TORTUGA
Publisher

Analisi II per Fisici

Teoria e complementi

Seconda edizione, Agosto 2000

Alberto Maggi

[219,915]

55 via Lopez, 57010 Guasticce (LI)

0586 984 980

Sommario

Prefazione	9
I Spazi metrici e spazi normati	11
I.1 Spazi metrici	11
I.1.1 Definizioni	11
I.1.2 Topologia indotta	12
I.1.3 Successioni	16
I.1.4 Topologia e successioni	17
I.2 Funzioni continue	18
I.2.1 Limiti	18
I.2.2 Funzioni continue	19
I.2.3 Funzioni continue e topologia	20
I.2.4 Il teorema di cambio di variabile	21
I.2.5 Successioni di funzioni continue	21
I.3 Spazi normati e spazi di Banach	23
I.3.1 Richiami sugli spazi vettoriali	23
I.3.2 Spazi normati e spazi di Banach	24
I.3.3 Isometrie tra spazi metrici	26
I.3.4 Funzioni lipschitziane	27
I.3.5 Funzioni lineari e bilineari tra spazi normati	28
I.3.6 Norme topologicamente equivalenti	31
I.4 Spazi compatti e connessi	31
I.4.1 Definizione di spazio compatto	32
I.4.2 Caratterizzazione degli spazi metrici compatti	33
I.4.3 Continuità e compattezza	35
I.4.4 Continuità delle funzioni lineari ed equivalenza delle norme in dimensione finita	37

	I.4.5	Cenno agli spazi connessi	38
I.5		Il lemma delle contrazioni di Cacciopoli e Banach	39
II		Calcolo differenziale	41
II.1		Derivazione	41
	II.1.1	Derivazione secondo un vettore	41
	II.1.2	Derivate parziali	43
II.2		Differenziazione	45
	II.2.1	Il differenziale	45
	II.2.2	Teorema del differenziale totale	47
II.3		Risultati del calcolo differenziale	49
	II.3.1	Derivate successive	49
	II.3.2	Formula di Taylor	50
	II.3.3	Differenziale della funzione composta	55
II.4		Massimi e minimi relativi per funzioni reali definite in $\mathbb{R}^n$	57
III		Funzioni implicite	61
III.1		Introduzione	61
	III.1.1	Descrizione di curve	61
III.2		Il teorema di Dini	62
	III.2.1	Il teorema di Dini nel piano	62
	III.2.2	Il teorema di Dini in $\mathbb{R}^{n+1}$	64
III.3		Il teorema delle funzioni implicite nel caso generale	65
	III.3.1	Il teorema delle funzioni implicite da $\mathbb{R}^{m+n}$ in $\mathbb{R}^n$	65
	III.3.2	Dipendenza funzionale	69
	III.3.3	Il teorema delle funzioni implicite: caso generale, da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$	72
III.4		Diffeomorfismi	72
	III.4.1	Definizioni e prime proprietà	72
	III.4.2	Invertibilità e diffeomorfismi locali	73
III.5		Massimi e minimi vincolati	74
	III.5.1	Il teorema dei moltiplicatori di Lagrange	74

IV	Equazioni differenziali ordinarie	77
IV.1	Introduzione	77
	IV.1.1 Notazioni e terminologia	77
IV.2	Esistenza e unicit� locale	78
	IV.2.1 Equazione integrale di Volterra	78
	IV.2.2 Il teorema di Cauchy e Lipschitz	79
	IV.2.3 Osservazioni e complementi	82
IV.3	Prolungabilit� delle soluzioni	84
	IV.3.1 Prolungamenti e soluzioni massimali	84
	IV.3.2 Prolungabilit� e fuga dai compatti	85
IV.4	Esistenza e unicit� globale	87
IV.5	Equazioni differenziali a variabili separabili	88
	IV.5.1 Equazioni a variabili separabili	88
	IV.5.2 Equazioni omogenee	90
	IV.5.3 Sistemi autonomi	90
IV.6	Equazioni differenziali lineari	92
	IV.6.1 Introduzione	92
	IV.6.2 Equazioni lineari scalari di ordine superiore	93
	IV.6.3 Funzione esponenziale dalla retta reale allo spazio delle matrici	97
	IV.6.4 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti	101
	IV.6.5 L'equazione di Eulero	105
IV.7	Flusso di un'equazione differenziale	106
	IV.7.1 Continuit� del flusso	106
	IV.7.2 Differenziabilit� del flusso	107
	IV.7.3 Il teorema di rettificazione	110
V	La misura di Lebesgue	113
V.1	Misura di un insieme	113
	V.1.1 Misura di plurirettangoli	113
	V.1.2 Misura di aperti e compatti	114
	V.1.3 Misura di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$	116
V.2	Additivit� e subadditivit� numerabile della misura di Lebesgue	120
	V.2.1 Stime per la misura interna ed esterna di famiglie numerabili	120

	V.2.2	I teoremi di additività e subadditività numerabile della misura	122
V.3		Estensione della misurabilità	124
	V.3.1	Misurabilità di insiemi di misura infinita	124
	V.3.2	La misura nei prodotti cartesiani	126
VI		L'integrale di Lebesgue negli spazi reali	131
	VI.1	L'integrale di Lebesgue	131
		VI.1.1 L'integrale delle funzioni semplici	131
		VI.1.2 Integrale per funzioni qualsiasi	133
	VI.2	Funzioni misurabili	137
		VI.2.1 Definizione di funzione misurabile	137
		VI.2.2 Proprietà delle funzioni misurabili	138
	VI.3	Estensioni dell'integrale	142
		VI.3.1 Estensione di sommabilità e misurabilità	142
	VI.4	Teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale	153
		VI.4.1 Il teorema di Beppo Levi	153
		VI.4.2 Il lemma di Fatou	154
		VI.4.3 Il teorema di Lebesgue	156
	VI.5	Derivazione sotto il segno di integrale	157
	VI.6	Il teorema di Fubini	159
		VI.6.1 Misura di insiemi tramite sezioni	159
		VI.6.2 Il teorema di Fubini	162
	VI.7	Lunghezze, aree e volumi	163
		VI.7.1 Cambiamento di variabile negli integrali	163
		VI.7.2 Lunghezza di una curva	163
		VI.7.3 Superfici. Area di una superficie	164
		VI.7.4 Area e volume delle figure di rotazione in $\mathbb{R}^3$	165
	VI.8	Cenni di calcolo delle variazioni	166
		VI.8.1 Equazioni di Eulero-Lagrange	166
		VI.8.2 Funzionali convessi ed equazioni di Eulero-Lagrange	169
		VI.8.3 La trasformazione di Legendre e le equazioni di Hamilton-Jacobi	170

VII	La serie di Fourier	171
VII.1	Somme di segnali sinusoidali	171
	VII.1.1 Polinomi trigonometrici	171
VII.2	La serie di Fourier nello spazio L_T^2	173
	VII.2.1 Alcune considerazioni sugli spazi prehilbertiani	173
	VII.2.2 Lo spazio L_T^2	177
VII.3	Teoremi di convergenza puntuale	181
	VII.3.1 Il lemma di Riemann-Lebesgue	181
	VII.3.2 Il teorema di convergenza puntuale	182
VII.4	Teoremi di convergenza uniforme	185
	VII.4.1 Il teorema di Féjer	188
VIII	Forme differenziali	191
VIII.1	Definizione e prime proprietà	191
	VIII.1.1 Forme differenziali	191
	VIII.1.2 Integrazione delle forme differenziali	191
VIII.2	Forme differenziali esatte	193
VIII.3	Il teorema della divergenza	196
	VIII.3.1 Integrali curvilinei e superficiali	196
	VIII.3.2 Il teorema della divergenza o di Gauss-Green	196
VIII.4	Il teorema di Stokes	199
	VIII.4.1 Alcune considerazioni preliminari	199
	VIII.4.2 La formula di Stokes	201
	VIII.4.3 Energia potenziale	202
	Indice analitico	203
	Bibliografia	205

Prefazione

Questo testo raccoglie gli appunti del corso di Analisi II tenuto per gli studenti del corso di laurea in Fisica dal professor M.K. Venkhatsha Murthy, durante l'anno accademico 1999-2000. Gli appunti sono stati rielaborati e ampliati secondo i miei gusti e le mie esigenze specifiche maturate nello studio parallelo del corso di Meccanica Analitica.

Ecco allora che ho riservato molto spazio allo studio delle equazioni differenziali e all'approfondimento di aspetti molto particolari, quali la continuità e la differenziabilità del flusso, la giustificazione dell'approssimazione delle piccole oscillazioni, il teorema di rettificazione.

Nella stessa ottica il capitolo dedicato al teorema di Ulisse Dini sulle funzioni implicite e sui diffeomorfismi, che tanta rilevanza assume nella definizione di varietà differenziabile riemanniana, di gradi di libertà e di coordinate generalizzate.

Qualche accenno al calcolo delle variazioni, allo studio di curve e superfici e alle varietà, completano il corso.

Il primo capitolo non si presta a uno studio sistematico, ma è semmai un ricettacolo di nozioni e strumenti indispensabili, da assimilare con pazienza nel corso dello studio dei capitoli successivi, che dal primo attingono sempre. La teoria dell'integrazione è quella di Lebesgue, ma viene trattata molto succintamente a causa del poco tempo dedicatole durante il corso. Analogo discorso vale per le forme differenziali (il capitolo relativo è stato aggiunto solo in un secondo momento, perché l'argomento non è stato trattato nel corso del professor Murthy).

Il lavoro qui presentato è senz'altro debitore di quello svolto dal professor Murthy e - in qualche misura - dei suoi collaboratori, dott. Tortorelli (specie per le serie di Fourier) e dott. Novaga.

In principal modo la rielaborazione dei concetti spiegati nel corso è stata effettuata sulla linea del libro di Analisi II di Enrico Giusti. D'altra parte ampia parte di queste dispense si rifà ad *Analisi Due* di de Marco (soprattutto quello che riguarda le serie di Fourier) e a *Equazioni differenziali* di Arnol'd. Per un elenco più completo si consulti comunque la bibliografia.

Si noti, in ogni caso, come questo testo **non lascia alcuna dimostrazione al lettore** neppure la più evidente, specificando tutti i dettagli di ogni deduzione. In questo senso il materiale qui presentato potrà apparire sovrabbondante o tedioso, ma solo dalla comprensione di tutti gli aspetti, di quelli complementari e di quelli più astratti, può scaturire uno studio di successo.

Mi piace in questa sede ringraziare alcune persone (e non ringraziarne altre). I miei compagni e amici Giacomo Santini, Antonio Maffei, Giacomo Marmorini, Walter Del Pozzo, Matteo Cantiello, il sig. Ivan Ordavo, Boris Mangano, Leonardo Facchin...

Insieme a loro ringrazio Giulio Peruginelli che mi ha fornito il programma, basato ovviamente su $\text{\LaTeX}$, col quale ho *typesettato* questi e altri appunti.

Guasticce, giugno duemila.

Alberto Maggi

Spazi metrici e spazi normati

In questo capitolo introduciamo e sviluppiamo in modo elementare i concetti di spazi metrici e normati. Particolare attenzione deve essere riservata allo studio delle funzioni continue e degli spazi compatti. Da ultimo è proposta la dimostrazione del lemma delle contrazioni di Cacciopoli e Banach che risulterà uno strumento utilissimo nell'economia della trattazione.

I.1 Spazi metrici

I.1.1 Definizioni

Metriche e spazi metrici

Poniamo alcune definizioni fondamentali:

Definizione I.1 Sia X un insieme non vuoto. Si dice *metrica* o *distanza* su X una funzione

$$\begin{aligned} d: X \times X &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) \end{aligned}$$

tale che, per ogni $x, y, z \in X$

- (i) $d(x, y) \geq 0$; inoltre, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$;
- (iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (disuguaglianza triangolare).

Definizione I.2 Sia X un insieme non vuoto e d una metrica su X , allora la coppia (X, d) si dice *spazio metrico*.

Esempi notevoli

Esempio I.1 Sono esempi significativi di spazi metrici $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ avendo posto $d \equiv |x - y|$.

Esempio I.2 Sia A un insieme chiuso in $\mathbb{R}$ e consideriamo l'insieme $\mathcal{C}^0(A)$ delle funzioni reali di variabile reale definite su A . Vediamo allora che se $f, g \in \mathcal{C}^0(A)$

$$d_\infty(f, g) \equiv \max_{x \in A} |f(x) - g(x)|$$

è una metrica. Notiamo subito che, essendo A chiuso la definizione è ben posta in forza del teorema di Weierstraß, inoltre è immediato rilevare che d_∞ è a valori non negativi.

- (i) $d_\infty(f, g) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in A \ 0 \leq |f(x) - g(x)| \leq \max_{x \in A} |f(x) - g(x)| = 0$, il che equivale a dire $\forall x \in A \ |f(x) - g(x)| = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$;
- (ii) $d_\infty(f, g) = \max_{x \in A} |f(x) - g(x)| = \max_{x \in A} |g(x) - f(x)| = d_\infty(g, f)$;
- (iii) si ha

$$\forall x \in A \ |f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|$$

passando agli estremi superiori si ricava

$$\max_{x \in A} |f(x) - g(x)| \leq \max_{x \in A} |f(x) - h(x)| + \max_{x \in A} |h(x) - g(x)|$$

da cui, la tesi.

Esempio I.3 Un altro esempio interessante riguarda lo spazio delle funzioni continue su un intervallo chiuso $\mathcal{C}^0([a, b])$, ove si pone

$$d(f, g) \equiv \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Verificare che valgono simmetria e disuguaglianza triangolare è banale. Vediamo allora solo (i).

Se $f = g$ si ha subito $d(f, g) = 0$. Viceversa, sia $0 \leq \int_a^b |f(x) - g(x)| dx = 0$, e supponiamo che esista un punto x_0 in $[a, b]$ in cui $f(x_0) \neq g(x_0)$. $|f(x) - g(x)|$ è continua perciò, essendo $|f(x_0) - g(x_0)| > 0$, esiste un reale positivo δ' talché, per la permanenza del segno,

$$|x - x_0| < \delta' \Rightarrow |f(x) - g(x)| > 0$$

preso $\delta < \delta'$ si ha

$$|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - g(x)| > 0$$

sicché $m \equiv \min |f(x) - g(x)| > 0$, per monotonia negli estremi di integrazione si ha

$$0 = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \geq \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} |f(x) - g(x)| dx \geq 2m\delta > 0$$

il che è assurdo.

1.1.2 Topologia indotta

Insiemi aperti

Fissiamo, una volta per tutte, (X, d) spazio metrico.

Definizione I.3 Sia $\xi \in X$, si definisce palla aperta o palla o sfera centrata in ξ di raggio ρ l'insieme

$$B(\xi, \rho) \equiv \{x \in X \mid d(\xi, x) < \rho\}$$

Definizione I.4 Sia $\xi \in X$, si definisce intorno di ξ ogni insieme che contenga una palla centrata in ξ . Indichiamo con $\mathcal{F}(\xi)$ la famiglia di intorni di ξ .

Osservazione I.1 Una palla centrata in ξ è un intorno di ξ .

Proposizione I.1 Preso $\xi \in X$ e considerata $\mathcal{F}(\xi)$ si ha

- (i) ξ ha almeno un intorno; ogni intorno di ξ contiene ξ stesso;
- (ii) se $U \in \mathcal{F}(\xi)$ e se $V \in \mathcal{F}(\xi)$ allora anche $U \cap V \in \mathcal{F}(\xi)$;
- (iii) se $U \in \mathcal{F}(\xi)$ allora esiste $V \in \mathcal{F}(\xi)$ tale che per ogni $y \in V$, U risulta essere un intorno di y .

