y appartengono a $\mathfrak{g}$, allora $[X,Y] \in \mathfrak{g}$. A questo scopo basta ricordare l'eguaglianza (di cui nel capitolo precedente)

$$L_{g*}[X,Y] = [L_{g*}X, L_{g*}Y] = [X,Y].$$

Questo consente di porre la seguente

II.11 Definizione *Dato un gruppo di Lie G, si definisce* **algebra di Lie del gruppo** *lo spazio $\mathfrak{g}$ dei campi vettoriali invarianti a sinistra dotato del commutatore.*

II.3 Teorema *Se $X \in \mathfrak{g}$, la mappa $X \mapsto X(e)$ definisce un isomorfismo lineare tra gli spazi $\mathfrak{g}$ e T_eG. In particolare, la dimensione di $\mathfrak{g}$ è pari alla dimensione di G.*

Dimostrazione Poiché, se $X \in \mathfrak{g}$,

$$X(g) = (L_g)_*(X(e))$$

è chiaro che $X \mapsto X(e)$ è iniettiva (da cui $X \in \mathfrak{g}$ è individuato dal suo valore in e). Dato $u \in T_eG$, definiamo

$$X^{(u)}(g) = (L_g)_*(u)$$

allora

$$(L_h)_* X^{(u)}(g) = (L_h)_*(L_g)_*(u) = (L_{hg})_* = X^{(u)}(hg)$$

(c.v.d.) perciò $X^{(u)}$ è invariante a sinistra e $X^{(u)}(e) = u$. Dunque, la mappa è suriettiva.

II.2.2 Misura di Haar

Nella teoria delle rappresentazioni è fondamentale la nozione di misura invariante sul gruppo. Per introdurre in G una misura utilizzeremo la sua struttura di varietà.

Forme invarianti Una misura si introduce attraverso una n-forma, perciò occupiamoci preliminarmente del rapporto tra le forme su G e i diffeomorfismi L_g e R_g.
Una forma ω si dice **invariante a sinistra** se $L_g^*\omega = \omega$ per ogni $g \in G$. Analogamente, ω si dirà invariante a destra se $R_g^*\omega = \omega$ per ogni $g \in G$.
Notiamo che se ω è una r forma

$$\begin{aligned}\left(L_g^*\omega\right)(h)(X_{1h},\ldots,X_{rh}) &= \omega(L_g h)(L_{g*}X_{1h},\ldots,L_{g*}X_{rh}) = \\ &= L_{g*}(\omega(L_g h))(X_{1h},\ldots,X_{rh})\end{aligned}$$

Perciò ω è invariante a sinistra se e solo se

$$L_{g*}(\omega(L_g h)) = L_{g*}(\omega(gh)) = \omega(h).$$

Dunque, se prendiamo $h = e$, otteniamo

$$\omega(e) = L_{g*}(\omega(g)),$$

sicché

$$\omega(g) = L_{g^{-1}*}(\omega(e))$$

Quest'ultima eguaglianza consente di dimostrare il seguente

II.4 Teorema *Lo spazio delle n-forme su G è isomorfo a $\bigwedge^n(T_eG)$.*

Dimostrazione Consideriamo l'applicazione dallo spazio delle n-forme su G in $\bigwedge^n(T_eG)$ data da

$$\omega \mapsto \omega(e),$$

poiché

$$\omega(g) = L_{g^{-1}*}(\omega(e))$$

tale applicazione è iniettiva.

Data $\tilde{\omega} \in \bigwedge^n T_eG$, definiamo

$$\omega(g) = L_{g^{-1}*}(\tilde{\omega})$$

siccome quest'ultima è una forma liscia su G e

$$\omega(e) = \tilde{\omega},$$

(c.v.d.) concludiamo che l'applicazione è suriettiva, da cui la tesi.

II.5 Teorema *Sia G un gruppo di Lie, allora G è orientabile ed esiste una n-forma ω invariante a sinistra, i.e., $\omega = L_g^*\omega$, ovunque non nulla e unica a parte una costante. Esiste poi una funzione Δ su G di modo che*

$$R_g^*\omega = \Delta(g)\,\omega.$$

Dimostrazione Fissata una base $E_{1e}, \ldots, E_{ne}$ in T_eG, consideriamo la sua base duale $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, definita da

$$\omega_e^i(E_{je}) = \delta_j^i.$$

Adesso consideriamo le 1-forme su G definite da

$$\tilde{\omega}^i(g) = \omega_e^i \circ \left(L_{g^{-1}}\right)_*$$

Mostriamo che si tratta di forme invarianti a sinistra. Ricordiamo che se η è una 1-forma, poiché L_h è un diffeomorfismo, si ha

$$(L_h^*\eta)(g) = \eta(L_h g) \circ (L_h)_*$$

sicché

$$\left(L_h^*\tilde{\omega}^i\right)(g) = \tilde{\omega}^i(hg) \circ (L_h)_* = \omega_e^i \circ \left(L_{g^{-1}h^{-1}}\right)_* \circ (L_h)_* = \omega_e^i \circ \left(L_{g^{-1}}\right)_* = \tilde{\omega}^i(g).$$

Adesso prendiamo la forma

$$\omega = \tilde{\omega}^1 \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}^n$$

che è banalmente non nulla e invariante a sinistra visto che

$$L_h^*\omega = L_h^*\tilde{\omega}^1 \wedge \ldots \wedge L_h^*\tilde{\omega}^n = \omega.$$

Poiché ω è non nulla, G è orientabile.

Ora, sia $\tilde{\omega}$ una n-forma non nulla qualsiasi in T_eG, dunque, una base per $\bigwedge^n(T_eG)$, allora esiste λ di modo che se ω è invariante a sinistra

$$\omega(g) = L_{g^{-1}*}(\lambda\tilde{\omega}) = \lambda L_{g^{-1}*}(\tilde{\omega}) = \lambda\tilde{\omega}(g)$$

Ne viene che la forma invariante a sinistra è unica a meno di una costante moltiplicativa.
Sia ω la forma invariante a sinistra scelta. Consideriamo ora $R_g^*\omega$ e mostriamo che anch'essa è invariante a sinistra:

$$L_h^* R_g^* \omega = (R_g \circ L_h)^* \omega = (L_h \circ R_g)^* \omega = R_g^* L_h^* \omega = R_g^* \omega,$$

visto che

$$(R_g \circ L_h)\, m = hmg = (L_h \circ R_g)\, m.$$

Dall'unicità della forma invariante a sinistra, concludiamo che, per ogni g esiste una costante non nulla $\Delta(g)$ talché

$$R_g^* \omega = \Delta(g)\, \omega.$$

(c.v.d.)

Misura di Haar Precisiamo il concetto di misura invariante (sinistra) su un gruppo con la seguente

II.12 Definizione *Una misura boreliana regolare μ su un gruppo topologico si dice* **di Haar** *(o* **invariante a sinistra***) se per ogni $f \in \mathcal{C}_c(G)$ sussiste l'eguaglianza*

$$\int_G f(gh)\, d\mu(h) = \int_G f(h)\, d\mu(h).$$

Fissiamo, dunque, una forma invariante a sinistra ω. Mostriamo che $d\mu_\omega$, la misura boreliana regolare su G associata a ω, è invariante a sinistra.
Usando il teorema di cambiamento di variabile globale, considerando il diffeomorfismo $L_h : G \to G$, e tenendo conto del fatto che $L_g^*\omega = \omega$, abbiamo

$$\int_G f(gh)\, d\mu_\omega(h) = \int_G f(L_g h)\, d\mu_\omega(h) = \int_G f(L_g h)\, d\mu_{L_g^*\omega}(h) = \int_G f(h)\, d\mu_\omega(h).$$

Ne ricaviamo il seguente fondamentale

II.6 Teorema *Ogni gruppo di Lie ammette una misura di Haar unica a meno di una costante moltiplicativa.*

I due teoremi dimostrati, assieme alla formula di cambiamento di variabile consentono di mostrare che

$$\int_G f(hg)\, d\mu_\omega(h) = \frac{1}{\Delta(g)} \int_G f(hg)\, d\mu_{R_g^*\omega}(h) = \frac{1}{\Delta(g)} \int_G f(h)\, d\mu_\omega(h)$$

da cui

$$\Delta(g) \int_G f(hg)\, d\mu_\omega(h) = \int_G f(h)\, d\mu_\omega(h)$$

Se il gruppo di Lie è compatto, possiamo scegliere $f \equiv 1$, poiché $f \in \mathcal{C}_c(G)$, e la misura di f sarà finita di modo che

$$\Delta(g)\, \mu(G) = \mu(G)$$

e abbiamo $\Delta(g) = 1$ per ogni g. Nel caso compatto la misura invariante sinistra è anche, automaticamente, invariante destra. Notiamo, viceversa che $\Delta(g) = 1$ se e solo se la misura invariante sinistra è pure invariante destra.
Abbiamo così dimostrato i seguenti risultati:

II.7 Teorema *Sia G un gruppo di Lie compatto. Allora esiste una e una sola misura di Haar μ bi-invariante e tale che $\mu(G) = 1$.*

II.8 Teorema *Se G è un gruppo di Lie e ω è una n-forma su G invariante a sinistra, allora esiste una funzione non nulla Δ, detta modulo, tale che*

$$\begin{aligned} R_g^*\omega &= \Delta(g)\, \omega; \\ \Delta(gh) &= \Delta(g)\, \Delta(h). \end{aligned}$$

L'ultima eguaglianza segue dal fatto che

$$\begin{aligned} R_{gh}^*\omega &= \Delta(gh)\,\omega \\ R_h^* R_g^*\omega &= R_h^*\Delta(g)\,\omega = \Delta(g)\,R_h^*\omega = \Delta(g)\,\Delta(h) \end{aligned}$$

ed essendo $R_{gh}^*\omega = R_h^* R_g^*\omega$ si conclude la tesi.
Fissiamo una n-forma invariante ω su G. Sia φ un diffeomorfismo di G tale che $\varphi^*\omega$ sia ancora una forma invariante. Allora anche $\varphi^*\omega$ dà luogo a una misura invariante. Se a è la costante tale che $\varphi^*\omega = a\omega$, a si dice anche determinante di φ e si indica con $\det\varphi$ (in particolare $\Delta(g) = \det R_g$), abbiamo

$$\int_G f(m)\ d\mu_\omega(m) = \int_G (f\circ\varphi)(m)\ d\mu_{\varphi^*\omega}(m) = \int_G (f\circ\varphi)(m)\det\varphi\, d\mu_\omega(m)\,.$$

Come si vede integrando $f \equiv 1$, nel caso in cui G è compatto, $\det\varphi = 1$. Notiamo poi che $\varphi^*\omega$ è invariante a sinistra se $L_g\circ\varphi = \varphi\circ L_g$ per ogni $g\in G$.
Se G è compatto possiamo scegliere per φ il diffeomorfismo $m\mapsto m^{-1}$, infatti,

$$L_g^*\varphi^*\omega = (\varphi\circ L_g)^*\,\omega = \left(R_{g^{-1}}\circ\varphi\right)^*\omega = \varphi^* R_{g^{-1}}^*\omega = \varphi^*\omega$$

allora, essendo $\det\varphi = 1$,

$$\int_G g(m)\ d\mu_\omega(m) = \int_G g\left(m^{-1}\right)\ d\mu_\omega(m) = \int_G g(m)\ d\mu_\omega\left(m^{-1}\right),$$

cioè,

II.4 **Proposizione** *Se G è un gruppo di Lie compatto e μ una misura di Haar su G, allora $d\mu(m) = d\mu\left(m^{-1}\right)$.*

II.2.3 La mappa esponenziale

Un altro strumento fondamentale nello studio dei gruppi di Lie è la mappa esponenziale della quale ci occuperemo nel corso di questa sottosezione.
Torniamo a considerare il problema dell'integrazione di campi vettoriali su varietà lisce. Fissiamo un campo vettoriale X su G varietà liscia. Con le notazioni definite nel corso del primo capitolo definiamo

$$W \equiv \bigcup_{m\in G} J_m\times\{m\}\,,$$

dove $J_m = (-t_m^-, t_m^+)$ è l'intervallo su cui è definita la curva integrale massimale passante per m. W risulta un aperto connesso di $(\mathbb{R},+)\times G$ ed è il dominio del flusso $\theta(t,m)$ definito da G.

II.13 **Definizione** *Un campo vettoriale X su una varietà liscia M si dice* **completo** *se genera un'azione globale di $(\mathbb{R},+)$ su G, cioè se il dominio del suo flusso, W, coincide con $\mathbb{R}\times G$.*

Un campo è completo se e solo se $J_m = \mathbb{R}$ per ogni $m\in\mathbb{R}$. In particolare, se G è compatto tutti i campi su G sono compatti. Quello che ci interessa vedere è che nel caso più generale di un gruppo di Lie i campi vettoriali invarianti a sinistra sono completi.

II.9 **Teorema** *Sia $X\in\mathfrak{X}(M)$ e sia $F: M\to M$ un diffeomorfismo. Sia $\theta: W\to M$ il flusso generato da X su M. Allora X è invariante sotto F se e solo se $F(\theta(t,m)) = \theta(t,F(m))$ ogni volta che i due membri siano entrambi definiti.*

Dimostrazione Supponiamo che X sia invariante sotto F. Se $\theta_m: J_m\to M$ è la curva curva integrale di X per m (i.e., $\theta_m(0) = m$), allora il diffeomorfismo F trasforma θ_m in una curva integrale del campo $F_*(X)$. Infatti,

$$\theta_{m*}\left(\frac{d}{dt}\right) = X(\theta_m(t))$$

da cui, visto che $F_*(X(m)) = (F_*X)(F(m))$,

$$(F\circ\theta_m)_*\left(\frac{d}{dt}\right) = F_*\theta_{m*}\left(\frac{d}{dt}\right) = F_*(X(\theta_m(t))) = (F_*X)((F\circ\theta_m)(t)).$$

D'altra parte, siccome X è F-invariante, $F(\theta_m(t))$ è una nuova curva integrale di X per $F(m)$. Per unicità della curva integrale per un punto, abbiamo

$$F(\theta(t,m)) = F(\theta_m(t)) = \theta(t, F(m))$$

la tesi.

Supponiamo adesso che sia $F(\theta(t,m)) = \theta(t,F(m))$ e mostriamo $F_*(X(m)) = X(F(m))$. Per definizione, $X(m) = \theta_{m*}(d/dt)$, applichiamo l'isomorfismo $F_* : T_mM \to T_{F(m)}M$ e troviamo

$$F_*(X(m)) = F_*\theta_{m*}\left(\frac{d}{dt}\right) = (F\circ\theta_m)_*\left(\frac{d}{dt}\right) = \theta_{F(m)*}\left(\frac{d}{dt}\right) = X(F(m)).$$

(c.v.d.)

Siamo adesso in grado di dimostrare il risultato preannunciato:

II.10 Teorema *Un campo invariante a sinistra su un gruppo di Lie è completo.*

Dimostrazione Sia $X \in \mathfrak{g}$, campo invariante a sinistra sul gruppo di Lie G. Esistono un intorno V di e e un intervallo $I_\delta \equiv (-\delta,\delta) \subset \mathbb{R}$ tali che $\theta(t,g)$ è ben definito su $I_\delta \times V$. Applichiamo il teorema precedente per $F = L_h$. Allora $\theta(t, L_hg) = L_h\theta(t,g)$ di modo che θ è definito pure su $I_\delta \times L_hV$ intorno di $(0,h) \in \mathbb{R}\times G$. Per ogni $h \in G$ esiste un intorno $U_h \equiv L_hV$ tale che $I_\delta \times U_h \subset W$ laddove δ è indipendente da h. Supponiamo per assurdo $t_h^+ < \infty$. Consideriamo il punto $\theta(s,h) \in G$ con $t_h^+ - s < \delta/3$. Sappiamo che $\theta(t,\theta(s,h))$ è ben definito per $|t| < \delta$ visto che $\theta(s,h) \in G$. D'altra parte, dal teorema di esistenza e unicità (capitolo I), abbiamo che $\theta(t,\theta(s,h))$ è definito se e solo se $t+s \in J_h$ cioè se e solo se $t+s < t_h^+$, se e solo se $t < t_h^+ - s < \delta/3$, la qual cosa è evidentemente assurda. Dunque, $t_h^+ = +\infty$. Analogamente si dimostra che $t_h^- = +\infty$. Infine, X è completo. **(c.v.d.)**

Sia $X \in \mathfrak{g}$, poiché esso è completo, il flusso associato θ^X definisce, per ogni $t \in \mathbb{R}$, un diffeomorfismo θ_t^X di G:

$$\theta_t^X(g) = \theta^X(t,g).$$

Se $Y \in \mathfrak{X}(G)$, allora è ben definito il campo vettoriale su G dato da θ_{t*}^XY, inoltre,

$$\begin{aligned}(L_XY)(g) &= \lim_{t\to 0}\frac{Y(g) - \theta_{t*}^X\left(Y\left(\theta_{-t}^X(g)\right)\right)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{Y(g) - \left(\theta_{t*}^XY\right)(g)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{Y - \left(\theta_{t*}^XY\right)}{t}(g)\\ &= -\frac{d}{dt}\left(\theta_{t*}^XY\right)(g)\end{aligned}$$

cioè

$$[X,Y] = -\frac{d}{dt}\left(\theta_{t*}^XY\right).$$

Siamo adesso in grado di introdurre la mappa esponenziale sui gruppi di Lie. Il seguente teorema è fondamentale e verrà ripetutamente usato nel seguito:

II.11 Teorema *Sia G un gruppo di Lie e sia $\mathfrak{g}$ lo spazio dei campi vettoriali invarianti a sinistra. Sia $\theta^X(t,m)$ il flusso globale generato da $X \in \mathfrak{g}$. Si chiama mappa esponenziale su G l'applicazione $e^{t\cdot} : \mathfrak{g} \to G$ definita da*

$$e^{tX} = \theta^X(t,e).$$

Allora

(i) $\theta^X(t,m) = me^{tX}$;

(ii) *fissiamo $X \in \mathfrak{g}$, allora $\varphi(t) \equiv e^{tX}$ è un omomorfismo di gruppo da $(\mathbb{R},+)$ in G, i.e., $\varphi(t+s) = \varphi(t)\varphi(s)$, che come morfismo di varietà è liscio.*

(iii) *ogni omomorfismo di gruppo da* $(\mathbb{R},+)$ *in* G *che sia pure un morfismo liscio tra le due varietà è della forma* e^{tX} *per qualche* $X \in \mathfrak{g}$.

(iv) $\left\{e^X \,|X \in \mathfrak{g}\right\}$, *include un intorno di e; infatti esistono un intorno* $\bar{N}$ *di* $e \in G$ *e un intorno* N *di* $0 \in \mathfrak{g}$ *tali che* $X \mapsto e^X$ *sia un diffeomorfismo tra* N *e* $\bar{N}$.

(v) $G_0 \equiv \left\{e^{X_1} \dots e^{X_k} \,|X_i \in \mathfrak{g},\, k \geq 1\right\}$ *è un sottogruppo connesso di* G *eguale alla componente connessa dell'identità.*

Dimostrazione (i) Come abbiamo dimostrato,

$$L_h \theta^X(t,g) = \theta^X(t,hg),$$

sicché

$$\theta^X(t,g) = \theta^X(t,ge) = L_g\theta^X(t,e) = ge^{tX}.$$

(ii) $\varphi(t) = \theta^X(t,e)$ sicché $\varphi(t)$ è un morfismo liscio. Inoltre,

$$\begin{aligned}\varphi(t+s) &= \theta^X(t+s,e) = \theta^X\left(t,\theta^X(s,e)\right) = \theta^X(t,\varphi(s)) = \\ &= \theta^X(t,\varphi(s)e) = L_{\varphi(s)}\theta^X(t,e) = \varphi(s)\varphi(t).\end{aligned}$$

(iii) Dato φ, sia

$$X_e \equiv \varphi_*\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\right) \in T_eG$$

poiché $\varphi(0) = e$. Sia X il campo invariante a sinistra tale che $X(e) = X_e$. Derivando in s l'eguaglianza $\varphi(t+s) = \varphi(t)\varphi(s)$ troviamo

$$\begin{aligned}\varphi_*\left(\frac{d}{dt}\right) &= \left(L_{\varphi(t)}\circ\varphi\right)_*\left(\frac{d}{dt}\right) = L_{\varphi(t)*}\varphi_*\left(\frac{d}{dt}\right) = L_{\varphi(t)*}X(e) = \\ &= X(\varphi(t)),\end{aligned}$$

perciò $\varphi(t)$ è una curva integrale di X per e. Per unicità di tale curva integrale si conclude

$$\varphi(t) = \theta^X(t,e) = e^{tX}.$$

(iv) Riguardiamo $\mathfrak{g}$ come varietà (visto che è uno spazio lineare) e consideriamo il morfismo di varietà $\exp : \mathfrak{g} \to G$ talché $\exp(X) = e^X$. Allora è definita la mappa $\exp_* : T_0\mathfrak{g} \to T_eX$. Ora, $T_0\mathfrak{g}$ è naturalmente isomorfo a $\mathfrak{g}$, laddove, sotto l'isomorfismo $X \mapsto X(e)$, T_eX è isomorfo a T_eX. Sotto queste associazioni, $\exp_*$ è la mappa identica, perciò è invertibile. Dal teorema della funzione inversa (esteso in modo banale da $\mathbb{R}^n$ alle varietà grazie alla scelta di un sistema di coordinate locali), questo significa che la funzione exp ristretta a un intorno di $0 \in \mathfrak{g}$ è un diffeomorfismo su un intorno di $e \in G$, la qual cosa conclude la prova.

(v) Ovviamente G_0 è un sottogruppo di G. G_0 è inoltre connesso per archi. Infatti, ogni elemento di G_0 è collegato da una curva continua a e. Dato $e^{X_1}\dots e^{X_k}$ basta considerare la curva continua $\gamma : [0,1] \to G$,

$$\gamma(t) = \theta^{X_1}(t,e)\dots\theta^{X_k}(t,e).$$

Se x appartiene alla componente connessa (per archi) dell'identità e, allora $x \in G_0$. Infatti, sia γ la curva da e a x. Per ogni $t \in [0,1]$ esiste un intorno $B(t,\delta_t)$ tale che se $s \in B(t,\delta_t)$ allora $\gamma(s)^{-1}\gamma(t)$ è contenuto in $\bar{N}$. Poiché al variare di $t \in [0,1]$ otteniamo un ricoprimento aperto di $[0,1]$, che è un compatto, riusciamo a determinare i punti

$$t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$$

di modo che $\gamma(t_{i-1})^{-1}\gamma(t_i) \in \bar{N}$. Perciò esiste $X_i \in \mathfrak{g}$ talché $\gamma(t_{i-1})^{-1}\gamma(t_i) = e^{X_i}$ e, per induzione, troviamo che $x = \gamma(1) = \gamma(t_n) = e^{X_1}\dots e^{X_n}$, come si voleva. **(c.v.d.)**

Il teorema appena dimostrato ha una forte portata. In particolare è importante il fatto che esiste un diffeomorfismo liscio tra un intorno di $0 \in \mathfrak{g}$ e un intorno di $e \in G$. Tale diffeomorfismo può essere riguardato come una carta che viene trasformata in un atlante tramite L_g. Ne viene che esistono delle coordinate canoniche sul gruppo individuate nella sua algebra di Lie.

In particolare, è vero che, fissata la base $\{\bar{X}_i\}_{i\in J_n}$, l'applicazione

$$\mathbf{a} \equiv (a_1, \ldots, a_n) \mapsto \exp\left(a_1\bar{X}_1 + \ldots + a_n\bar{X}_n\right)$$

è un diffeomorfismo tra un intorno di $0 \in \mathbb{R}^n$ e $\bar{N}$ intorno di $e \in G$. Le funzioni x_i che a g nell'intorno detto associano a_i si dicono **coordinate canoniche del primo tipo** su G.

Aggiunto Dato $x \in G$ definiamo il diffeomorfismo $I_x : G \to G$ dato da

$$I_x(y) \equiv xyx^{-1} = L_x R_{x^{-1}} y = R_{x^{-1}} L_x y$$

Consideriamo allora I_{x*}. Se $X \in \mathfrak{g}$, allora

$$I_{x*}X = R_{x^{-1}*}L_{x*}X = R_{x^{-1}*}X \in \mathfrak{g}$$

Poiché $I_x \circ I_{x^{-1}} = \mathrm{id}_G$, si conclude che I_{x*} è un isomorfismo di $\mathfrak{g}$ in sé (o, come si dice, un automorfismo di $\mathfrak{g}$), cioè, per ogni $x \in G$,

$$I_{x*} \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g}.$$

Definiamo allora l'applicazione liscia

$$\operatorname{Ad} : G \to \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$$

data da

$$\operatorname{Ad} g = I_{g*}.$$

A questo punto, consideriamo

$$\operatorname{ad} \equiv \operatorname{Ad}_* = T_e \operatorname{Ad} : T_eG \equiv \mathfrak{g} \to \operatorname{End}\mathfrak{g}$$

Abbiamo allora

$$\operatorname{ad}(X)Y = (T_e \operatorname{Ad})(X)Y = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \operatorname{Ad}\left(e^{tX}\right)Y = \frac{d}{dt}\left(I_{e^{tX}*}Y\right)$$

d'altra parte

$$I_{e^{tX}*}Y = R_{e^{-tX}*}Y,$$

e

$$R_{e^{tX}}(m) = me^{tX} = m\theta^X(t,e) = \theta_t^X(m)$$

da cui

$$\frac{d}{dt}\operatorname{Ad}\left(e^{tX}\right)Y = \frac{d}{dt}\theta^X_{-t*}Y = [X,Y].$$

II.12 Teorema *L'applicazione*

$$\operatorname{ad} : \mathfrak{g} \to \operatorname{End}\mathfrak{g}$$

è data da

$$\operatorname{ad}(X) = [X, \cdot].$$

II.2.4 La formula di Baker-Campbell-Hausdorff

In questa sottosezione seguiamo la trattazione di Varadarajan. Come abbiamo visto, $x \exp tX \equiv xe^{tX}$ è la curva integrale del campo $X \in \mathfrak{g}$ per $x \in G$. Se $f \in \mathcal{C}^\infty(x)$ è una funzione qualsiasi, poniamo

$$(Xf)(x) \equiv f(x;X) = \left.\frac{d}{dt}f\left(xe^{tX}\right)\right|_{t=0} \tag{II.1}$$

come deriva dalla definizione.