Dimostrazione La (i) è banale. Vediamo la (ii), per ipotesi esistono due palle di ξ tali che

$$\begin{aligned} B(\xi, r_1) &\subseteq U \\ B(\xi, r_2) &\subseteq V \end{aligned}$$

ora, passiamo alle intersezioni per ricavare

$$B(\xi, r_1) \cap B(\xi, r_2) \subseteq U \cap V$$

ma, posto $r \equiv \min \{r_1, r_2\}$, si ha

$$B(\xi, r) = B(\xi, r_1) \cap B(\xi, r_2)$$

la tesi.

Passiamo a (iii). Sia $B(\xi, r) \subseteq U$ allora poniamo $V \equiv B(\xi, r/2)$. Sia ora $y \in V$; vogliamo mostrare che $B(y, r/2) \subseteq B(\xi, r) \subseteq U$. La qual cosa coinciderebbe con la tesi.

(c.v.d.)
$$\forall z \in B(y, r/2) : d(\xi, z) \leq d(\xi, y) + d(y, z) \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r \Rightarrow z \in B(\xi, r).$$

Definizione I.5 *A, sottoinsieme di X, si dice aperto se per ogni suo punto ξ esiste un intorno di ξ tutto contenuto in A.*

Vediamo che se A è un aperto, allora ogni punto di A ha una palla tutta contenuta in A stesso. D'altra parte se ogni punto di A ammette una palla centrata in esso tale da essere contenuta tutta in A, allora A è aperto.

Infine,

Proposizione I.2 *$A \subseteq X$ è aperto se e solo se per ogni suo punto ξ esiste una palla centrata in ξ tutta contenuta in A.*

Proposizione I.3 *Valgono*

- (i) *L'unione di una famiglia $\mathcal{F}$ (infinita o finita) di aperti, $U \equiv \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$, è un insieme aperto.*
- (ii) *L'intersezione finita di aperti, $U \equiv \bigcap_{i=1}^n A_i$, è un insieme aperto.*

Dimostrazione

- (i) Se $\xi \in U$, allora $\xi \in A$ per un qualche A appartenente a $\mathcal{F}$. Allora, essendo A aperto esisterà un intorno di ξ tutto contenuto in A e dunque in U.
- (ii) Se $\xi \in U$ allora $\forall i \in J_n \xi \in A_i$ ne deriva che esistono n palle centrate in ξ ciascuna tutta contenuta in A_i , ossia

$$\forall i \in J_n, \exists \rho_i > 0 : B(\xi, \rho_i) \subseteq A_i$$

ne deriva che

$$\bigcap_{i=1}^n B(\xi, \rho_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^n A_i = U$$

d'altra parte è subito visto che, posto $\rho \equiv \min \rho_i$, si ha

$$B(\xi, \rho) = \bigcap_{i=1}^n B(\xi, \rho_i)$$

da cui la tesi.

(c.v.d.)

È facile vedere che intersezioni infinite di aperti non sono - in generale - aperte, si consideri, appunto, il seguente esempio

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[= \{0\}$$

L'insieme X e l'insieme vuoto si definiscono aperti.

Insiemi chiusi

Definizione I.6 *A, sottoinsieme di X, si dice chiuso se il suo complementare $X \setminus A$ è aperto.*

Dalle leggi di de Morgan, $X \setminus \bigcup A = \bigcap X \setminus A$ e $X \setminus \bigcap A = \bigcup X \setminus A$, si perviene alla

Proposizione I.4 *Risulta*

(i) L'intersezione di una famiglia $\mathcal{F}$ (infinita o finita) di chiusi, $U \equiv \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A$, è un insieme chiuso.

(ii) L'unione finita di chiusi, $U \equiv \bigcup_{i=1}^n A_i$, è un insieme chiuso.

Definizione I.7 Sia $A \subseteq X$, allora ξ si dice punto di accumulazione per A se ogni intorno di ξ interseca A in almeno un punto diverso da ξ . L'insieme dei punti di accumulazione di A si dice derivato e si indica con $\mathcal{D}A$.

Osservazione I.2 Equivalentemente si dirà che ξ è di accumulazione per A se in ogni sfera centrata in ξ cadrà almeno un punto di A diverso da ξ .

Osservazione I.3 Se ξ è punto di accumulazione allora ciascuna sfera ha in effetti infiniti punti di intersezione con A . Infatti, siano per assurdo $\{x_1, \dots, x_n\}$ gli unici punti di intersezione di $B(\xi, r)$ con A , allora posto $\rho \equiv \min \{x_1, \dots, x_n\}$ la palla $B(\xi, \rho)$ avrebbe intersezione vuota con A , assurdo.

Teorema I.1 *Un insieme A è chiuso se e solo se contiene tutti i suoi punti di accumulazione.*

Dimostrazione ($\Rightarrow$) Sia A chiuso e $x \in \mathcal{D}A$. Sia, per assurdo, $x \notin A$. Allora $x \in X \setminus A$, ma questo è aperto sicché esiste una palla centrata in x tutta contenuta in $X \setminus A$ e perciò avente intersezione vuota con A . Ma allora $x \notin \mathcal{D}A$ che è assurdo.

($\Leftarrow$) A contenga tutti i suoi punti di accumulazione. Sia $x \in X \setminus A$, allora x non è di accumulazione per A , cioè esiste una sfera centrata in x avente intersezione vuota con A e perciò tutta contenuta in $X \setminus A$, ne deriva che $X \setminus A$ è aperto e infine A è chiuso.

(c.v.d.)

**Chiusura,
frontiera,
parte interna**

Poniamo qualche altra definizione

Definizione I.8 Si dice chiusura di A l'insieme $\bar{A}$ dato dall'intersezione di tutti i chiusi che contengono A , cioè il più piccolo chiuso in cui A è contenuto.

Proposizione I.5 *La chiusura di A coincide con l'unione di A e del suo derivato.*

Dimostrazione Bisogna far vedere che (i) $A \cup \mathcal{D}A$ è chiuso, (ii) D chiuso, con $A \subseteq D$, implica $A \cup \mathcal{D}A \subseteq D$. Infatti, da (i) si ricava che la chiusura di A è contenuta in $A \cup \mathcal{D}A$, da (ii), che $A \cup \mathcal{D}A$ è contenuto in tutti i chiusi che contengono in A e dunque in $\bar{A}$. Infine, $\bar{A} = A \cup \mathcal{D}A$.

(i) Sia $\xi \notin A \cup \mathcal{D}A$, allora esiste una sfera di raggio r centrata in ξ avente intersezione vuota con A . D'altra parte se in $B(\xi, r)$ cadesse $x \in \mathcal{D}A$, in $B(x, r - d(x, \xi))$ cadrebbero infiniti punti di A che andrebbero a essere contenuti nella palla iniziale, il che è assurdo.

(ii) Sia D un chiuso contenente A . Per definizione di punto di accumulazione $\mathcal{D}A \subseteq \mathcal{D}D$, e allora $A \cup \mathcal{D}A \subseteq D$.

(c.v.d.)

Definizione I.9 Si definisce frontiera o bordo di A l'insieme ∂A formato dai punti ξ tali che in ogni loro intorno cadano punti di A e del suo complementare.

Osservazione I.4 Ancora, sarà possibile sostituire nella definizione sfera al posto di intorno.

Proposizione I.6 Preso $A \subseteq X$, vale

$$\partial A = \bar{A} \cap (\overline{X \setminus A})$$

Dimostrazione Sia $x \in \partial A$ allora ogni intorno di x interseca A in un almeno un punto e dunque appartiene ad A o a $\mathcal{D}A$ (a seconda che l'intersezione sia ridotto al solo x). Ma allora $x \in \bar{A}$. Con analogo ragionamento si rinviene che $x \in \overline{X \setminus A}$. Dunque è visto che $\partial A \subseteq \bar{A} \cap (\overline{X \setminus A})$.

Veniamo all'inverso. Sia $x \in \bar{A} \cap (\overline{X \setminus A})$, allora se $x \in A$ un suo qualsiasi intorno interseca A ; se $x \in \mathcal{D}A$, allora per definizione un qualsiasi intorno di x ha intersezione non vuota con A . Con analogo ragionamento, si ricava che ogni intorno di x ha intersezione non vuota con $X \setminus A$. Dunque, $x \in \partial A$. Infine, si ottiene la tesi.
(c.v.d.)

Definizione I.10 Si definisce parte interna di A l'insieme dei punti aventi un intorno tutto contenuto in A :

$$\dot{A} \equiv \{x \in X \mid \exists U \in \mathcal{F}(x) : U \subseteq A\}$$

Proposizione I.7 $\dot{A}$ è un insieme aperto.

Dimostrazione Sia $x \in \dot{A}$ allora esiste un intorno U di x tutto contenuto in A e perciò $x \in A$. Ne deriva che $\dot{A} \subseteq A$. Inoltre, esiste un intorno $V \subseteq U$ di x talché per ogni $y \in V$, U risulta un intorno di y . D'altra parte siccome U è tutto contenuto in A , si ha che $y \in \dot{A}$, e perciò $V \subseteq \dot{A}$. Abbiamo, dunque, esibito un intorno di ogni $x \in \dot{A}$ tutto contenuto in $\dot{A}$. Da ciò si ricava che $\dot{A}$ è aperto.
(c.v.d.)

Proposizione I.8 $\dot{A}$ è il più grande aperto contenuto in A , cioè

$$\dot{A} = \bigcup_{E \subseteq A, E \text{ aperto}} E$$

Dimostrazione Sia $x \in \dot{A}$, allora esiste un intorno U di x tutto contenuto in A . D'altra parte un intorno contiene una palla centrata in x che è un aperto. Ne deriva che $\dot{A} \subseteq \bigcup E$.

Sia ora $x \in \bigcup E$, allora tra gli E esiste una palla tutta contenuta in A , centrata in x . Dunque esiste un intorno di x tutto contenuto in A . La tesi.
(c.v.d.)

Osservazione I.5 $\dot{A}$ può essere l'insieme vuoto come risulta nell'esempio $A \equiv \{\xi\}$.

Definizione I.11 Preso A sottoinsieme di X , si dice parte esterna di A la parte interna di $X \setminus A$.

Insiemi limitati, distanze Proseguiamo ponendo ancora qualche altra definizione.

Definizione I.12 Sia $A \subseteq (X, d)$. Si dice che A è limitato se esiste una palla centrata in un punto ξ di X contenente A .

Proposizione I.9 Sia A limitato, allora per ogni $\xi \in X$, esiste un raggio ρ talché $A \subseteq B(\xi, \rho)$

Dimostrazione Sia $A \subseteq B(x_0, r)$. Preso $\xi \in X$ e $x \in A$ si ha

$$\begin{aligned} d(\xi, x) &\leq d(x, x_0) + d(x_0, \xi) \Rightarrow \\ (c.v.d.) \quad d(\xi, x) &< r + d(x_0, \xi) \equiv \rho \end{aligned}$$

Definizione I.13 Sia A un sottoinsieme limitato di X , definiamo diametro di A la quantità

$$\text{diam}(A) \equiv \sup \{d(x, y) \mid x, y \in A\}$$

Definizione I.14 Siano $A \subseteq (X, d)$ e $\xi \in X$ si definisce distanza di ξ da A la quantità

$$d(\xi, A) \equiv \inf \{d(\xi, y) \mid y \in A\}$$

Proposizione I.10 Sia $A \subseteq (X, d)$ allora $\bar{A} = \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}$.

Dimostrazione Sia $D \equiv \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}$. Si è già visto che $\bar{A} = A \cup \mathcal{D}A$. Sia $x \in A$ allora, ovviamente, $d(x, A) = 0$ e $x \in D$. Sia ora $x \in \mathcal{D}A$. Mostriamo che $0 = \inf \{d(x, y) \mid y \in A\}$. Per la non negatività di d , 0 è un minorante. Fissiamo ora $\varepsilon > 0$, troviamo almeno un punto $y \in A$ distante da x meno di ε , per definizione di punto di accumulazione. Si ha infine $\bar{A} \subseteq D$.

Sia ora $x \in D$. Allora per ogni fissato raggio $\varepsilon > 0$ si trova almeno un y distante da x per meno di ε . Ne deriva che ogni sfera centrata in x ha intersezione non vuota con A . Si ha (c.v.d.) perciò $x \in A$ oppure $x \in \mathcal{D}A$. Si conclude allora $\bar{A} = D$.

I.1.3 Successioni

Definizioni

Fissiamo X spazio metrico dotato della distanza d . Si ha

Definizione I.15 Una applicazione da $\mathbb{N}$ in X si dice successione a valori in X .

Una successione è univocamente determinata dalla relazione $n \mapsto x_n \in X$, per estensione la si indica tuttavia col suo grafico $\{x_n\}$.

Un concetto già noto è quello di **convergenza** di una successione:

Definizione I.16 Una successione $\{x_n\}$ si dice convergente a un punto $x \in X$ se la distanza del termine n -esimo della successione da x tende a 0, per n che tende all'infinito:

$$x_n \rightarrow x, n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$$

Definizione I.17 Data una applicazione $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strettamente monotona, si definisce sottosuccessione o successione estratta da $\{x_n\}$ secondo k , la successione $\{x_{k(n)}\}$.

Teorema I.2 Se una successione è converge a x allora ogni sua sottosuccessione converge allo stesso limite x .

Osservazione I.6 Una successione converge al valore $x \in X$ se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq \nu \quad d(x_n, x) < \varepsilon$$

Definizione I.18 Una successione $\{x_n\}$ si dice di Cauchy se per ogni fissato $\varepsilon > 0$ si trova un indice ν dipendente da ε , talché per ogni $n, m \geq \nu$ vale $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Osservazione I.7 Una successione convergente è di Cauchy, come si verifica subito applicando la disuguaglianza triangolare.

Definizione I.19 Uno spazio metrico nel quale ogni successione di Cauchy è convergente si dice completo.

Esempi

Esempio I.4 Consideriamo $\{\mathbf{x}_n\}$ una successione a valori in $\mathbb{R}^m$, dove fissiamo la distanza euclidea

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2}$$

Ora, poniamo $\mathbf{x}_n \equiv (x_n^1, \dots, x_n^m)$. Vogliamo mostrare che $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x} \equiv (x^1, \dots, x^m)$ se e solo se, per ogni $i \in J_m$ $x_n^i \rightarrow x^i$.

Sia $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}$, allora fissato $\varepsilon > 0$ si trova ν talché per $n \geq \nu$ si ha

$$(x_n^i - x^i)^2 < \sum_{i=1}^m (x_n^i - x^i)^2 < \varepsilon^2$$

da cui per ciascun indice i

$$|x_n^i - x^i| < \varepsilon$$

Viceversa, ciascun $x_n^i \rightarrow x^i$. Allora fissato $\varepsilon > 0$, si ha per ogni i

$$\exists \nu_i : \forall n \geq \nu_i \quad |x_n^i - x^i| < \varepsilon$$

sicchè, posto $\nu \equiv \max \nu_i$ si ha

$$\forall n \geq \nu \quad \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_n^i - x^i)^2} < \sqrt{m} \varepsilon$$

per l'arbitrarietà di ε la tesi.

Esempio I.5 In $\mathbb{R}^m$ ogni successione di Cauchy converge. Basta vedere che se $\{\mathbf{x}_n\}$ è di Cauchy, allora ciascuna componente x_n^i è di Cauchy. Riconosciuto questo si avrà la convergenza di ciascuna componente e perciò di $\{\mathbf{x}_n\}$. Allora $\mathbb{R}^m$ è completo.

Esempio I.6 Lo spazio $(\mathcal{C}^0(A), d_\infty)$ con $A \subseteq \mathbb{R}$ chiuso, è completo. Sia $\{f_n\}$ a valori nello spazio considerato, di Cauchy. Allora

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq \nu \quad \sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon,$$

dunque, per ogni $x \in A$, si definisce una successione a valori reali $\{f_n(x)\}$ di Cauchy, avente perciò limite che poniamo pari a $f(x)$. D'altra parte, si può scrivere

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq \nu \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \forall x \in A$$

sicchè facendo tendere n a infinito, per la permanenza del segno

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall m \geq \nu \quad |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \forall x \in A$$

sicchè f_m converge uniformemente a f .

Ci resta da vedere che f è continua, ma

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon$$

in un conveniente intorno di x_0 , essendo in x e x_0 $f_n \rightarrow f$ e f_n continua in x_0 .

Su questo esempio torneremo in seguito studiandone una interessante generalizzazione.

I.1.4 Topologia e successioni

Teorema I.3 Sia $A \subseteq (X, d)$. Un punto x_0 appartiene alla chiusura di A se e solo se esiste una successione $\{x_n\}$ a valori in A che tende a x_0 .

Dimostrazione ($\Leftarrow$) Esista una successione a valori in A convergente a x_0 . Per assurdo, sia $x_0 \notin X \setminus \bar{A}$. Allora, siccome $\bar{A}$ è chiuso esiste una palla centrata in x_0 di raggio ε tutta contenuta in $X \setminus \bar{A}$, ma tale palla avrà intersezione vuota con A . Allora $\{x_n\}$ non potrà essere a valori in A dato che, convergendo a x_0 , dovranno cadere infiniti punti x_n nella palla di raggio $\varepsilon > 0$. Il che è assurdo.

($\Rightarrow$) Supponiamo ora $x_0 \in A \cup \mathcal{D}A$. Se $x_0 \in A$ basterà prendere $x_n \equiv x_0, \forall n$, e avremo finito. In caso contrario, poniamo $\varepsilon = 1$ e troviamo $x_1 \in A, x_1 \in B(x_0, 1)$, poiché $x_0 \in \mathcal{D}A$. Poi procediamo per induzione fissando $\varepsilon \equiv 1/n$ e costruendo così una successione x_n a valori in A talché

$$d(x_0, x_n) = \frac{1}{n}$$

(c.v.d.) e perciò convergente a x_0 .

Proposizione I.11 *Un insieme A è chiuso se e solo se comunque si prenda una successione $\{x_n\}$ a valori in A convergente, il suo limite è ancora un elemento di A .*

Dimostrazione $(\Rightarrow)$ Sia $\{x_n\} \subseteq A$, convergente ξ , allora $\xi \in \bar{A}$. Ma A è chiuso perciò $\bar{A} = A$. Sicché $\xi \in A$.
 $(\Leftarrow)$ Sia ora ogni $\{x_n\} \subseteq A$ convergente a un valore di A . Sia $x \in \mathcal{D}A$, allora esiste una successione a valori in A tendente a x . Allora, per ipotesi, $x \in A$. Siccome $\mathcal{D}A \subseteq A$ vale (c.v.d.) $A = \bar{A}$. La tesi.

I.2 Funzioni continue

I.2.1 Limiti

Definizione

Siano dati due spazi metrici (X, d_X) e (Y, d_Y) e sia f una applicazione da X in Y . Si pone

Definizione I.20 *Sia $x_0 \in \mathcal{D}X$ un punto di accumulazione di X , si dice che*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in Y$$

se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : X \ni x \neq x_0, d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), L) < \varepsilon$$

Osservazione I.8 Vale

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} d_Y(f(x), L) = 0$$

Il limite, se esiste è unico, infatti siano m, l limiti per f per $x \rightarrow x_0$. Posto $\varepsilon = d_Y(m, l)/2$, si ha che $B_Y(l, \varepsilon)$ e $B_Y(m, \varepsilon)$ sono disgiunti, tuttavia essi contengono le immagini secondo f di due intorni di x_0 che, come tali, hanno intersezione non vuota, $B_X(x_0, \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\})$. L'immagine di quest'ultimo intorno è perciò simultaneamente contenuta in $B_Y(l, \varepsilon)$ e $B_Y(m, \varepsilon)$, disgiunti: assurdo.

Il teorema di collegamento e i limiti delle restrizioni
Teorema 1.4 (di collegamento)

Vale il seguente fondamentale

Siano $x_0 \in \mathcal{D}(X, d_1)$ e $f : (X, d_1) \rightarrow (Y, d_2)$. Sono fatti equivalenti

(i) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in Y$

(ii) per ogni successione $\{x_n\}$ a valori in $X \setminus \{x_0\}$ convergente a x_0 , risulta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x_n) = L \in Y$$

Dimostrazione Vediamo (i) $\Rightarrow$ (ii). Sia $x_n \rightarrow x_0$. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Troviamo allora $\delta > 0$ per cui, per ogni x in $B_1(x_0, \delta) \cap X \setminus \{x_0\} \equiv B^*(x_0, \delta)$ vale $f(x) \in B_2(L, \varepsilon)$. D'altra parte in corrispondenza di δ troviamo $\nu \in \mathbb{N}$, talché per ogni $n \geq \nu$ $x_n \in B^*(x_0, \delta)$, sicché $x_n \in B_2(L, \varepsilon)$. Avendo trovato $\nu(\varepsilon)$ per cui $\forall n \geq \nu$ $f(x_n) \in B(L, \varepsilon)$, abbiamo che $f(x_n) \rightarrow L$.

Vediamo (ii) $\Rightarrow$ (i). f non abbia limite per $x \rightarrow x_0$. Esiste allora un valore ε_0 tale che, per ogni $\delta > 0$, esiste $\bar{x} \in X \setminus \{x_0\}$ per il quale $d_1(\bar{x}, x_0) < \delta$ e $d_2(f(\bar{x}), L) > \varepsilon_0$. Fissiamo successivamente $\delta = 1, \dots, \frac{1}{n}$ determiniamo una successione $x_n \equiv \bar{x}(\delta_n)$ talché

$$d_1(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \text{ e } d_2(f(x_n), L) > \varepsilon_0$$

per la proprietà di Archimede la x_n converge a x_0 , ma la corrispondente $f(x_n)$ non tende a L , il che è assurdo.
(c.v.d.)

Col teorema di collegamento è facile dimostrare il seguente teorema che si rivela utile soprattutto per mostrare che certi limiti non esistono:

Teorema I.5
(del limite delle restrizioni)

Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici. Siano $f : X \rightarrow Y$, $\xi \in \mathcal{D}A$ e valga

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \ell$$

allora per ogni $E \subseteq X$ che abbia ξ come punto di accumulazione vale

$$\lim_{x \rightarrow \xi, x \in E} f(x) \equiv \lim_{x \rightarrow \xi} f|_E(x) = \ell$$

Dimostrazione Ogni successione $\{x_n\}$ a valori in E convergente a ξ è anche a valori in X , perciò $f(x_n) \rightarrow \ell$, ma $x_n \in E$, perciò $f(x_n) = f|_E(x_n)$ sicché $\forall \{x_n\} \subseteq E, x_n \rightarrow \xi, \lim_{n \rightarrow \infty} f|_E(x_n) = \ell$, da cui si ha che $f|_E$ converge a ℓ per il teorema di collegamento.
(c.v.d.)

I.2.2 Funzioni continue

Definizione

Consideriamo due spazi metrici (X, d_X) e (Y, d_Y) . Consideriamo f applicazione da X a Y , si pone allora la seguente

Definizione I.21 Sia $f : X \rightarrow Y$ e $\xi \in X$. Si dice che f è continua in ξ , se per ogni prefissato $\varepsilon > 0$, si trova un $\delta = \delta(\varepsilon)$, talché $\forall x : d_X(x, \xi) < \delta, d_Y(f(x), f(\xi)) < \varepsilon$.

Definizione I.22 Sia $f : X \rightarrow Y$ continua e biunivoca, con inversa continua, allora f si definisce omeomorfismo tra X e Y .

Esempio I.7 Consideriamo $I \equiv [a, b]$ e $\mathcal{C}(I)$ spazio metrico secondo la distanza d_∞ . Sia $F : \mathcal{C}(I) \rightarrow \mathcal{C}(I)$ la trasformazione di $\mathcal{C}(I)$ in sé data da

$$F(f)(x) \equiv \int_a^x f(t) dt.$$

Vogliamo mostrare che F è continua, a tale scopo consideriamo due funzioni continue f e g definite su I , siano $\rho \equiv F(f)$ e $\psi \equiv F(g)$, abbiamo, per ogni $x \in I$

$$|\rho(x) - \psi(x)| = \left| \int_a^x (f - g)(t) dt \right| \leq \int_a^x |f(t) - g(t)| dt \leq (x - a) d_\infty(f, g)$$

passando ai sup di ambo i membri si ricava

$$d_\infty(\rho, \psi) \leq (b - a) d_\infty(f, g)$$

da cui la continuità di F .

Il teorema di collegamento

Vale il seguente

Teorema I.6 (di collegamento)

$f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ è continua in ξ se e solo se per ogni successione $\{x_n\}$ a valori in X convergente a ξ , la successione $\{f(x_n)\}$ a valori in Y converge a $f(\xi)$.

Dimostrazione ($\Rightarrow$) Sia f continua in ξ . Sia $\{x_n\} \subseteq X$ talché $x_n \rightarrow \xi$, per $n \rightarrow \infty$. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Troviamo allora $\delta(\varepsilon)$ tale che se $x \in B_X(\xi, \delta)$, allora $f(x) \in B_Y(f(\xi), \varepsilon)$, d'altra parte troviamo anche $\nu(\delta(\varepsilon)) = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, per cui se $n > \nu$ allora $x_n \in B_X(\xi, \delta)$ e perciò $f(x_n) \in B_Y(f(\xi), \varepsilon)$. Da cui $f(x_n) \rightarrow f(\xi)$.

($\Leftarrow$) Per ogni $\{x_n\} \subseteq X$ talché $x_n \rightarrow \xi$ si ha $f(x_n) \rightarrow f(\xi)$. Sia, per assurdo, f non continua in ξ . Allora esiste un $\varepsilon_0 > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ esiste un $x = x(\delta)$ per cui $d_X(x, \xi) < \delta$

ma $d_Y(f(x), f(\xi)) > \varepsilon_0$. Fissiamo allora $\delta \equiv \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Si ricava allora una successione di valori $x_n = x(1/n)$ tali che $0 \leq d_X(x_n, \xi) < \frac{1}{n}$. Per il teorema di confronto si trova $x_n \rightarrow \xi$. Ma allora $f(x_n) \rightarrow f(\xi)$. Ma ciò è assurdo poiché posto $\varepsilon = \varepsilon_0$, si ha $d_Y(f(x), f(\xi)) > \varepsilon_0$, da cui, per ogni indice $d_Y(f(x_n), f(\xi)) > \varepsilon_0$.

Vale ovviamente la seguente

Teorema I.7 $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ è continua in $\xi \in X \cap \mathcal{D}X$ se e solo se esiste il limite di f per $x \rightarrow \xi$ e vale

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi)$$

Dimostrazione Se f è continua in ξ , per il teorema di collegamento, per ogni successione a valori in X e perciò in $X \setminus \{x_0\} \subseteq X$ convergente a ξ , la successione immagine secondo f corrispondente converge a $f(\xi)$, ne deriva che, ancora per il teorema di collegamento (nella formulazione per i limiti) $f(x)$ tende a $f(\xi)$ per x che tende a ξ .

Valga viceversa

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi)$$

allora per ogni ε -palla in Y di centro $f(\xi)$ si può trovare una δ -palla di centro ξ in X , $B_X(\xi, \delta)$, tale che

$$f(B_X(\xi, \delta) \setminus \{\xi\}) \subseteq B_Y(f(\xi), \varepsilon)$$

(c.v.d.) ma $f(\xi) \in B_Y(f(\xi), \varepsilon)$, sicché $f(B_X(\xi, \delta)) \subseteq B_Y(f(\xi), \varepsilon)$, e f è continua in ξ .

1.2.3 Funzioni continue e topologia

Continuità della distanza

Sia $x_0 \in X$, definiamo

$$\begin{aligned} \varphi : X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto d(x, x_0) \end{aligned}$$

Vale allora

Proposizione I.12 La funzione φ è continua su X .

Dimostrazione Mostriamo preliminarmente che $|d(x, x_0) - d(y, x_0)| \leq d(x, y)$. Dalla disuguaglianza triangolare si ricava

$$\begin{aligned} d(x, x_0) &\leq d(x, y) + d(y, x_0) \Rightarrow d(x, x_0) - d(y, x_0) \leq d(x, y) \\ d(y, x_0) &\leq d(y, x) + d(x, x_0) \Rightarrow d(y, x_0) - d(x, x_0) \leq d(x, y) \end{aligned}$$

Sia ora una qualunque successione a valori in X convergente a x si ha

$$|d(x_n, x_0) - d(x, x_0)| \leq d(x, x_n)$$

passando al limite per $n \rightarrow \infty$, si ha, per il teorema del confronto

$$\begin{aligned} |d(x_n, x_0) - d(x, x_0)| &= |\varphi(x_n) - \varphi(x)| \rightarrow 0 \\ \varphi(x_n) &\rightarrow \varphi(x), n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

(c.v.d.)

Sia $E \subseteq (X, d)$, definiamo la funzione

$$\begin{aligned} \psi : X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto d(x, E) \end{aligned}$$

Proposizione I.13 Sia $E \subseteq (X, d)$, allora ψ è continua.

Dimostrazione Presi $x, y \in X$ dobbiamo nuovamente mostrare che $|d(x, E) - d(y, E)| \leq d(x, y)$. Si ha $d(x, E) = \inf d(x, s)$, perciò, per un qualunque $\varepsilon > 0$, esiste un $s \in X$, per cui

$$d(x, E) + \varepsilon > d(x, s)$$

se $y \in X$

$$d(y, E) \leq d(y, s) \leq d(x, y) + d(x, s) < d(x, y) + d(x, E) + \varepsilon$$

da cui

$$d(y, E) - d(x, E) < d(x, y) + \varepsilon$$

posto $\varepsilon = 1/n$ e passati al limite si ottiene

$$d(y, E) - d(x, E) < d(x, y)$$

la disuguaglianza opposta si trova considerando dapprima $d(y, E)$.

(c.v.d.) Per concludere si procede come nella dimostrazione precedente.

Corollario I.1 Siano $E, F \subseteq (X, d)$ chiusi e disgiunti. Allora esiste una funzione ϕ continua da X in $\mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} \phi(x) = 0, & \text{se } x \in E \\ \phi(x) = 1, & \text{se } x \in F \end{cases}$$

Dimostrazione Poiché $E \cap F = \emptyset$, allora per ogni x varrà $d(x, E) > 0$ e $d(x, F) > 0$, $d(x, E) + d(x, F) > 0$, sicché risulta continua la funzione

$$\phi(x) = \frac{d(x, E)}{d(x, E) + d(x, F)}$$

(c.v.d.) che risponde alle caratteristiche richieste.

1.2.4 Il teorema di cambio di variabile

Un teorema utilissimo nelle applicazioni è il seguente

Teorema I.8
(di cambio di variabile)

Siano $(X, d_1), (Y, d_2), (W, d_3)$, spazi metrici. Siano x_0 e y_0 punti di accumulazione ordinatamente per X e Y . Siano f, g applicazioni, rispettivamente, da X in Y e da Y in W , tali che $f(X) \subseteq Y$. Se

(i) g è continua in y_0 ;

(ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$;

allora esiste

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = g(y_0)$$

dove si è eseguito il cambio della variabile $y \equiv f(x)$ nel limite.

Dimostrazione Dalla (ii) e dal teorema di collegamento si ha che, presa $\{x_n\} \subseteq X \setminus \{x_0\}$ convergente a x_0 , risulta $f(x_n) \rightarrow y_0$. Allora, dal teorema di collegamento per funzioni continue, $g(f(x_n))$ converge a $g(y_0)$. Sicché presa una qualsiasi $\{x_n\} \subseteq X \setminus \{x_0\}$ si ha che $(g \circ f)(x_n)$ tende a $g(y_0)$. Da cui, ancora per il teorema di collegamento, si ha la tesi.

(c.v.d.)