In questa sottosezione ci proponiamo di trovare delle formule analoghe per le derivate di ordine superiore.

II.1 Lemma *Siano $x \in G$, $X \in \mathfrak{g}$. Allora per ogni intero $k \geq 0$ ed ogni $f \in \mathcal{C}^\infty(x)$, abbiamo*

$$\left(X^k f\right)(x) \equiv f\left(x; X^k\right) = \left.\frac{d^k}{dt^k} f\left(xe^{tX}\right)\right|_{t=0}. \tag{II.2}$$

Dimostrazione Proveremo per induzione su k la formula più generale

$$\left(X^k f\right)\left(xe^{tX}\right) = f\left(xe^{tX}; X^k\right) = \frac{d^k}{dt^k} f\left(xe^{tX}\right).$$

Il caso $k = 0$ è ovvio. Assumiamo adesso che la tesi valga per k e mostriamo che è valida per $k+1$. Visto che

$$(Xf)(x) = \left.\frac{d}{ds} f\left(xe^{sX}\right)\right|_{s=0}$$

abbiamo

$$(Xf)\left(xe^{tX}\right) = \left.\frac{d}{ds} f\left(xe^{(t+s)X}\right)\right|_{s=0} = \frac{d}{dt} f\left(xe^{tX}\right)$$

perciò

$$\left(X^{k+1} f\right)\left(xe^{tX}\right) = X\left(X^k f\right)\left(xe^{tX}\right) = \frac{d}{dt} X^k f\left(xe^{tX}\right) = \frac{d}{dt}\frac{d^k}{dt^k} f\left(xe^{tX}\right) = \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} f\left(xe^{tX}\right).$$

(c.v.d.)

II.2 Lemma *Sia $x \in G$ e siano $X_1, \ldots, X_s \in \mathfrak{g}$. Se $f \in \mathcal{C}^\infty(x)$, allora*

$$(X_1 \ldots X_s f)(x) \equiv f(x; X_1 \ldots X_s) = \left.\frac{\partial^s}{\partial t_1 \ldots \partial t_s} f\left(xe^{t_1 X_1} \ldots e^{t_s X_s}\right)\right|_{\mathbf{t}=0}. \tag{II.3}$$

Dimostrazione Consideriamo la funzione F definita come

$$(t_1, \ldots, t_s) \mapsto f\left(xe^{t_1 X_1} \ldots e^{t_s X_s}\right)$$

in un intorno dell'origine di $\mathbb{R}^s$. Per $|t_1|, \ldots, |t_{s-1}|$ sufficientemente piccoli, abbiamo

$$\left.\frac{\partial}{\partial t_s} F(t_1, \ldots, t_{s-1}, t_s)\right|_{t_s=0} = (X_s f)\left(xe^{t_1 X_1} \ldots e^{t_{s-1} X_{s-1}}\right)$$

(c.v.d.) procedendo per induzione su s, abbiamo la tesi.

Derivazione della formula di Baker-Campbell-Hausdorff Consideriamo la funzione

$$F(t_1, \ldots, t_s) \equiv f\left(e^{t_1 X_1} \ldots e^{t_s X_s}\right),$$

se $f \in \mathcal{C}^\infty(e)$, F è liscia in un intorno dell'origine di $\mathbb{R}^s$. Allora per $|t|$ sufficientemente piccolo

$$F(t, \ldots, t) = f(e) + t \sum_{i=1}^s \left.\frac{\partial_i F}{\partial t_i}\right|_{\mathbf{t}=0} + \frac{1}{2} t^2 \sum_{i,j \in J_s} \left.\frac{\partial^2 F}{\partial t_i \partial t_j}\right|_{\mathbf{t}=0} + O\left(t^3\right)$$

Dunque, (poiché le derivate seconde esistono possiamo calcolarle scegliendo in $\mathbb{R}^s$ direzioni convenienti),

$$F(t, \ldots, t) = f(e) + t \sum_{i=1}^s f(e; X_i) + \frac{1}{2} t^2 \left\{\sum_{i=1}^s f\left(e; X_i^2\right) + 2 \sum_{i<j \in J_s} f(e; X_i X_j)\right\} + O\left(t^3\right) \tag{II.4}$$

Selezioniamo una base $\left\{\bar{X}_i\right\}_{i \in J_n}$ in $\mathfrak{g}$. Siano $\{x_i\}_{i \in J_n}$ le coordinate canoniche del primo tipo corrispondenti. Allora, se $Z = a_i \bar{X}_i$, abbiamo $x_k\left(e^{tZ}\right) = t a_k$ e dalla (II.2), concludiamo

$$x_k(e; Z^n) = \begin{cases} a_k, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}.$$

Dunque, presi $Z = a_i \bar{X}_i$ e $W = b_i \bar{X}_i$, abbiamo

$$x_k(e; A + \lambda B) = a_k + \lambda b_k = x_k(e; A) + \lambda x_k(e; B)$$

da cui, preso $f \equiv x_k$, abbiamo

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{s} x_k\left(e; X_i^2\right) + 2\sum_{i<j\in J_s} x_k\left(e; X_iX_j\right) &= x_k\left(e; \sum_{i=1}^{s} X_i^2 + 2\sum_{i<j\in J_s} X_iX_j\right) = \\
&= x_k\left(e; \sum_{i=1}^{s} X_i^2 + \sum_{i\neq j\in J_s} X_iX_j - \sum_{i>j\in J_s} X_iX_j + \sum_{i<j\in J_s} X_iX_j\right) = \\
&= x_k\left(e; \left(\sum_{i=1}^{s} X_i\right)^2 + \sum_{i<j\in J_s} \left[X_i, X_j\right]\right) = \sum_{i<j\in J_s} x_k\left(e; \left[X_i, X_j\right]\right)
\end{aligned}$$

Allora

$$F\left(t,\ldots,t\right) = t\sum_{i=1}^{s} x_k\left(e; X_i\right) + \frac{1}{2}t^2\sum_{i<j\in J_s} x_k\left(e; \left[X_i, X_j\right]\right) + O\left(t^3\right)$$

Poniamo poi

$$\begin{aligned}
X_i &= \sum_{k=1}^{n} c_{ik}\bar{X}_k \\
\left[X_i, X_j\right] &= \sum_{k=1}^{n} d_{ijk}\bar{X}_k
\end{aligned}$$

sicché

$$x_k\left(e^{tX_1}\ldots e^{tX_s}\right) = t\sum_{i=1}^{s} c_{ik} + \frac{1}{2}t^2\sum_{i<j\in J_s} d_{ijk} + O\left(t^3\right).$$

D'altra parte, per t sufficientemente piccolo, dal teorema II.11, esiste $Z\left(t\right) \in \mathfrak{g}$ di modo che $e^{Z(t)} = e^{tX_1}\ldots e^{tX_s}$ ed abbiamo

$$Z\left(t\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k\left(e^{tX_1}\ldots e^{tX_s}\right)\bar{X}_k,$$

sicché

$$\begin{aligned}
Z\left(t\right) &= t\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{n} c_{ik}\bar{X}_k + \frac{t^2}{2}\sum_{i<j\in J_s}\sum_{k=1}^{n} d_{ijk}\bar{X}_k + O\left(t^3\right) = \\
&= t\sum_{i=1}^{s} X_i + \frac{t^2}{2}\sum_{i<j\in J_s}\left[X_i, X_j\right] + O\left(t^3\right).
\end{aligned}$$

II.13 **Teorema (Baker-Campbell-Hausdorff)** *Se $X_1,\ldots,X_s$ appartengono a $\mathfrak{g}$, algebra di Lie di G, allora, per t sufficientemente piccolo vale la formula di* Baker-Campbell-Hausdorff *(al secondo ordine)*

$$\exp\left(tX_1\right)\ldots\exp\left(tX_s\right) = \exp\left(t\sum_{i=1}^{s} X_i + \frac{t^2}{2}\sum_{i<j\in J_s}\left[X_i, X_j\right] + O\left(t^3\right)\right) \tag{II.5}$$

In particolare, valgono le seguenti relazioni

$$\exp\left(tX\right)\exp\left(tY\right) = \exp\left(t\left(X+Y\right) + \frac{t^2}{2}\left[X,Y\right] + O\left(t^3\right)\right) \tag{II.6}$$

$$\exp\left(tX\right)\exp\left(tY\right)\exp\left(-tX\right) = \exp\left(tY + t^2\left[X,Y\right] + O\left(t^3\right)\right) \tag{II.7}$$

$$\exp\left(tX\right)\exp\left(tY\right)\exp\left(-tX\right)\exp\left(-tY\right) = \exp\left(t^2\left[X,Y\right] + O\left(t^3\right)\right). \tag{II.8}$$

Uniformità della stima Mostriamo che la stima (II.5) è uniforme in $X_1,\ldots,X_s$ al variare di questi in un intorno di $0 \in \mathfrak{g}$. A questo scopo basta vedere che a essere uniforme è la stima (II.4). Fissiamo una qualsiasi norma $\left\|\cdot\right\|$ in $\mathfrak{g}$ (tanto sono tutte equivalenti) e per ogni f definita e liscia in un intorno di e si consideri la funzione

$$g\left(Y_1,\ldots,Y_s\right) = f\left(\exp Y_1 \ldots \exp Y_s\right)$$

con $\|Y_i\| \leq a$ per ogni $i \in J_s$. Allora $\mathfrak{g}$ è liscia in un intorno di 0. Sia H la differenza tra g e la sua espansione di Taylor in 0 arrestata al secondo ordine. Allora possiamo determinare le costanti $C' > 0$ e $b' > 0$ di modo che

$$\|H\left(Y_1,\ldots,Y_s\right)\| \leq C' \sum_{i=1}^{s} \|Y_j\|^3$$

per ogni $\|Y_j\| < b'$.
Ne viene allora che preso $M > 0$ e posto $C'' \equiv C' s M^3$, $b \equiv b'/M$, abbiamo

$$\|H\left(tX_1,\ldots,tX_s\right)\| \leq C'' t^3,$$

se $\|X_i\| < M$ e $|t| < b$.
Questo dimostra che per ogni $M > 0$, $s > 0$, esistono C e b di modo che se $\|X_i\| < M$ e $|t| < b$, allora

$$\left\| Z\left(t\right) - t\sum_{i=1}^{s} X_i - \frac{t^2}{2} \sum_{i<j\in J_s} \left[X_i, X_j\right] \right\| \leq C t^3$$

dove $Z\left(t\right)$ è tale che $e^{tX_1} \ldots e^{tX_s} = e^{Z(t)}$ (b tiene conto del fatto che t deve essere abbastanza piccolo affinché un tale $Z\left(t\right)$ esista). Questo dimostra l'uniformità nella stima (II.4).

Derivazione della formula di Lie-Trotter Fissiamo $s = 2$, $X_1 \equiv X$ e $X_2 \equiv Y$. Se $X_n \to X$ e $Y_n \to Y$ consideriamo

$$\left(\exp t\frac{X_n}{n} \exp t\frac{Y_n}{n}\right)^n$$

Abbiamo $\|X_n\|, \|Y_n\| < M$ per un qualche M. Per l'M detto consideriamo le costanti b e C definite come sopra. Allora per $n > |t|/b$, abbiamo

$$\left(\exp t\frac{X_n}{n} \exp t\frac{Y_n}{n}\right)^n = \exp^n\left(Z_n\left(t\right)\right) = \exp\left(nZ_n\left(t\right)\right)$$

dove, per quanto visto prima,

$$\left\| Z_n\left(t\right) - t\frac{X_n + Y_n}{n} \right\| = O\left(\frac{t^2}{n^2}\right),$$

infine, $nZ_n\left(t\right) \to t\left(X + Y\right)$ e

$$\lim_{n\to\infty} \left(\exp t\frac{X_n}{n} \exp t\frac{Y_n}{n}\right)^n = \exp\left(t\left(X_n + Y_n\right)\right).$$

II.14 Teorema (formula di Lie-Trotter) *Siano X e $Y \in \mathfrak{g}$ e siano $\{X_n\}, \{Y_n\} \subset \mathfrak{g}$ successioni tali che $X_n \to X$ e $Y_n \to Y$, allora vale la formula di Lie-Trotter*

$$\exp t\left(X + Y\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\exp t\frac{X_n}{n} \exp t\frac{Y_n}{n}\right)^n.$$

In particolare, per ogni $t \in \mathbb{R}$, puntualmente in t,

$$\exp t\left(X + Y\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\exp \frac{tX}{n} \exp \frac{tY}{n}\right)^n.$$

La formula di Lie-Trotter ha una conseguenza fondamentale

II.15 Teorema *Sia G un gruppo di Lie e sia H un sottogruppo chiuso. Allora H è un gruppo di Lie talché la mappa di inclusione $i : H \subset G \to G$ è una mappa liscia. La mappa i induce un isomorfismo $i_* : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ di $\mathfrak{h}$ su una sottoalgebra di $\mathfrak{g}$.*

Dimostrazione Definiamo $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{g}$ come

$$\mathfrak{h}' \equiv \left\{ X \in \mathfrak{g} \,\middle|\, e^{tX} \in H \; \forall t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Mostreremo che

(i) $\mathfrak{h}'$ è un sottospazio di $\mathfrak{g}$;

(ii) esistono un intorno N di 0 in $\mathfrak{g}$ e un intorno $\tilde{N}$ di e in H di modo che
$$\left\{X \in N \,\middle|\, e^X \in H\right\} = N \cap \mathfrak{h}'$$
e $X \mapsto e^X$ è una biiezione di $N \cap \mathfrak{h}'$ su $\tilde{N}$.

A quel punto, potremo usare la biiezione per definire un sistema di coordinate locali (restrizione delle coordinate canoniche su G) attorno a e. Cioè, definiremo $\varphi_0 : \tilde{N} \to \mathbb{R}^k$, $k \equiv \dim \mathfrak{h}'$, liscia e biunivoca. Poi, per ogni $x \in H$, potremo porre $N_x \equiv x\tilde{N}$ e $\varphi_x : N_x \to \mathbb{R}^k$ data da $\varphi_x(y) = \varphi_0\left(x^{-1}y\right)$. Le $\{\varphi_x\}$ definiscono un atlante, perché il prodotto è liscio su G e φ_0 è la restrizione di una funzione liscia su G. In questo modo concluderemo la tesi.

Proviamo (i). Abbiamo, se $X \in \mathfrak{h}'$ allora $e^{t\lambda X} \in H$ per ogni λ e quindi $\lambda X \in \mathfrak{h}'$. Se $X, Y \in \mathfrak{h}'$, allora, per ogni t,
$$e^{t(X+Y)} = \lim_{n \to +\infty} \left(e^{tX/n} e^{tY/n}\right)^n$$
e, visto che H è un sottogruppo chiuso, $e^{t(X+Y)} \in H$ per ogni t.

Proviamo (ii). Prendiamo un prodotto scalare (qualsiasi) su $\mathfrak{g}$ e sia $\mathfrak{h}'^{\perp}$ il complemento ortogonale di $\mathfrak{h}'$. Consideriamo $\Psi : \mathfrak{g} \to G$ data da $\Psi(Z) = e^X e^Y$ dove $Z = X + Y$ con $X \in \mathfrak{h}'$ e $Y \in \mathfrak{h}'^{\perp}$. Se consideriamo la derivata (in 0) di Ψ da $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{g}$ abbiamo che essa è l'identità come si vede calcolando l'operatore lineare derivata su $\mathfrak{h}'$ e sul suo complemento ortogonale. Per il teorema della funzione inversa, possiamo determinare una palla N_1 di raggio R intorno a 0 talché l'applicazione $X \mapsto e^X$ è un omeomorfismo da N_1 in e^{N_1} e tale che $X \mapsto \Psi(X)$ è un omeomorfismo di N_1 in $\Psi(N_1)$. Sia N_n la palla di centro l'origine e raggio R/n. Se la (ii) non si verificasse, per ogni n
$$\left\{X \in N_n \,\middle|\, e^X \in H\right\} \neq N_n \cap \mathfrak{h}',$$
altrimenti potremmo porre $N_n \equiv N$. Per assurdo la (ii) sia falsa; allora possiamo determinare $z_n \in H$ tale che $z_n = e^{Z_n}$ con Z_n in N_n e $Z_n \notin N_n \cap \mathfrak{h}'$. Poiché $e \in \psi(N_1) \cap e^{N_1}$, possiamo trovare un intorno di 0 mappato da ψ in $\psi(N_1) \cap e^{N_1}$, per cui, per n sufficientemente grande, $z_n \in \Psi(N_1)$. Cioè $z_n = \Psi(X_n + Y_n)$ con $\mathfrak{h}'^{\perp} \ni Y_n \neq 0$, ma $Y_n \to 0$ visto che $Z_n \to 0$. Poiché $e^{-X_n} \in H$, $e^{Y_n} = e^{-X_n} z_n \in H$.

Dunque, troviamo $\{Y_n\} \subset \mathfrak{h}'^{\perp}$, $Y_n \neq 0$, $e^{Y_n} \in H$, $Y_n \to 0$. Poniamo $A_n = Y_n / \|Y_n\| \in \mathfrak{h}'^{\perp}$. Sia A un punto di accumulazione degli A_n. Rinumerando, abbiamo $A_n \to A$ e, ancora, $Y_n \to 0$. Allora $A \in \mathfrak{h}'^{\perp}$. Otterremo una contraddizione mostrando che $A \in \mathfrak{h}'$.

Fissato $t \in \mathbb{R}$, poniamo $m_n \equiv [t/Y_n]$, allora
$$t - \|Y_n\| \leq m_n \|Y_n\| \leq t + \|Y_n\|$$
sicché $m_n \|Y_n\| \to t$. Dunque,
$$H \ni \left(e^{Y_n}\right)^{m_n} = e^{m_n Y_n} = e^{m_n \|Y_n\| A_n} \to e^{tA}$$
(c.v.d.) e poiché H è chiuso $e^{tA} \in H$, cioè $A \in \mathfrak{h}'$.

Dalla dimostrazione si ricava pure che $\mathfrak{h}'$ è proprio $\mathfrak{h}$, cioè l'algebra di Lie di H. Infatti, ogni curva in H nell'intorno di e è mappata dalla carta costruita in $\mathfrak{h}'$ e perciò ha derivata in $\mathfrak{h}'$, cioè $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}'$; viceversa, se $X \in \mathfrak{h}'$, allora e^{tX} è una curva in H passante per e e con derivata X, perciò $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{h}$. Per unicità delle curve integrali, abbiamo poi che se $X \in \mathfrak{h}$ allora e^{tX}, mappa esponenziale su G, è proprio la mappa esponenziale su H. Se ne conclude che le parentesi di Lie su $\mathfrak{h}$ sono la restrizione ad $\mathfrak{h}$ delle parentesi di Lie su $\mathfrak{g}$.

Spazio quoziente Preso H sottogruppo chiuso di G, vogliamo dotare G/H della struttura di varietà differenziabile. Cominciamo con il costruire una carta in un intorno di $[H]$. Preso $\tilde{N}$ intorno di $e \in G$ diffeomorfo secondo la mappa esponenziale all'intorno N dell'origine, prendiamo $\tilde{N}'$ l'intorno di e tale che se $p, q \in \tilde{N}'$, allora $p^{-1}q \in \tilde{N}$. In $\tilde{N}$ abbiamo un sistema di coordinate $(x_1, \ldots, x_n)$ tale che
$$H \cap N = \left\{x \in \tilde{N} \,|\, x_{k+1} = \ldots = x_n = 0\right\}$$

Mimando la costruzione di un assurdo simile a quella di cui nel teorema precedente, possiamo richiedere che il sistema di coordinate sia tale che se $p, q \in \tilde{N}'$, allora $p^{-1}q \in \tilde{N} \cap H$ se e solo se $x_{k+j}(p) = x_{k+j}(q)$. Questo significa che scegliendo le coordinate $x_{k+1}, \ldots, x_n$ costruiamo una carta in $\left[\tilde{N}'H\right]$ di G/H. Traslando poi la carta così ottenuta, riusciamo ad avere un atlante su G/H, di conseguenza

II.16 **Teorema** *Sia G un gruppo di Lie e sia H un suo sottogruppo chiuso. Allora G/H può essere dotato di una struttura differenziabile liscia di modo che l'azione*

$$\tau_g(xH) = gxH$$

sia una mappa liscia da $G \times G/H$ in G/H. Se H è un sottogruppo normale di G, allora G/H è un gruppo di Lie con la struttura differenziabile detta.

Complessificazione dell'algebra Consideriamo la complessificazione di $\mathfrak{g}$ ottenuta nel modo seguente

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \equiv \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$$

con

$$(a + ib)(X, Y) \equiv (aX - bY, aY + bX)$$

per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e $X, Y \in \mathfrak{g}$ e con il prodotto di Lie

$$[(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)] \equiv ([X_1, X_2] - [Y_1, Y_2], [X_1, X_2] + [Y_1, Y_2]).$$

Come sappiamo $\mathfrak{g}$ è sempre dato come spazio reale, ma quando si considerano gruppi di matrici unitarie si ottiene $U = e^{tA}$ il che implica $A = -A^*$, laddove, passando a $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ si può scrivere $U = e^{itB}$ con $B \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ e $B = B^*$.

II.3 Gruppi classici di matrici

II.3.1 Il gruppo generale lineare

I gruppi di Lie di particolare interesse (in molte trattazioni per fisici, i soli presi in considerazione) sono dati concretamente come gruppi di matrici.
Cominciamo con la ben nota

II.14 **Definizione** $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ *è il gruppo delle matrici invertibili di ordine n a coefficienti nel corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$).*

In ciascuno dei due casi, corpo reale o complesso, $G \equiv \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ ha una realizzazione naturale come sottoinsieme di $\mathbb{R}^{n^2}$ (o di $\mathbb{R}^{2n^2}$) che risulta aperto, in quanto la funzione determinante è continua e $A \in G$ se e solo se $\det A \neq 0$. Poiché G è un aperto euclideo può essere riguardato come varietà avente un sistema naturale di coordinate globali. Lo spazio tangente in e è isomorfo a $\mathbb{R}^{n^2}$ (o $\mathbb{R}^{2n^2}$), cioè $\mathfrak{g}$ è isomorfo a $\mathcal{M}(n, n; \mathbb{K})$, insieme delle matrici di ordine n a coefficienti in $\mathbb{K}$.

II.17 **Teorema** *Sotto la naturale associazione dell'algebra di Lie di $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ con $\mathcal{M}(n, n; \mathbb{K})$, le parentesi di Lie corrispondono al commutatore di matrici e l'applicazione e^X è data dalla serie (convergente)*

$$e^X = \mathbb{I} + X + \frac{X^2}{2} + \ldots + \frac{X^n}{n!} + \ldots$$

dove X^n è inteso nel senso di prodotto di matrici.

Dimostrazione Denotiamo provvisoriamente con $E(X)$ la serie a secondo membro. Il fatto che la serie sia convergente per ogni X discende dal fatto che X è una matrice in dimensione finita, perciò ammette norma finita. In definitiva, la convergenza è totale.

Siano X e Y due matrici commutanti. Allora

$$E(X)\,E(Y)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k!)}X^kY^{n-k}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,(X+Y)^n=E(X+Y)\,.$$

Ne viene che

$$E(tX)\,E(sX)=E((s+t)\,X)$$

per ogni $s,t\in\mathbb{R}$ e per ogni fissata matrice X. Perciò, $\varphi(t)\equiv E(tX)$ è un gruppo a un parametro e perciò esiste Y di modo che $\varphi(t)=e^{tY}$. Derivando ambedue le mappe $t=0$ si ottiene $X=Y$, perciò $e^{tX}=E(tX)$ e, in definitiva, $e^X=E(X)$.

Ora,

$$\mathrm{ad}(X)\,Y=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\mathrm{Ad}(X)\,Y,$$

sicché, visto che $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ include in modo naturale il gruppo e gli fa da carta globale,

$$\mathrm{Ad}(X)\,Y=(I_{e^{tX}})_*\,Y=\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}e^{tX}e^{sY}e^{-tX}=e^{tX}Ye^{-tX}$$

da cui

$$\begin{aligned}[X,Y]&=\mathrm{ad}(X)\,Y=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}e^{tX}Ye^{-tX}=\\&=XY-YX.\end{aligned}$$

(c.v.d.)

II.18 **Teorema** *Sia G un gruppo di matrici che è un sottogruppo chiuso di* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$. *Allora $\mathfrak{g}$ è isomorfa in modo naturale a*

$$\left\{X\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})\,\middle|\,e^{tX}\in G,\ \forall t\right\}.$$

Gli esponenziali sono ancora dati dalle serie di potenze e le parentesi di Lie coincidono con la commutazione di matrici.

Dimostrazione Dal teorema sui sottogruppi chiusi e dal teorema precedente, abbiamo

$$\mathfrak{g}=\{X\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})\,|E(tX)\in G,\ \forall t\}$$

Dunque, per ogni $X\in\mathfrak{g}$, $E(tX)$ è un sottogruppo a un parametro in G e perciò, ragionando come nella dimostrazione precedente, si conclude che $E(X)=e^X$ (dove e^X è la mappa esponenziale in G e non quella in $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$). A questo punto, ripetendo parola per parola la dimostrazione precedente, si conclude che le parentesi di Lie sono il commutatore di matrici. **(c.v.d.)**

I gruppi classici che esamineremo sono proprio sottogruppi chiusi di $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$.

II.3.2 Gruppi classici

Caso complesso Cominciamo con il gruppo unitario

II.15 **Definizione** $\mathrm{SU}(n)$ *è il gruppo delle matrici di ordine n tali che*

(i) $U^*U=UU^*=\mathbb{I}$;

(ii) $\det U=1$.

La (i) richiede l'invarianza del prodotto scalare su $\mathbb{C}^n$ dato da

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_iy_i$$

dal momento che

$$(U\mathbf{x},U\mathbf{y})=(\mathbf{x},U^*U\mathbf{y})=(\mathbf{x},\mathbf{y})\,.$$

Ricordiamo che $U^* = \bar{U}^t$.