1.2.5 Successioni di funzioni continue

Convergenza uniforme

Vogliamo passare a generalizzare l'esempio I.6. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici. Consideriamo la funzione $f : X \rightarrow Y$, diremo che è limitata se risulta $f(X) \subseteq Y$ limitato. Poniamo allora la seguente

Definizione I.23 Indichiamo con $\mathcal{B}(X, Y)$ l'insieme delle funzioni limitate da X in Y . $\mathcal{B}(X, Y)$ è uno spazio metrico dotato della distanza

$$d_\infty(f, g) \equiv \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x))$$

Indichiamo con $\mathcal{C}_\mathcal{B}(X, Y)$ l'insieme delle funzioni continue e limitate da X in Y . $(\mathcal{C}_\mathcal{B}(X, Y); d_\infty)$ è uno spazio metrico.

Teorema I.9 Se Y è completo allora $\mathcal{B}(X, Y)$ è completo.

Dimostrazione Sia $\{f_n\}$ una successione di Cauchy in $\mathcal{B}(X, Y)$. Per ogni $x \in X$ la successione $\{f_n(x)\}$ è di Cauchy in Y , dato che

$$d_Y(f_h(x), f_k(x)) \leq d_\infty(f_h, f_k) < \varepsilon.$$

Siccome Y è completo la successione $\{f_n(x)\}$ convergerà a un punto di Y . Resta perciò fissata una funzione $f: X \rightarrow Y$ talché per ogni $x \in X$ $f(x) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \in Y$. Si dice che la successione f_n converge **puntualmente** alla funzione f . Facciamo vedere che in realtà la f_n converge alla f secondo la distanza d_∞ , cioè che la convergenza della successione è **uniforme**.

Poiché $\{f_n\}$ è di Cauchy, per ogni fissato $\varepsilon > 0$ esiste un intero ν tale che per ogni $n, m > \nu$ risulta

$$d_Y(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

Riguardiamo il primo membro della disequaglianza precedente come una successione reale nell'indice m considerando fissate n e x . La funzione $d_Y(f_n(x), \cdot)$ è continua per la proposizione I.12, perciò, passando al limite per $m \rightarrow \infty$ si ha, per il teorema di collegamento,

$$d_Y(f_n(x), f_m(x)) \rightarrow d_Y(f_n(x), f(x)),$$

d'altra parte per la permanenza del segno deve valere

$$d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$$

per ogni $n > \nu$ e per ogni $x \in X$. Se ne ricava che per $n > \nu$ vale

$$d_\infty(f_n, f) \leq \varepsilon$$

(c.v.d.) da cui si ha immediatamente che $f_n \rightarrow f$ secondo d_∞ e che f è limitata.

Si ricava immediatamente il fondamentale

Teorema I.10 Se Y è completo $\mathcal{C}_\mathcal{B}(X, Y)$ è completo.

Dimostrazione Sia $\{f_n\}$ una successione a valori in $\mathcal{C}_\mathcal{B}(X, Y)$ allora f_n converge uniformemente a f in $\mathcal{B}(X, Y)$ per il teorema precedente. Ci basta adesso vedere che f è continua in X . Fissato $x_0 \in X$ si ha

$$d_Y(f(x), f(x_0)) \leq d_Y(f(x), f_n(x)) + d_Y(f_n(x), f_n(x_0)) + d_Y(f_n(x_0), f(x_0))$$

Sia ora $\varepsilon > 0$ allora esisterà un indice ν per cui

$$d_\infty(f_n, f) < \frac{\varepsilon}{3}$$

fissiamo $n \equiv \nu$ troviamo

$$d_Y(f(x), f(x_0)) \leq \frac{2}{3}\varepsilon + d_Y(f_\nu(x), f_\nu(x_0))$$

d'altra parte f_ν è una funzione continua da X in Y perciò in corrispondenza di ε esisterà un $\delta > 0$ talché

$$d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f_\nu(x), f_\nu(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Infine

$$d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

(c.v.d.) da cui f è continua in x_0 . Per l'arbitrarietà di x_0 f è continua su tutto X .

Come detto la distanza d_∞ viene detta **metrica della convergenza uniforme** e una successione convergente secondo tale metrica si dirà **convergente uniformemente**. Si è dunque incidentalmente mostrato il seguente

Teorema I.11 *Se una successione di funzioni continue e limitate di X in Y converge uniformemente a una funzione f , allora f è continua.*

Passaggio al limite sotto il segno di integrale

Torniamo a considerare la trasformazione F di $\mathcal{C}([a, b])$ che a ogni funzione associa la sua funzione integrale. Abbiamo visto che essa è continua. Ora sia $\{f_n\} \in \mathcal{C}([a, b])$ convergente uniformemente a f . Si ha che f è continua, ha senso considerarne la funzione integrale $F(f)$. Per la continuità di F e per il teorema di collegamento, si ha

$$F(f_n) \rightarrow F(f), \quad n \rightarrow \infty.$$

Ne consegue che, in particolare,

$$F(f_n)(b) \rightarrow F(f)(b), \quad n \rightarrow \infty$$

da cui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt$$

abbiamo così dimostrato il **teorema di passaggio del limite sotto il segno di integrale**.

I.3 Spazi normati e spazi di Banach

I.3.1 Richiami sugli spazi vettoriali

Definizione di spazio vettoriale

Consideriamo un corpo generico $\mathbb{K}$, che coinciderà generalmente con $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Sia V un insieme non vuoto nel quale siano state definite due operazioni, l'addizione e la moltiplicazione per un elemento di $\mathbb{K}$. Si dirà che V è uno **spazio vettoriale** su $\mathbb{K}$, o che V è un $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale, se rispetto all'addizione V è un gruppo abeliano di cui $\mathbf{0}$ sia l'elemento neutro e inoltre

- (i) $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$, $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$, per ogni $\mathbf{u} \in V$;
- (ii) $(\lambda + \mu)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{u}$, e $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$, per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$;
- (iii) $\lambda(\mu\mathbf{u}) = (\lambda\mu)\mathbf{u}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e $\mathbf{u} \in V$.

Gli elementi di V spazio vettoriale si dicono **vettori**.

Dipendenza lineare

I vettori $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ si dicono **linearmente indipendenti** se presa una n -upla di scalari (λ_j) in $\mathbb{K}$ si ha

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{u}_j = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_j = 0 \forall j \in J_n$$

Se in V esistono n vettori linearmente indipendenti, mentre $n+1$ vettori comunque scelti non sono tali (i vettori si dicono allora **linearmente dipendenti**), si dice che V ha dimensione pari a n : $\dim V = n$. Se invece per ogni intero $n \in \mathbb{N}$ esistono in V n vettori linearmente indipendenti, si dirà che V ha dimensione infinita. È il caso dello spazio $\mathcal{C}([a, b])$, poiché per ogni $n \in \mathbb{N}$ i vettori

$$1, x, x^2, \dots, x^n$$

sono indipendenti. Infatti, in caso contrario, esisterebbe un polinomio di grado n , a coefficienti non tutti nulli, che si annullerebbe per ogni valore di $x \in [a, b]$, la qual cosa è assurda.

Basi

Se lo spazio vettoriale V ha dimensione n , si dice **base** di V ogni insieme di n vettori linearmente indipendenti. Si ha che fissata una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ si scrive in **modo unico** come combinazione lineare dei vettori della base:

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{v}_j.$$

Per esempio è facile dimostrare che una base di $\mathbb{R}^n$ è la **base standard** $\mathcal{R}_n = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, ove usando il δ di Kronecker si ha

$$[\mathbf{e}_j]_i = \delta_{ji}.$$

Applicazioni lineari

Siano V e W $\mathbb{K}$ -spazi vettoriali, e sia $F: V \rightarrow W$ un'applicazione tale che, per ogni scalare λ e $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in V$,

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v}) \\ F(\lambda \mathbf{v}) &= \lambda F(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

L'insieme delle applicazioni lineari di V in W si indica con $\text{Hom}(V, W)$, esso è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Si dimostra che esso ha dimensione pari a nm , se $n \equiv \dim V$ e $m \equiv \dim W$, essendo isomorfo a $\mathcal{M}(n, m; \mathbb{K})$ spazio delle matrici $n \times m$.

Duale

Nel caso particolare in cui $W = \mathbb{K}$, lo spazio delle applicazioni si dice **duale** di V e si indica con V^* . Gli elementi di V^* si dicono **funzionali lineari**. Sia $\dim V = n$, fissiamo una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ di V , e consideriamo le n applicazioni da V in $\mathbb{K}$

$$L_i \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{v}_j \right) = \lambda_i$$

Risulta immediatamente verificato che ciascuna L_i è lineare di modo che $L_i \in V^*$. Abbiamo allora che

$$L_i(\mathbf{v}_j) = \delta_{ij}.$$

Vogliamo vedere che l'insieme delle L_i è una base di V^* . Per questo si abbia

$$L \equiv \mu_1 L_1 + \dots + \mu_n L_n = 0$$

allora per ogni indice j vale

$$0 = L(\mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^n \mu_i L_i(\mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^n \mu_i \delta_{ij} = \mu_j$$

da cui l'indipendenza lineare delle L_i .

Sia ora $L \in V^*$ talché $L(\mathbf{v}_i) = a_i$ al variare di $i \in J_n$. Allora, se $\mathbf{v} = \sum \lambda_j \mathbf{v}_j$

$$L(\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^n \lambda_j L(\mathbf{v}_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j a_j = \sum_{j=1}^n L_j(\mathbf{v}) a_j$$

da cui ciascun L si può scrivere come combinazione lineare delle L_i , da cui la dimensione di V^* è n e perciò $\mathcal{B}^* \equiv \{L_1, \dots, L_n\}$ è una base di V^* . La $\mathcal{B}^*$ si dice **base duale** di $\mathcal{B}$. Nel caso di $\mathbb{R}^n$ la base duale della base standard si indica con $\mathcal{R}_n^* \equiv \{dx_1, \dots, dx_n\}$ e vale

$$\forall j, i \in J_n, dx_j(\mathbf{e}_i) = \delta_{ji}.$$

1.3.2 Spazi normati e spazi di Banach**Spazi normati**

Si ha la seguente fondamentale

Definizione 1.24 Sia X un $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale. Un'applicazione $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{C}$ si dice una norma se verifica i seguenti assiomi

- (i) $\|\mathbf{x}\| \geq 0, \forall \mathbf{x} \in X$ e $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$;
- (ii) $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$ per ogni $x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$;
- (iii) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$, *disuguaglianza triangolare*.

La coppia $(X, \|\cdot\|)$ si dice spazio normato.

Si può dotare in modo naturale la struttura di spazio normato di una metrica indotta dalla norma

$$d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \equiv \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$$

Esempio I.8 Se Y è uno spazio normato allora $\mathcal{B}(X, Y)$ e $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(X, Y)$ sono spazi normati secondo la **norma infinito**

$$\|f\|_{\infty} \equiv \sup_{x \in X} \|f(x)\|.$$

Infatti, $\sup \|f(x)\| = 0 \Rightarrow \|f(x)\| \leq 0, \forall x \in X$, ma per definizione $\|f(x)\| \geq 0$, da cui $f(x) = 0$ su X . La (ii) è immediata per la (iii) si ha

$$\|f(x) + g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\|, \forall x$$

passando al sup la tesi.

Spazi di Banach

Si ha poi che

Definizione I.25 Uno spazio normato completo rispetto alla distanza indotta dalla norma si dice spazio di Banach.

Esempio I.9 Se Y è uno spazio di Banach lo sono anche $\mathcal{B}(X, Y)$ e $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(X, Y)$.

Spazi di prodotti scalari

Vale la seguente

Definizione I.26 Sia $\mathbb{K} \equiv \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ e sia V un $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale, si definisce forma quadratica definita positiva l'applicazione

$$\begin{aligned} V \times V &\rightarrow \mathbb{K} \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) &\mapsto (\mathbf{v}|\mathbf{w}) \end{aligned}$$

tale che

- (i) $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 | \mathbf{w}) = (\mathbf{v}_1 | \mathbf{w}) + (\mathbf{v}_2 | \mathbf{w})$, $(\mathbf{w} | \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = (\mathbf{w} | \mathbf{v}_1) + (\mathbf{w} | \mathbf{v}_2)$, $(\lambda \mathbf{v} | \mathbf{w}) = \lambda (\mathbf{v} | \mathbf{w})$ e $(\mathbf{v} | \lambda \mathbf{w}) = \bar{\lambda} (\mathbf{v} | \mathbf{w})$;
- (ii) $(\mathbf{v} | \mathbf{w}) = \overline{(\mathbf{w} | \mathbf{v})}$;
- (iii) $(\mathbf{v} | \mathbf{v}) \geq 0$ e $(\mathbf{v} | \mathbf{v}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = 0$

$(\mathbf{v} | \mathbf{w})$ si dice prodotto scalare (o hermitiano se lo spazio vettoriale è complesso) di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. La coppia $(V, (\cdot | \cdot))$ si dice spazio di prodotto scalare o spazio euclideo se V è uno spazio vettoriale reale, oppure spazio unitario se V è sul campo complesso.

Si ha che

Proposizione I.14 Uno spazio euclideo o unitario V è uno spazio normato con la norma indotta dal prodotto scalare

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(\mathbf{v} | \mathbf{v})}$$

Gli assiomi (i) e (ii) sono immediatamente verificati. Resta da dimostrare la disuguaglianza triangolare allo scopo premettiamo il seguente lemma che prova la **disuguaglianza di Cauchy e Schwarz**:

Lemma I.1
(disuguaglianza
di Cauchy-
Schwarz)

Per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ risulta

$$|(\mathbf{v}|\mathbf{w})| \leq \sqrt{(\mathbf{v}|\mathbf{v})(\mathbf{w}|\mathbf{w})}$$

Dimostrazione Se $\mathbf{v} = 0$ la disuguaglianza è verificata banalmente. Sia $\mathbf{v} \neq 0$, si ha per $t \in \mathbb{R}$, $a \equiv -(\mathbf{w}|\mathbf{v})t$, da cui $\bar{a} = -(\mathbf{v}|\mathbf{w})t$,

$$0 \leq (\mathbf{w} + a\mathbf{v}|\mathbf{w} + a\mathbf{v}) = (\mathbf{w}|\mathbf{w} + a\mathbf{v}) + a(\mathbf{v}|\mathbf{w} + a\mathbf{v}) = (\mathbf{w}|\mathbf{w}) + \bar{a}(\mathbf{w}|\mathbf{v}) + a(\mathbf{v}|\mathbf{w}) + |a|^2(\mathbf{v}|\mathbf{v})$$

da cui

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\mathbf{w}|\mathbf{w}) - (\mathbf{v}|\mathbf{w})(\mathbf{w}|\mathbf{v})t - (\mathbf{v}|\mathbf{w})(\mathbf{w}|\mathbf{v})t + |(\mathbf{v}|\mathbf{w})|^2(\mathbf{v}|\mathbf{v})t^2 \\ 0 &\leq (\mathbf{w}|\mathbf{w}) - 2|(\mathbf{v}|\mathbf{w})|^2t + |(\mathbf{v}|\mathbf{w})|^2(\mathbf{v}|\mathbf{v})t^2 \end{aligned}$$

sicché il discriminante del polinomio in t deve risultare non positivo, perciò

$$\begin{aligned} |(\mathbf{v}|\mathbf{w})|^4 - |(\mathbf{v}|\mathbf{w})|^2(\mathbf{v}|\mathbf{v})(\mathbf{w}|\mathbf{w}) &\leq 0 \\ |(\mathbf{v}|\mathbf{w})|^2 - (\mathbf{v}|\mathbf{v})(\mathbf{w}|\mathbf{w}) &\leq 0 \end{aligned}$$

la tesi

(c.v.d.)
$$|(\mathbf{v}|\mathbf{w})| \leq \sqrt{(\mathbf{v}|\mathbf{v})(\mathbf{w}|\mathbf{w})}$$

Ora, dalla disuguaglianza dimostrata nel lemma

$$(\mathbf{v} + \mathbf{w}|\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{v}|\mathbf{v}) + (\mathbf{w}|\mathbf{w}) + (\mathbf{v}|\mathbf{w}) + \overline{(\mathbf{v}|\mathbf{w})} = (\mathbf{v}|\mathbf{v}) + (\mathbf{w}|\mathbf{w}) + 2\operatorname{Re}(\mathbf{v}|\mathbf{w}),$$

ma $\operatorname{Re} a \leq \sqrt{\operatorname{Re}^2 a + \operatorname{Im}^2 a} = |a|$, da cui

$$(\mathbf{v} + \mathbf{w}|\mathbf{v} + \mathbf{w}) \leq (\mathbf{v}|\mathbf{v}) + (\mathbf{w}|\mathbf{w}) + 2|(\mathbf{v}|\mathbf{w})| \leq (\mathbf{v}|\mathbf{v}) + (\mathbf{w}|\mathbf{w}) + 2\sqrt{(\mathbf{v}|\mathbf{v})(\mathbf{w}|\mathbf{w})} = \left(\sqrt{(\mathbf{v}|\mathbf{v})} + \sqrt{(\mathbf{w}|\mathbf{w})}\right)^2$$

siccome ambo i membri sono positivi, passando alla radice quadrata si ha la disuguaglianza triangolare

$$\sqrt{(\mathbf{v} + \mathbf{w}|\mathbf{v} + \mathbf{w})} \leq \sqrt{(\mathbf{v}|\mathbf{v})} + \sqrt{(\mathbf{w}|\mathbf{w})}$$

Risulta finalmente dimostrata la proposizione I.14.

Poniamo l'ultima definizione

Definizione I.27 Una spazio euclideo o unitario completo (rispetto alla metrica indotta dalla norma generata dal prodotto scalare o hermitiano) si dice spazio di Hilbert.

I.3.3 Isometrie tra spazi metrici

**Definizione e
prime proprietà**

Una definizione naturale è la seguente

Definizione I.28 Siano (X, d) e (Y, δ) due spazi metrici. Un'isometria da (X, d) in (Y, δ) è una funzione $f: X \rightarrow Y$ che conserva le distanze,

$$\delta(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \forall \mathbf{x} \in X, \mathbf{y} \in Y$$

Osservazione I.9 Un'isometria è ovviamente iniettiva: se $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$ allora $0 = \delta(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, da cui $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Inoltre l'inversa di f (definita dall'insieme immagine di f in X) è un'isometria. Infine, composizioni di isometrie sono isometrie.

Definizione I.29 Due spazi metrici (X, d) e (Y, δ) si dicono isometrici se fra essi esiste un'isometria biunivoca.

Per l'osservazione precedente, due spazi si diranno isometrici se tra essi è possibile stabilire un'isometria suriettiva.

Isometria tra spazi metrici e spazi normati

Introdotta il concetto di isometria, è possibile stabilire un risultato notevole:

Teorema I.12 *Ogni spazio metrico (X, d) è isometrico ad un sottospazio metrico di uno spazio normato.*

Dimostrazione

Tale spazio normato sarà $Y \equiv \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$, spazio vettoriale delle funzioni limitate da X in $\mathbb{R}$, dotato della norma infinito. Sia $\mathbf{a} \in X$. Per ogni $\mathbf{x} \in X$ definiamo $\phi_x : X \rightarrow \mathbb{R}$ talché $\phi_x(\xi) = d(\xi, \mathbf{x}) - d(\xi, \mathbf{a})$, per ogni $\xi \in X$. La funzione ϕ_x è limitata, essendo, per la disuguaglianza triangolare,

$$\begin{aligned} d(\xi, \mathbf{x}) - d(\xi, \mathbf{a}) &\leq d(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \\ d(\xi, \mathbf{a}) - d(\xi, \mathbf{x}) &\leq d(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

da cui, $|\phi_x(\xi)| \leq d(\mathbf{a}, \mathbf{x})$. Ne deriva che $\phi_x \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$. Vediamo allora se la funzione $\mathbf{x} \mapsto \phi_x$ è un'isometria. Prendiamo $\mathbf{y} \in X$ abbiamo subito

$$\begin{aligned} |\phi_x(\xi) - \phi_y(\xi)| &\leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ |\phi_x(\mathbf{x}) - \phi_y(\mathbf{x})| &= d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

da cui

$$\text{(c.v.d.)} \quad \|\phi_x - \phi_y\|_\infty = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

1.3.4 Funzioni lipschitziane

Definizione ed esistenza della migliore costante di Lipschitz

Una particolare rilevanza tra le funzioni definite tra due spazi metrici, è assunta dalle funzioni **lipschitziane**:

Definizione I.30 *Siano (X, d) e (Y, δ) due spazi metrici, una funzione $f : X \rightarrow Y$, si dice lipschitziana se esiste una costante $\ell \geq 0$ tale che*

$$\delta(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) \leq \ell d(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \forall \mathbf{x} \in X, \mathbf{y} \in Y$$

ℓ si dice costante di Lipschitz per f .

Consideriamo f lipschitziana secondo la costante ℓ . Allora si ha subito che per ogni $m > \ell$ la f è lipschitziana secondo m . Consideriamo $\ell \equiv \inf \{m \in \mathbb{R} | m \text{ è costante di Lipschitz per } f\}$. Siccome ogni costante di Lipschitz deve essere maggiore o eguale a 0, deve risultare $\ell \geq 0$. Ora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\ell \leq m < \ell + \varepsilon$ costante di Lipschitz per f . Siccome $\ell + \varepsilon > m$ si ha che $\ell + \varepsilon$ è esso stesso costante di Lipschitz. Ne deriva che $\forall \varepsilon > 0, \ell + \varepsilon$ è costante di Lipschitz per f , da cui

$$\delta(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) \leq \ell d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

per l'arbitrarietà di ε (posto $\varepsilon = 1/n$ e passati al limite per $n \rightarrow \infty$) si deduce che ℓ è costante di Lipschitz per f . Risulta perciò ben posta la seguente

Definizione I.31 *Siano (X, d) e (Y, δ) due spazi metrici e $f : X \rightarrow Y$ lipschitziana. Si definisce allora migliore costante di Lipschitz per f*

$$\ell \equiv \inf \{m \in \mathbb{R} | m \text{ è costante di Lipschitz per } f\},$$

posto $\text{Lip}(f) \equiv \ell$ si ha

$$\delta(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) \leq \text{Lip}(f) d(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \forall \mathbf{x} \in X, \mathbf{y} \in Y$$

Generalità sulle funzioni lipschitziane

Siano ora X spazio metrico in d e Y spazio normato. Siano f e g lipschitziane, allora

$$\|g(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y}) - f(\mathbf{y})\| \leq \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| + \|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})\| \leq (\text{Lip}(g) + \text{Lip}(f)) d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

$f + g$ è lipschitziana con $\text{Lip}(f + g) \leq \text{Lip}(g) + \text{Lip}(f)$. Analogamente, λf è lipschitziana e $\text{Lip}(\lambda f) \leq |\lambda| \text{Lip}(f)$.

Siano, nuovamente, X, Y spazi metrici. Se $f : X \rightarrow Y$ è costante, allora è lipschitziana con $\text{Lip}(f) = 0$. D'altra parte se $\text{Lip}(f) = 0$, si ha

$$0 \leq \delta(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) \leq 0$$

da cui, per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, si ha $\delta(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = 0$, da cui $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$, cioè f è costante. Riassumendo

Proposizione I.15 *Siano (X, d) e (Y, δ) due spazi metrici e $f : X \rightarrow Y$. Allora f è costante se e solo se è lipschitziana con migliore costante di Lipschitz nulla.*

Siano (X, d) spazio metrico e $(Y, \|\cdot\|)$ normato. Consideriamo l'insieme delle funzioni lipschitziane da X in Y che denoteremo con $\text{Lip}(X, Y)$, per quanto visto prima esso è senz'altro uno spazio vettoriale. Fissato $\mathbf{a} \in X$, per le osservazioni fatte prima, abbiamo che

$$\|f\|_{\text{Lip}} = \|f(\mathbf{a})\|_Y + \text{Lip}(f)$$

è una norma in $\text{Lip}(X, Y)$.

I.3.5 Funzioni lineari e bilineari tra spazi normati

Continuità delle funzioni lineari tra spazi normati

In generale, la linearità di una funzione definita da uno spazio normato su un altro non implica la sua continuità. Consideriamo ad esempio la derivazione D come funzione da $X \equiv \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ in $Y \equiv \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ (normati dalla norma infinito), che a f fa corrispondere Df , sua derivata. Ora, D non è continua. Prendiamo la successione

$$f_n(t) \equiv \frac{\sin nt}{n},$$

abbiamo

$$\left| \frac{\sin nt}{n} \right| \leq \frac{1}{n}$$

passando al sup e poi al limite per $n \rightarrow \infty$, si ha che $f_n(t)$ converge uniformemente a 0 in X , laddove $Df_n(t) = \cos nt$ non converge a $D0 = 0$.

Vogliamo stabilire quando la linearità implica la continuità. Innanzi tutto è banale stabilire che $T : X \rightarrow Y$, normati, è continua sul dominio se e solo se è continua in 0. Un'implicazione è ovvia. Sia f continua nell'origine, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che

$$\mathbf{x} \in X, \|\mathbf{x}\|_X < \delta \Rightarrow \|T\mathbf{x}\|_Y < \varepsilon.$$

sia ora $\mathbf{x}_0 \in X$ e, fissato ancora $\varepsilon > 0$, si considerino le $\mathbf{x}$ per cui

$$\mathbf{x} \in X, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_X < \delta$$

si ha

$$\|T\mathbf{x} - T\mathbf{x}_0\|_Y = \|T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|_Y < \varepsilon$$

che coincide con la tesi. Si ha in più

Proposizione I.16 *Siano X e Y spazi normati e $T \in \text{Hom}(X, Y)$. Allora T è continua se e solo se esiste $\ell > 0$ tale che*

$$\|T\mathbf{x}\|_Y \leq \ell \|\mathbf{x}\|_X, \forall \mathbf{x} \in X$$

Inoltre, la minima costante ℓ per cui la disuguaglianza continua a valere è

$$\ell \equiv \sup \{ \|T\mathbf{x}\|_Y \mid \|\mathbf{x}\|_X = 1 \}$$

Dimostrazione Supponiamo T continua. Allora T è continua in 0. Preso $\varepsilon = 1$, si trova un $\delta > 0$ talchè nella δ -palla centrata in 0 vale $\|T\mathbf{x}\| \leq 1$. Preso ora $\mathbf{x} \in X$, con $\mathbf{x} \neq 0$, si ha

$$\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|_X \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_X} = \frac{\|\mathbf{x}\|_X}{\delta} \frac{\delta \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_X}$$

Posto $\mathbf{v} = \delta \mathbf{x} / \|\mathbf{x}\|_X$, si ha $\|\mathbf{v}\|_X = \delta$, quindi $\|T\mathbf{v}\|_Y \leq 1$, perciò

$$\|T\mathbf{x}\|_Y = \left\| \frac{\|\mathbf{x}\|_X}{\delta} T\mathbf{v} \right\|_Y \leq \frac{\|\mathbf{x}\|_X}{\delta}$$

la lipschitzianità si ottiene fissando come costante di Lipschitz $l \equiv 1/\delta$. In particolare, la disuguaglianza trovata deve valere per $\|\mathbf{x}\|_X = 1$, perciò

$$\|T\mathbf{x}\|_Y \leq l \|\mathbf{x}\|_X = l,$$

se ne ricava che $l \geq \sup \{ \|T\mathbf{x}\|_Y \mid \|\mathbf{x}\|_X = 1 \} \equiv \ell$. Poi, si ha, per gli $\mathbf{x} \neq 0$

$$\|T\mathbf{x}\|_Y = \left\| T \left(\|\mathbf{x}\|_X \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_X} \right) \right\|_Y \leq \ell \|\mathbf{x}\|_X,$$

(c.v.d.) la tesi.

Osservazione I.10 L'insieme $\{ \|T\mathbf{x}\|_Y \mid \|\mathbf{x}\|_X = 1 \}$ si dice **sfera dei versori** o **sfera unitaria** e si denota con il simbolo $\mathcal{S}_X$, in $\mathbb{R}^n$ col simbolo $\mathbb{S}^{n-1}$. Si ha dunque che una funzione lineare è lipschitziana se e solo se è limitata sulla sfera unitaria, cioè se

$$\|T\| \equiv \sup \{ \|T\mathbf{x}\|_Y \mid \mathbf{x} \in \mathcal{S}_X \} < +\infty$$

Ora, una funzione è limitata sulla sfera unitaria se e solo se lo è sulla 1-palla di centro l'origine. Infatti, se per ogni versore $\|T\mathbf{u}\|_Y \leq \ell$ si ha per ogni $\mathbf{x} \in B(0, 1)$, $\|T\mathbf{x}\|_Y \leq \ell \|\mathbf{x}\|_X < \ell$. D'altra parte se per ogni $\mathbf{x} \in B(0, 1)$ si ha $\|T\mathbf{x}\|_Y \leq \ell$, si ha che, posto $\mathbf{u} = \mathbf{x} / \|\mathbf{x}\|_X$, per ogni intero $n > 0$

$$\left\| T \left(\mathbf{u} - \frac{1}{n} \mathbf{u} \right) \right\|_Y = \|T\mathbf{u}\|_Y \left(1 - \frac{1}{n} \right) \leq \ell$$

da cui, passando al limite per $n \rightarrow \infty$, $\|T\mathbf{u}\|_Y \leq \ell$.

Infine, T lineare è continua se e solo se lipschitziana, se e solo lipschitziana nell'origine, se e solo se limitata sulla palla unitaria o, equivalentemente, sulla sfera dei versori.

Denotiamo con $L_{\mathbb{K}}(X, Y)$ l'insieme delle funzioni lineari da X in Y limitate sulla palla unitaria. Abbiamo la seguente

Proposizione I.17 $L_{\mathbb{K}}(X, Y)$ è un sottospazio vettoriale di $\text{Hom}(X, Y)$, e

$$\|T\| \equiv \sup \{ \|T\mathbf{x}\|_Y \mid \mathbf{x} \in \mathcal{S}_X \}$$

è una norma su tale spazio.

Dimostrazione Siano $T, R \in L_{\mathbb{K}}(X, Y)$. Allora $T + R$ è lineare e, preso $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_X$

$$\|(T + R)\mathbf{x}\|_Y = \|T\mathbf{x} + R\mathbf{x}\|_Y \leq \|T\mathbf{x}\|_Y + \|R\mathbf{x}\|_Y \leq (\|T\| + \|R\|) \|\mathbf{x}\|_Y$$

da cui $\|T\| + \|R\| \leq \|T + R\|$, per cui vale la disuguaglianza triangolare e il sottoinsieme è chiuso per addizione. Evidentemente ciò vale per la moltiplicazione per $\lambda \in \mathbb{K}$ e, inoltre, $\|\lambda T\| \leq |\lambda| \|T\|$. Chiaramente l'applicazione identicamente nulla è limitata sulla palla unitaria. Resta da vedere che la norma è eguale a 0 se e solo $T = 0$. Se $T = 0$, la tesi è ovvia. Sia ora $\|T\| = 0$ e $\mathbf{x} \neq 0$

$$(c.v.d.) \quad T\mathbf{x} = T \left(\|\mathbf{x}\|_X \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_X} \right) = \|\mathbf{x}\|_X T \left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_X} \right) = 0$$

La norma di cui abbiamo dotato gli operatori lineari limitati sulla sfera ed equivalentemente continui, si dice **norma operatoriale**. Si noti come la norma introdotta coincida con la norma lipschitziana $\|\cdot\|_{\text{Lip}}$, ove si sia posto $\mathbf{a} = 0$.