II.5 **Proposizione** SU (n) *è un gruppo di Lie compatto e semplicemente connesso di dimensione* $n^2 - 1$. *La sua algebra di Lie,* $\mathfrak{su}(n)$, *è isomorfa allo spazio delle matrici complesse di ordine* n *tali che*

$$A^* = -A \quad \operatorname{Tr} A = 0.$$

Dimostrazione SU (n) è chiaramente un sottogruppo di GL $(n, \mathbb{C})$, inoltre è chiuso. Sia infatti $\{U_n\} \subset$ SU (n) una successione convergente a U, allora

$$U_n^* \to U$$

e $\mathbb{I} = U_n^* U_n \to U^* U$, $\mathbb{I} = U_n U_n^* \to U U^*$. Dunque, SU (n) è un sottogruppo chiuso di GL $(n, \mathbb{C})$ ed è perciò un gruppo di Lie. Inoltre,

$$A \in \mathfrak{su}(n) \Longleftrightarrow e^{tA} \in \mathrm{SU}(n), \ \forall t \in \mathbb{R}$$

Se $A^* = -A$, allora $\left(e^{tA}\right)^* = e^{tA^*} = e^{-tA}$ e si ha che e^{tA} è unitario (si noti che $\left(e^{tA}\right)^* = e^{tA^*}$ discende dall'espressione dell'esponenziale in serie di potenze). Viceversa, se $\left(e^{tA}\right)^* e^{tA} = \mathbb{I}$ per ogni t, derivando in $t = 0$, otteniamo

$$A^* + A = 0$$

perciò A è antihermitiana.

Infine, siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gli autovalori di A, allora e^{tA} ha per autovalori $e^{t\lambda_1}, \ldots, e^{t\lambda_n}$ e, dunque,

$$\det e^{tA} = e^{t\lambda_1} \ldots e^{t\lambda_n} = \exp\left(t \sum_{i=1}^n \lambda_i\right) = e^{t \operatorname{Tr} A},$$

perciò

$$1 = \det e^{tA} = e^{t \operatorname{Tr} A}$$

per ogni t se e solo se $\operatorname{Tr} A = 0$.

Andiamo a calcolare la dimensione di $\mathfrak{su}(n)$. A questo scopo dobbiamo contare i parametri reali liberi in una matrice antihermitiana a traccia nulla. Abbiamo

$$\bar{a}_{ji} = -a_{ij}$$

Gli elementi fuori diagonali hanno $n(n-1)$ parametri reali indipendenti, quelli sulla diagonale $n - 1$ (dove il -1 tiene conto della traccia nulla). Allora

$$\dim \mathfrak{su}(n) = n^2 - n + n - 1 = n^2 - 1.$$

Veniamo alle altre proprietà topologiche del gruppo. Se sul gruppo prendiamo la norma euclidea, abbiamo

$$\|U\|^2 = \sum_{i,j} |U_{ij}|^2 = \sum_{i,j} \bar{U}_{ij} U_{ij} = \sum_{i,j} U_{ji}^* U_{ij} = n,$$

perciò il gruppo è limitato. Essendo chiuso in uno spazio euclideo, il gruppo è compatto.

Dal teorema spettrale, ogni U può essere scritto come

$$U = V \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} V^{-1}$$

dove V è unitario e gli autovalori α_j possono essere scritti come $e^{i\lambda_j}$ poiché $|\alpha_j| = 1$, infatti, se $U\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$ con $\mathbf{v} \neq 0$ abbiamo

$$(U\mathbf{v}, U\mathbf{v}) = (\mathbf{v}, U^* U \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{v}) = |\lambda|^2 (\mathbf{v}, \mathbf{v}).$$

Poiché U ha determinante 1 troviamo $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 2\pi m$ e sostituendo $\lambda_1 \mapsto \lambda_1 - 2\pi m$ possiamo determinare una scelta dei λ_j di modo che la loro somma sia nulla.

A questo punto possiamo porre

$$U(t) = V \begin{pmatrix} e^{i\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\lambda_n t} \end{pmatrix} V^{-1}$$

ottenendo che $U(t) \in \mathrm{SU}(n)$ per ogni t dal momento che

$$\det U(t) = \exp\left(it \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right) = 1.$$

Poiché $U(t)$ è una curva continua sul gruppo e $U(0) = \mathbb{I}$ e $U(1) = U$ concludiamo che $\mathrm{SU}(n)$
(c.v.d.) è connesso per archi. In particolare, $\mathrm{SU}(n) = e^{\mathfrak{su}(n)}$.

L'algebra di Lie complessificata è fatta di matrici del tipo $C \equiv A+iB$ con $A^* = -A$, $B^* = -B$, $\mathrm{Tr}\, C = 0$. Ora, le prime due condizioni sono soddisfatte in modo automatico. Infatti, per ogni matrice $n \times n$ possiamo scrivere

$$C = \frac{C - C^*}{2} + i\frac{C + C^*}{2i} \equiv A + iB$$

con

$$\begin{aligned} A^* &= \frac{C^* - C}{2} = -A; \\ B^* &= -\frac{C + C^*}{2i} = -B. \end{aligned}$$

Dunque, l'unica condizione affinché una matrice appartenga a $\mathfrak{su}_{\mathbb{C}}(n)$ è che abbia traccia nulla. In questo senso, $\mathfrak{su}_{\mathbb{C}}(n)$ è $\mathbb{R}$-isomorfa a $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ dove $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \,|\det A = 1\}$. Tra poco torneremo a considerare nel dettaglio $\mathrm{SU}(2)$.

Caso reale Vediamo l'analogo di $\mathrm{SU}(n)$ nel caso si considerino spazi reali e dunque il prodotto scalare sia quello ordinario

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

II.16 Definizione *$SO(n)$ è il gruppo delle matrici reali di ordine n tali che*

(i) $O^t O = O O^t = \mathbb{I}$;

(ii) $\det O = 1$.

La (i) equivale a richiedere l'invarianza del prodotto scalare reale sotto O: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (O\mathbf{x}, O\mathbf{y})$. La condizione (i), che individua il gruppo ortogonale, $\mathrm{O}(n)$, ha un'importante conseguenza a livello topologico dal momento che

$$1 = \det O^t O = \det O^t \det O = (\det O)^2$$

da cui $\det O = \pm 1$ e con ciò $\mathrm{O}(n)$ ha due componenti connesse distinte: quella corrispondente a $\mathrm{SO}(n)$ e quella delle trasformazioni che contengono una riflessione.

II.19 Teorema *$SO(n)$ è un gruppo di Lie compatto e connesso per archi di dimensione pari a $n(n-1)/2$. La sua algebra di Lie $\mathfrak{so}(n)$ è isomorfa allo spazio delle matrici di ordine n antisimmetriche, tali cioè che*

$$A^t = -A.$$

Dimostrazione Chiaramente $\mathrm{SO}(n)$ è un sottogruppo chiuso di $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ e come tale è un gruppo di Lie. Come abbiamo dimostrato

$$A \in \mathfrak{so}(n) \Longleftrightarrow e^{tA} \in \mathrm{SO}(n) \;\; \forall t \in \mathbb{R}.$$

Se A è antisimmetrica, allora

$$\left(e^{tA}\right)^t = e^{tA^t} = e^{-tA} = \left(e^{tA}\right)^{-1},$$

inoltre A ha traccia nulla (visto che gli elementi sulla diagonale sono tutti nulli) e con ciò $\det e^{tA} = 0$ per ogni t. Sicché $A \in \mathfrak{so}(n)$.

Viceversa, sia $A \in \mathfrak{so}(n)$, allora, per ogni t

$$e^{tA} e^{tA^t} = \mathbb{I}$$

e, derivando in $t = 0$,

$$A + A^t = 0,$$

da cui A è antisimmetrica.

Poiché lo spazio delle matrici antisimmetriche reali ha dimensione $n(n-1)/2$, abbiamo completato la prima parte della prova.

Ancora, usando la norma euclidea

$$\|O\|^2 = \sum_{i,j} O_{ij}^2 = \sum_{i,j} O_{ij} O_{ij} = \sum_{i,j} O_{ji}^t O_{ij} = \sum_{j=1}^n \delta_{jj} = n$$

da cui $\mathrm{SO}(n)$ è limitato e quindi compatto (essendo chiuso).

Gli autovalori di $\mathrm{SO}(n)$ hanno modulo 1, perché O conserva il prodotto scalare. Siccome il polinomio secolare di O è reale, gli autovalori compaiono a coppie complesse coniugate. Gli autovalori si dispongono sul circolo unitario di $\mathbb{C}$ in modo simmetrico rispetto all'asse reale. Visto che il determinante di O ha da essere positivo, l'autovalore -1 deve avere molteplicità algebrica (e dunque geometrica, visto che O è diagonalizzabile) pari. Se n è dispari, deve comparire almeno una volta l'autovalore 1.

Se complessifichiamo lo spazio, O ha autovalori $e^{\pm i\theta_j}$ con $j = 1, \ldots, [n/2]$ e tutti gli altri eventuali autovalori sono pari a 1. Se $\mathbf{u}_j$ è tale che

$$O\mathbf{u}_j = e^{i\theta_j} \mathbf{u}_j$$

allora

$$O\bar{\mathbf{u}}_j = e^{-i\theta_j} \bar{\mathbf{u}}_j$$

Poniamo $\mathbf{u}_j \equiv \mathbf{a}_j + i\mathbf{b}_j$ con $\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_j$ reali. Se $e^{i\theta_j} \neq \pm 1$, allora $\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_j \neq 0$ e si ha

$$\begin{aligned} O\mathbf{a}_j &= (\cos\theta_j)\,\mathbf{a}_j - (\sin\theta_j)\,\mathbf{b}_j \\ O\mathbf{b}_j &= (\sin\theta_j)\,\mathbf{a}_j + (\cos\theta_j)\,\mathbf{b}_j \end{aligned}$$

Esiste perciò una base reale rispetto alla quale O ha una forma a blocchi del tipo

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j \\ \sin\theta_j & \cos\theta_j \end{pmatrix}$$

se compare l'autovalore -1 possiamo considerarlo dato da $\theta = \pi$ perché esso deve avere molteplicità pari. Prendendo $t \mapsto t\theta_j$ otteniamo una curva continua $O(t)$ a valori in $\mathrm{SO}(n)$

(c.v.d.) con $O(0) = \mathbb{I}$ e $O(1) = O$. Infine, $\mathrm{SO}(n)$ è connesso.

Durante la dimostrazione abbiamo provato la seguente

II.6 Proposizione *Per ogni $O \in \mathrm{SO}(n)$ esiste V ortogonale tale $O = VDV^{-1}$ con*

$$D = \left(\begin{array}{cc|cc|c|cc} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & & & & & \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & & & & \\ \hline & & \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & & & \\ & & \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & & & \\ \hline & & & & \ddots & & \\ \hline & & & & & \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ & & & & & \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{array}\right)$$

se n è pari; se n è dispari compare un 1 in più nella posizione n, n.

SU(2) Vediamo in un minimo di dettaglio i gruppi SU(2) e SO(3). Cominciamo da SU(2). Una base per lo spazio delle matrici 2×2 è formata dall'identità $\mathbb{I}$ e dalle matrici hermitiane a traccia nulla

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che sono le ben note **matrici di Pauli**. Ogni matrice 2×2 si scrive dunque

$$A = a_0 \mathbb{I} + i \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

dove, ovviamente,

$$\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma} = b_1 \sigma_1 + b_2 \sigma_2 + b_3 \sigma_3.$$

Proprietà delle matrici di Pauli

Si noti che $\sigma_i^2 = \mathbb{I}$ e che

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$$

Da questo si trova che

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_j \sigma_i - \sigma_j &= 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\sigma_i \\ \sigma_j - \sigma_i\sigma_j\sigma_i &= 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_i\sigma_k \end{aligned}$$

cioè, sommando membro a membro

$$\sigma_i \sigma_k + \sigma_k \sigma_i = 2\delta_{ki}$$

Posto $\{A, B\} \equiv AB + BA$, l'**anticommutatore**, abbiamo che

$$\{\sigma_i, \sigma_k\} = 2\delta_{ki}$$

che si dice **algebra di Clifford**. Sommando le regole di commutazione e quelle di anticommutazione, otteniamo

$$\sigma_i \sigma_j = i\varepsilon_{ijk}\sigma_k + \delta_{ij}\mathbb{I}$$

Omeomorfismo di SU(2) e $\mathbb{S}^3$

Detto questo calcoliamo

$$\begin{aligned} (a_0\mathbb{I} + i\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\sigma})(b_0\mathbb{I} + i\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\sigma}) &= (a_0 + ia_k\sigma_k)(b_0 + ib_j\sigma_j) = a_0b_0 + ia_0b_j\sigma_j + ib_0a_k\sigma_k + \\ -a_kb_j\sigma_k\sigma_j &= a_0b_0\mathbb{I} + i(a_0\mathbf{b} + b_0\mathbf{a})\cdot\boldsymbol{\sigma} - i\varepsilon_{kjl}a_kb_j\sigma_l - \delta_{kj}a_kb_j = \\ &= (a_0b_0 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbb{I} + i(a_0\mathbf{b} + b_0\mathbf{a} - \mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\boldsymbol{\sigma} \end{aligned}$$

Ora, posto $A = a_0\mathbb{I} + i\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ abbiamo, se λ_1, λ_2 sono gli autovalori di A,

$$2\det A = 2\lambda_1\lambda_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - \left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2\right) = (\operatorname{Tr} A)^2 - \operatorname{Tr} A^2$$

Tuttavia,

$$\operatorname{Tr} A = 2a_0$$

mentre

$$\operatorname{Tr} A^2 = \operatorname{Tr}\left(a_0^2 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}\right)\mathbb{I} = 2\left(a_0^2 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}\right),$$

sicché

$$\det A = \frac{1}{2}\left(4a_0^2 - 2a_0^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}\right) = a_0^2 + \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$$

Se $A \in \mathrm{SU}(2)$ allora $a_0^2 + \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = 1$. Diciamo poi che

$$A^{-1} = a_0\mathbb{I} - i\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\sigma},$$

infatti,

$$AA^{-1} = \left(a_0^2 + \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}\right)\mathbb{I} + i(a_0\mathbf{a} - a_0\mathbf{a})\cdot\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{I}.$$

Non ci resta che imporre l'unitarietà:

$$A^{-1} = a_0\mathbb{I} - i\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\sigma} = \bar{a}_0\mathbb{I} - i\bar{\mathbf{a}}\cdot\boldsymbol{\sigma} = A^*$$

da cui

$$\begin{aligned} a_0 &= \bar{a}_0 \\ \mathbf{a} &= \bar{\mathbf{a}} \end{aligned}$$

Infine, se $A \in \mathrm{SU}(2)$ allora esistono $a_0 \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, tali che $a_0^2 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 1$, di modo che

$$A = a_0 \mathbb{I} + i\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

Viceversa se A è della forma detta allora appartiene a SU(2), sicché abbiamo provato la seguente

II.7 **Proposizione** *SU(2) è omeomorfo a $\mathbb{S}^3$, la sfera unitaria in $\mathbb{R}^4$, infatti*

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ a_0 \mathbb{I} + \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma} \, \middle| \, |(a_0, \mathbf{a})|_{\mathbb{R}^4} = 1 \right\}.$$

SO(3) Veniamo al gruppo delle rotazioni tridimensionali, SO(3). Partiamo da SU(2). Sia V lo spazio delle matrici hermitiane 2×2 a traccia nulla, come sappiamo questo spazio è $\mathbb{R}$-generato dalle tre matrici di Pauli. Perciò

$$V = \left\{ \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma} \, \middle| \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \right\},$$

di modo che $V \cong \mathbb{R}^3$. Chiamiamo I l'isomorfismo che collega $\mathbb{R}^3$ a V.
Su V si definisce il prodotto scalare reale

$$(A, B) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(AB)$$

che è esattamente il prodotto scalare euclideo $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, infatti

$$\begin{aligned} (A, B) &= \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(a_i b_j \sigma_i \sigma_j) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(a_i b_j i \varepsilon_{ijk} \sigma_k + a_i b_j \delta_{ij} \mathbb{I}) = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \mathbb{I}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}). \end{aligned}$$

Dunque,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (I\mathbf{a}, I\mathbf{b})$$

di modo che I è una isomorfismo isometrico di $\mathbb{R}^3$ su V.
Dato $U \in \mathrm{SU}(2)$, definiamo $S(U) \in \operatorname{Hom}(V)$ come

$$S(U) \equiv UAU^{-1}$$

Abbiamo

$$S(U)\sigma_i = U\sigma_i U^{-1} = \sum_{j=1}^{3} \lambda_{ji} \sigma_j$$

dove λ_{ji} è l'elemento j, i della matrice associata a $S(U)$ dalla base di V $\{\sigma_i\}$. Cioè

$$U\sigma_i U^{-1} = \sum_{j=1}^{3} S(U)_{ji} \sigma_j.$$

Poiché

$$\left(I^{-1} S(U) I\mathbf{a}\right)_k = \left(I^{-1} S(U) \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right)_k = I^{-1} \left(a_i S(U)_{ji} \sigma_j\right) = S(U)_{ki} a_i$$

cioè, se $M(U)$ è la matrice avente al posto j, i $S(U)_{ji}$, abbiamo

$$I^{-1} S(U) I = M(U).$$

Ora, $S(U)$ conserva il prodotto interno dato dalla traccia, perciò

$$\left(I^{-1} S(U) I\mathbf{a}, I^{-1} S(U) I\mathbf{b}\right) = (S(U) I\mathbf{a}, S(U) I\mathbf{b}) = (I\mathbf{a}, I\mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

da cui $M(U)$ conserva il prodotto scalare euclideo. Infine, abbiamo costruito un'applicazione lineare $M : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{O}(3)$. Ora, dal momento che $M(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$ e che SU(2) è connesso, abbiamo che l'immagine di M è connesa ed è quindi tutta contenuta nella componente connessa dell'identità di O(3), cioè SO(3).

II.8 **Proposizione** *SO(3) è isomorfo a SU(2) / $\{\mathbb{I}, -\mathbb{I}\}$. Come spazio topologico SO(3) è omeomorfo a $\mathbb{P}^3$, spazio proiettivo tridimensionale (l'insieme delle rette per l'origine in $\mathbb{R}^4$).*

Dimostrazione

L'applicazione M è suriettiva, dal momento che $M\left(e^{i\theta\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}}\right)$, $\mathbf{n}$ versore di $\mathbb{R}^3$, è una rotazione di angolo 2θ attorno all'asse $\mathbf{n}$. Dimostriamolo. Anzitutto calcoliamo $e^{-i\theta\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}}$, poiché

$$\begin{aligned}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 &= n_i\sigma_i n_j\sigma_j = \sum_i n_i^2\sigma_i^2 = \sum_i n_i^2\mathbb{I} = \mathbb{I}\\ (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})^3 &= (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned}(-i\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})^0 &= \mathbb{I}\\ (-i\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})^1 &= -i\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\\ (-i\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 &= -\mathbb{I}\\ (-i\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})^3 &= i\,(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\\ (-i\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})^4 &= \mathbb{I}\end{aligned}$$

cioè $(-i\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})$ è una unità immaginaria nello spazio delle matrici 2×2 complesse. Quindi

$$\begin{aligned}\exp(-i\theta\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\theta^{2k}\mathbb{I} - i\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\theta^{2k+1} =\\ &= \cos\theta\mathbb{I} - i\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sin\theta.\end{aligned}$$

dunque,

$$\exp(i\theta\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = \cos\theta\mathbb{I} + i\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sin\theta.$$

Allora

$$\begin{aligned}\exp(i\theta\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,\sigma_i\exp(-i\theta\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) &= (\cos\theta + i\sin\theta\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,\boldsymbol{\sigma}\,(\cos\theta - i\sin\theta\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) =\\ &= (\cos\theta + i\sin\theta n_j\sigma_j)\,\sigma_i\,(\cos\theta - i\sin\theta n_k\sigma_k) =\\ &= (\cos\theta\sigma_i + i\sin\theta n_j\sigma_j\sigma_i)(\cos\theta - i\sin\theta n_k\sigma_k) =\\ &= \cos^2\theta\sigma_i - i\cos\theta\sin\theta n_k\sigma_i\sigma_k + i\cos\theta\sin\theta n_j\sigma_i\sigma_j +\\ &\quad + \sin^2\theta n_j n_k\sigma_j\sigma_i\sigma_k\end{aligned}$$

dalle regole di anticommutazione

$$\sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij} - \sigma_i\sigma_j$$

perciò

$$\begin{aligned}\exp(i\theta\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,\sigma_i\exp(-i\theta\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) &= \cos^2\theta\sigma_i + i\cos\theta\sin\theta n_j\,[\sigma_i,\sigma_j] +\\ &\quad + \sin^2\theta n_j n_k 2\delta_{ij}\sigma_k - \sin^2\theta n_j n_k\sigma_i\sigma_k\sigma_k\\ &= \cos^2\theta\sigma_i + i\cos\theta\sin\theta n_j\,[\sigma_i,\sigma_j] + 2\sin^2\theta n_i n_k\sigma_k\\ &\quad - \sin^2\theta\sigma_i\\ &= \cos\theta\sigma_i - 2\varepsilon_{ijk}n_j\sigma_k\cos\theta\sin\theta + 2\sin^2\theta n_i n_k\sigma_k =\\ &= \cos(2\theta)\,\sigma_i - \sin(2\theta)\,(\mathbf{n}\times\boldsymbol{\sigma})_i + 2\sin^2\theta n_i\,(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) =\end{aligned}$$

d'altra parte

$$1 - 2\sin^2\theta = \cos(2\theta)$$

sicché

$$\exp(i\theta\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,\sigma_i\exp(-i\theta\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = \cos(2\theta)\,(\sigma_i - n_i\,(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})) - \sin(2\theta)\,(\mathbf{n}\times\boldsymbol{\sigma})_i + n_i\,(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}).$$

da cui

$$\begin{aligned}\exp(i\theta\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{v}\exp(-i\theta\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) &= \cos(2\theta)\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{v} - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})\,(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})) +\\ &\quad - \sin(2\theta)\,(\mathbf{n}\times\boldsymbol{\sigma})\cdot\mathbf{v} + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})\,(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\end{aligned}$$

di modo che

$$M(U)\,\mathbf{v} = \cos(2\theta)\,(\mathbf{v} - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{n}) - \sin(2\theta)\,(\mathbf{n}\times\mathbf{v}) + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{n}$$

che è esattamente la rotazione di angolo 2θ attorno a $\mathbf{n}$ di $\mathbf{v}$.

Ne viene che $\mathrm{SO}(3) \cong \mathrm{SU}(2)/\ker M$. Ma $M(U) = \mathbb{I}$ se e solo se $U\sigma_i U^{-1} = \sigma_i$ la qualcosa implica che U commuta con tutte le matrici e dunque è un multiplo dell'identità. Ma poiché le matrici di SU(2) hanno determinante 1 si conclude che $\ker M = \{\mathbb{I}, -\mathbb{I}\}$. Fissata una rotazione, essa può essere ottenuta da U oppure da U' tale che $U'U = -\mathbb{I}$, cioè $U' = -U$. In altre parole, siccome SU(2) è omeomorfo alla sfera tridimensionale, SO(3) è in corrispondenza biunivoca
(c.v.d.) con la sfera in cui i punti agli antipodi siano identificati, cioè con $\mathbb{P}^3$.

II.4 Omotopie e rivestimenti

In questa sezione vedremo succintamente alcuni fatti di base – alcuni dei quali senza dimostrazione, perché una trattazione completa richiederebbe almeno un altro libro – riguardanti omotopie e rivestimenti. L'argomento ha una grande rilevanza nella teoria dei gruppi di Lie, perché è collegato al problema del legame tra gruppi e algebre di Lie; inoltre, esso è molto importante nella fisica quantistica, si pensi al ruolo del rivestimento universale nel teorema di Bargmann.

II.4.1 Omotopie e spazi topologici semplicemente connessi

Sia X uno spazio topologico nel quale selezioniamo un **punto base** x_0. Denotiamo con C^n il cubo n-dimensionale di lato 1, $C^n \equiv [0,1]^n$. Sia $\partial C^n = \{\mathbf{t} \in C^n \,|t_i = 0 \text{ o } t_i = 1, \text{ per qualche } i\}$. Definiamo $\mathfrak{C}^n(X, x_0)$ l'insieme delle mappe continue da C^n su X tali che $f(\mathbf{t}) = x_0$ per ogni $\mathbf{t} \in \partial C^n$.
Nel caso, che poi ci interesserà compiutamente, in cui $n = 1$, abbiamo che $f \in \mathfrak{C}^1(X, x_0)$ è una curva chiusa in X avente come punto iniziale e finale x_0.
Sull'insieme $\mathfrak{C}^n$ introduciamo la seguente nozione di prodotto

$$(f * g)(\mathbf{t}) = \begin{cases} g(2t_1, t_2, \ldots, t_n), & 0 \le t_1 \le 1/2 \\ f(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n), & 1/2 \le t_1 \le 1 \end{cases}$$

(è banale notare che $\mathfrak{C}^n$ è chiuso sotto $*$).