Esempio I.10 Siano ora gli spazi normati $X \equiv \mathbb{R}^n$ e $Y \equiv \mathbb{R}^m$ con le norme euclidee. Vediamo anzitutto che $L_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Sia infatti $T \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, allora T è identificato da

una matrice $T \in \mathcal{M}(m, n; \mathbb{R})$. Sia $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{n-1}$, per la disuguaglianza di Cauchy e Schwarz

$$\|T\mathbf{x}\|_m = \sqrt{\sum_{i=1}^m (T_i \cdot \mathbf{x})^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m \|T_i\|_n^2} \|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\|^2 \sqrt{\sum_{i \in J_m, j \in J_n} T_{i,j}^2} = \sqrt{\sum_{i \in J_m, j \in J_n} T_{i,j}^2}$$

da cui la limitatezza. Ne deriva che gli omomorfismi di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ sono lipschitziani e perciò continui.

Esempio I.11 Presi tre spazi normati X, Y, Z su $\mathbb{K}$, e prese $T \in L_{\mathbb{K}}(X, Y)$, $R \in L_{\mathbb{K}}(Y, Z)$, si ha che $T \circ R$ ancora lipschitziana e $\|T \circ R\| \leq \|T\| \|R\|$.

Osservazione I.11 Siano X, Y spazi normati con $T \in \text{Hom}(X, Y)$ iniettiva e perciò invertibile da $T(X)$ in X . Sia S l'inversa di T , essa è continua se e solo se vale

$$\inf \{ \|T\mathbf{x}\|_Y \mid \mathbf{x} \in \mathcal{S}_X \} = \alpha > 0$$

infatti, sia $\mathbf{y} \in T(X)$, con $\mathbf{y} \neq 0$, allora esiste ed è unico $\mathbf{x} \neq 0$, tale che $\mathbf{y} = T\mathbf{x}$, si ha

$$\|\mathbf{y}\|_Y = \|T\mathbf{x}\|_Y \geq \alpha \|\mathbf{x}\|_X$$

perciò

$$\|S\mathbf{y}\|_X \leq \frac{1}{\alpha} \|\mathbf{y}\|_Y$$

da cui la continuità di S .

Continuità delle forme lineari

Ricordiamo che una **forma lineare** ϕ è una funzione lineare di X spazio vettoriale nel suo corpo $\mathbb{K}$, cioè ϕ è un elemento del **duale** di X , X^* . Abbiamo la seguente

Proposizione I.18 Se X è uno spazio normato, una forma lineare $\phi \in X^*$ è continua se e solo se il suo nucleo $\ker(\phi)$ è chiuso in X .

Dimostrazione

Se f è continua, la preimmagine dell'insieme $\{0\}$ (il kernel di f), chiuso in Y , deve essere chiusa in X . Sia ora $\ker(f)$ chiuso in X . Se $\ker(f) = X$, f è identicamente nulla e perciò continua. Altrimenti, sia $a \in X \setminus \ker(f)$, aperto in X . Esiste una palla $B(a, \delta)$ tutta contenuta nel complementare di $\ker(f)$. Si ha perciò $0 \notin f(B(a, \delta)) = f(a) + \delta f(B(0, 1))$, da cui $c \equiv -f(a)/\delta$ non appartiene a $f(B(0, 1))$. Notiamo che $|\alpha| \leq 1 \Rightarrow \alpha B(0, 1) \subseteq B(0, 1)$, da cui $\alpha f(B(0, 1)) = f(\alpha B(0, 1)) \subseteq f(B(0, 1))$. Ora, per ogni vettore in $B(0, 1)$ si ha $f(v) \leq c$. Se per assurdo esistesse un $v \in B(0, 1)$, talché $f(v) = d > c$, $d/c < 1$, da cui $d/c f(B(0, 1)) \subseteq f(B(0, 1))$, cioè $d/c f(v) = c \in f(B(0, 1))$, che nega quanto visto prima.

(c.v.d.) Ne deriva che la palla aperta di raggio 1 ha immagine limitata, sicché la funzione è continua.

Continuità delle applicazioni bilineari reali

Dati tre spazi vettoriali X, Y, Z , $b : X \times Y \rightarrow Z$, si dice bilineare se è separatamente lineare in ciascuna delle due variabili. Sussiste allora la seguente

Proposizione I.19 Siano X, Y, Z spazi normati sul campo reale e b , applicazione bilineare dal prodotto di X e Y in Z . Allora b è continua se e solo se esiste $L \geq 0$, per cui

$$\|b(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_Z \leq L \|\mathbf{x}\|_X \|\mathbf{y}\|_Y$$

per ogni $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in Y$.

Dimostrazione

Vediamo che la condizione è sufficiente:

$$\begin{aligned} b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - b(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) &= b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - b(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) + b(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) - b(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = b(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{y}) + b(\mathbf{x}_0, \mathbf{y} - \mathbf{y}_0) \\ \|b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - b(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)\|_Z &\leq L(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_X \|\mathbf{y}\|_Y + \|\mathbf{x}_0\|_X \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\|_Y) \end{aligned}$$

per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_X \rightarrow 0$, mentre per $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}_0$, per continuità della norma (essa è infatti una distanza da un punto fissato, l'origine, ed è perciò continua in virtù della proposizione I.12) $\|\mathbf{y}\|_Y \rightarrow \|\mathbf{y}_0\|_Y$, sicché $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow b(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$.

Vediamo che la condizione è necessaria: sia b continua in $(0, 0)$, con $b(0, 0) = 0$. Allora esiste $\delta > 0$, tale che per ogni $\|\mathbf{x}\|_X \leq \delta$, $\|\mathbf{y}\|_Y \leq \delta$, si ha $\|b(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_Z < 1$. Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ qualsiasi in X e Y . Allora

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = b\left(\left(\delta \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|_X}\right) \frac{\|\mathbf{u}\|_X}{\delta}, \left(\delta \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_Y}\right) \frac{\|\mathbf{v}\|_Y}{\delta}\right) = \frac{\|\mathbf{u}\|_X \|\mathbf{v}\|_Y}{\delta^2},$$

(c.v.d.) siccome poi $b(0, \mathbf{v}) = 0$, $b(\mathbf{u}, 0) = 0$, si ha la tesi posto $L \equiv \delta^{-2}$.

Esempio I.12 In uno spazio di prodotto scalare reale, per la disuguaglianza di Cauchy e Schwarz si ha

$$|(\mathbf{v}|\mathbf{w})| \leq \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|$$

da cui la continuità del prodotto scalare stesso.

I.3.6 Norme topologicamente equivalenti

Norme più fini

Consideriamo due norme definite sullo stesso spazio vettoriale X , $\|\cdot\|_\alpha, \|\cdot\|_\beta$. Ognuna genera una famiglia di aperti in X , la topologia indotta. Siano τ_α e τ_β le topologie generate da $\|\cdot\|_\alpha$ e $\|\cdot\|_\beta$ rispettivamente. Diciamo che τ_α è **più fine** di τ_β se ogni aperto di τ_β appartiene a τ_α (τ_α ha più aperti di τ_β), cioè se $\tau_\beta \subseteq \tau_\alpha$. Equivalentemente, per ogni punto $\xi \in X$, se U è un τ_β -intorno, allora esso è un τ_α -intorno, e questo è vero se e solo se ogni palla della norma β contiene una palla nella norma α (e per traslazione è sufficiente considerare palle centrate nell'origine). In termini intuitivi, la condizione di vicinanza e convergenza imposta dalla $\|\cdot\|_\alpha$ è più stringente di quella imposta dalla $\|\cdot\|_\beta$.

Un secondo modo equivalente per esprimere il fatto che la topologia indotta dalla α -norma è più fine di quella indotta dalla β -norma è il seguente

Proposizione I.20 Date due norme $\|\cdot\|_\alpha, \|\cdot\|_\beta$ definite sullo spazio X , la topologia τ_α indotta dalla prima è più fine di quella indotta dalla seconda, τ_β , se e solo se

(i) l'applicazione identica

$$I : (X, \|\cdot\|_\alpha) \rightarrow (X, \|\cdot\|_\beta)$$

è continua;

(ii) esiste una costante $\ell > 0$ per cui, per ogni $\xi \in X$

$$\|\xi\|_\beta \leq \ell \|\xi\|_\alpha$$

Dimostrazione I è continua se e solo se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : B_\alpha(0, \delta) \subseteq B_\beta(0, \varepsilon)$, la qual cosa equivale ad affermare che la topologia τ_α è più fine della τ_β .

D'altra parte la continuità di I , lineare, sussiste se e solo esiste la costante ℓ per cui

(c.v.d.)

$$\|\xi\|_\beta \leq \ell \|\xi\|_\alpha$$

Norme equivalenti

La nozione di convergenza sarà equivalente nelle due norme se le rispettive topologie saranno l'una più fine dell'altra, cioè se e solo se $\tau_\alpha = \tau_\beta$. Per quanto detto, l'equivalenza delle norme si ha se e solo se esistono due costanti $\lambda, \ell > 0$, per cui

$$\lambda \|\xi\|_\alpha \leq \|\xi\|_\beta \leq \ell \|\xi\|_\alpha$$

Infine, diremo che una norma è **strettamente più fine** di un'altra se l'applicazione identica da X normato con la più fine, in X normato dalla meno fine, è continua, ma la sua inversa non è continua.

I.4 Spazi compatti e connessi

1.4.1 Definizione di spazio compatto

Definizioni e generalità

Definizione I.32 *Uno spazio metrico (X, d) si definisce sequenzialmente compatto se da ogni successione a valori in X si può estrarre una sottosuccessione convergente a un valore di X .*

Una proprietà rilevante di uno spazio metrico compatto è la seguente:

Teorema I.13 *Uno spazio metrico (X, d) compatto è completo.*

Dimostrazione Sia infatti $\{x_n\} \subseteq X$ di Cauchy. Poiché X è compatto si può estrarre una sottosuccessione convergente a $\xi \in X$ dalla $\{x_n\}$. Sia tale sottosuccessione mappata dalla successione naturale monotona k_n , da cui

$$x_{k_n} \rightarrow \xi, n \rightarrow \infty$$

Ora, siccome la successione è di Cauchy, fissato un valore di ε , esiste un ν_1 tale che per ogni $m, p > \nu_1$ vale

$$d(x_m, x_p) < \frac{\varepsilon}{2},$$

d'altra parte, in corrispondenza del medesimo ε , esiste un ν_2 , talché per ogni $n > \nu_2$ si ha

$$d(x_{k_n}, \xi) < \frac{\varepsilon}{2}$$

perciò, per la disuguaglianza triangolare, per ogni $m, n, p > \max\{\nu_1, \nu_2\}$

$$d(x_m, \xi) \leq d(x_m, x_p) + d(x_{k_n}, \xi) < \varepsilon$$

(c.v.d.) da cui x_m converge a ξ per $m \rightarrow \infty$. Essendo $\xi \in X$, si ha la tesi.

Chiusura e compattezza

Consideriamo un sottoinsieme A dello spazio metrico (X, d) . A è naturalmente uno spazio metrico rispetto a d . Abbiamo allora che se A è sequenzialmente compatto A è chiuso e limitato.

Proposizione I.21 *$A \subseteq (X, d)$, se A è compatto per successioni rispetto a d allora A è chiuso e limitato.*

Dimostrazione Sia $\xi \in \bar{A}$, allora per il teorema I.3 esiste una successione x_n a valori in A convergente a ξ . Poiché A è compatto da x_n è possibile estrarre una successione convergente al punto $\zeta \in A$. D'altra parte siccome x_n converge a ξ , la sottosuccessione considerata deve tendere a ξ . Per l'unicità del limite $\zeta = \xi$. Ne deriva che $\xi \in A$, cioè $\bar{A} \subseteq A$, infine $\bar{A} = A$, perciò A è chiuso.

Sia ora A , per assurdo, illimitato. Cioè, esiste $x_0 \in A$ talché $\sup_{y \in A} d(x_0, y) = +\infty$. Esiste allora una successione di punti di A , $\{y_n\}$, per cui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_0, y_n) = +\infty$$

(c.v.d.) ogni sottosuccessione estratta da $\{y_n\}$, contro l'ipotesi che A sia compatto, dunque completo.

Negli spazi $\mathbb{R}^m$ vale anche il viceversa, per dimostrarlo ricordiamo il noto teorema di Analisi I dovuto a Bolzano e a Weierstraß,

Teorema I.14 (di Bolzano-Weierstraß)

Ogni successione limitata a valori in $\mathbb{R}$ ha una sottosuccessione convergente in $\mathbb{R}$.

Lemma I.2

Ogni successione limitata a valori in $\mathbb{R}^m$ ha una sottosuccessione convergente in $\mathbb{R}^m$.

Dimostrazione Sia $\{\mathbf{x}_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}_n = (x_n^1, \dots, x_n^m)$; se $\mathbf{x}_n$ è limitata allora ciascuna componente è limitata (come si verifica immediatamente). Procediamo per induzione su m . Il caso $m = 1$ corrisponde al lemma precedente, il teorema di Bolzano-Weierstraß. Veniamo al passo induttivo, $(m - 1) \Rightarrow (m)$. Torniamo a considerare la $\mathbf{x}_n$ di cui sopra. Estraiamo una sottosuccessione

convergente dalle prime $m - 1$ componenti mappata dalla corrispondenza monotona di $\mathbb{N}$ in sé, k_n . Ne ricaviamo allora una sottosuccessione $\mathbf{x}_{k_n} = (x_{k_n}^1, \dots, x_{k_n}^m)$, in cui le prime $m - 1$ successioni convergono. Ora dalla $x_{k_n}^m$ estraiamo una sottosuccessione convergente di mappa k_n^* , il che è possibile per il teorema di Bolzano. Ciascuna sottosuccessione $x_{k_n}^i$ è convergente, perciò la loro sottosuccessione $x_{k_n^*}^i$ è convergente. Con la mappa k_n^* si ottiene (c.v.d.) una sottosuccessione di $\mathbf{x}_n$ convergente, la tesi.

Teorema I.15 Sia $A \subseteq \mathbb{R}^m$, allora A è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Dimostrazione Sia $\mathbf{x}_n$ a valori in A , per la limitatezza di A $\{\mathbf{x}_n\}$ è limitata e perciò per il lemma precedente esiste una sottosuccessione di $\mathbf{x}_n$ convergente. Ma siccome A è chiuso, per la proposizione (c.v.d.) I.11, la sottosuccessione converge a un punto di A . Ne deriva che A è compatto.

In generale non è però vero che un sottoinsieme chiuso e limitato di uno spazio completo sia compatto. Consideriamo il seguente

Esempio I.13 Consideriamo lo spazio di Banach $X \equiv C^0([0, 1])$ con la norma infinito, e sia

$$A = \{f \in X \mid \|f\|_\infty \leq 1\}$$

A è limitato. D'altra parte A è chiuso poiché ogni successione di funzioni $\{f_n\}$ convergente è di Cauchy e per la completezza di X converge a una funzione continua $f \in X$. Ci resta da vedere che $\sup f(x) \leq 1$, cioè che f è a valori in $[-1, 1]$, come del resto ciascuna f_n . Si ha che per ogni x , $a_n \equiv f_n(x) \rightarrow f(x)$, ma $|a_n| \leq 1$, da cui, per la permanenza del segno $|f_n(x)| \leq 1$. Dunque A è chiuso e limitato, tuttavia A non è sequenzialmente compatto. Consideriamo, per mostrare questo, la successione a valori in A

$$f_n(x) = x^n.$$

La successione considerata converge puntualmente alla

$$\begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

ma non uniformemente, infatti

$$\sup |x^n - f(x)| = \sup (x^n - f(x)) = \sup x^n = 1 \not\rightarrow 0$$

Ora, se esistesse una sottosuccessione della x^n convergente uniformemente a una funzione $g(x)$, per unicità del limite si dovrebbe avere $g = f$ e questo è impossibile perché, come si è visto, g dovrebbe essere continua.