II.17 **Definizione** *Due funzioni $f, g \in \mathfrak{C}^n(X, x_0)$ sono omotope se e solo se esiste una mappa continua $F : \mathfrak{C}^n(X, x_0) \times \to X$ talché*

(i) *$F(\mathbf{t}, \theta) = x_0$, per ogni $\theta \in [0,1]$, se $\mathbf{t} \in \partial C^n$;*

(ii) *$F(\mathbf{t}, 0) = f(\mathbf{t})$;*

(iii) *$F(\mathbf{t}, 1) = g(\mathbf{t})$.*

In parole povere, due funzioni sono omotope se possono essere deformate in modo continuo l'una nell'altra. Il concetto è familiare nel caso $n = 1$, dove $\mathfrak{C}^n(X, x_0)$ è l'insieme delle curve (o cammini) chiuse con punto iniziale e finale x_0.
Si vede subito che la relazione $f \equiv g$ se e solo se f e g sono omotope è una relazione di equivalenza. La riflessività si ottiene ponendo $F(\mathbf{t}, \theta) = f(\mathbf{t})$; se f e g sono omotope secondo F, g e f sono omotope secondo G data da

$$G(\mathbf{t}, \theta) = F(\mathbf{t}, 1 - \theta);$$

infine, se f e g sono omotope secondo F, g e h lo sono secondo G, allora f e h sono omotope secondo H data da

$$H(\mathbf{t}, \theta) = \begin{cases} F(\mathbf{t}, 2\theta), & 0 \le \theta \le 1/2 \\ G(\mathbf{t}, 2\theta - 1), & 1/2 \le \theta \le 1 \end{cases}.$$

Definiamo $\pi_n(X, x_0) = \mathfrak{C}^n(X, x_0)/\equiv$ l'insieme delle classi di equivalenza di $\equiv$. Su π_n si può istituire, attraverso $*$ un prodotto. Infatti, vale la seguente

II.9 **Proposizione** *Siano $f, g, h \in \mathfrak{C}^n(X, x_0)$ e definiamo $e(\mathbf{t}) \equiv x_0 \in \mathfrak{C}^n(X, x_0)$. Allora*

(i) *$f_1 \equiv f_2$ e $g_1 \equiv g_2$ implica $f_1 * g_1 \equiv f_2 * g_2$;*

(ii) *$(f * g) * h \equiv f * (g * h)$;*

(iii) *$e * f$ e $f * e$ sono omotope a f;*

(iv) *posto $f^{-1} = f(1-t_1, t_2, \dots, t_n)$, abbiamo che $f^{-1} * f$ e $f * f^{-1}$ sono omotope a e.*

Dimostrazione Vediamo (i). Le f_i siano omotope secondo F, mentre le g_i secondo G. L'omotopia che lega i prodotti $f_i * g_i$ è allora

$$H(\mathbf{t}, \theta) = \begin{cases} G(2t_1, \dots, t_n; \theta), & 0 \le t_1 \le 1/2 \\ F(2t_1 - 1, \dots, t_n; \theta), & 1/2 \le t_1 \le 1 \end{cases}.$$

Per la (ii) basta considerare l'omotopia

$$F(\mathbf{t}, \theta) = \begin{cases} h(4t_1/(\theta+1), t_2, \dots, t_n), & t_1 \le (\theta+1)/4 \\ g(4t_1 - \theta - 1, t_2, \dots, t_n), & (\theta+1)/4 \le t_1 \le (\theta+2)/4 \\ f((4t_1 - \theta - 2)/(2-\theta), t_2, \dots, t_n), & t_1 \ge (\theta+2)/4 \end{cases}.$$

Più interessante è mostrare la (iii). Abbiamo

$$(e * f)(\mathbf{t}) = \begin{cases} x_0, & 0 \le t_1 \le 1/2 \\ f(2t_1 - 1, \dots, t_n), & 1/2 \le t_1 \le 1 \end{cases}$$

che vogliamo sia omotopa a f. A questo scopo basta considerare

$$F(\mathbf{t}, \theta) = \begin{cases} x_0, & t_1 \le (1-\theta)/2 \\ f((2t_1 - 1 + \theta)/(1+\theta), \dots, t_n), & t_1 \ge (1-\theta)/2 \end{cases}.$$

In modo simile si ottiene pure che $f * e$ è omotopa a f.

Infine, (iv). Abbiamo

$$\left(f^{-1} * f\right)(\mathbf{t}) = \begin{cases} f(1 - 2t_1, \dots, t_n), & 0 \le t_1 \le 1/2 \\ f(2t_1 - 1, \dots, t_n), & 1/2 \le t_1 \le 1 \end{cases},$$

dunque, l'omotopia con e si realizza tramite

$$F(\mathbf{t}, \theta) = \begin{cases} f(2(\theta-1)t_1 + 1, t_2, \dots, t_n), & t_1 \le 1/2 \\ f(2(1-\theta)(t_1 - 1) + 1, \dots, t_n), & t_1 \ge 1/2 \end{cases}$$

(omotopia trovata deformando la parametrizzazione di $f^{-1} * f$, alzando di θ il valore in $t_1 = 1/2$). **(c.v.d.)**

La proposizione appena dimostrata consente di dotare π_n della struttura di gruppo: basta porre

$$[f][g] = [f * g]$$

che, per la proposizione, è ben definito, associativo, dotato di elemento neutro e inverse.

II.18 Definizione *$\pi_n(X, x_0)$ è detto n-esimo* **gruppo di omotopia** *di X. $\pi_1(X, x_0)$ si dice invece* **gruppo fondamentale**.

Quello che ci interesserà da vicino è il caso $n = 1$, cioè il gruppo fondamentale.

Gruppo fondamentale e spazi connessi per archi Se X è uno spazio topologico connesso per archi ha un unico gruppo fondamentale. Infatti, al variare di x_0, i gruppi $\pi_1(X, x_0)$ sono tutti isomorfi. Dimostriamolo. Siano x_0 e x_1 due punti in X e sia γ la curva chiusa che connette x_0 a x_1. Ebbene, l'isomorfismo cercato è realizzato dall'associazione da $\pi_1(X, x_0)$ in $\pi_1(X, x_1)$ data da

$$\gamma_*([c]) \equiv \left[\gamma c \gamma^{-1}\right].$$

Per avere la tesi, ci basta far vedere che $\left[\gamma c \gamma^{-1}\right] \in \pi_1(X, x_1)$, grazie alla proposizione precedente e al fatto che l'applicazione ha per inversa $\left(\gamma^{-1}\right)_*$. Abbiamo

$$\gamma c \gamma^{-1}(t) = \begin{cases} \gamma(1 - 2t), & t \le 1/2 \\ c(4t - 2), & 1/2 \le t \le 3/4 \\ \gamma(4t - 3), & t \ge 3/4 \end{cases},$$

che ha come punto iniziale $\gamma(1) = x_1$ e come punto finale $\gamma(1) = x_1$.

Allora si pone la seguente (ben nota)

II.19 Definizione *Uno spazio topologico si dice* **semplicemente connesso** *se è connesso per archi e se il suo gruppo fondamentale è banale, cioè ridotto alla sola identità.*

Vediamo cosa si può dire circa il gruppo fondamentale di un gruppo topologico.

II.10 Proposizione *Sia G un gruppo topologico. Allora $\pi_1(G,e)$ è abeliano e se $[\gamma_1]$ e $[\gamma_2]$ sono classi di equivalenza di curve in π_1, allora $\gamma_2 * \gamma_1$ è omotopo alla curva*

$$\gamma(t) = \gamma_2(t)\,\gamma_1(t).$$

Dimostrazione Siano γ_1 e $\gamma_2 \in \mathfrak{C}^1(G,e)$. Consideriamo la mappa $F : C^2 \to G$ data da

$$F(t,s) = \gamma_2(s)\,\gamma_1(t).$$

Allora $\gamma_2 * \gamma_1$ è l'immagine sotto F della curva

$$g_1(\theta) = \begin{cases} (2\theta, 0), & \theta \le 1/2 \\ (1, 2\theta - 1) & \theta \ge 1/2 \end{cases},$$

$\gamma_1 * \gamma_2$ è l'immagine sotto F di

$$g_2(\theta) = \begin{cases} (0, 2\theta), & \theta \le 1/2 \\ (2\theta - 1, 1) & \theta \ge 1/2 \end{cases},$$

infine, γ è l'immagine sotto F di

$$g_3(\theta) = (\theta, \theta).$$

Chiaramente g_1, g_2 e g_3 sono omotope. Perciò le $F \circ \theta_i$ sono omotope. Infine, $\gamma_1 * \gamma_2$, $\gamma_2 * \gamma_1$ e γ sono omotope. **(c.v.d.)**

Avvertenza L'ultima parte della presente sottosezione riguarda la nozione di semplice connessione in tutta la sua generalità e può essere omessa in prima lettura.

Mappe tra spazi topologici Dati due spazi topologici X e Y e data la funzione continua tra essi f, si definisce $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ come

$$f_*([c]) \equiv [f \circ c].$$

Mostriamo che è ben definita. Se c_1 e c_2 sono omotopi secondo F, allora $f \circ c_1$ e $f \circ c_2$ sono omotopi secondo $f \circ F$. Ne deriva che f_* è un omomorismo tra i gruppi fondamentali di (X, x_0) e $(Y, f(x_0))$. Si noti che, considerato un terzo spazio topologico, $(f \circ g)_* = f_* g_*$. Inoltre, se $Y = X$, $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$.

Omotopia tra mappe Veniamo ora a generalizzare i risultati e le definizioni date finora. Cominciamo con il concetto di omotopia tra mappe:

II.20 Definizione *Dati due spazi topologici X e Y e prese le mappe continue $f, g : X \to Y$, diciamo che f e g sono* **omotope** *se esiste l'applicazione continua $F : X \times [0,1] \to Y$ tale che, per ogni $x \in X$, valga*

$$\begin{aligned} F(x,0) &= f(x); \\ F(x,1) &= g(x). \end{aligned}$$

II.21 Definizione *Fissato $A \subset X$ si dice che le mappe continue $f, g : X \to Y$ sono A-omotope (od* **omotope relativamente ad** *A), se esiste una omotopia F tra f e g tale che, per ogni $a \in A$ e per ogni $\theta \in [0,1]$ risulta*

$$F(a,\theta) = f(a) = g(a).$$

In particolare, se f e g sono A-omotope, allora coincidono su A. Due cammini omotopi in Y sono allora ∂C^n-omotopi e $f|_{\partial C^n} = x_0$ e $X = C^n$.

II.20 Teorema *Se f e g sono omotope relativamente a $\{x_0\}$ allora $f_* = g_*$, ossia f e g inducono il medesimo omomorfismo tra i gruppi $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, y_0)$, dove $y_0 = f(x_0) = g(x_0)$.*

Dimostrazione Sia F l'omotopia tra f e g, mostriamo che per ogni $c \in \mathfrak{C}^1(X, x_0)$ risulta

$$f_*(c) \equiv g_*(c).$$

A questo scopo è sufficiente considerare l'omotopia

$$\tilde{F}(t,\theta) \equiv F(c(t),\theta),$$

infatti

$$\begin{aligned}\tilde{F}(t,0) &= F(c(t),0) = f(c(t));\\ \tilde{F}(t,1) &= F(c(t),1) = g(c(t));\\ \tilde{F}(0,\theta) &= \tilde{F}(1,\theta) = F(x_0,\theta) = y_0.\end{aligned}$$

(c.v.d.)

Ritrazioni e spazi contraibili Ancora qualche definizione molto tecnica circa le omotopie su spazi topologici

II.22 Definizione *Dato uno spazio topologico X, $A \subset X$ si dice* **retratto** *di X se esiste una appicazione continua $r : X \to A$ tale che $r(a) = a$ per ogni $a \in A$. r si dice* **ritrazione**.

Nel seguito saremo notevolmente interessati – per motivi che diverranno chiari nelle prossime sezioni – alle sfere n-dimensionali. Denotiamo la sfera n-dimensionale con il simbolo $\mathbb{S}^n$. Il circolo unidimensionale, immerso in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{C}$, si denota allora con $\mathbb{S}^1$.

II.1 Esempio $\mathbb{S}^1$ è retratto di $\mathbb{R}^{2\times}$, cioè del piano bucato. A questo scopo è sufficiente considerare l'applicazione continua

$$r(x,y) \equiv \frac{(x,y)}{x^2+y^2}.$$

■

Sia $r : X \to A$ una ritrazione e sia $i : A \to X$ l'inclusione. Fissato $a_0 \in A$ consideriamo

$$\begin{aligned}r_* &: \pi_1(X,a_0) \to \pi_1(A,a_0)\\ i_* &: \pi_1(A,a_0) \to \pi_1(X,a_0)\end{aligned}$$

Poiché $r \circ i$ è pari all'identità su A, cioè $r \circ i = \mathrm{id}_A$, si ha $r_* i_* = \mathrm{id}_{\pi_1(A,a_0)}$. Se ne deduce che i_* è iniettivo e r_* è suriettivo.

II.23 Definizione *Dato X spazio topologico e $A \subset X$, si dice che A è un* **retratto di deformazione** *per X se esistono una ritrazione $r : X \to A$ e una omotopia $F : X \times [0,1] \to X$ talché*

$$\begin{aligned}F(x,0) &= x;\\ F(x,1) &= r(x);\\ F(a,\theta) &= a.\end{aligned}$$

In altre parole, A è un retratto di deformazione di X se e solo se A è un retratto di X tramite una ritrazione A-omotopa all'identità di X.

II.21 Teorema *Se A è un retratto di deformazione di X, allora, per ogni $a \in A$, l'inclusione $i : X \to A$ induce un isomorfismo, i_*, tra $\pi_1(A,a)$ e $\pi_1(X,a)$.*

Dimostrazione Si tratta solo di vedere che i_* è una biiezione. Abbiamo già mostrato che è iniettiva essendo

$$r \circ i = \mathrm{id}_A \Longrightarrow r_* i_* = \mathrm{id}_{\pi_1(A,a_0)}.$$

Ora, la mappa $i \circ r$ è A-omotopa a id_X, perciò

$$i_* r_* = (\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,a)}$$

(c.v.d.) da cui i_* è pure suriettiva.

Il teorema appena dimostrato è molto utile perché fornisce un criterio per la semplice connessione.

II.24 **Definizione** *Uno spazio topologico si dice* **contraibile** *se esiste un punto $x_0 \in X$ talché $\{x_0\}$ è un retratto di deformazione di X.*

Grazie al teorema precedente, concludiamo

II.1 **Corollario** *Se uno spazio topologico è contraibile allora è semplicemente connesso.*

Dimostrazione Sia X lo spazio topologico in questione. Sia $x_0 \in X$ tale che $\{x_0\}$ è un retratto di deformazione di X secondo l'omotopia F. Mostriamo che X è connesso per archi. Dato $x \in X$, consideriamo la curva

$$\gamma(t) \equiv F(t, x)$$

allora γ è un cammino in X con punto iniziale $F(0, x) = x$ e punto finale $F(1, x) = x_0$.

Dal teorema precedente, abbiamo che $\pi_1(X, x_0)$ è isomorfo a $\pi_1(x_0, x_0)$ che è banale, perciò

(c.v.d.) si ha la tesi.

II.2 **Esempio** Un sottoinsieme K di $\mathbb{R}^n$ si dice stellato se esiste $k_0 \in K$ tale che per ogni $k \in K$ il segmento $\overline{k_0 k}$ è tutto contenuto in K. I sottoinsiemi stellati di $\mathbb{R}^n$ sono contraibili. Preso k_0, basta considerare

$$F(k, t) = (1 - t) k + t k_0.$$

In particolare, ogni stellato, perciò ogni convesso, in $\mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso. Infine, $\mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso. ▪

II.3 **Esempio** La sfera $\mathbb{S}^n$ è un retratto di deformazione di $\mathbb{R}^{n+1}$. Basta considerare la palla piena bucata

$$B^\times \equiv \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \,| |\mathbf{x}| \leq 1 \right\}$$

e definire l'omotopia $F : B^\times \times [0, 1] \to B^\times$

$$F(\mathbf{x}, t) = (1 - t) \mathbf{x} + t \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}.$$

▪

II.4.2 Rivestimento universale e spin

Introduzione Come detto in precedenza, il concetto di rivestimento universale pur essendo molto importante per noi è anche decisamente tecnico e viene propriamente studiato in **topologia algebrica**, per questo motivo noi non potremo addentrarci nella dimostrazione dei risultati che presenteremo (si vedano i libri di Massey e Warner citati nella bibliografia).

Per non confonderci con le notazioni, se $f : X \to Y$, indicheremo l'applicazione

$$\begin{array}{rcl} \pi_n(X, x_0) & \to & \pi_n(Y, f(x_0)) \\ [\gamma] & \mapsto & [f \circ \gamma] \end{array}$$

con $\pi_n(f)$ anziché con f_*, riservando a quest'ultimo simbolo il suo significato di derivata. Cominciamo con un risultato abbastanza semplice

II.22 **Teorema** *Sia G un gruppo semplicemente connesso e sia H un suo sottogruppo normale discreto.*

(i) *Se $Z(G)$ è il centro di G (cioè l'insieme degli h tali che $gh = hg$ per ogni g), abbiamo $H \subset Z(G)$ e, in particolare, H è abeliano. Viceversa, ogni sottogruppo discreto di $Z(G)$ è normale.*

(ii) *Sia $p : G \to G/H$ la proiezione canonica. Allora $Z(G/H) = p(Z(G))$ e, in particolare, $Z(G/H) \cong Z(G)/H$.*

Dimostrazione (i) Sia H un sottogruppo normale discreto di G. Prendiamo $X \in \mathfrak{g}$, $h \in H$ e poniamo

$$f(t) \equiv e^{tX} h e^{-tX}.$$

La funzione $f(t)$ è continua e $f(0) = h \in H$. Poiché H è normale, abbiamo $f(t) \in H$ per ogni t. Tuttavia, H è un insieme discreto, se ne conclude che f è costante, cioè, per ogni t, $f(t) = h$. In particolare,

$$e^X h = h e^X.$$

Ora, visto che G è semplicemente connesso, è connesso per archi, sicché ogni elemento $g \in G$ è un prodotto di termini del tipo e^X. Si conclude che per ogni $g \in G$ vale

$$gh = hg,$$

cioè $H \subset Z(G)$. Il viceversa è ovvio.

(ii) Sia $p(g) \in Z(G/H)$. Fissiamo $X \in \mathfrak{g}$. Allora

$$p\left(e^{tX} g e^{-tX} g^{-1}\right) = [e],$$

infatti,

$$\begin{aligned} p\left(e^{tX} g e^{-tX} g^{-1}\right) &= p\left(e^{tX}\right) p(g)\, p\left(e^{-tX}\right) p\left(g^{-1}\right) = p\left(e^{tX}\right) p(g)\, p\left(g^{-1}\right) p\left(e^{-tX}\right) = \\ &= p\left(e^{tX} g g^{-1} e^{-tX}\right) = p(e) = [e]. \end{aligned}$$

D'altra parte, $p^{-1}([e])$ è discreto. Infatti, $p(x) \in [e]$ se e solo se

$$xH = H$$

se e solo se $x \in H$, cioè $p^{-1}([e]) = H$.

D'altra parte, poiché $t \mapsto e^{tX} g e^{-tX} g^{-1}$ è una mappa continua, si conclude

$$e^{tX} g e^{-tX} g^{-1} = e.$$

In particolare

$$e^X g = g e^X,$$

ancora, per la connessione per archi di G, $g \in Z(G)$. Infine, $Z(G/H) \subset p(Z(G))$. Naturalmente vale pure il viceversa; in conclusione $Z(G/H) = p(Z(G))$. **(c.v.d.)**

Non troppo complicato e sicuramente molto più bello il seguente

II.23 Teorema *Sia G un gruppo di Lie connesso per archi e sia H un suo sottogruppo normale discreto. Allora l'algebra di Lie di G/H è isomorfa tramite p_* a quella di G. Inoltre, esiste un omomorfismo suriettivo $\tilde{M} : \pi_1(G/H) \to H$ tale che*

$$\ker\left(\tilde{M}\right) = R(\pi_1(p))$$

In particolare, se G è semplicemente connesso, $\tilde{M}$ è un isomorfismo tra $\pi_1(G/H)$ e H.

Dimostrazione Dal momento che H è discreto esiste un intorno N' di e disgiunto da $H\backslash\{e\}$. Poiché l'applicazione $x^{-1}y$ è continua e mappa (e,e) in e, esiste un intorno N di e talché $x^{-1}y \in N'$ per ogni $x, y \in N$. Per ogni $x, y \in N$ si ha $x^{-1}y \notin H$, cioè $xH \neq yH$. Dunque, l'applicazione p è un diffeomorfismo da N in un intorno di $[e]$. Questo conclude la prima parte dell'asserto.

Sia γ una curva da C^1 in G/H di modo che $R(\gamma) \subset p(N)$ e $\gamma(0) = [e]$, allora esiste un'unica curva $\tilde{\gamma}$ da C^1 in G tale che $\tilde{\gamma}(0) = e$ e $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ ($\tilde{\gamma}$ si dice sollevamento di γ).

Prendiamo ora una qualsiasi curva γ da C^1 in G/H con $\gamma(0) = [e]$. Poiché γ è continua e C^1 compatto, possiamo trovare i punti $0 = t_0 < t_1 < \ldots t_n = 1$ in C^1 di modo che

$$\begin{aligned} \gamma(t_j) &= [g_j] \\ \gamma([t_{j-1}, t_j]) &\subset p(g_j N). \end{aligned}$$

In questo modo possiamo costruire su ciascun intervallino il sollevamento di γ fino ad ottenere il sollevamento globale $\tilde{\gamma}$ di γ. In altri termini, per ogni curva $\gamma : C^1 \to G/H$ con $\gamma(0) = [e]$ esiste un'unica curva $\tilde{\gamma} : C^1 \to G$ con $\tilde{\gamma}(0) = e$ di modo che $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$.

In particolare, se $\gamma \in \mathfrak{C}^1(G/H)$, allora $\tilde{\gamma}(1) \in p^{-1}([e]) = H$. Questo definisce in modo naturale una mappa $M : \mathfrak{C}^1(G/H) \to H$ data da

$$\gamma \mapsto \tilde{\gamma}(1).$$

Notiamo che $M(\gamma * \gamma') = M(\gamma)\, M(\gamma')$ visto che

$$\widetilde{\gamma * \gamma'}(t) = \begin{cases} \tilde{\gamma}'(2t), & t < 1/2 \\ \tilde{\gamma}'(1)\,\tilde{\gamma}(2t-1), & t \geq 1/2 \end{cases}.$$

Procedendo esattamente come per le curve, data una omotopia $\Gamma : C^2 \to G/H$ tra γ e γ' si determina un'unica mappa continua $\tilde{\Gamma} : C^2 \to G$ di modo che $\tilde{\Gamma}(0,0) = e$ e $\Gamma = p \circ \tilde{\Gamma}$. Vediamo quali sono le caratteristiche di $\tilde{\Gamma}$. Abbiamo

$$\begin{aligned} p \circ \tilde{\Gamma}(0,\theta) &= \Gamma(0,\theta) = [e] \\ p \circ \tilde{\Gamma}(1,\theta) &= \Gamma(1,\theta) = [e] \end{aligned}$$

da cui $\tilde{\Gamma}(0,\theta) \in H$ e $\tilde{\Gamma}(1,\theta) \in H$, ma essendo $\tilde{\Gamma}$ continua e H discreto, si conclude che $\tilde{\Gamma}(0,\theta) = \tilde{\Gamma}(0,0) = e$ e che $\tilde{\Gamma}(1,\theta)$ è costante.

Se consideriamo le curve $t \mapsto p \circ \tilde{\Gamma}(t,0)$ e $t \mapsto p \circ \tilde{\Gamma}(t,1)$, abbiamo che la prima coincide con $\tilde{\gamma}$ e la seconda con $\tilde{\gamma}'$ visto che queste sono le uniche tali che $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$, $\tilde{\gamma}(0) = e$, e $\gamma' = p \circ \tilde{\gamma}$, $\tilde{\gamma}'(0) = e$. Infatti,

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(0) &= \tilde{\Gamma}(0,0) = e \\ \tilde{\gamma}'(0) &= \tilde{\Gamma}(0,1) = e \end{aligned}$$

Notiamo che $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\Gamma}(1,0) = \tilde{\Gamma}(1,1) = \tilde{\gamma}'(1)$. Questo significa che se γ e γ' sono omotope, lo sono pure $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{\gamma}'$. Ne deriva che è ben definito l'omomorfismo $\tilde{M}$ tra $\pi_1(G/H)$ e H talché

$$\tilde{M}([\gamma]) = M(\gamma) = \tilde{\gamma}(1).$$

Vogliamo dimostrare che si tratta di una mappa suriettiva se si suppone G connesso per archi, mentre si tratta di una biiezione se si aggiunge l'ipotesi che G sia semplicemente connesso.

Dato $h \in H$, troviamo $\tilde{\gamma} : C^1 \to G$ di modo che $\tilde{\gamma}(0) = e$ e $\tilde{\gamma}(1) = h$. Allora $\gamma = p \circ \tilde{\gamma} \in \mathfrak{C}^1(G/H)$ e $M(\gamma) = h$, da cui $\tilde{M}$ è suriettiva.

Andiamo a calcolare il nucleo di $\tilde{M}$. $\tilde{M}([\gamma]) = e$ se e solo se $\tilde{\gamma}(1) = e$, cioè se e solo se $\tilde{\gamma} \in \mathfrak{C}^1(G)$. Ne viene $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ con $\tilde{\gamma} \in \mathfrak{C}^1(G)$, infine, $[\gamma] = \pi_1(p)[\tilde{\gamma}]$, come si voleva. Se G è semplicemente connesso il dominio di $\pi_1(p)$, cioè $\pi_1(G)$ è banale e così la sua immagine. **(c.v.d.)**

Un corollario immediato del teorema dimostrato è il seguente

II.24 Teorema *Il gruppo $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ ha gruppo fondamentale isomorfo a $\mathbb{Z}$.*

Noi non lo dimostreremo, ma il teorema di sopra ammette la seguente generalizzazione

II.11 Proposizione *Se $\mathbb{S}^n$ è la sfera n-dimensionale, essa è connessa per archi e ha gruppi di omotopia $\pi_j(\mathbb{S}^n)$ banali per $1 \leq j < n$ e*

$$\pi_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}.$$

Dimostrazione Abbiamo visto il caso $n = 1$. Omettiamo il resto. **(c.v.d.)**

Il teorema II.23 ammette una sorta di inverso il quale consente di definire il rivestimento universale di un gruppo. Come più volte detto la dimostrazione di tale teorema è troppo tecnica per essere affrontata in queste pagine.

II.25 Teorema *Sia G un gruppo di Lie connesso per archi. Allora esistono un gruppo di Lie $\tilde{G}$ semplicemente connesso, detto* **rivestimento universale** *di G, e un suo sottogruppo normale discreto $\tilde{H}$ di modo che $\tilde{H} \cong \pi_1(G)$ e $G \cong \tilde{G}/\tilde{H}$. $\tilde{G}$ è unico a meno di isomorfismi.*

Per il teorema II.23, l'algebra di Lie di $\tilde{G}$ è isomorfa a quella di $\tilde{G}/\tilde{H}$, ma $\tilde{G}/\tilde{H}$ è isomorfo a G, perciò, in definitiva, l'algebra di Lie di $\tilde{G}$ è isomorfa a quella di G. Anche questo asserto può essere invertito

II.26 **Teorema** *Siano $\tilde{G}$ e G due gruppi connessi per archi, sia $\tilde{G}$ semplicemente connesso e sia φ un omomorfismo liscio tra $\tilde{G}$ e G di modo che $\varphi_*(e)$ sia un isomorfismo. Allora $\tilde{G}$ è il rivestimento universale di G.*

Rapporto tra algebre e gruppi di Lie Un altro risultato che può essere ricavato è il seguente: dato un gruppo di Lie G e data una sottoalgebra di Lie $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ esiste un sottogruppo di Lie $H \subset G$ talché $\mathfrak{h}$ sia l'algebra di Lie di H. Esiste poi un celebre teorema dovuto ad Ado che afferma che ogni algebra di Lie $\mathfrak{h}$ n-dimensionale è isomorfa a una sottoalgebra di $\mathfrak{gl}(n)$. Ne viene che l'algebra di Lie assegnata è isomorfa all'algebra di Lie di un gruppo di Lie di matrici. C'è di più, passando al rivestimento del gruppo di matrici così ottenuto, troviamo un gruppo di Lie H semplicemente connesso di cui $\mathfrak{h}$ è l'algebra di Lie. In definitiva, abbiamo

II.27 **Teorema** *Data un'algebra di Lie esiste un gruppo di Lie semplicemente connesso la cui algebra di Lie è isomorfa all'algebra data.*

Ecco che il teorema dimostrato consente di chiarire definitivamente il rapporto tra algebre e gruppi di Lie.

II.4.3 Gruppi fondamentali dei gruppi classici e spin

Molto in breve vediamo che si può dire dei gruppi fondamentali dei gruppi classici. Il problema si risolve facilmente facendo uso un teorema di topologia algebrica avanzata che noi enunceremo soltanto

II.28 **Teorema** *Sia G un gruppo di Lie e H un suo sottogruppo chiuso. Se $\pi_2(G/H) = \pi_1(G/H) = 0$, allora $\pi_1(G)$ è isomorfo a $\pi_1(H)$ sotto la mappa di inclusione.*

Grazie a questo risultato e alla conoscenza dei gruppi di omotopia delle sfere, concludiamo

II.29 **Teorema** $\pi_1(\mathrm{SU}(n)) = 0$ *per* $n \geq 2$. $\pi_1(\mathrm{SO}(n)) = \mathbb{Z}_2$ *per* $n \geq 3$.

Dimostrazione SU(2) è topologicamente $\mathbb{S}^3$ perciò è semplicemente connesso. SU(n) agisce su $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ come un insieme di matrici che preserva la norma, sicché la sfera $\mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ viene preservata. Poiché $\mathbb{S}^{2n-1}$ è l'orbita del punto $\mathbf{e}_1 \equiv (1, 0, \ldots, 0)$, dal teorema fondamentale dei G-spazi,

$$\mathrm{SU}(n) / \{g \in \mathrm{SU}(n) \,|g\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1\} \cong \mathbb{S}^{2n-1}$$

Tuttavia, il gruppo di isotropia scritto coincide con l'insieme delle matrici della forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$$

con $U \in \mathrm{SU}(n-1)$. Si conclude perciò

$$\mathrm{SU}(n) / \mathrm{SU}(n-1) \cong \mathbb{S}^{2n-1}.$$

Dunque, dal risultato di sopra sui gruppi di omotopia delle sfere otteniamo che per $n \geq 3$ $\pi_1(\mathrm{SU}(n)) = \pi_1(\mathrm{SU}(n-1))$ e $\pi_1(\mathrm{SU}(2))$ banale. Infine, tutti i gruppi SU(n) sono semplicemente connessi.

Similmente, otteniamo

$$\mathrm{SO}(n) / \mathrm{SO}(n-1) \cong \mathbb{S}^{n-1},$$

per $n \geq 4$ abbiamo

$$\pi_1(\mathrm{SO}(n)) = \pi_1(\mathrm{SO}(n-1)).$$

Infine, tutti i gruppi SO(n) hanno gruppo fondamentale isomorfo a quello di SO(3). Ma SO(3) $= \mathrm{SU}(2) / \mathbb{Z}_2$, perciò, dal teorema II.23, $\pi_1(\mathrm{SO}(3)) = \mathbb{Z}_2$. **(c.v.d.)**

Poiché SU(2) è semplicemente connesso e $\mathrm{SO}(3) = \mathrm{SU}(2) / \{-\mathbb{I}, \mathbb{I}\} = \mathrm{SU}(2) / \mathbb{Z}_2$ si conclude che il rivestimento universale di SO(3) è SU(2).
In generale, per $n \geq 3$ chiamiamo Spin(n), n-esimo gruppo di spin, il rivestimento universale di SO(n). Si ha, allora, subito che $\mathrm{Spin}(3) = \mathrm{SU}(2)$.

Capitolo III

Teoria delle rappresentazioni

In questo capitolo discutiamo finalmente l'oggetto principale della nostra trattazione: la teoria delle rappresentazioni dei gruppi. Nella prima sezione vedremo alcuni fatti generali, poi ci concentreremo sul caso finito, infine, sui gruppi di Lie.

III.1 Teoria astratta delle rappresentazioni

III.1.1 Rappresentazioni e rappresentazioni unitarie

Sia V uno spazio vettoriale complesso. Come al solito indicheremo con $\operatorname{Hom} V$ lo spazio delle applicazioni lineari da V in sé. Il sottoinsieme $\operatorname{Aut} V$ di $\operatorname{Hom} V$ formato dalle applicazioni lineari invertibili e continue su V, che denoteremo anche $\mathrm{GL}(V)$, è un gruppo lineare sotto l'operazione di composizione. Nel caso V sia finito-dimensionale la richiesta di continuità è automaticamente soddisfatta.
Nel caso infinito-dimensionale intenderemo che V sia uno spazio di Hilbert separabile (com'è automaticamente V nel caso finito).
Poiché $\mathrm{GL}(V)$ è un gruppo concreto (se V è finito-dimensionale, si tratta di un gruppo di matrici) risulta naturale e interessante considerare la seguente

III.1 **Definizione** *Una* **rappresentazione** *del gruppo G è un omomorfismo di gruppo da G in $GL(V)$, per qualche spazio vettoriale fissato V. La dimensione di V si dice* **grado** *(o, ancora, dimensione) della rappresentazione. V si dice* **base** *della rappresentazione.*

Rappresentazioni unitarie La teoria delle rappresentazioni si occupa delle classificazione degli omomorfismi detti. Un primo passo importante è quello di restringersi alle rappresentazioni unitarie. Se su V consideriamo definito un prodotto scalare $(\cdot,\cdot)$ (rispetto al quale V sia uno spazio di Hilbert), una rappresentazione unitaria sarà un omomorfismo tra G e il sottogruppo $\mathrm{U}(V)$ di $\mathrm{GL}(V)$ formato dalle trasformazioni unitarie di V in sé. Ricordiamo che un'applicazione lineare si dice unitaria se è biiettiva e conserva il prodotto scalare, cioè se e solo se

$$UU^* = U^*U = \mathbb{I}.$$

Nel caso finito-dimensionale affinché U sia unitario è sufficiente che conservi il prodotto scalare, o, equivalentemente, la norma. In tal caso, infatti, U è iniettivo e perciò biiettivo.
Per i gruppi finiti la riduzione alle rappresentazioni unitarie finito-dimensionali è automatica come mostra il seguente

III.1 **Teorema** *Sia $U : G \to \mathrm{GL}(V)$ una rappresentazione finito-dimensionale di un gruppo finito G. Allora su V è possibile definire un prodotto scalare $(\cdot,\cdot)$ di modo che ogni $U(g)$ sia un'applicazione unitaria.*

Dimostrazione Sia $(\cdot,\cdot)_0$ un prodotto scalare qualsiasi su V. Definiamo su $V \times V$ l'applicazione

$$(v,w) \equiv \frac{1}{\mathrm{o}(G)} \sum_{g\in G} (U(g)\, v, U(g)\, w)_0 \,.$$

Si vede subito che $(\cdot,\cdot)$ è lineare nella seconda variabile e che

$$\overline{(v,w)} = \frac{1}{\mathrm{o}(G)} \sum_{g\in G} \left(U(g)\,w, U(g)\,v\right)_0 = (w,v)\,.$$

Inoltre,

$$(v,v) = \frac{1}{\mathrm{o}(G)} \sum_{g\in G} \left(U(g)\,v, U(g)\,v\right)_0 \geq 0,$$

Se $(v,v)=0$, allora, per ogni g, $U(g)\,v=0$, ma essendo $U(g)$ invertibile, questo comporta $v=0$. Infine, $(\cdot,\cdot)$ è un prodotto scalare su V.

Mostriamo che per ogni $h\in G$, $U(h)$ è unitario:

$$\begin{aligned}(U(h)\,v, U(h)\,w) &= \frac{1}{\mathrm{o}(G)} \sum_{g\in G} \left(U(g)\,U(h)\,v, U(g)\,U(h)\,w\right)_0 = \\ &= \frac{1}{\mathrm{o}(G)} \sum_{g\in G} \left(U(gh)\,v, U(gh)\,w\right)_0\end{aligned}$$

poiché $g\mapsto gh$ è una biiezione, mentre g descrive G, gh descrive G di modo che

$$\begin{aligned}(U(h)\,v, U(h)\,w) &= \frac{1}{\mathrm{o}(G)} \sum_{gh\in G} \left(U(gh)\,v, U(gh)\,w\right)_0 = \\ &= \frac{1}{\mathrm{o}(G)} \sum_{g\in G} \left(U(g)\,v, U(g)\,w\right)_0 = (v,w)\,.\end{aligned}$$

(c.v.d.)

Un teorema del tutto analogo (assumendo un filo di regolarità) vale nel caso delle rappresentazioni finito-dimensionali di un gruppo di Lie compatto (non a caso un gruppo finito è in modo naturale anche un gruppo di Lie compatto). Chiaramente, al posto della somma dovremo usare l'integrazione nella misura di Haar μ che possiamo scegliere normalizzata a 1 visto che il gruppo è compatto.

III.2 **Teorema** *Sia G un gruppo di Lie compatto. Sia V uno spazio vettoriale finito-dimensionale e sia $U : G \to \mathrm{GL}(V)$ un omomorfismo di gruppo da G in $GL(V)$ debolmente limitato e misurabile (nel senso che la funzione $g\mapsto \ell(U(g)\,v)$ sia misurabile e limitata per ogni fissato $v\in V$ e $\ell\in V^*$). Allora esiste un prodotto scalare su V di modo che per ogni $g\in G$, $U(g)$ sia un operatore unitario su V, i.e., $U(g)\in \mathrm{U}(V)$.*

Dimostrazione Come nel caso finito dimensionale, prendiamo un prodotto scalare $(\cdot,\cdot)_0$ su V. Sia $\{e_i\}_{i\in J_n}$ una base ortonormale di V rispetto al detto prodotto scalare. Definiamo

$$(v,w) \equiv \int \left(U(g)\,v, U(g)\,w\right)_0\, d\mu(g)$$

dove, come anticipato, μ è la misura di Haar su G. Cominciamo con il vedere che $(\cdot,\cdot)$ è ben definito. Abbiamo

$$\left(U(g)\,v, U(g)\,w\right)_0 = \sum_{i=1}^{n} \left(U(g)\,v, e_i\right)_0 \left(e_i, U(g)\,w\right)_0$$

poiché, per definizione, ciascuna $\left(U(g)\,v, e_i\right)_0$ e $\left(e_i, U(g)\,w\right)_0$ è sommabile, concludiamo che pure $\left(U(g)\,v, U(g)\,w\right)_0$ è sommabile.

Poiché la misura di Haar è reale, l'integrale è lineare e $\left(U(g)\,v, U(g)\,v\right)_0 > 0$ per ogni g se $v\neq 0$, concludiamo che $(\cdot,\cdot)$ è un prodotto scalare su V.

Infine, posto $f(g) \equiv \left(U(g)\,v, U(g)\,w\right)_0$ abbiamo

$$(U(h)\,v, U(h)\,w) \equiv \int f(gh)\; d\mu(g) = \int f(g)\; d\mu(g) = (v,w)$$

(c.v.d.) poiché la misura di Haar è biinvariante.

III.3 **Teorema** *Sia G un gruppo di Lie compatto e sia $g \mapsto U(g)$ un omomorfismo di gruppo tra G e $U(V)$ per qualche V, spazio di Hilbert separabile. Se tale omomorfismo è misurabile (i.e., $g \mapsto \ell(U(g)\psi)$è misurabile per ogni $\psi \in V$ e $\ell \in V^*$), allora è fortemente continuo (i.e., per ogni $\psi \in V$, $g \mapsto U(g)\psi$ è continua).*

Dimostrazione Anzitutto mostriamo che si ha continuità debole se e solo se si ha continuità debole in e. Infatti, sia U continuo in e, allora

$$\begin{aligned}
\lim_{g\to g_0}(U(g)\psi,\zeta) &= \lim_{g\to g_0}\left(U(g_0)U\left(g_0^{-1}g\right)\psi,\zeta\right) = \\
&= \lim_{g\to g_0}\left(U\left(g_0^{-1}g\right)\psi, U\left(g_0^{-1}\right)\zeta\right) = \\
&= \lim_{h\to e}\left(U(h)\psi, U\left(g_0^{-1}\right)\zeta\right) = \left(\psi, U\left(g_0^{-1}\right)\zeta\right) = \\
&= (U(g_0)\psi,\zeta).
\end{aligned}$$

Un discorso analogo vale per la continuità forte,

$$\begin{aligned}
\lim_{g\to g_0}U(g)\psi &= \lim_{g\to g_0}U\left(gg_0^{-1}\right)U(g_0)\psi = \lim_{g\to g_0}U\left(gg_0^{-1}\right)U(g_0)\psi = \\
&= \lim_{h\to e}U(h)U(g_0)\psi = U(g_0)\psi.
\end{aligned}$$

D'altra parte, la continuità debole implica quella forte: poiché

$$\|U(g)\psi-\psi\|^2 = (U(g)\psi-\psi, U(g)\psi-\psi) = 2\|\psi\|^2 - (U(g)\psi,\psi) - (\psi, U(g)\psi)$$

passando al limite per $g \to e$,

$$\lim_{g\to e}\|U(g)\psi-\psi\|^2 = 2\|\psi\|^2 - 2\|\psi\|^2 = 0.$$

Sia $\psi \in V$. Per ogni $\zeta \in V$, $(U(g)\psi,\zeta)$ è una funzione misurabile e, se f è una funzione continua su G,

$$\zeta \mapsto \int f(g)(U(g)\psi,\zeta)\, d\mu(g)$$

è un funzionale lineare limitato di norma inferiore a $\sup|f|\,\|\psi\|$, per ogni $h \in G$. Perciò dal teorema di Riesz, esiste $\psi_f \in V$ tale che, per ogni $\zeta \in V$,

$$(\psi_f,\zeta) = \int f(g)(U(g)\psi,\zeta)\, d\mu(g)$$

Ora,

$$\begin{aligned}
\left(U(x)\psi_f,\zeta\right) &= \left(\psi_f, U\left(x^{-1}\right)\zeta\right) = \int f(g)\left(U(g)\psi, U\left(x^{-1}\right)\zeta\right) d\mu(g) = \\
&= \int f(g)(U(xg)\psi,\zeta)\, d\mu(g) = \int f\left(x^{-1}xg\right)(U(xg)\psi,\zeta)\, d\mu(g) = \\
&= \int f\left(x^{-1}g\right)(U(g)\psi,\zeta)\, d\mu(g)
\end{aligned}$$

Dunque, per $x \to e$, $\left(U(x)\psi_f,\zeta\right) \to \left(\psi_f,\zeta\right)$ di modo che U è debolmente continuo in e sull'insieme dei vettori del tipo ψ_f. Mostriamo che tale insieme è denso. Sia φ ortogonale a ogni ψ_f, allora

$$0 = \left(\psi_f,\varphi\right) = \int f(g)(U(g)\psi,\varphi)\, d\mu(g)$$

Fissato ψ abbiamo che $g \mapsto (U(g)\psi,\varphi)$ ha da essere quasi ovunque nulla. In particolare, fissata una base ortonormale $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in V, troviamo che $(U(g)e_n,\varphi)$ è nulla su G eccetto un insieme S_n di misura nulla. Preso $g \in G\setminus\bigcup S_n$ (l'unione, essendo numerabile, ha misura nulla) abbiamo, per ogni n,

$$(U(g)e_n,\varphi) = 0$$

allora, $U^*(g)\varphi = 0$, da cui $\varphi = 0$.

(c.v.d.) Dunque $U(g)$ è debolmente continuo su un denso, perciò sull'intero V.

Per un gruppo compatto di Lie possiamo allora riformulare, senza alcuna perdita di generalità (assunta giusto un poco di regolarità), la definizione di rappresentazione

III.2 **Definizione** *Sia G un gruppo compatto di Lie. Una* **rappresentazione** *di G è un omomorfismo continuo di G sul gruppo degli operatori unitari di uno spazio di Hilbert.*

Come dimostra il teorema precedente, la richiesta di continuità equivale a quella di debole misurabilità. Se G è un gruppo finito, possiamo naturalmente omettere il requisito della continuità.

Rappresentazioni equivalenti ed irriducibili

Veniamo adesso ad alcuni fatti molto importanti nella classificazione delle rappresentazioni

III.3 **Definizione** *Siano $U : G \to \mathrm{U}(X)$ e $V : G \to \mathrm{U}(Y)$ due rappresentazioni di G. Diciamo che esse sono* **equivalenti** *se esiste un isomorfismo isometrico $T : X \to Y$ tale che, per ogni $g \in G$, risulti*

$$V(g) = TU(g)T^{-1}.$$

La richiesta di isometria è soddisfatta automaticamente:

III.4 **Teorema** *Siano U e V due rappresentazioni unitarie di G sugli spazi di Hilbert X e Y. Supponiamo esista poi una mappa lineare biunivoca continua $T : X \to Y$ di modo che, per ogni $g \in G$,*

$$U(g) = T^{-1}V(g)T,$$

allora esiste una isometria $W : X \to Y$ di modo che, per ogni $g \in G$,

$$U(g) = W^{-1}V(g)W$$

Dimostrazione Passando agli aggiunti di ambo i membri della prima eguaglianza troviamo

$$U^*(g) = T^*V^*(g)(T^*)^{-1}$$

da cui, sostituendo g^{-1} con g,

$$U(g) = T^*V(g)(T^*)^{-1}.$$

D'altra parte

$$V(g) = TU(g)T^{-1}$$

sicché

$$U(g) = (T^*T)U(g)(T^*T)^{-1}$$

di modo che

$$(T^*T) = U^{-1}(g)(T^*T)U(g).$$

Consideriamo l'operatore $U^{-1}(g)|T|U(g)$, abbiamo

$$\left(U^{-1}(g)|T|U(g)\right)^2 = U^{-1}(g)T^*TU(g) = T^*T$$

e, per unicità della radice quadrata,

$$U^{-1}(g)|T|U(g) = |T|.$$

Infine, se $T = W|T|$, decomposizione polare di T, abbiamo che W è un isomorfismo isometrico di X in Y visto che $\ker W = \ker T = \{0\}$ e $R(W) = R(T)^a = Y$. Poiché W è biunivoco, $|T|$ è invertibile e risulta $W = T|T|^{-1}$, perciò

$$\begin{aligned} WU(g)W^{-1} &= T|T|^{-1}U(g)|T|T^{-1} = T|T|^{-1}U(g)U^{-1}(g)|T|U(g)T^{-1} = \\ &= T|T|^{-1}|T|U(g)T^{-1} = TU(g)T^{-1} = V(g). \end{aligned}$$

(c.v.d.)

Compattezza e unitarietà. Gruppo di Lorentz Se torniamo alla definizione generale di rappresentazione in dimensione finita, aggiungendo la richiesta di continuità (che, in dimensione finita, possiamo assumere in norma), i risultati ottenuti dicono sostanzialmente che ogni rappresentazione di un gruppo compatto è equivalente (nel senso che esiste un isomorfismo anche non isometrico) a una rappresentazione unitaria. Si noti che se il gruppo è illimitato, una sua rappresentazione fedele, cioè iniettiva, non può essere unitaria, dal momento che ogni sottogruppo di Lie di $\mathrm{U}(V)$ (per V finito-dimensionale) è uno spazio compatto, come abbiamo visto a suo tempo. In particolare, siccome il gruppo di Lorentz è non compatto, avrà tutte le rappresentazioni fedeli in dimensione finita non unitarie. Quanto detto si basa sul fatto che non può esistere una funzione f iniettiva continua da uno spazio illimitato a uno spazio compatto. Si pensi infatti a un ricoprimento di palle di raggio dato sull'immagine Y, $\{B(y,\varepsilon)\}$. Per ogni x nel dominio X, troviamo δ_x di modo che $f(B(x,\delta_x)) \subset B(f(x),\varepsilon)$. Passando a un sottoricoprimento finito $\{B(f(x_i),\varepsilon)\}$ otteniamo su Y un sottoricoprimento finito $\{B(x_i,\delta_i)\}$ la qual cosa è assurda implicando che X sia limitato.

III.1.2 Rappresentazioni irriducibili

Somma diretta Dati due spazi vettoriali X e Y, si definisce lo spazio vettoriale $X \oplus Y$ come il prodotto cartesiano $X \times Y$ nel quale le operazioni siano componente per componente:

$$\langle x_1, y_1\rangle + \lambda \langle x_2, y_2\rangle = \langle x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2\rangle .$$

Se $A \in \operatorname{Hom} X$ e $B \in \operatorname{Hom} Y$ si definisce $A \oplus B \in \operatorname{Hom}(X \oplus Y)$ come

$$A \oplus B \langle x, y\rangle = \langle Ax, By\rangle .$$

Si noti come

$$(A \oplus B)(C \oplus D) = AC \oplus BD$$

e se $A \in \mathrm{U}(X)$ e $B \in \mathrm{U}(Y)$, allora $A \oplus B \in \mathrm{U}(X \oplus Y)$. Ne segue che se U e V sono due rappresentazioni di G su X e Y, rispettivamente, allora $U \oplus V$ data da

$$(U \oplus V)(g) \equiv U(g) \oplus V(g)$$

è una rappresentazione di G. $U \oplus V$ è detta rappresentazione somma diretta di U e V.

Rappresentazioni irriducibili Siamo ora in grado di introdurre il concetto di rappresentazione irriducibile di un gruppo. Nel seguito, l'unitarietà della rappresentazione assumerà un ruolo fondamentale.

III.4 Definizione *Sia U una rappresentazione di G su X. Un sottospazio $Y \subset X$ è detto* **invariante** *se per ogni $g \in G$ si ha $U(g)Y \subset Y$.*

III.5 Teorema *Se Y è un sottospazio invariante, allora anche $Y^\perp$ è un sottospazio invariante. Inoltre, $U_1 \equiv U|_Y$ e $U_2 \equiv U|_{Y^\perp}$ sono rappresentazioni di G su Y e $Y^\perp$ e U è equivalente a $U_1 \oplus U_2$. Viceversa, $\{\langle y, 0\rangle\}$ è un sottospazio invariante per ogni somma diretta di rappresentazioni $U_1 \oplus U_2$.*

Dimostrazione Sia $x \in Y^\perp$, $y \in Y$ e $g \in G$, allora

$$(U(g)x, y) = (x, U^*(g)y) = \left(x, U\left(g^{-1}\right)y\right) = 0$$

perché $U\left(g^{-1}\right)y \in Y$. Infine, per ogni $g \in G$, $U(g)x \in Y^\perp$, cioè $U(g)Y^\perp \subset Y^\perp$.

Ne deriva che $U(g)$ si decompone a blocchi scelta una base ortonormale di X adattata su Y,

$$U(g) = \begin{pmatrix} U_1(g) & 0 \\ 0 & U_2(g) \end{pmatrix},$$

di modo che $U \cong U_1 \oplus U_2$.

(c.v.d.) L'ultima affermazione è ovvia.

III.5 Definizione *Una rappresentazione U di G su X si dice* **irriducibile** *se e solo se ammette come unici sottospazi invarianti $\{0\}$ e X.*

Dal teorema appena dimostrato segue

III.1 **Corollario** *U è irriducibile se e solo se non può essere scritta come somma diretta di rappresentazioni non banali (cioè non zero-dimensionali).*

Sussiste un risultato molto importante

III.6 **Teorema** *Ogni rappresentazione unitaria finito-dimensionale può essere scritta come somma diretta di rappresentazioni irriducibili.*

Dimostrazione Il caso finito-dimensionale si conduce per induzione sulla dimensione d della rappresentazione. Il caso $d = 1$ è banale. Ora, valga la tesi per ogni rappresentazione di dimensione minore di d. Sia U una rappresentazione di dimensione d. Se U è irriducibile, abbiamo concluso, altrimenti, $U = U_1 \oplus U_2$ con U_1 e U_2 di dimensione inferiore a d. In definitiva, la tesi. **(c.v.d.)**

III.6 **Definizione** *Definiamo $\hat{G}$ l'insieme delle classi di equivalenza delle rappresentazioni irriducibili del gruppo G.*

Tutte le rappresentazioni in una classe di equivalenza hanno la stessa dimensione (visto che gli isomorfismi conservano la dimensione). Per ogni classe $\alpha \in \hat{G}$ prendiamo una volta per tutte una realizzazione concreta come matrice $d(\alpha) \times d(\alpha)$, $D^{(\alpha)}_{i,j}$.

III.1.3 I lemmi di Schur

I due lemmi di Schur sono molto importanti in fisica, perché collegano (come vedremo quando ce ne occuperemo) le simmetrie di un sistema alla degenerazione delle sue osservabili.

III.1 **Lemma (di Schur, primo)** *Dato un gruppo G e due sue rappresentazioni irriducibili U e V sugli spazi vettoriali X e Y, rispettivamente, ogni omomorfismo $\omega : X \to Y$ tale che, per ogni $g \in G$,*

$$\omega U(g) = V(g)\,\omega$$

o è identicamente nullo oppure è un isomorfismo (e allora le due rappresentazioni sono equivalenti).