1.4.2 Caratterizzazione degli spazi metrici compatti

Totale limitatezza

Introduciamo la

Definizione I.33 Uno spazio metrico X si dice totalmente limitato se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un numero finito di insiemi $A_1, \dots, A_n$, ognuno avente diametro minore di ε , e con

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = X;$$

la sequenza $A_1, \dots, A_n$ si dice in tal caso ricoprimento finito di X .

Poiché ogni A_i sarà contenuto in una palla di raggio ε , lo spazio X sarà totalmente limitato se e solo se per ogni ε esiste un numero finito di palle di raggio ε che ricoprono X .

Caratterizzazione degli spazi metrici compatti
Teorema I.16
 (caratterizzazione degli spazi compatti)

Si ha, in definitiva, il seguente

Sia (X, d) uno spazio metrico. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (i) X è compatto per successioni (sequenzialmente compatto);
- (ii) X è completo e totalmente limitato;
- (iii) da ogni ricoprimento aperto di X si può estrarre un ricoprimento finito.

Dimostrazione (i) $\Rightarrow$ (ii) Sia X compatto per successioni, abbiamo già visto che ciò implica X completo. Se X non fosse ora totalmente limitato, esisterebbe un raggio $r > 0$ tale che nessuna famiglia finita di palle di raggio r ricoprirebbe X . Fissiamo $x_1 \in X$, poiché $B(x_1, r)$ non ricopre X , esiste $x_2 \in X$ con $d(x_1, x_2) \geq r$. D'altra parte neppure l'unione delle palle di raggio r centrate in x_1 e x_2 ricoprono lo spazio, perciò deve esistere un punto $x_3 \in X$ talché $d(x_{1,2}, x_3) \geq r$. Procedendo per induzione si costruisce una successione a valori in X i cui elementi sono tali che

$$d(x_i, x_j) \geq r, \forall i \neq j \in \mathbb{N}$$

Da tale successione non si può estrarre alcuna sottosuccessione convergente per cui X non è compatto. Assurdo.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sia X completo e totalmente limitato. Per assurdo, esista un ricoprimento aperto $\mathcal{F} \equiv \{A \subseteq X \mid A \text{ aperto}\}$ di X dal quale non si possa estrarre alcun ricoprimento finito. Poiché X è totalmente limitato, esiste un numero finito di insiemi $C_1, \dots, C_n$ tali che $\text{diam}(C_j) < 1$, per ogni $j \in J_n$ e

$$\bigcup_{j=1}^n C_j = X$$

Se da $\mathcal{F}$ si potesse estrarre un ricoprimento finito per ciascun C_j esisterebbe un sottoricoprimento finito estratto da $\mathcal{F}$ di X . Perciò sia $k \in J_n$ l'indice per cui C_k non può essere ricoperto finitamente da $\mathcal{F}$. Poniamo $X_1 \equiv C_k$, è evidente che X_1 è ancora totalmente limitato. Ripetiamo il ragionamento precedente con raggio del ricoprimento finito di X_1 pari a $1/2$. Continuando per induzione la costruzione otteniamo una sequenza $\{X_i\}$ di sottoinsiemi di X tali che

$$\begin{aligned} \text{diam}(X_i) &< \frac{1}{i} \\ X_1 \supseteq X_2 &\supseteq \dots \supseteq X_n \end{aligned}$$

per i quali non esistono ricoprimenti finiti estraibili da $\mathcal{F}$.

Per ogni k sia x_k un punto di X_k . Se $m > n$, sia x_m che x_n sono in X_n e dunque

$$d(x_m, x_n) \leq \text{diam}(X_n) < \frac{1}{n}$$

cosicché la successione x_k è di Cauchy. Essendo X completo la x_k convergerà a $\xi \in X$. Se $x \in X_k$ e se $n > k$ risulta $x_n \in X_k$ e dunque

$$d(x, \xi) \leq d(x, x_n) + d(x_n, \xi) \leq \frac{1}{k} + d(x_n, \xi)$$

sicché, per $n \rightarrow \infty$ si ha

$$d(x, \xi) \leq \frac{1}{k}, \forall x \in X_k$$

Ora, sia $F_0 \in \mathcal{F}$ con $\xi \in F_0$, e sia $\rho > 0$ il raggio per cui $B(\xi, \rho)$ sia contenuta in F_0 e $\rho < 1/k$. Allora

$$d(x, \xi) < \rho, \forall x \in X_k$$

da cui $X_k \subseteq B(\xi, \rho) \subseteq F_0$. Il che è assurdo.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Per assurdo, sia $\{x_n\} \subseteq X$ dalla quale non sia possibile estrarre una sottosuccessione convergente. Sia $x \in X$. Se in **ogni** palla centrata in x cadessero infiniti punti di $\{x_n\}$ si potrebbe estrarre da questa una successione convergente a x . Perciò, per ogni $x \in X$ esiste almeno **una** palla B_x nella quale cadono al più un numero finito di punti di $\{x_n\}$. Al variare di $x \in X$ si costruisce una famiglia $\mathcal{F}$ costituita dalle palle B_x . $\mathcal{F}$ è un ricoprimento di X dal

quale non si può estrarre un ricoprimento finito di X . Infatti, se fosse

$$X = B_x^1 \cup \dots \cup B_x^n$$

(c.v.d.) in X non cadrebbero tutti i punti di $\{x_n\}$ contenendone, ciascun B_x^j , un numero finito.

I.4.3 Continuità e compattezza

Il teorema di Weierstrass

Per funzioni a valori reali definite su un compatto, sussiste il fondamentale

Teorema I.17 (di Weierstraß)

Sia (X, d) un compatto e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f ammette in X un punto di massimo e di minimo.

Dimostrazione

Concentriamoci sull'esistenza del punto di minimo (la dimostrazione per il punto di massimo è del tutto analoga). Essendo f a valori reali esiste $y \equiv \inf f(X)$. Vogliamo vedere che esiste $\xi \in X$ talché $f(\xi) = y$. Poiché y è l'estremo inferiore dell'insieme immagine di X si ha che esiste una successione a valori in $f(X)$ convergente a y , la **successione minimizzante**. Sia essa $\{y_n\} \subseteq f(X)$. Definiamo ora la successione $\{x_n\} \subseteq X$ tale che $f(x_n) = y_n$ per ogni intero n . Essendo $\{x_n\}$ a valori in X compatto, esiste una sottosuccessione $\{x_{k_n}\}$ mappata da k_n convergente a $\xi \in X$. Per la continuità di f la successione $\{y_{k_n}\}$, ove $y_{k_n} = f(x_{k_n})$ converge a $f(\xi)$. D'altra parte essendo essa una sottosuccessione della successione minimizzante dovrà

(c.v.d.) convergere a y , ne deriva che - per unicità del limite - $f(\xi) = y$.

Poniamo la seguente

Definizione I.34

$f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è semicontinua inferiormente (superiormente) in $\xi \in X$ se per ogni successione $\{x_n\} \subseteq X$ convergente a ξ si ha $f(\xi) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ (ovvero $f(\xi) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$).

Proposizione I.22

Sia (X, d) un compatto e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione semicontinua inferiormente (superiormente). Allora f ammette in X un punto di minimo (di massimo).

Dimostrazione

Si procede come nella dimostrazione del teorema di Weierstraß. Si perviene alla

$$f(\xi) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_{k_n}) = \liminf_{n \rightarrow \infty} y_{k_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y = \inf f(X)$$

(c.v.d.) da cui $f(\xi) = \inf f(X)$.

Teorema I.18

Se (X, d) è compatto, (Y, δ) è uno spazio metrico e $f : X \rightarrow Y$ è continua, allora $f(X)$ è compatto.

Dimostrazione

Sia $\{y_n\} \subseteq f(X)$ allora esiste $\{x_n\} \subseteq X$ tale che $f(x_n) = y_n$. Per la compattezza di X esiste $\{x_{k_n}\}$ convergente a $\xi \in X$. Per continuità di f la sottosuccessione di y_n $f(x_{k_n})$ converge a $f(\xi) \in f(X)$, sicchè $f(X)$ è sequenzialmente compatto.

(c.v.d.)

Uniforme continuità

Come nel caso reale si pone la

Definizione I.35

Sia f una funzione definita da (X, d_1) in (Y, d_2) spazi metrici. Si dice che f è uniformemente continua su X se per ogni fissato $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta = \delta(\varepsilon)$ talché per ogni coppia di punti di X distanti tra loro per meno di δ , la distanza tra le rispettive immagini sia inferiore a ε :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : d_1(a, b) < \delta \Rightarrow d_2(f(a), f(b)) < \varepsilon$$

Teorema I.19 (dell'uniforme continuità)

Se (X, d_1) è compatto, (Y, d_2) è uno spazio metrico e $f : X \rightarrow Y$ è continua, allora f è uniformemente continua in X .

Dimostrazione Per assurdo sia f non uniformemente continua. Allora esiste un ε tale che per ogni δ esiste una coppia di punti $(a, b) \in X^2$ per cui $d_1(a, b) < \delta$ e $d_2(f(a), f(b)) \geq \varepsilon$. Poniamo allora successivamente $\delta \equiv 1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n$ per ogni intero diverso da 0. Si definiscono così due successioni a valori in X , a_n e b_n tali che

$$d_1(a_n, b_n) < \frac{1}{n} \text{ e } d_2(f(a_n), f(b_n)) \geq \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ora da a_n si può estrarre una sottosuccessione a_{k_n} convergente al valore $a \in X$, da cui, per continuità di f si ha

$$d_1(a, b_{k_n}) \leq d_1(a, a_{k_n}) + d_1(a_{k_n}, b_{k_n}) \rightarrow 0$$

$$d_2(f(a_{k_n}), f(b_{k_n})) \geq \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$$

dalla prima disuguaglianza si trova che b_{k_n} converge ad a , d'altra parte per continuità di f si ha che $f(b_{k_n})$ converge a $f(a)$, la qual cosa contraddice la seconda disuguaglianza: assurdo.

(c.v.d.)

Il teorema di Dini

Il teorema di Dini consente di legare la continuità puntuale a quella uniforme. Abbiamo già visto che se $\{f_n\}$, successione di funzioni continue, converge uniformemente a f allora f è continua, ed è pure il limite puntuale della successione. Il teorema di Dini specifica le condizioni in cui anche il viceversa è vero.

Teorema I.20 (di Dini)

Sia (X, d) uno spazio metrico compatto. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni continue definite da X in $\mathbb{R}$. Per ogni valore $x \in X$ si abbia $\{f_n(x)\} \subseteq \mathbb{R}$ decrescente e $\{f_n\}$ converga puntualmente a $f(x)$ continua. Allora $\{f_n\}$ converge a f uniformemente.

Dimostrazione La funzione $f_n - f$ è continua perciò ammette in X un punto di massimo. Sia esso x_n . Si ha perciò

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_X (f_n - f)(x) = f_n(x_n) - f(x_n)$$

ciò che vogliamo vedere è che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f_n(x_n) - f(x_n)] = 0.$$

Ora, per ogni valore x

$$f_n(x) - f(x) \geq f_{n+1}(x) - f(x)$$

però $f_n(x_n) - f(x_n) \geq f_n(x_{n+1}) - f(x_{n+1})$ sicché

$$f_n(x_n) - f(x_n) \geq f_n(x_{n+1}) - f(x_{n+1}) \geq f_{n+1}(x_{n+1}) - f(x_{n+1})$$

da cui $\{f_n(x_n) - f(x_n)\}$ è monotona decrescente perciò ammette limite. Tale limite è nullo. Infatti, se così non fosse, esisterebbe un $\varepsilon_0 > 0$ talché

$$f_n(x_n) - f(x_n) \geq \varepsilon_0, \forall n \in \mathbb{N}$$

ma x_n è a valori in un compatto, sicché ammette una sottosuccessione x_{k_n} convergente a $\xi \in X$.

Avremmo

$$f_{k_n}(x_{k_n}) - f(x_{k_n}) \geq \varepsilon_0, \forall n \in \mathbb{N}$$

per ogni intero h

$$f_{k_n}(x_{k_n+h}) - f(x_{k_n+h}) \geq f_{k_n+h}(x_{k_n+h}) - f(x_{k_n+h}) \geq \varepsilon_0$$

passando al limite per $h \rightarrow \infty$

$$f_{k_n}(\xi) - f(\xi) \geq \varepsilon_0$$

(c.v.d.) da cui $f_{k_n}(\xi)$ non tende a $f(\xi)$ per $n \rightarrow \infty$, assurdo.

I.4.4 Continuità delle funzioni lineari ed equivalenza delle norme in dimensione finita

**Continuità
delle funzioni
lineari in
dimensione finita**

Vogliamo qui indagare il comportamento delle funzioni lineari in dimensione finita, vedremo che esse sono sempre continue

Lemma I.3 Sia X $\mathbb{K}$ -spazio normato, $T : \mathbb{K}^n \rightarrow X$, lineare. Normato $\mathbb{K}^n$ con la norma del massimo $\|\mathbf{v}\|_\infty \equiv \max_{k \in J_n} \{v_k\}$, si ha che T è continua.

Dimostrazione Prendiamo $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$, sulla base standard di $\mathbb{K}^n$, si ha che T è univocamente determinata dalle $T(\mathbf{e}_k) = \mathbf{w}_k, k \in J_n$

$$\|T\mathbf{v}\|_X = \left\| \sum_{k=1}^n \mathbf{w}_k v_k \right\|_X \leq \sum_{k=1}^n \|\mathbf{w}_k\|_X |v_k| \leq L \|\mathbf{v}\|_\infty$$

(c.v.d.) perciò T è continua.

Lemma I.4 Sia X $\mathbb{K}$ -spazio normato, $\omega : \mathbb{K}^n \rightarrow X$, isomorfismo lineare. Normato $\mathbb{K}^n$ con la norma del massimo $\|\mathbf{v}\|_\infty \equiv \max_{k \in J_n} \{v_k\}$, si ha che ω è un omeomorfismo.

Dimostrazione Per il lemma precedente ci basta vedere che ω^{-1} è continua. A tale scopo utilizziamo l'osservazione I.11. La sfera dei versori di $\mathbb{K}^n$ è ovviamente chiusa e limitata, perciò compatta. La funzione $\|\omega\|_X : \mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} \rightarrow \mathbb{R}^+$ è continua (come composizione di funzioni continue) e perciò ammette minimo in un versore. D'altra parte tale minimo è certo diverso da 0 poiché ω è un isomorfismo e si annulla solo sullo 0, se ne ricava che $\inf \{\|\omega\mathbf{v}\|_X \mid \mathbf{v} \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}^n}\} = \alpha > 0$.

(c.v.d.)

Un esempio di applicazione dei due lemmi mostrati è il

**Teorema
I.21 (di Heine,
Pincherle, Borel)**

In uno spazio normato di dimensione finita, un sottoinsieme è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Dimostrazione Sia X lo spazio normato, esso è, in ogni caso, un $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale, perciò è isomorfo secondo ω (isomorfismo di passaggio alle coordinate) a $\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^{\dim_{\mathbb{R}} X}$. ω è un omeomorfismo da $\mathbb{R}^n$ in X , perciò manda compatti in compatti e chiusi in chiusi; limitati in limitati per lipschitzianità, dal teorema di Heine, Pincherle e Borel nel caso reale si perviene alla conclusione.

(c.v.d.)

Più importante, è però il seguente

**Teorema
I.22 (della
continuità degli
omomorfismi
in dimensione
finita)**

Ogni funzione lineare tra spazi normati il cui dominio sia in dimensione finita è continua.

Sia X normato di dimensione finita e, preso Y normato, consideriamo $T \in \text{Hom}(X, Y)$. Prendiamo $\omega : \mathbb{K}^n \rightarrow X$ isomorfismo. Allora $T \circ \omega : \mathbb{K}^n \rightarrow Y$ è continua per il lemma I.3, ma per il lemma precedente ω^{-1} è continua, sicché risulta continua

$$T = T \circ \omega \circ \omega^{-1}$$

(c.v.d.)