Dimostrazione Sia X' il nucleo di ω, applicando $V(g)$ abbiamo

$$0 = V(g)\,\omega X' = \omega U(g)\,X'.$$

da cui $U(g)\,X' \subset X'$. Poiché U è irriducibile, questo implica due possibilità, o $X' = X$, allora ω è nullo, oppure $X' = \{0\}$ e allora ω è iniettivo. Per vedere che ω è un isomorfismo, occorre vedere che è suriettivo. Posto $Y' = R(\omega) = \omega X$, abbiamo

$$V(g)\,Y' = V(g)\,\omega X = \omega U(g)\,X = \omega X = Y',$$

sicché Y' è invariante. Ma V è irriducibile, così, essendo escluso il caso $Y' = \{0\}$, si conclude $Y' = Y$. **(c.v.d.)**

III.2 **Lemma (di Schur, secondo)** *Dato un gruppo G e una sua rappresentazione irriducibile sullo spazio finito-dimensionale X, ogni $\alpha \in \operatorname{Hom} X$ che commuti con ciascuno $U(g)$ è multiplo dell'identità.*

Dimostrazione Applichiamo il primo lemma con $V(g) = U(g)$, $Y = X$ e $\omega \equiv \alpha - c\mathbb{I}$. Poiché ω commuta con ogni $U(g)$, sarà un automorfismo di X oppure identicamente nullo. Scegliamo per c un autovalore di α. Allora ω non è invertibile e dunque è identicamente nullo. Infine, $\alpha = c\mathbb{I}$. **(c.v.d.)**

III.2 Corollario *Le rappresentazioni irriducibili finito-dimensionali di un gruppo abeliano sono unidimensionali.*

Dimostrazione Poiché G è commutativo tutti gli $U(g)$ commutano tra loro e dunque sono proporzionali all'identità. Se $\dim V \neq 1$, ogni sottospazio di X è invariante, perciò U non è irriducibile. **(c.v.d.)**

III.1.4 Prodotto tensoriale di rappresentazioni

Richiami sul prodotto tensoriale di spazi di Hilbert Siano X e Y due spazi di Hilbert (finito-dimensionali). Il loro prodotto tensore $X \otimes Y$ è dato dallo spazio vettoriale delle mappe bi-antilineari dotato di un certo prodotto scalare ereditato da X e Y. Esplicitamente, $B \in X \otimes Y$ è una mappa $B : X \times Y \to \mathbb{C}$ tale che

$$\begin{aligned} B\langle u, v+\alpha w\rangle &= B\langle u,v\rangle + \bar{\alpha} B\langle u,w\rangle \\ B\langle u+\alpha v, w\rangle &= B\langle u,w\rangle + \bar{\alpha} B\langle v,w\rangle \end{aligned}$$

Dati $x \in X$ e $y \in Y$ possiamo definire $x \otimes y$ come

$$(x \otimes y)\langle u,v\rangle = (x,u)(y,v)\,.$$

Come si vede la mappa $\langle x,y\rangle \mapsto x \otimes y$ è bilineare. Inoltre, l'insieme degli $x \otimes y$ genera $X \otimes Y$. In effetti, se $\{e_i\}_{i\in J_n}$ è una base di X e $\{f_j\}_{j\in J_m}$ è una base di Y, allora $\{e_i \otimes f_j\}_{i,j}$ è una base di $X \otimes Y$, di modo che $\dim(X \otimes Y) = \dim(X)\dim(Y)$.
Possiamo poi definire univocamente un prodotto scalare su $X \otimes Y$ ponendo

$$(x \otimes y, B) = B\langle x,y\rangle\,.$$

In questo modo, se $\{e_i\}_{i\in J_n}$ e $\{f_j\}_{j\in J_m}$ sono basi di ortonormali di X e Y rispettivamente, allora $\{e_i \otimes f_j\}_{i,j}$ è una base ortonormale di $X \otimes Y$.
Adesso, se $A \in \operatorname{Hom} X$ e $B \in \operatorname{Hom} Y$, possiamo definire $A \otimes B \in \operatorname{Hom} X \otimes Y$ come

$$(A \otimes B)(C)\langle u,v\rangle = C\langle A^* u, B^* v\rangle$$

per ogni $C \in \operatorname{Hom} X \otimes Y$ e per ogni $u \in X$, $v \in Y$.
In questo modo, otteniamo $(A \otimes B)(x \otimes y) = (Ax \otimes By)$, infatti,

$$(A \otimes B)(x \otimes y)\langle u,v\rangle = (x \otimes y)\langle A^* u, B^* v\rangle = (Ax,u)(By,v) = (Ax \otimes By)\langle u,v\rangle\,.$$

Prodotto tensoriale di rappresentazioni Date le rappresentazioni W e V di un gruppo G su X e Y rispettivamente, possiamo definire $W \otimes V$ come la rappresentazione di G su $X \otimes Y$ tramite

$$(W \otimes V)(g) = W(g) \otimes V(g)$$

La rappresentazione $W \otimes V$ si dice **rappresentazione prodotto tensore** delle rappresentazioni W e V.
In generale, se $W^{(\alpha)}$ e $V^{(\beta)}$ sono due rappresentazioni irriducibili, α e $\beta \in \hat{G}$, la rappresentazione $W^{(\alpha)} \otimes V^{(\beta)}$ non sarà irriducibile, ma, essendo unitaria, potrà essere scritta come somma diretta di rappresentazioni irriducibili. Lo spazio $X \otimes Y$ si decomporrà nella somma diretta dei sottospazi invarianti $H^{(\gamma)}_{i\alpha\beta}$ dove $\gamma \in \hat{G}$ e i numera i sottospazi ortogonali sui quali agisce la rappresentazione γ. In altri termini, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} W^{(\alpha)} \otimes V^{(\beta)} &\cong \bigoplus_{\gamma\in\hat{G}} n^{\gamma}_{\alpha\beta} U^{(\gamma)} \\ X \otimes Y &= \bigoplus_{\gamma\in\hat{G}} \bigoplus_{i=1}^{n^{\gamma}_{\alpha\beta}} H^{(\gamma)}_{i\alpha\beta} \end{aligned}$$

dove i numeri $n^{\gamma}_{\alpha\beta}$ sono gli **interi di Clebsch-Gordan** e indicano il numero di volte che $U^{(\gamma)}$ compare nella somma diretta. Per la realizzazione matriciale concreta abbiamo

III.7 Teorema *Vale la formula*

$$D^{(\alpha)}_{ij}(g)\, D^{(\beta)}_{kl}(g) = \sum_{m,p,q} c^{\alpha\beta\gamma_m}_{ij;kl;pq} D^{(\gamma_m)}_{pq}(g)$$

per un numero finito di m e per $p, q = 1, \ldots, d(\gamma_m)$.

Dimostrazione Se $\{e_i\}$ e $\{f_j\}$ sono le basi ortonormali rispetto alle quali si scrivono le matrici a primo membro, abbiamo

$$D_{ij}^{(\alpha)}(g)\, D_{kl}^{(\beta)}(g) = \left(e_i, W^{(\alpha)}(g)\, e_j\right)\left(f_k, V^{(\beta)}(g)\, f_l\right) = \left(e_i \otimes f_k, \left(W^{(\alpha)} \otimes V^{(\beta)}\right)(e_j \otimes f_l)\right)$$

Ora, cambiamo base tramite un cambiamento unitario passando alla base di $X \otimes Y$ adattata per i sottospazi invarianti $H_{i\alpha\beta}^{(\gamma)}$, $i \in J_{n_{\alpha\beta}^{\gamma}}$. Proprio in questo passaggio sorgono i coefficienti c di cui a secondo membro e che esprimono i vettori $e_i \otimes f_k$ come somme dei vettori che diagonalizzano a blocchi la rappresentazione. **(c.v.d.)**

III.1.5 Rappresentazione complessa coniugata

III.7 Definizione *Sia X uno spazio di Hilbert. Una mappa $J : X \to X$ si dice* **coniugazione complessa** *se e solo se*

(i) *J è antilineare;*

(ii) *$J^2 = \mathbb{I}$;*

(iii) *$(Jx, Jy) = (y, x)$*

Le proprietà (i) e (iii) si riassumono (assieme alla richiesta di suriettività nel caso infinito-dimensionale e che si ha, comunque, dalla (ii)) dicendo che J è un operatore **antiunitario**.

Una coniugazione complessa molto semplice è data nel seguente modo, sia $\{e_i\}_{i \in J_n}$ una base di X, allora poniamo

$$J \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \equiv \sum_{i=1}^{n} \bar{\alpha}_i e_i.$$

Vale anche il viceversa,

III.3 Lemma *Sia K una coniugazione complessa su uno spazio di Hilbert X di dimensione n. Allora X ammette una base ortonormale $\{\varphi_i\}_{i \in J_n}$ con $K\varphi_j = \varphi_j$.*

Dimostrazione Riguardiamo X come uno spazio vettoriale reale dotato del prodotto scalare

$$(x, y)_R \equiv \operatorname{Re}(x, y)$$

Adesso K è una mappa lineare reale autoinversa, i.e., $K^2 = \mathbb{I}$. K è simmetrica, infatti,

$$(z, Ky)_R = \left(K^2 z, Ky\right)_R = \operatorname{Re}(y, Kz) = \operatorname{Re}(Kz, y) = (Kz, y)_R\,.$$

Inoltre, $X = X_1 \oplus_R X_2$ con $X_1 = R(\mathbb{I} + K)$ e $X_2 = R(\mathbb{I} - K)$ visto che

$$x = \frac{1}{4}(\mathbb{I} + K)^2 x + \frac{1}{4}(\mathbb{I} - K)^2 x$$

e

$$((\mathbb{I} - K)\, x, (\mathbb{I} + K)\, y)_R = (x, (\mathbb{I} - K)(\mathbb{I} + K)\, y)_R = 0.$$

Se poi $u \in R(\mathbb{I} \pm K)$, allora esiste x di modo che $(\mathbb{I} \pm K)\, x = u$, riapplicando K

$$Ku = Kx \pm x = \pm(x \pm Kx) = \pm u.$$

Se definiamo $I : X_R \to X_R$ come $Iu = iu$, allora $KI = -IK$, di modo che $I : X_2 \to X_1$ è un isomorfismo. Ne viene che X_1 e X_2 hanno entrambi dimensione n. Sia $\{u_i\}$ una base reale di X_1. Allora $Ku_a = u_\alpha$. Poiché $Iu_a \in X_2 \perp X_1$, abbiamo

$$\begin{aligned}(u_a, u_b) &= (u_a, u_b)_R + i\operatorname{Im}(u_a, u_b) = (u_a, u_b)_R - i\operatorname{Re}(u_a, iu_b) = \\ &= (u_a, u_b)_R - i\,(u_a, Iu_b)_R = \delta_{ab}\end{aligned}$$

(c.v.d.) da cui $\{u_i\}$ è una base ortonormale di X (inteso come spazio complesso).

Inoltre, date due coniugazioni J e K esiste un operatore unitario U di modo che $K = UJ$. A questo scopo basta considerare $U = KJ$, il quale è unitario visto che

$$(KJx, KJy) = (Jy, Jx) = (x, y) .$$

III.8 **Teorema** *Sia U una rappresentazione di G su uno spazio di Hilbert X. Sia $J : X \to X$ una coniugazione complessa. Allora*

$$\bar{U}(g) = JU(g)J$$

è un'altra rappresentazione di G. Se K è una seconda coniugazione complessa, allora

$$KU(g)K = W\bar{U}(g)W^{-1}$$

per qualche operatore unitario W indipendente da g.

Dimostrazione Vediamo che $\bar{U}$ è una rappresentazione unitaria

$$\begin{aligned} \bar{U}(gh) &= JU(gh)J = JU(g)JJU(h)J = \bar{U}(g)\bar{U}(h) \\ (JU(g)Jx, JU(g)Jy) &= (U(g)Jy, U(g)Jx) = (Jy, Jx) = (x, y) . \end{aligned}$$

Inoltre, preso W unitario di modo che $K = WJ$, abbiamo

$$KU(g)K = WJU(g)WJ$$

ma

$$WJ = K = K^{-1} = JW^{-1}$$

da cui

$$KU(g)K = WJU(g)JW^{-1} = W\bar{U}(g)W^{-1}.$$

(c.v.d.)

Rappresentazione complessa coniugata Chiamiamo $\bar{U}$ la **rappresentazione complessa coniugata** di U. La forma precisa di $\bar{U}$ dipende dalla scelta di J, ma il teorema mostra che la classe di equivalenza cui appartiene $\bar{U}$ no. Se U è irriducibile, anche $\bar{U}$ è irriducibile, visto che $Y \subset X$ è invariante per U se e solo se JY è invariante per $\bar{U}$:

$$UY \subset Y \Longleftrightarrow JUJ(JY) \subset JY.$$

Una rappresentazione irriducibile si dice autoconiugata se e solo se è equivalente alla sua complessa coniugata, viceversa diremo che la rappresentazione è complessa.
Se $\{\varphi_j\}$ è la base di autovettori per J, abbiamo

$$\begin{aligned} \left(\varphi_i, \bar{U}(g)\varphi_j\right) &= \left(JJ\varphi_i, JU(g)J\varphi_j\right) = \left(U(g)J\varphi_j, J\varphi_i\right) = \left(J\varphi_j, U^*(g)J\varphi_i\right) = \\ &= \left(U(g)\varphi_j, \varphi_i\right) = \overline{\left(\varphi_i, U(g)\varphi_j\right)} \end{aligned}$$

Dunque, per ogni $\alpha \in \hat{G}$ esiste una matrice unitaria W di modo che

$$\overline{D^{(\alpha)}(g)} = WD^{(\bar{\alpha})}(g)W^{-1}$$

dove $\bar{\alpha} \in \hat{G}$ è la classe di equivalenza complessa coniugata.

III.2 Rappresentazioni dei gruppi finiti

III.2.1 Algebra del gruppo e rappresentazioni regolari

Sia G un gruppo finito. Consideriamo l'insieme delle somme finite $\sum_{g \in G} a_g \delta_g$ dove δ_g è un simbolo e $a_g \in \mathbb{C}$ (somme formali). L'insieme così costruito è uno spazio vettoriale complesso di dimensione pari a o(G). Penseremo le successioni $\{a_g\}_{g \in G}$ come funzioni $a : G \to \mathbb{C}$ e perciò scriveremo $a(g) \equiv a_g$. Dotiamo lo spazio vettoriale di un prodotto, $*$, ereditato dal prodotto su G. Immaginando che $\delta_{gh} = \delta_g \delta_h$ avremo (euristicamente)

$$\left(\sum_{g\in G} a(g)\,\delta_g\right)\left(\sum_{h\in G} b(h)\,\delta_h\right) = \sum_{g,h\in G} a(g)\,b(h)\,\delta_{gh} = \sum_x \sum_y a\left(xy^{-1}\right) b(y)\,\delta_x$$

Tutto quanto detto motiva la seguente

III.8 **Definizione** *Sia G un gruppo finito. Lo spazio vettoriale complesso $\mathcal{A}(G)$ delle funzioni su G è detto* **algebra del gruppo** *una volta dotato del seguente prodotto*

$$(a*b)(x) = \sum_{y\in G} a\left(xy^{-1}\right) b(y)$$

e della seguente coniugazione

$$a^*(g) = \overline{a(g^{-1})}.$$

Notiamo che

$$\begin{aligned}(a*b)^*(g) &= \overline{(a*b)(g^{-1})} = \sum_h \overline{a(g^{-1}h^{-1})\,b(h)} = \sum_x \overline{b(xg^{-1})a(x^{-1})} = \\ &= \sum_x b^*\left(gx^{-1}\right) a^*(x) = (b^* * a^*)(g)\end{aligned}$$

Se poniamo $\delta_g(h) = 1$ per $h = g$ e $\delta_g(h) = 0$ altrimenti, otteniamo, per ogni $a \in \mathcal{A}(G)$,

$$a(h) = \sum_{g\in G} a(g)\,\delta_g(h)$$

Da cui

$$(\delta_g * \delta_h)(x) = \sum_{y\in G} \delta_g\left(xy^{-1}\right)\delta_h(y) = \delta_g\left(xh^{-1}\right) = \delta_{gh}(x).$$

Infine,

$$\delta_g^*(h) = \overline{\delta_g(h^{-1})} = \delta_g\left(h^{-1}\right) = \delta_{g^{-1}}(h)$$

III.9 **Teorema** *Sia G un gruppo finito. Sia U una rappresentazione di G su uno spazio di Hilbert X. Definiamo, per ogni $a \in \mathcal{A}(G)$,*

$$U_{\mathcal{A}}(a) = \sum_{g\in G} a(g)\,U(g).$$

Allora $U_{\mathcal{A}}$ obbedisce alle seguenti proprietà:

(i) *$U_{\mathcal{A}}(a+b) = U_{\mathcal{A}}(a) + U_{\mathcal{A}}(b)$;*

(ii) *$U_{\mathcal{A}}(a*b) = U_{\mathcal{A}}(a)\,U_{\mathcal{A}}(b)$;*

(iii) *$U_{\mathcal{A}}(a^*) = U_{\mathcal{A}}^*(a)$;*

(iv) *$U_{\mathcal{A}}(\delta_e) = \mathbb{I}$.*

Viceversa se $U_{\mathcal{A}}$ soddisfa le (i)-(iv), allora esiste una rappresentazione unitaria U di G tale che $U_{\mathcal{A}}$ e U sono legate dalla formula di sopra.

Dimostrazione La prima parte è proprio molto facile. La (i) si ha perché vale

$$U_{\mathcal{A}}(a+b) = \sum_{g\in G}(a(g)+b(g))\,U(g) = \sum_{g\in G} a(g)\,U(g) + \sum_{g\in G} b(g)\,U(g),$$

la (ii)

$$\begin{aligned}U_{\mathcal{A}}(a*b) &= \sum_{g\in G}\sum_{h\in G} a\left(gh^{-1}\right) b(h)\,U(g) = \sum_{g\in G}\sum_{h\in G} a\left(gh^{-1}\right) U\left(gh^{-1}\right) b(h)\,U(h) = \\ &= \sum_{x\in G}\sum_{y\in G} a(x)\,U(x)\,b(y)\,U(y) = U_{\mathcal{A}}(a)\,U_{\mathcal{A}}(b);\end{aligned}$$

per la (iii) si ha

$$\begin{aligned} U_{\mathcal{A}}(a^*) &= \sum_{g\in G} \bar{a}\left(g^{-1}\right) U(g) = \sum_{g\in G} \bar{a}\left(g^{-1}\right) U^*\left(g^{-1}\right) = \sum_{g\in G} \bar{a}(g)\, U^*(g) = \\ &= U^*_{\mathcal{A}}(a)\,; \end{aligned}$$

infine,

$$U_{\mathcal{A}}(\delta_e) = U(e) = \mathbb{I}.$$

Vediamo l'inverso. Definiamo

$$U(g) \equiv U_{\mathcal{A}}(\delta_g)\,.$$

Allora, dalla (i)

$$\sum_{g\in G} a(g)\, U_{\mathcal{A}}(\delta_g) = U_{\mathcal{A}}\left(\sum_{g\in G} a(g)\,\delta_g\right) = U_{\mathcal{A}}(a)\,.$$

Non ci resta che vedere che U dà una rappresentazione del gruppo. Poiché $\delta_g * \delta_h = \delta_{gh}$, la (ii) ci dice che $U(g)\,U(h) = U(gh)$. La (iii) dice poi che

$$U\left(g^{-1}\right) = U_{\mathcal{A}}\left(\delta_{g^{-1}}\right) = U_{\mathcal{A}}\left(\delta^*_g\right) = U^*_{\mathcal{A}}(\delta_g) = U^*(g)$$

da cui

$$U(g)\,U^*(g) = U(g)\,U\left(g^{-1}\right) = U(e) = U_{\mathcal{A}}(\delta_e) = \mathbb{I}.$$

(c.v.d.)

Una mappa $U_{\mathcal{A}}$ che soddisfi le proprietà (i)-(iv) si dice una ***-rappresentazione dell'algebra** $\mathcal{A}(G)$. Il teorema ci dice allora che esiste una corrispondenza biunivoca tra le rappresentazioni unitarie di un gruppo finito e le *-rappresentazioni della sua algebra.
Un'ovvia rappresentazione di $\mathcal{A}(G)$ è su se stessa con la moltiplicazione; cioè $L_{\mathcal{A}}(a)\,b = a * b$. Infatti,

$$L_{\mathcal{A}}(a)(b + \lambda c) = a * (b + \lambda c) = (a * b) + \lambda (a * c)$$

come è ovvio da verificare e, inoltre,

$$L_{\mathcal{A}}(a * b) = L_{\mathcal{A}}(a)\, L_{\mathcal{A}}(b)$$

infatti, calcoliamo i due membri su una qualsiasi funzione $f \in \mathcal{A}(G)$, abbiamo

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{A}}(a * b)\, c &= (a * b) * c \\ L_{\mathcal{A}}(a)\, L_{\mathcal{A}}(b)\, c &= a * (b * c) \end{aligned}$$

e perciò basta vedere che il prodotto di convoluzione $*$ è associativo:

$$\begin{aligned} a * (b * c)(x) &= \sum_y a\left(xy^{-1}\right) \sum_z b\left(yz^{-1}\right) c(z) = \sum_z \left(\sum_y a\left(xy^{-1}\right) b\left(yz^{-1}\right)\right) c(z) = \\ &= \sum_z \left(\sum_y a\left(xz^{-1}zy^{-1}\right) b\left(yz^{-1}\right)\right) c(z) = \sum_z (a * b)\left(xz^{-1}\right) c(z) = \\ &= ((a * b) * c)(x)\,. \end{aligned}$$

La questione che sorge è quella di definire un prodotto scalare su $\mathcal{A}(G)$ in modo da rendere la $L_{\mathcal{A}}$ una *-rappresentazione. A questo scopo basta prendere l'ovvio prodotto scalare

$$(f, g) = \frac{1}{\mathrm{o}(G)} \sum_{x\in G} \bar{f}(x)\, g(x)\,.$$

Per mostrare che $L_{\mathcal{A}}$ è una *-rappresentazione dobbiamo controllare che, per ogni $f, g, h \in \mathcal{A}(G)$

$$(L_{\mathcal{A}}(f^*)\, h, g) = (L^*_{\mathcal{A}}(f)\, h, g) = (h, L_{\mathcal{A}}(f)\, g)$$

cioè

$$(f^* * h, g) = (h, f * g)\,.$$

Anziché vederlo esplicitamente (non sarebbe comunque difficile), mostreremo che $L_{\mathcal{A}}$ è indotto da una rappresentazione unitaria di G su $\mathcal{A}(G)$.
Definiamo appunto $x \mapsto L_x \in \operatorname{Aut}\mathcal{A}(G)$ come

$$(L_x f)(y) = f\left(x^{-1}y\right)$$

Poiché

$$L_{\mathcal{A}}(\delta_x)(f)(y) = (\delta_x * f)(y) = \sum_z \delta_x\left(yz^{-1}\right) f(z) = f\left(x^{-1}y\right) = (L_x f)(y),$$

abbiamo che se L_x è una rappresentazione unitaria di G, allora $L_{\mathcal{A}}$ è la $*$-rappresentazione associata dell'algebra $\mathcal{A}(G)$.
Mostriamo quanto detto. Per vedere che L_x è una rappresentazione basta notare

$$L_x L_y f = L_{xy} f,$$

infatti,

$$(L_x(L_y f))(g) = (L_y f)\left(x^{-1}g\right) = f\left(y^{-1}x^{-1}g\right) = (L_{xy} f)(g).$$

Inoltre, $L_x\delta_y = \delta_{xy}$ di modo che L_x è un operatore unitario visto che $\{\mathrm{o}(G)\,\delta_y\}_{y\in G}$ è una base ortonormale di $\mathcal{A}(G)$. Infine,

III.10 **Teorema** *Abbiamo che*

$$(L_x f)(y) = f\left(x^{-1}y\right)$$

su $\mathcal{A}(G)$ è una rappresentazione unitaria di G. Essa è chiamata la **rappresentazione regolare sinistra***.*

Nella dimostrazione non si è usata la struttura algebrica di $\mathcal{A}(G)$ ed in effetti è possibile definire L_x senza usare l'algebra.
Similmente

$$R_{\mathcal{A}}(f)\,g = g * \bar{f}^*$$

è una rappresentazione di $\mathcal{A}$ indotta dalla rappresentazione regolare destra

$$(R_x f)(y) = f(yx).$$

Consideriamo adesso le funzioni $x \mapsto D_{ij}^{(\alpha)}(x)$ ottenute prendendo una realizzazione matriciale nella classe di equivalenza α delle rappresentazioni irriducibili. Grazie all'esistenza delle rappresentazioni regolari, abbiamo

III.3 **Corollario** *Le funzioni $D_{ij}^{(\alpha)}(x)$ su G separano i punti, i. e., per ogni $x, y \in G$ con $x \neq y$, esiste la funzione f della forma*

$$f = \sum_{k=1}^{m} C_{kij} D_{i_k j_k}^{(\alpha)}$$

di modo che

$$f(x) = 1, \quad f(y) = 0.$$

Dimostrazione Consideriamo

$$f(z) = \mathrm{o}(G)\,(\delta_x, L_z\delta_e)$$

allora

$$f(x) = 1$$

e se $y \neq x$, allora, essendo $L_z\delta_e = \delta_z$, $f(y) = 0$.
D'altra parte, L_x è una rappresentazione unitaria di G, perciò si decompone in somma diretta di rappresentazioni irriducibili, cioè

$$(\delta_g, L_z\delta_{g'}) = \sum_{k;i,j} M_{gi}^{(\alpha_k)} D_{ij}^{(\alpha_k)}(z)\,\bar{M}_{g'j}^{(\alpha_k)}$$

(c.v.d.) da cui abbiamo la tesi.

III.2.2 Relazioni di ortogonalità

In questa sottosezione – che con la prossima esaurisce gli aspetti veramente fondamentali della teoria delle rappresentazioni dei gruppi finiti – proveremo che

$$\sum_{\alpha\in\hat{G}} d_\alpha^2 = \mathrm{o}\left(G\right),$$

teorema di Burnside, che dimostra come il numero delle rappresentazioni irriducibili inequivalenti di un gruppo finito è finito (vedremo che per un gruppo compatto esse diveranno infinite numerabili).

L'idea della dimostrazione è quella di riguardare le funzioni $D_{ij}^{(\alpha)}$ (al variare di $\alpha\in\hat{G}$ e i,j in J_{d_α}) come elementi dell'algebra $\mathcal{A}\left(G\right)$. Cominciamo con il dimostrarne l'ortogonalità

III.11 **Teorema** *Gli elementi di matrice delle rappresentazioni irriducibili inequivalenti soddisfano la relazione di ortogonalità seguente*

$$\frac{1}{\mathrm{o}\left(G\right)}\sum_{x\in G}\overline{D_{ij}^{(\alpha)}\left(x\right)}D_{kl}^{(\beta)} = \frac{1}{d_\alpha}\delta_{\alpha\beta}\delta_{ik}\delta_{jl}$$

Dimostrazione Pensiamo $\mathbb{C}^{d_\alpha}$ come spazio lineare base della rappresentazione irriducibile $U^{(\alpha)}$. Prendiamo $B:\mathbb{C}^{d_\alpha}\to\mathbb{C}^{d_\beta}$ e definiamo

$$\tilde{B}\equiv\frac{1}{\mathrm{o}\left(G\right)}\sum_{x\in G}U^{(\beta)}\left(x\right)BU^{(\alpha)}\left(x\right)^{-1}$$

Allora

$$\begin{aligned}
U^{(\beta)}\left(y\right)\tilde{B} &= \frac{1}{\mathrm{o}\left(G\right)}\sum_{x\in G}U^{(\beta)}\left(y\right)U^{(\beta)}\left(x\right)BU^{(\alpha)}\left(x\right)^{-1} = \\
&= \frac{1}{\mathrm{o}\left(G\right)}\sum_{x\in G}U^{(\beta)}\left(yx\right)BU^{(\alpha)}\left(x\right)^{-1} = \frac{1}{\mathrm{o}\left(G\right)}\sum_{z\in G}U^{(\beta)}\left(z\right)BU^{(\alpha)}\left(y^{-1}z\right)^{-1} = \\
&= \frac{1}{\mathrm{o}\left(G\right)}\sum_{z\in G}U^{(\beta)}\left(z\right)BU^{(\alpha)}\left(z^{-1}\right)U^{(\alpha)}\left(y\right) = \tilde{B}U^{(\alpha)}\left(y\right)
\end{aligned}$$

Dal lemma di Schur, concludiamo che $\tilde{B}$ è un isomorfismo oppure è nullo. Se $\alpha\neq\beta$ allora $\tilde{B}$ non può essere un isomorfismo, altrimenti $U^{(\alpha)}$ e $U^{(\beta)}$ sarebbero equivalenti, perciò $\tilde{B}=0$. Se $\alpha=\beta$, allora $\tilde{B}=c\mathbb{I}$ con

$$c=\frac{1}{d_\alpha}\operatorname{Tr}\tilde{B}=\frac{1}{d_\alpha}\operatorname{Tr}B$$

di modo che

$$\tilde{B}=\frac{\operatorname{Tr}B}{d_\alpha}\delta_{\alpha\beta}\mathbb{I}.$$

Scegliamo adesso B avente un solo elemento di matrice non nullo, cioè scegliamo B tale da avere realizzazione matriciale $B_{pq}=\delta_{pl}\delta_{qj}$ (fissati l e j), allora se $\alpha=\beta$, $\operatorname{Tr}B=\delta_{lj}$ sicché

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_{ki} &= \frac{1}{\mathrm{o}\left(G\right)}\sum_{x\in G}D_{kp}^{(\beta)}\left(x\right)B_{pq}\overline{D_{iq}^{(\alpha)}\left(x\right)} = \\
\frac{1}{d_\alpha}\delta_{ki}\delta_{\alpha\beta}\delta_{lj} &= \frac{1}{\mathrm{o}\left(G\right)}\sum_{x\in G}D_{kl}^{(\beta)}\left(x\right)\overline{D_{ij}^{(\alpha)}\left(x\right)}
\end{aligned}$$

(c.v.d.) come volevamo.

Abbiamo provato che il sistema $\left\{\sqrt{d_\alpha}D_{ij}^{(\alpha)}\left(x\right)\right\}_{\alpha\in\hat{G};i,j\in J_{d_\alpha}}$ è un set ortonormale in $\mathcal{A}\left(G\right)$.

Adesso vogliamo dimostrare che esso è pure completo, a quel punto avremo

$$\mathrm{o}\,(G) = \dim \mathcal{A}\,(G) = \sum_{\alpha\in\hat{G}} d_\alpha^2$$

che, appunto, è il teorema di Burnside. A questo scopo ci occorre una versione (finita) del teorema di Stone-Weierstraß.

III.12 **Teorema** *Sia A uno spazio vettoriale di funzioni su uno spazio Y tali che*

(i) *se $f, g \in A$, allora $fg \in A$ (prodotto punto per punto);*

(ii) *per ogni $x, y \in Y$ esiste $f_{xy} \in A$ tale che $f\,(x) = 1$ e $f\,(y) = 0$.*

Allora A è l'insieme di tutte le funzioni su Y.

Dimostrazione Per ogni $x \in Y$ consideriamo la ben nota funzione δ_x. Per ogni $x, y \in Y$ consideriamo la funzione $f_{xy} \in A$ che separa i due punti, la quale esiste grazie a (ii). Allora

$$\delta_x = \prod_{\substack{y\in G\\ y\neq x}} f_{xy},$$

di modo che, per (i). Allora per ogni x, $\delta_x \in A$. Ma $\{\delta_x\}_{x\in Y}$ è una base per le funzioni su Y di modo che A è l'insieme di tutte le funzioni su Y. **(c.v.d.)**

III.13 **Teorema (di Burnside)** *Il sistema $\left\{\sqrt{d_\alpha} D_{ij}^{(\alpha)}\,(x)\right\}_{\alpha\in\hat{G}; i,j\in J_{d_\alpha}}$ è una base ortonormale per l'algebra del gruppo finito G, $\mathcal{A}\,(G)$. In particolare,*

$$\sum_{\alpha\in\hat{G}} d_\alpha^2 = \mathrm{o}\,(G)\,.$$

Dimostrazione Abbiamo già visto che il set è ortonormale, non ci rimane che dimostrarne la completezza. Poniamo

$$A = \left\{ \sum c_{ij}^{(\alpha)} D_{ij}^{(\alpha)} \middle| \, c_{ij}^{(\alpha)} \in \mathbb{C} \right\}.$$

Poiché A è uno spazio vettoriale per definizione e separa i punti, dal teorema precedente concludiamo che $A = \mathcal{A}\,(G)$, cioè il set considerato è completo. **(c.v.d.)**

III.4 **Corollario** *Se G è abeliano, allora $\#\hat{G} = \mathrm{o}\,(G)$.*

Dimostrazione Dal lemma di Schur le rappresentazioni irriducibili di G sono tutte unidimensionali perciò

$$\#\hat{G} = \sum_{\alpha\in\hat{G}} 1 = \sum_{\alpha\in\hat{G}} d_\alpha^2 = \mathrm{o}\,(G)\,.$$

(c.v.d.)

Le relazioni di ortogonalità consentono di calcolare la convoluzione degli elementi di matrice $D_{ij}^{(\alpha)}$.

III.14 **Teorema** *Poniamo*

$$X_{ij}^{(\alpha)} = \frac{d_\alpha}{\mathrm{o}\,(G)} D_{ij}^{(\alpha)},$$

allora

$$X_{ij}^{(\alpha)} * X_{kl}^{(\beta)} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{jk} X_{il}^{(\alpha)}.$$

Dimostrazione

Si tratta solo di un conto:

$$\begin{aligned}\left(X_{ij}^{(\alpha)} * X_{kl}^{(\beta)}\right)(x) &= \frac{d_\alpha d_\beta}{\mathrm{o}^2(G)} \sum_{y\in G} D_{ij}^{(\alpha)}\left(xy^{-1}\right) D_{kl}^{(\beta)}(y) = \\ &= \frac{d_\alpha d_\beta}{\mathrm{o}^2(G)} \sum_{y\in G,\, p\in J_{d_\alpha}} D_{ip}^{(\alpha)}(x)\, D_{pj}^{(\alpha)}\left(y^{-1}\right) D_{kl}^{(\beta)}(y) = \\ &= \frac{d_\alpha d_\beta}{\mathrm{o}^2(G)} \sum_{y\in G,\, p\in J_{d_\alpha}} D_{ip}^{(\alpha)}(x)\, \overline{D_{jp}^{(\alpha)}(y)} D_{kl}^{(\beta)}(y) = \\ &= \frac{d_\alpha d_\beta}{\mathrm{o}(G)} \sum_{p\in J_{d_\alpha}} D_{ip}^{(\alpha)}(x)\, \frac{1}{d_\alpha}\delta_{\alpha\beta}\delta_{jk}\delta_{pl} = \\ &= \delta_{\alpha\beta}\delta_{jk}\frac{d_\alpha}{\mathrm{o}(G)} D_{il}^{(\alpha)} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{jk} X_{il}^{(\alpha)}.\end{aligned}$$

(c.v.d.)

Come conseguenza, ne ricaviamo il seguente

III.15 Teorema *$\mathcal{A}(G)$ è isomorfa (come algebra) alla somma diretta di algebre di matrici in modo tale che il prodotto scalare su $\mathcal{A}(G)$ è, su ciascun addendo della somma diretta, un multiplo del prodotto scalare di Hilbert-Schmidt, $(A, B) = \mathrm{Tr}(A^* B)$. Esplicitamente*

$$\mathcal{A}(G) \cong \bigoplus_{\alpha\in\hat{G}} \mathrm{Hom}\left(\mathbb{C}^{d_\alpha}\right)$$

via la mappa che a $f \in \mathcal{A}(G)$ associa $\hat{f}$ data da

$$\hat{f}_{\alpha;i,j} = \frac{\mathrm{o}(G)}{d_\alpha} \sum_{x\in G} \overline{X_{ij}^{(\alpha)}(x)} f(x) = \sum_{x\in G} \overline{D_{ij}^{(\alpha)}(x)} f(x).$$

Dimostrazione Notiamo che $\hat{f}$ è stata costruita di modo che

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{\alpha\in\hat{G}} \sum_{i,j\in J_{d_\alpha}} d_\alpha \left(D_{ij}^{(\alpha)}, f\right) D_{ij}^{(\alpha)}(x) = \sum_{\alpha\in\hat{G}} \sum_{i,j\in J_{d_\alpha}} \frac{d_\alpha}{\mathrm{o}(G)} \sum_{y\in G} \overline{D_{ij}^{(\alpha)}(y)} f(y)\, D_{ij}^{(\alpha)}(x) = \\ &= \sum_{\alpha\in\hat{G}} \sum_{i,j\in J_{d_\alpha}} \hat{f}_{\alpha;i,j} \frac{d_\alpha}{\mathrm{o}(G)} D_{ij}^{(\alpha)}(x) = \sum_{\alpha\in\hat{G}} \sum_{i,j\in J_{d_\alpha}} \hat{f}_{\alpha;i,j} X_{ij}^{(\alpha)}(x)\end{aligned}$$

Ora,

$$\begin{aligned}(f, g) &= \frac{1}{\mathrm{o}(G)} \sum_{x\in G} \sum_{\alpha,\beta} \frac{d_\alpha d_\beta}{\mathrm{o}^2(G)} \sum_{i,j,k,l} \overline{\hat{f}_{\alpha;i,j}} \hat{g}_{\beta;k,l} \overline{D_{ij}^{(\alpha)}(x)} D_{kl}^{(\beta)}(x) = \\ &= \sum_{\alpha,\beta} \frac{d_\alpha d_\beta}{\mathrm{o}^2(G)} \sum_{i,j,k,l} \overline{\hat{f}_{\alpha;i,j}} \hat{g}_{\beta;k,l} \delta_{\alpha\beta}\delta_{ik}\delta_{jl} = \\ &= \sum_\alpha \frac{d_\alpha^2}{\mathrm{o}^2(G)} \sum_{i,j} \overline{\hat{f}_{\alpha;i,j}} \hat{g}_{\alpha;i,j} = \sum_\alpha \frac{d_\alpha^2}{\mathrm{o}^2(G)} \sum_{i,j} \left(\hat{f}_\alpha\right)^*_{ji} (\hat{g}_\alpha)_{ij} = \\ &= \sum_\alpha \frac{d_\alpha^2}{\mathrm{o}^2(G)} \mathrm{Tr}\left(\hat{f}_\alpha^* \hat{g}_\alpha\right) = \sum_\alpha \frac{d_\alpha^2}{\mathrm{o}^2(G)} \left(\hat{f}_\alpha^*, \hat{g}_\alpha\right),\end{aligned}$$

per cui non ci resta che mostrare che la convoluzione è mappata nel prodotto di operatori, cioè

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$$

nel senso che

$$\widehat{f * g}_{\alpha;i,j} = \sum_{k=1}^{d_\alpha} \hat{f}_{\alpha;i,k} \hat{g}_{\alpha;k,j}$$

infatti,

$$\begin{aligned} f * g &= \sum_{\alpha,\beta;i,j,k,l} \hat{f}_{\alpha;i,j}\hat{g}_{\beta;k,l}X_{ij}^{(\alpha)} * X_{kl}^{(\beta)} = \sum_{\alpha,\beta;i,j,k,l} \hat{f}_{\alpha;i,j}\hat{g}_{\beta;k,l}\delta_{\alpha\beta}\delta_{jk}X_{il}^{(\alpha)} = \\ &= \sum_{\alpha;i,j,l} \hat{f}_{\alpha;i,j}\hat{g}_{\alpha;j,l}X_{il}^{(\alpha)} = \sum_{\alpha;i,j}\left(\sum_{j=1}^{d_\alpha}\hat{f}_{\alpha;i,j}\hat{g}_{\alpha;j,l}\right)X_{il}^{(\alpha)}, \end{aligned}$$

ma

$$f * g = \sum_{\alpha;i,l} \widehat{f * g}_{\alpha;i,l}X_{il}^{(\alpha)},$$

(c.v.d.) da cui la tesi.

III.2.3 Caratteri

Nell'introdurre uno strumento molto importante come quello dei **caratteri** dimostreremo pure che $\hat{G}$ ha la stessa cardinalità dell'insieme delle classi di coniugazione ($x \equiv y$ se e solo se esiste g di modo che $x = gyg^{-1}$) di G (la qual cosa conferma che $\hat{G}$ è un insieme finito).
Cominciamo con la seguente

III.9 Definizione *Una* **funzione di classe** *su G e una $f : G \to \mathbb{C}$ tale che*

$$f\left(xyx^{-1}\right) = f(y),$$

per ogni $x, y \in G$. L'insieme delle funzioni di classe si denota con $\mathcal{Z}(G)$.

Le funzioni di classe sono dunque le funzioni di $\mathcal{A}(G)$ che risultano costanti sulle classi di coniugazione di G. Se consideriamo le funzioni che valgono 1 su una determinata classe e 0 sulle altre, abbiamo che esse formano una base di $\mathcal{Z}(G)$ di modo che

$$\dim \mathcal{Z}(G) = \#\,(\text{classi di coniugazione di } G).$$

III.16 Teorema *$\mathcal{Z}(G)$ è il centro di $\mathcal{A}(G)$, i.e., $f \in \mathcal{Z}(G)$ se e solo se, per ogni $g \in \mathcal{A}(G)$, $f*g = g*f$.*

Dimostrazione Posto $y = zx$, la definizione di funzione di classe diviene, per ogni $z, x \in G$,

$$f(xz) = f(zx).$$

Ora,

$$\begin{aligned} f(xz) &= \sum_{y\in G} f\left(xy^{-1}\right)\delta_{z^{-1}}(y) = \left(f * \delta_{z^{-1}}\right)(x) \\ f(zx) &= \sum_{y\in G} \delta_{z^{-1}}\left(xy^{-1}\right)f(y) = \left(\delta_{z^{-1}} * f\right)(x) \end{aligned}$$

perciò, $f \in \mathcal{Z}(G)$ se e solo se, per ogni $z \in G$,

$$f * \delta_z = \delta_z * f,$$

(c.v.d.) se e solo se f commuta con tutte le funzioni di $\mathcal{A}(G)$ (che sono combinazioni lineari di δ_z).

III.10 Definizione *La funzione sul gruppo*

$$\chi^{(\alpha)}(x) = \operatorname{Tr}\left(D^{(\alpha)}(x)\right),$$

per $\alpha \in \hat{G}$, si dice **carattere irriducibile** *della rappresentazione α.*

La definizione è ben posta perché la funzione $\chi^{(\alpha)}$ non cambia se si considerano rappresentazioni equivalenti. Infatti, a causa della proprietà ciclica, la traccia è invariante per similitudine.

I caratteri irriducibili sono funzioni di classe,

$$\chi^{(\alpha)}\left(xyx^{-1}\right) = \mathrm{Tr}\left(D^{(\alpha)}\left(xyx^{-1}\right)\right) = \mathrm{Tr}\left(D^{(\alpha)}(x)\,D^{(\alpha)}(y)\,D^{(\alpha)}\left(x^{-1}\right)\right) = \mathrm{Tr}\left(D^{(\alpha)}(y)\right) = \chi^{(\alpha)}(y).$$

III.17 Teorema $\left\{\chi^{(\alpha)}\right\}_{\alpha\in\hat{G}}$ *è una base per* $\mathcal{Z}(G)$.

Dimostrazione Cominciamo con il vedere che $\chi^{(\alpha)}$ è una base ortonormale.

$$\begin{aligned}\left(\chi^{(\alpha)},\chi^{(\beta)}\right) &= \frac{1}{\mathrm{o}(G)}\sum_{x\in G}\overline{\chi^{(\alpha)}(x)}\chi^{(\beta)}(x) = \frac{1}{\mathrm{o}(G)}\sum_{x\in G}\sum_{i,k}\overline{D_{ii}^{(\alpha)}(x)}D_{kk}^{(\beta)}(x) = \\ &= \frac{1}{d_\alpha}\delta_{\alpha\beta}\sum_{i,k}\delta_{ik} = \delta_{\alpha\beta}.\end{aligned}$$

Per vedere la completezza, mostriamo prima la seguente eguaglianza

$$\frac{1}{\mathrm{o}(G)}\sum_{y\in G}D_{ij}^{(\alpha)}\left(yxy^{-1}\right) = \frac{1}{d_\alpha}\delta_{ij}\chi^{(\alpha)}(x)$$

Infatti,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{o}(G)}\sum_{y\in G}D_{ij}^{(\alpha)}\left(yxy^{-1}\right) &= \sum_{k,l}^{d_\alpha}\frac{1}{\mathrm{o}(G)}\sum_{y\in G}D_{ik}^{(\alpha)}(y)\,D_{kl}^{(\alpha)}(x)\,\overline{D_{jl}^{(\alpha)}(y)} = \\ &= \sum_{k,l}^{d_\alpha}\frac{1}{d_\alpha}D_{kl}^{(\alpha)}(x)\,\delta_{ij}\delta_{kl} = \frac{1}{d_\alpha}\delta_{ij}\chi^{(\alpha)}(x).\end{aligned}$$

Ora, per ogni $f\in\mathcal{Z}(G)$ possiamo scrivere

$$f(x) = \sum_{\alpha;i,j}c_{ij}^{(\alpha)}D_{ij}^{(\alpha)}(x),$$

d'altra parte, se f è una funzione di classe, si ha

$$f(x) = \frac{1}{\mathrm{o}(G)}\sum_{y\in G}f\left(yxy^{-1}\right)$$

perciò

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{\alpha;i,j}c_{ij}^{(\alpha)}\frac{1}{\mathrm{o}(G)}\sum_{y\in G}D_{ij}^{(\alpha)}\left(yxy^{-1}\right) = \sum_{\alpha;i,j}\frac{c_{ij}^{(\alpha)}}{d_\alpha}\delta_{ij}\chi^{(\alpha)}(x) = \\ &= \sum_{\alpha\in\hat{G}}\left(\sum_{i=1}^{d_\alpha}\frac{c_{ii}^{(\alpha)}}{d_\alpha}\right)\chi^{(\alpha)}(x) = \sum_{\alpha\in\hat{G}}c^{(\alpha)}\chi^{(\alpha)}(x).\end{aligned}$$

(c.v.d.)

III.5 Corollario *Il numero di elementi di $\hat{G}$ è pari al numero delle classi di coniugazione di G.*

Dimostrazione Infatti, il numero delle classi di coniugazione eguaglia la dimensione di $\mathcal{Z}(G)$ che, per il teorema precedente, è pari alla cardinalità di $\hat{G}$.
(c.v.d.)

La definizione di carattere si estende (con profitto) a tutte le rappresentazioni:

III.11 Definizione *Data una rappresentazione unitaria U di G se ne definisce il* **carattere** *come*

$$\chi(x) = \mathrm{Tr}\,U(x).$$

I caratteri, come i caratteri irriducibili, sono funzioni di classe ancora grazie alla ciclicità della traccia. Ora, data una qualsiasi rappresentazione U si ottengono immediatamente la sua decomposizione in somma diretta mediante gli interi di Clebsch-Gordan,

$$U = \bigoplus_{\alpha\in\hat{G}}m^{(\alpha)}D^{(\alpha)}$$

e la decomposizione del suo carattere sulla base dei caratteri irriducibili:

$$\chi(x) = \sum_{\alpha \in \hat{G}} c^{(\alpha)} \chi^{(\alpha)}(x)$$

e chiaramente vale

$$c^{(\alpha)} = m^{(\alpha)} d_\alpha$$

Poiché d_α è fissato da α (dipende cioè dalla classe di equivalenza), determinare i $c^{(\alpha)}$ comporta la determinazione univoca dei $c^{(\alpha)}$ e viceversa.
Questo importante risultato si ripercuote nei due seguenti

III.6 **Corollario** *Nella decomposizione in somma diretta di una rappresentazione U in rappresentazioni irriducibili, le rappresentazioni irriducibili che compaiono e la loro molteplicità sono univocamente determinate da U.*

Dimostrazione (c.v.d.) Infatti, data U si trova (in modo indipendente dalla sua realizzazione concreta) χ, da cui si ottengono i $c^{(\alpha)}$ e, infine, i d_α.

Poiché i caratteri (con la loro scoposizione unica nei caratteri irriducibili) determinano univocamente la decomposizione di Clebsch-Gordan,

III.7 **Corollario** *Due rappresentazioni sono equivalenti se e solo se hanno caratteri eguali.*

Infine, qualche altro risultato di calcolo

III.18 **Teorema** *La convoluzione di due caratteri irriducibili reca*

$$\chi^{(\alpha)} * \chi^{(\beta)} = \delta_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{o}(G)}{d_\alpha} \chi^{(\alpha)}.$$

Consideriamo le classi di coniugazione $C_1, \ldots, C_k$ di G e le sue rappresentazioni irriducibili inequivalenti $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Consideriamo la matrice

$$M_i^j = \sqrt{\frac{\#C_j}{\mathrm{o}(G)}} \chi^{(\alpha_i)}(C_j)$$

(j è l'indice di riga e i quello di colonna), allora

$$\begin{aligned}(M^*M)_l^j &= \overline{M_j^i} M_l^i = \frac{1}{\mathrm{o}(G)} \sum_{i=1}^{k} (\#C_i) \overline{\chi^{(\alpha_j)}(C_i)} \chi^{(\alpha_l)}(C_i) = \\ &= \frac{1}{\mathrm{o}(G)} \sum_{x \in G} \overline{\chi^{(\alpha_j)}(x)} \chi^{(\alpha_l)}(x) = \delta_l^j\end{aligned}$$

da cui M è unitaria e perciò

$$\delta_l^j = (MM^*)_l^j = M_i^j \overline{M_i^l} = \frac{1}{\mathrm{o}(G)} \sum_{i=1}^{k} \sqrt{\#C_j \#C_l}\, \overline{\chi^{(\alpha_i)}(C_j)} \chi^{(\alpha_i)}(C_l)$$

da cui

III.19 **Teorema** *Vale la relazione di ortogonalità*

$$\sum_{\alpha \in \hat{G}} \overline{\chi^{(\alpha)}(C_j)} \chi^{(\alpha)}(C_i) = \frac{\mathrm{o}(G)}{\#C_j} \delta_{ij}.$$

III.3 Rappresentazione dei gruppi di Lie compatti

Passiamo alla teoria astratta delle rappresentazioni (in dimensione finita) dei gruppi di Lie compatti. Come vedremo, si deve procedere in modo analogo al caso finito (il quale è rientra in questo come caso particolare), sfruttando la misura di Haar per l'integrazione che viene a sostituire la somma sul gruppo.

III.3.1 Relazioni di ortogonalità e caratteri

Nel caso dei gruppi compatti l'algebra delle funzioni $\mathcal{A}(G)$ si definisce come lo spazio $L^2(G, d\mu)$, ove μ è la misura di Haar (normalizzata) sul gruppo compatto.
Cominciamo dalle relazioni di ortogonalità

III.20 Teorema *Per ogni $\alpha, \beta \in \hat{G}$, $i, j \in J_{d_\alpha}$, $k, l \in J_{d_\beta}$, valgono le seguenti relazioni di ortogonalità*

$$\int \overline{D_{ij}^{(\alpha)}(g)} D_{kl}^{(\beta)}(g)\; d\mu(g) = \frac{1}{d_\alpha} \delta_{\alpha\beta}\delta_{ik}\delta_{jl}.$$

Dimostrazione Pensiamo $\mathbb{C}^{d_\alpha}$ come spazio lineare base della rappresentazione irriducibile $U^{(\alpha)}$. Prendiamo $B : \mathbb{C}^{d_\alpha} \to \mathbb{C}^{d_\beta}$ e definiamo

$$\tilde{B} \equiv \int U^{(\beta)}(g)\, B U^{(\alpha)}(g)^{-1}\; d\mu(g)$$

(notiamo che l'integrale è ben definito perché, fissata una base, per definizione tutti gli elementi di matrice che compaiono sono sommabili). Allora

$$\begin{aligned} U^{(\beta)}(y)\, \tilde{B} &= U^{(\beta)}(y) \int U^{(\beta)}(g)\, B U^{(\alpha)}(g)^{-1}\; d\mu(g) = \\ &= \int U^{(\beta)}(yg)\, B U^{(\alpha)}(g)^{-1}\; d\mu(g) = \\ &= \int U^{(\beta)}(yg)\, B U^{(\alpha)}(yg)^{-1} U^{(\beta)}(y)\; d\mu(g) = \tilde{B} U^{(\beta)}(y) \end{aligned}$$

Dal lemma di Schur, concludiamo che $\tilde{B}$ è un isomorfismo oppure è nullo. Se $\alpha \neq \beta$, allora $\tilde{B}$ non può essere un isomorfismo, altrimenti $U^{(\alpha)}$ e $U^{(\beta)}$ sarebbero equivalenti, perciò $\tilde{B} = 0$. Se $\alpha = \beta$, allora $\tilde{B} = c\mathbb{I}$ con

$$c = \frac{1}{d_\alpha} \operatorname{Tr} \tilde{B} = \frac{1}{d_\alpha} \operatorname{Tr} B$$

di modo che

$$\tilde{B} = \frac{\operatorname{Tr} B}{d_\alpha} \delta_{\alpha\beta}\mathbb{I}.$$

Scegliamo adesso B avente un solo elemento di matrice non nullo, cioè scegliamo B tale da avere realizzazione matriciale $B_{pq} = \delta_{pl}\delta_{qj}$ (fissati l e j), allora se $\alpha = \beta$, $\operatorname{Tr} B = \delta_{lj}$ sicché

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{ki} &= \int D_{kp}^{(\beta)}(g)\, B_{pq} \overline{D_{iq}^{(\alpha)}(g)}\, d\mu(g) = \\ \frac{\delta_{lj}}{d_\alpha} \delta_{ki}\delta_{\alpha\beta} &= \int D_{kl}^{(\beta)}(g)\, \overline{D_{ij}^{(\alpha)}(g)}\, d\mu(g) \end{aligned}$$

(c.v.d.) come volevamo.

Con la solita definizione per i caratteri, cioè

$$\chi(g) = \operatorname{Tr} U(g),$$

abbiamo le seguenti relazioni di ortonormalità per i caratteri irriducibili

III.21 Teorema *Per ogni $\alpha, \beta \in \hat{G}$ valgono le seguenti relazioni di ortonormalità*

$$\int \overline{\chi^{(\alpha)}(g)} \chi^{(\beta)}(g)\; d\mu(g) = \delta_{\alpha\beta}.$$

Dimostrazione Abbiamo

$$\int \overline{\chi^{(\alpha)}(g)} \chi^{(\beta)}(g)\; d\mu(g) = \sum_{i,j} \int \overline{D_{ii}^{(\alpha)}(g)} D_{jj}^{(\beta)}(g)\; d\mu(g) = \sum_{i,j} \frac{1}{d_\alpha} \delta_{\alpha\beta}\delta_{ij} = \delta_{\alpha\beta}.$$

(c.v.d.)

Come nel caso finito, usando i caratteri otteniamo

III.22 **Teorema** *Sia U una rappresentazione del gruppo di Lie compatto G. Sia χ_U il suo carattere; se la decomposizione di U è*

$$U(g) = \bigoplus_{\alpha \in \hat{G}} m^{(\alpha)} D^{(\alpha)}$$

allora

$$m^{(\alpha)} = \int \overline{\chi^{(\alpha)}(g)} \chi_U(g)\, d\mu(g)$$

Dimostrazione Infatti,

$$\chi_U(g) = m^{(\alpha)} \chi^{(\alpha)}(g),$$

da cui

$$\int \overline{\chi^{(\alpha)}(g)} \chi_U(g)\, d\mu(g) = m^{(\alpha)} \int \overline{\chi^{(\alpha)}(g)} \chi^{(\alpha)}(g)\, d\mu(g) = m^{(\alpha)}.$$

(c.v.d.)

Ancora come nel caso finito, passando alle rappresentazioni complesse coniugate e prodotto tensore,

III.23 **Teorema** *L'insieme delle combinazioni lineari finite delle funzioni*

$$\left\{ D_{ij}^{(\alpha)} \right\}_{\alpha \in \hat{G}; i,j \in J_{d_\alpha}}$$

è chiuso sotto somme, prodotti e coniugazione complessa.

III.3.2 Il teorema di Peter-Weyl

Introduzione Uno dei risultati più importanti di questa sezione – cioè della teoria delle rappresentazioni dei gruppi compatti (e, in effetti, qui Lie non c'entra nulla, una volta assicurata l'esistenza di una misura di Haar) – è il cosiddetto **teorema di Peter-Weyl** secondo il quale le funzioni $D_{ij}^{(\alpha)}$ sono dense, nella norma del superiore, su $\mathcal{C}(G)$, l'insieme delle funzioni continue su G.
Un corollario immediato del teorema di Peter-Weyl è che $\sqrt{d_\alpha} D_{ij}^{(\alpha)}$ è una base ortonormale per $L^2(G, d\mu)$, la qual cosa ci dice pure che questo spazio è separabile. Infine, i caratteri irriducibili formeranno una base ortonormale per il centro di $L^2(G, d\mu)$.
A priori G non ha rappresentazioni finito-dimensionali, tuttavia ammette senz'altro una rappresentazione regolare sinistra

$$(L_x f)(y) \equiv f\left(x^{-1} y\right)$$

Ovviamente i sottospazi L-invarianti finito-dimensionali, se esistono, ci daranno delle rappresentazioni finito dimensionali di G. Tuttavia, come mostreremo, tali spazi finito-dimensionali saranno inclusi nello spazio generato dalle funzioni D.

III.4 **Lemma** *Valgono i seguenti fatti*

(i) *Sia $B \subset \mathcal{C}(G)$ un sottospazio finito-dimensionale L-invariante. Allora le funzioni in B sono combinazioni lineari finite delle $\left\{ D_{ij}^{(\alpha)} \right\}$.*

(ii) *Sia T un qualsiasi operatore autoaggiunto su $L^2(G, d\mu)$ tale che $TL_x = L_x T$, per ogni $x \in G$. Allora per qualsiasi λ,*

$$\left\{ u \in L^2(G, d\mu) \middle| Tu = \lambda u \right\} = E(\lambda; T)$$

è un sottospazio L-invariante.

Dimostrazione (i) L, ristretta a B, è finito-dimensionale, perciò è equivalente alla somma diretta di qualche $D^{(\alpha)}$. Ne viene che possiamo determinare una base $\left\{ \psi_{\alpha;k,i} \right\}$ con $k \in J_{m^{(\alpha)}}$ e $i \in J_{d_\alpha}$

(ricordiamo che $m^{(\alpha)}$ è la molteplicità con cui compare $D^{(\alpha)}$ nella L) di modo che

$$\psi_{\alpha;k,i}\left(x^{-1}y\right) = \sum_{\alpha;k,j} D_{ji}^{(\alpha)}(x)\,\psi_{\alpha;k,j}(y).$$

Infatti, sia $e_{\alpha;k,i}$ la base di $\bigoplus_\alpha m^{(\alpha)}\mathbb{C}^{d_\alpha}$ su cui agisce $U \equiv \bigoplus_\alpha m^{(\alpha)} D^{(\alpha)}$ equivalente a L su B. Allora vista la struttura a blocchi

$$U(x)\,e_{\alpha;k,i} = \sum_j D_{ji}^{(\alpha)}(x)\,e_{\alpha;k,j}$$

da cui, tornando a B, troviamo la base detta su B come immagine della $e_{\alpha;k,i}$.

Adesso, posto $y = e$ e sostituito x con x^{-1}, abbiamo

$$\psi_{\alpha;k,i}(x) = \sum_{\alpha;k,j} \psi_{\alpha;k,j}(e)\,\overline{D_{ij}^{(\alpha)}(x)}$$

da cui ogni elemento della base è combinazione lineare finita di $D_{ij}^{(\alpha)}$ (essendolo ciascuno dei coniugati di $D_{ij}^{(\alpha)}$). La tesi.

(ii) Se $Tu = \lambda u$, allora $TL_x u = L_x T u = \lambda L_x u$, perciò $E(\lambda, T)$ è invariante sotto L. **(c.v.d.)**

Il lemma ci dice di cercare operatori autoaggiunti che commutino con L e che abbiano autospazi finito-dimensionali. Il secondo requisito è certamente soddisfatto se decidiamo di considerare operatori compatti. In particolare, useremo operatori di Hilbert-Schmidt. Questi ultimi su $L^2(G, d\mu)$ sono tutti e soli quelli della forma

$$(Tf)(x) = \int t(x,y)\, f(y)\; d\mu(y)$$

con $t \in L^2(G \times G)$.

Ricordiamo che un operatore autoaggiunto di Hilbert-Schmidt (per il quale la funzione t soddisfa $t(x,y) = \overline{t(y,x)}$) ammette una base ortonormale di autovettori $\{u_n\}$ e che se $f \in R(T)$, allora esiste una successione $\{a_n\} \in \ell^2$ di modo che

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda_n e_n = T\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n\right).$$

Consideriamo gli operatori della forma

$$(T_g f)(z) = \int g\left(y^{-1}z\right) f(y)\; d\mu(y)$$

dove g è una funzione continua su G.

III.5 Lemma *Fissata $g \in \mathcal{C}(G)$, supponiamo che $\varphi_n \to \varphi$ in $L^2(G, d\mu)$, allora ogni $T_g\varphi_n$ è continua e converge uniformemente a $T_g\varphi$.*

Dimostrazione Cominciamo col vedere che per ogni $\varphi \in L^2(G, d\mu)$ si ha che $T\varphi$ è continua. Abbiamo

$$\begin{aligned} |(T\varphi)(z) - (T\varphi)(z')| &\leq \int \left|g\left(y^{-1}z\right) - g\left(y^{-1}z'\right)\right| |\varphi(y)|\; d\mu(y) \leq \\ &\leq \sup_{y\in G} \left|g\left(y^{-1}z\right) - g\left(y^{-1}z'\right)\right| \|\varphi\|_{L^2} \end{aligned}$$

poiché g è continua, per compattezza è uniformemente continua, dunque fissato ε troviamo un intorno dell'identità N di modo che se $\xi^{-1}\eta \in N$, allora

$$|g(\xi) - g(\eta)| < \varepsilon,$$

perciò, posto $\xi = y^{-1}z'$ e $\eta = y^{-1}z$, ci basta prendere $z'^{-1}z \in N$ per avere la tesi. Infine,

$$\|T\varphi - T\varphi_n\|_\infty \leq \sup|g|\,\|\varphi - \varphi_n\|_{L^2} \to 0.$$

(c.v.d.)

III.6 Lemma *Sia $g \in \mathcal{C}(G)$ tale che $g\left(x^{-1}\right) = \overline{g(x)}$. Allora*

(i) *ogni* $f \in R(T_g)$ *è limite* L^2 *di combinazioni finite di elementi di matrice di rappresentazioni irriducibili;*

(ii) *ogni* $f \in R\left(T_g^2\right)$ *è limite uniforme di combinazioni finite di elementi di matrice di rappresentazioni irriducibili.*

Dimostrazione (i) Poiché G è un insieme compatto, T_g è un operatore di Hilbert-Schmidt. Poiché

$$t(x,y) = g\left(y^{-1}x\right) = \overline{g\left(x^{-1}y\right)} = \overline{t(y,x)}$$

T_g è autoaggiunto. Come abbiamo visto, allora, ogni $f \in R(T_g)$ è limite L^2 della successione delle somme parziali sugli autovettori. Ora,

$$\begin{aligned}
(L_xT_g)(f)(z) &= L_x \int g\left(y^{-1}z\right) f(y)\, d\mu(y) = \int g\left(y^{-1}x^{-1}z\right) f(y)\, d\mu(y) = \\
&= \int g\left(y^{-1}x^{-1}z\right) f\left(x^{-1}xy\right)\, d\mu(y) = \int \tilde{g}(xy)\, \tilde{f}(xy)\, d\mu(y) = \\
&= \int \tilde{g}(y')\, \tilde{f}(y')\, d\mu(y') = \int g\left(y'^{-1}z\right) f\left(x^{-1}y'\right)\, d\mu(y') = \\
&= T_g(L_xf)(z)
\end{aligned}$$

da cui $L_xT_g = T_gL_x$. Dunque, ogni autovettore di T_g è somma finita di elementi di matrice di $D^{(\alpha)}$ da cui la tesi.

(ii) Sia $f = T_g^2u = T_gw$, $w = T_gu$. Allora w è limite L^2 di combinazioni finite di elementi di matrice di $D^{(\alpha)}$ delle forma

$$w_n = \sum_{i=1}^{k_n} a_i\lambda_i u_i,$$

perciò dal lemma precedente f è il limite uniforme della successione

$$Tw_n = \sum_{i=1}^{k_n} a_i\lambda_i^2 u_i,$$

(c.v.d.) da cui, la tesi.

Siamo finalmente in grado di dimostrare il

III.24 Teorema (Peter-Weyl) *Sia* G *un gruppo compatto (di Lie). L'insieme delle combinazioni lineari finite delle*

$$\left\{D_{ij}^{(\alpha)}\right\}_{\alpha\in\hat{G};i,j\in J_{d_\alpha}}$$

è denso nella norma $\|\cdot\|_\infty$ *in* $\mathcal{C}(G)$.

Dimostrazione Data $f \in \mathcal{C}(G)$ e fissato $\varepsilon > 0$, vogliamo trovare f_ε, combinazione lineare finita di elementi di matrice di rappresentazioni irriducibili, di modo che $\|f - f_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon$. Dal fatto che G è compatto, sappiamo che f è uniformemente continua, perciò possiamo trovare un intorno N dell'identità di modo che se $w^{-1}z \in N$, allora $|f(w) - f(z)| < \varepsilon/2$. Dalla continuità della moltiplicazione, possiamo trovare un intorno N_1 di e, di modo che $y, z \in N_1$, implica $yz \in N$.

Ora prendiamo g funzione continua positiva a supporto in N_1, avente integrale unitario e tale che $g\left(x^{-1}\right) = g(x)$ (per esempio preso $N_2 \subset N_1$ tale che $N_2^{-1} \subset N_1$ e scelta h positiva a supporto in N_2, prendiamo per g un multiplo di $x \mapsto h(x) + h\left(x^{-1}\right)$). Affermiamo che

$$\left\|T_g^2 f - f\right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Infatti, usando Fubini,

$$\left|T_g^2 f(z) - f(z)\right| = \left|\int d\mu(y)\, d\mu(w)\, g\left(y^{-1}z\right) g\left(w^{-1}y\right) [f(w) - f(z)]\right| \leq$$

$$\leq \int d\mu(y)\, d\mu(w)\, g\left(y^{-1}z\right) g\left(w^{-1}y\right) |f(w) - f(z)|$$

l'integranda è non nulla se e solo se $y^{-1}z, w^{-1}y \in N_1$, allora $w^{-1}z = \left(w^{-1}y\right)\left(y^{-1}z\right) \in N$ di modo che $|f(w) - f(z)| < \varepsilon/2$, per cui

$$\begin{aligned}
\left|T_g^2 f(z) - f(z)\right| &< \frac{\varepsilon}{2} \int d\mu(y)\, d\mu(w)\, g\left(y^{-1}z\right) g\left(w^{-1}y\right) = \\
&= \frac{\varepsilon}{2} \int d\mu(y)\, g\left(y^{-1}\right) \int d\mu(w)\, g\left(w^{-1}\right) = \\
&= \frac{\varepsilon}{2} \int d\mu(y)\, g(y) \int d\mu(w)\, g(w) = \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Dal lemma precedente, $T_g^2 f$ è limite uniforme di combinazioni finite di elementi di matrice di $D^{(\alpha)}$, perciò troviamo f_ε talché $\left\|T_g^2 f - f_\varepsilon\right\|_\infty < \varepsilon/2$; dalla diseguaglianza triangolare, la

(c.v.d.) tesi.

Poiché $\mathcal{C}(G)$ è denso in $L^2(G, d\mu)$ abbiamo il seguente

III.8 Corollario *L'insieme*

$$\left\{\sqrt{d_\alpha} D_{ij}^{(\alpha)}\right\}_{\alpha \in \hat{G}; i,j \in J_{d_\alpha}}$$

è una base ortonormale di $L^2(G, d\mu)$.

III.9 Corollario *L'insieme $\left\{\chi^{(\alpha)}\right\}_{\alpha \in \hat{G}}$ è una base ortonormale per l'insieme delle funzioni*

$$\left\{f \in L^2(G, d\mu) \,\middle|\, f\left(xyx^{-1}\right) = f(y),\ \forall x, y \in G\right\}.$$

Dimostrazione L'insieme è ortonormale e ogni $\chi^{(\alpha)}$ è una funzione di classe. Dunque, dobbiamo vedere che ogni funzione nel centro di $L^2(G, d\mu)$ appartiene allo spazio generato dai $\chi^{(\alpha)}$.

Dal corollario precedente,

$$f(x) = \sum_{\alpha; i,j} a_{\alpha;i,j} D_{ij}^{(\alpha)}(x)$$

sicché, visto che

$$\begin{aligned}
f(y) &= \int d\mu(x)\, f(y) = \int d\mu(x)\, f\left(xyx^{-1}\right) = \\
&= \int d\mu(x) \sum_{\alpha;i,j} a_{\alpha;i,j} D_{ij}^{(\alpha)}\left(xyx^{-1}\right) = \\
&= \sum_{\alpha;i,j} a_{\alpha;i,j} \int d\mu(x)\, D_{ij}^{(\alpha)}\left(xyx^{-1}\right),
\end{aligned}$$

infatti, se $f_n \xrightarrow{L^2} f$ (in spazi di misura finita) allora

$$\int f_n\, d\mu \to \int f\, d\mu$$

visto che

$$\left|\int f\, d\mu - \int f_n\, d\mu\right| \leq \int |f - f_n|\, d\mu \leq \|f - f_n\|_{L^2} \to 0.$$

Ora,

$$\begin{aligned}
\int d\mu(x)\, D_{ij}^{(\alpha)}\left(xyx^{-1}\right) &= \sum_{k,l} D_{kl}^{(\alpha)}(y) \int d\mu(x)\, D_{ik}^{(\alpha)}(x)\, \overline{D_{jl}^{(\alpha)}(x)} = \\
&= \sum_{k,l} \frac{1}{d_\alpha} D_{kl}^{(\alpha)}(y)\, \delta_{ij}\delta_{kl} = \frac{1}{d_\alpha} \chi^{(\alpha)}(y)\, \delta_{ij}
\end{aligned}$$

sicché

$$f(x)=\sum_\alpha \chi^{(\alpha)}(x)\left(\frac{1}{d_\alpha}\sum_{i=1}^{d_\alpha} a_{\alpha;i,i}\right),$$

(c.v.d.) da cui la tesi.

Come ultima applicazione del teorema di Peter-Weyl, concludiamo con l'analisi delle rappresentazioni infinito-dimensionali.

III.25 **Teorema** *Sia $\mathcal{H}$ un spazio di Hilbert separabile. Sia $U : G \to L(\mathcal{H})$ una mappa fortemente continua di operatori unitari su $\mathcal{H}$. Allora*

$$\mathcal{H}=\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n,$$

dove ciascun $\mathcal{H}_n$ è uno sottospazio finito-dimensionale invariante sotto U e tale che $U|_{\mathcal{H}_n}$ è una rappresentazione irriducibile di G.

Dimostrazione Definiamo gli operatori

$$Q_{ij}^{(\alpha)}\varphi \equiv d_\alpha \int \overline{D_{ij}^{(\alpha)}(g)}U(g)\varphi\, d\mu(g)$$

di modo che valgano

$$\begin{aligned} U(h)Q_{ij}^{(\alpha)}\varphi &= U(h)d_\alpha\int \overline{D_{ij}^{(\alpha)}(g)}U(g)\varphi\,d\mu(g)= \\ &= d_\alpha\int \overline{D_{ij}^{(\alpha)}(g)}U(h)U(g)\varphi\,d\mu(g)= \\ &= d_\alpha\int \overline{D_{ij}^{(\alpha)}(g)}U(hg)\varphi\,d\mu(g) \end{aligned}$$

d'altra parte

$$D_{ij}^{(\alpha)}(g)=\sum_k D_{ik}^{(\alpha)}\left(h^{-1}\right)D_{kj}^{(\alpha)}(hg)=\sum_k \overline{D_{ki}^{(\alpha)}(h)}D_{kj}^{(\alpha)}(hg)$$

sicché

$$\begin{aligned} U(h)Q_{ij}^{(\alpha)} &= \sum_k D_{ki}^{(\alpha)}(h)\,d_\alpha\int\overline{D_{kj}^{(\alpha)}(g)}U(g)\;d\mu(g)= \\ &= \sum_k D_{ki}^{(\alpha)}(h)\,Q_{kj}^{(\alpha)} \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} Q_{mn}^{(\beta)}Q_{ij}^{(\alpha)} &= d_\alpha\int\overline{D_{mn}^{(\beta)}(g)}U(g)\,Q_{ij}^{(\alpha)}\varphi\,d\mu(g)=\sum_k d_\alpha\int\overline{D_{mn}^{(\beta)}(g)}D_{ki}^{(\alpha)}(g)\,Q_{kj}^{(\alpha)}\varphi\,d\mu(g)= \\ &= \sum_k \delta_{\alpha\beta}\delta_{mk}\delta_{ni}Q_{kj}^{(\alpha)}=\sum_k \delta_{\alpha\beta}\delta_{mk}\delta_{ni}Q_{kj}^{(\alpha)}=\delta_{\alpha\beta}\delta_{ni}Q_{mj}^{(\alpha)}. \end{aligned}$$

Infine,

$$\left(Q_{ij}^{(\alpha)}\right)^*=Q_{ji}^{(\alpha)}$$

Poiché gli operatori $Q_{ii}^{(\alpha)}$ sono autoaggiunti, è interessante definire gli operatori autoaggiunti

$$P_\alpha \equiv \sum_i Q_{ii}^{(\alpha)}=d_\alpha\int\overline{\chi^{(\alpha)}(g)}U(g)\;d\mu(g).$$

Abbiamo subito che

$$U(x)P_\alpha U^{-1}(x)=P_\alpha$$

e che

$$P_\alpha P_\beta = \delta_{\alpha\beta} P_\alpha$$

per cui i P_α sono proiettori ortogonali su sottospazi $(R(P_\alpha))$ ortogonali tra loro. Consideriamo adesso

$$H \equiv \bigoplus_{\alpha\in\hat{G}} R(P_\alpha)$$

e mostriamo che coincide con $\mathcal{H}$, sicché

$$\mathbb{I} = \text{s}-\lim P_\alpha.$$

A questo scopo ci basta vedere che $H^\perp = 0$. Sia $\varphi \in H^\perp$, in particolare, per ogni α deve essere

$$(\mathbb{I} - P_\alpha)\varphi = \varphi$$

Applicando $Q_{mn}^{(\alpha)}$ ad ambo i membri, otteniamo

$$Q_{mn}^{(\alpha)}\varphi = Q_{mn}^{(\alpha)}\varphi - \sum_i Q_{mn}^{(\alpha)} Q_{ii}^{(\alpha)}\varphi = Q_{mn}^{(\alpha)}\varphi - \sum_i \delta_{ni} Q_{mi}^{(\alpha)}\varphi = 0.$$

Sia ψ_k una base ortonormale per $\mathcal{H}$ e poniamo

$$f_k(x) = (\psi_k, U(x)\varphi).$$

Dal teorema di Peter-Weyl abbiamo

$$\begin{aligned}
f_k(x) &= \sum_{\alpha;i,j} D_{ij}^{(\alpha)}(x)\, d_\alpha \int \overline{D_{ij}^{(\alpha)}(g)} f_k(g)\; d\mu(g) = \\
&= \sum_{\alpha;i,j} D_{ij}^{(\alpha)}(x)\, d_\alpha \int \overline{D_{ij}^{(\alpha)}(g)}\, (\psi_k, U(g)\varphi)\; d\mu(g) = \\
&= \sum_{\alpha;i,j} D_{ij}^{(\alpha)}(x) \left(\psi_k, d_\alpha \int \overline{D_{ij}^{(\alpha)}(g)} U(g)\varphi\, d\mu(g)\right) = \\
&= \sum_{\alpha;i,j} D_{ij}^{(\alpha)}(x) \left(\psi_k, Q_{ij}^{(\alpha)}\varphi\right)
\end{aligned}$$

da cui f_k è quasi ovunque nulla. Per qualche x, abbiamo $f_k(x) = 0$ per ogni k, infine, $U(x)\varphi = 0$, da cui $\varphi = 0$, come volevamo.

Per concludere dobbiamo dimostrare che su ogni sottospazio $R(P_\alpha)$, U è equivalente alla somma diretta di qualche copia di $D^{(\alpha)}$.

Notiamo che gli operatori $Q_{ii}^{(\alpha)}$ sono proiettori mutuamente ortogonali che hanno P_α per somma. Inoltre, $Q_{ij}^{(\alpha)}$ è una isometria parziale da $R\left(Q_{jj}^{(\alpha)}\right)$ in $R\left(Q_{ii}^{(\alpha)}\right)$, cioè restringendo $Q_{ij}^{(\alpha)}$ al primo sottospazio troviamo isometricamente il secondo, ma sull'ortogonale al primo $Q_{ij}^{(\alpha)}$ è nullo. Poniamo $n_\alpha \equiv \dim R\left(Q_{11}^{(\alpha)}\right)$, allora presa in $R\left(Q_{11}^{(\alpha)}\right)$ la base ortonormale $\{\varphi_k\}$, i vettori

$$\varphi_{i;k} \equiv Q_{i1}^{(\alpha)}\varphi_k$$

sono una base per $R\left(Q_{ii}^{(\alpha)}\right)$ e dunque $\left\{\varphi_{i;k}\right\}_{i\in J_{d_\alpha};k\in J_{n_\alpha}}$ è una base ortonormale per $R(P_\alpha)$. Infine,

$$U(h)\varphi_{i;k} = U(h) Q_{i1}^{(\alpha)}\varphi_k = \sum_j D_{ji}^{(\alpha)}(h)\, Q_{j1}\varphi_k = \sum_j D_{ji}^{(\alpha)}(h)\, \varphi_{j;k}$$

(c.v.d.) di modo che $U(h)$ ristretto a $R(P_\alpha)$ è la somma diretta di n_α copie di $D^{(\alpha)}(h)$.

Bibliografia

[1] **William Boothby**, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemmanian Geometry* (second edition), Academic Press.

[2] **Balázs Csikós,** *Differential Geometry*, `www.ss.elte.hu/geometry/csikos/dif/dif.html`;

[3] **Serge Lang**, *Real and Functional Analysis (third edition)*, GTM 142, Springer-Verlag;

[4] **William S. Massey**, *Algebraic Topology: an Introduction*, GTM 56, Springer-Verlag;

[5] **Jerrold Marsden, Tudor Ratiu**, *Manifolds, Tensors and Analysis*, `www.cds.caltech.edu/~marsden`;

[6] **Michael Reed, Barry Simon**, *Modern Methods of Mathematical Physics*, (volume 1) *Functional Analysis*, Academic Press;

[7] **Michael Reed, Barry Simon**, *Modern Methods of Mathematical Physics*, (volume 2) *Fourier Analysis*, *Self-Adjointness*, Academic Press;

[8] **Theodor Bröcker, Tammo tom Dieck**, *Representations of Compact and Lie Groups*, GTM 98, Springer-Verlag;

[9] **Barry Simon**, *Representations of Finite and Compact Groups*, Graduate Studies in Mathematics 10, AMS;

[10] **V. S. Varadarajan**, *Lie Groups, Lie Algebras, and their Representations*, GTM 102, Springer;

[11] **Frank W. Warner**, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, GTM 94, Springer-Verlag;

[12] **G. De Franceschi**, **L. Maiani**, *An Introduction to Group Theory and to Unitary Simmetry Models*, Fortschritte der Physik **13**, 279-384 (1964).