**Equivalenza
delle norme in
dimensione finita**

Il teorema della continuità degli omomorfismi in dimensione finita consente di concludere il seguente fondamentale

Teorema I.23 Su uno spazio di dimensione finita tutte le norme sono equivalenti.

Dimostrazione Infatti, per il teorema della continuità degli omomorfismi in dimensione finita, l'identità da X con una norma in X con un'altra norma, come applicazione lineare, sarà continua nei due

(c.v.d.) sensi.

I.4.5 Cenno agli spazi connessi

Definizione

Per definire uno spazio connesso dimostriamo la seguente

Proposizione I.23 *Sia (X, d) uno spazio metrico, allora sono fatti equivalenti*

- (i) *gli unici sottoinsiemi di X contemporaneamente aperti e chiusi sono X e $\emptyset$;*
- (ii) *non esiste alcuna coppia (A, B) di sottoinsiemi aperti di X , non vuoti e disgiunti per cui valga $X = A \cup B$.*

Definizione I.36 *Se (X, d) è uno spazio metrico che gode di una delle proprietà di cui nella proposizione precedente allora si dice che esso è connesso.*

Dimostrazione Sia X uno spazio metrico e valga la (i). Per assurdo, esistano A, B aperti di X non vuoti e disgiunti tali che $X = A \cup B$. Allora essendo il complementare di A B , aperto, si ha che A è chiuso. Ma A è diverso dal vuoto come B , sicché è diverso anche da X . Assurdo.

Vediamo ora che non (i) implica non (ii). Esista cioè $A \subseteq X$, diverso da X e dal vuoto, contemporaneamente aperto e chiuso. Poniamo $B \equiv X \setminus A$. Si ha $X = A \cup B$. A e B sono (c.v.d.) aperti e non vuoti e disgiunti.

Generalizzazione del teorema degli zeri

Teorema I.24 *Siano (X, d_1) e (Y, d_2) spazi metrici. Sia $f : X \rightarrow Y$ continua. Se X è connesso allora $f(X)$ è connesso.*

Dimostrazione Sia per assurdo $f(X) = A \cup B$, con A, B aperti, disgiunti e non vuoti. Allora $X = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, infatti

$$\xi \in f^{-1}(A \cup B) \Leftrightarrow f(\xi) \in A \vee f(\xi) \in B \Leftrightarrow \xi \in f^{-1}(A) \vee \xi \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow \xi \in f^{-1}(A \cup B)$$

Per continuità, $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ sono aperti, d'altra parte sono disgiunti (altrimenti esisterebbe $f(\xi) \in A \cap B$) e non vuoti poiché A e B sono non vuoti, se ne conclude che (c.v.d.) X è non connesso: assurdo.

Il teorema appena dimostrato generalizza il teorema degli zeri, essendo in $\mathbb{R}$ gli intervalli connessi.

Connessione per Archi

Definizione I.37 *Uno spazio metrico si dice connesso per archi se ogni coppia di punti può essere unita da un cammino continuo: cioè se fissato $(a, b) \in X$ esiste $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ continua, tale che $\gamma(0) = a$ e $\gamma(1) = b$.*

La connessione per archi implica la connessione, mentre il viceversa non è sempre vero.

Proposizione I.24 *Se X è connesso per archi allora è connesso.*

Dimostrazione Sia X non connesso. $X = A \cup B$ con A, B aperti, disgiunti, non vuoti. Siano $a \in A$ e $b \in B$. Esiste $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ continua, tale che $\gamma(0) = a$ e $\gamma(1) = b$. Ora, $\gamma([0, 1]) \cap A$ e $\gamma([0, 1]) \cap B$ sono due insiemi chiusi su $\gamma([0, 1])$ come intersezione di due chiusi. D'altra parte essi, in $\gamma([0, 1])$, sono aperti, come complementari di chiusi. Essi sono disgiunti e non vuoti, il primo contiene a , il secondo b , ne deriva che $\gamma([0, 1])$ è sconnesso, il che è assurdo essendo (c.v.d.) $[0, 1]$ connesso e γ continua.

I.5 Il lemma delle contrazioni di Cacciopoli e Banach

Nelle trasformazioni di uno spazio metrico in sé, particolare rilevanza assumono le contrazioni, che sono applicazioni lipschitziane di costante strettamente minore di 1. In altri termini, si ha la seguente

Definizione I.38 Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $f : X \rightarrow X$ una trasformazione in sé dello spazio. Si dice che f è una contrazione se

$$\exists 0 < c < 1 : d(f(x_1), f(x_2)) \leq c d(x_1, x_2), \forall x_1, x_2 \in X$$

Osservazione I.12 f è lipschitziana e come tale è uniformemente continua, infatti, fissato $\varepsilon > 0$ si ha

$$d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d(f(x_1), f(x_2)) < c\delta$$

basta porre $\delta \equiv \varepsilon/c$ per pervenire alla tesi.

Definizione I.39 Data una trasformazione f di un insieme X in sé, si dice che $\xi \in X$ è un punto fisso (o unito) per f se

$$\xi = f(\xi).$$

Si perviene infine al

Lemma I.5 (delle contrazioni di Cacciopoli e Banach)

Sia (X, d) uno spazio metrico completo. Sia f una contrazione di X . Allora esiste uno e un solo punto unito per f .

Dimostrazione Sia $x_0 \in X$ qualsiasi. Definiamo la successione $\{x_n\} \subseteq X$ data dalla ricorsione

$$\begin{cases} x_0 \\ x_{n+1} \equiv f(x_n) \end{cases}.$$

Mostriamo che $\{x_n\}$ è di Cauchy in (X, d) . Sia $0 < c < 1$ la costante di Lipschitz della f . Abbiamo, per $k \geq 1$

$$d(x_{k+1}, x_k) = d(f(x_k), f(x_{k-1})) \leq c^k d(x_1, x_0)$$

mostriamolo per induzione: il caso $k = 1$, discende dalla definizione di contrazione. Veniamo al passo induttivo: valga $d(x_k, x_{k-1}) \leq c^{k-1} d(x_1, x_0)$. Si ha

$$d(x_{k+1}, x_k) = d(f(x_k), f(x_{k-1})) \leq c d(x_k, x_{k-1}) \leq c^k d(x_1, x_0).$$

Per $n > m$ interi, si ricava

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + d(x_{m+2}, x_n) \leq \\ &\leq d(x_m, x_{m+1}) + \dots + d(x_{n-1}, x_n) \leq (c^m + c^{m+1} + \dots + c^{n-1}) d(x_1, x_0) = \\ &= c^m \frac{1 - c^{n-m}}{1 - c} d(x_1, x_0) \leq \frac{c^m}{1 - c} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

da cui, fissato $\varepsilon > 0$, per ogni $m > \nu = \nu(\varepsilon)$ talché

$$\frac{c^\nu}{1 - c} d(x_1, x_0) < \varepsilon$$

si ha, essendo $c < 1$

$$\frac{c^m}{1 - c} d(x_1, x_0) < \varepsilon$$

da cui si ha che $\{x_n\}$ è di Cauchy.

Se ne ricava l'esistenza e l'unicità di $\xi \in X$ talché $x_n \rightarrow \xi$, $n \rightarrow \infty$, essendo X uno spazio metrico completo per ipotesi. Vogliamo adesso vedere che il limite della $\{x_n\}$ è il punto fisso della f così da concludere l'esistenza del punto fisso stesso.

Abbiamo

$$f(x_n) = x_{n+1}$$

passiamo al limite in ambo i membri, per l'osservazione I.12 f è continua, sicché si ricava

$$f(\xi) = \xi.$$

Non ci resta che mostrare l'unicità di ξ . Sia, in effetti η un punto fisso per f . Si ha

$$\begin{aligned}d(\xi, \eta) = d(f(\xi), f(\eta)) &\leq c d(\xi, \eta) \\(1 - c) d(\xi, \eta) &\leq 0\end{aligned}$$

da cui, essendo $1 - c \neq 0$

$$d(\xi, \eta) \leq 0 \Rightarrow d(\xi, \eta) = 0,$$

(c.v.d.) infine, $\xi = \eta$.

Osservazione I.13 Si ha una stima per l'errore

$$\begin{aligned}d(\xi, x_n) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots \leq d(T(x_0), x_0) (c^n + c^{n+1} + \dots) = \\&= \frac{c^n}{1 - c} d(T(x_0), x_0)\end{aligned}$$

Calcolo differenziale

In questo capitolo introduciamo gli strumenti di base del calcolo differenziale in spazi multidimensionali. Nelle prime due sezioni tratteremo il caso generale di funzioni su spazi normati. Dopodiché ci concentreremo sul caso di funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$, che ci interesserà per tutto il resto della trattazione.

II.1 Derivazione

II.1.1 Derivazione secondo un vettore

Definizione

Consideriamo due $\mathbb{K}$ -spazi normati X e Y , un sottoinsieme D di X e un suo punto interno $\bar{x}$. Consideriamo la retta per $\bar{x}$ avente direzione parallela al vettore $0 \neq \mathbf{v} \in X$, costituita dai punti dell'insieme $r \equiv \{\bar{x} + t\mathbf{v} \in X \mid t \in \mathbb{K}\}$. Essendo $\bar{x} \in \overset{\circ}{D}$, si ha che esiste una ε -palla centrata in $\bar{x}$ tutta contenuta in D . Perciò la retta r interseca D in un tutto un segmento definito dai valori di $t \in]-\delta, \delta[$ per i quali

$$\|t\mathbf{v}\| < \varepsilon \Rightarrow t < \frac{\varepsilon}{\|\mathbf{v}\|} \equiv \delta.$$

Ne deriva che è possibile considerare la restrizione della funzione f a un segmento della retta r . Resta allora ben posta la seguente

Definizione II.1 Siano X, Y spazi normati, $D \subseteq X$, $\bar{x} \in \overset{\circ}{D}$ e $f : D \rightarrow Y$. Si dice che f è derivabile in $\bar{x}$ secondo $0 \neq \mathbf{v} \in X$, se esiste il

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + t\mathbf{v}) - f(\bar{x})}{t}.$$

Tale limite, quando esiste, si dice anche derivata secondo $\mathbf{v}$ di f in $\mathbf{x}_0$ e si indica con uno dei seguenti simboli

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\bar{x}), \partial_{\mathbf{v}} f(\bar{x}), D_{\mathbf{v}} f(\bar{x})$$

Derivazione secondo vettori diversi

Spesso ci si limita a considerare vettori $\mathbf{v}$ di norma unitaria, si parla allora di **derivata direzionale**. In realtà, la differenza tra le due definizioni sta solo in un cambiamento di scala. Vediamo in proposito la seguente

Proposizione II.1 Nelle notazioni della definizione precedente, sia $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, e $\mathbf{w} = \lambda\mathbf{v}$. Se esiste $\partial_{\mathbf{v}} f(\bar{x})$, allora esiste $\partial_{\mathbf{w}} f(\bar{x})$ e si ha

$$\partial_{\mathbf{w}} f(\bar{x}) = \lambda \partial_{\mathbf{v}} f(\bar{x})$$

Dimostrazione Si ha

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + t\mathbf{w}) - f(\bar{x})}{t} = \lambda \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + t\lambda\mathbf{v}) - f(\bar{x})}{\lambda t}$$

per il teorema di cambio di variabile, avendosi $t \rightarrow 0 \Leftrightarrow \lambda t \rightarrow 0$, si ha

$$(c.v.d.) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + t\mathbf{w}) - f(\bar{x})}{t} = \lambda \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + \tau\mathbf{v}) - f(\bar{x})}{\tau} = \lambda \partial_{\mathbf{v}} f(\bar{x}).$$

Osservazione II.1 Una funzione è derivabile secondo un vettore $\mathbf{v} \neq 0$ se e solo se ammette derivata direzionale lungo il versore $\mathbf{u} \equiv \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$.

Esempio II.1 Se X è un $\mathbb{R}$ -spazio a prodotto scalare allora la norma indotta ammette derivate direzionali in ogni punto diverso dall'origine e vale

$$\partial_{\mathbf{u}} \|\cdot\|(\bar{x}) = \frac{(\bar{x}|\mathbf{u})}{\|\bar{x}\|}$$

Infatti

$$\frac{\|\bar{x} + t\mathbf{u}\| - \|\bar{x}\|}{t} = \frac{(\bar{x} + t\mathbf{u})^2 - \bar{x}^2}{t(\|\bar{x} + t\mathbf{u}\| + \|\bar{x}\|)} = \frac{2t(\bar{x}|\mathbf{u}) + t^2}{t(\|\bar{x} + t\mathbf{u}\| + \|\bar{x}\|)} = \frac{2(\bar{x}|\mathbf{u}) + t}{(\|\bar{x} + t\mathbf{u}\| + \|\bar{x}\|)} \rightarrow \frac{(\bar{x}|\mathbf{u})}{\|\bar{x}\|}$$

Derivabilità e continuità

La derivabilità in tutte le direzioni in un punto non garantisce la continuità della funzione nel punto considerato. A tal proposito, si consideri il seguente

Esempio II.2 Si consideri la seguente funzione definita sul piano

$$f(x, y) \equiv \begin{cases} 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \\ \left(\frac{x^2 y}{x^4 + y^2}\right)^2 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sia $\mathbf{u} \equiv u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2$ una direzione, $u_1^2 + u_2^2 = 1$. Calcoliamo la derivata direzionale di f secondo $\mathbf{u}$ nell'origine:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\frac{t^3 u_1^2 u_2}{t^4 u_1^4 + t^2 u_2^2} \right)^2 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\frac{t u_1^2 u_2}{t^2 u_1^4 + u_2^2} \right)^2 = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} t \left(\frac{u_1^2 u_2}{t^2 u_1^4 + u_2^2} \right)^2 = 0 \end{aligned}$$

D'altra parte f non è continua nell'origine, infatti, restringendoci a $y = x^2$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), x^2=y} \left(\frac{x^4}{x^4 + x^4} \right)^2 = \frac{1}{4} \neq 0$$

Teorema del valor medio per derivate direzionali

Riguardiamo X e come $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale. Abbiamo definito la derivata direzionale come la derivata in 0 della funzione ristretta sul segmento diretto lungo il versore e parametrizzato da t :

$$\partial_{\mathbf{u}} f(\bar{x}) = \frac{d}{dt} f(\bar{x} + t\mathbf{u})(0),$$

ci siamo cioè ridotti a studiare una funzione definita su $\mathbb{R}$ a valori vettoriali. Per giungere al teorema del valor medio stabiliamo allora qualche risultato circa le funzioni reali a valori negli spazi vettoriali reali:

Lemma II.1 Siano $g : [a, b] \rightarrow Y$, Y $\mathbb{K}$ -spazio normato, e $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continua e derivabili, tali che

$$\|\dot{g}(t)\| \leq \dot{\phi}(t), t \in [a, b]$$

allora risulta $\|g(b) - g(a)\| \leq \phi(b) - \phi(a)$.

Dimostrazione Fissiamo $\varepsilon > 0$. Sia

$$T_\varepsilon \equiv \{t \in [a, b] \mid \|g(t) - g(a)\| \leq \phi(t) - \phi(a) + \varepsilon(t - a)\}$$

siccome $t \mapsto \|g(t) - g(a)\|$ è una funzione continua, T_ε risulta la controimmagine dell'insieme chiuso $[0, -\phi(a) - \varepsilon a]$ di $\|g(t) - g(a)\| - \phi(t) - \varepsilon t$, continua. Se ne conclude che T_ε è chiuso esso stesso in $\mathbb{R}$ ed essendo contenuto in $[a, b]$ ammette ivi massimo, τ . Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, se dimostriamo che $\tau = b$ abbiamo concluso. A tale scopo procediamo per assurdo ponendo $\tau < b$

$$\lim_{t \rightarrow \tau} \left\| \frac{g(t) - g(\tau)}{t - \tau} \right\| = \dot{g}(t) < \dot{\phi}(t) + \varepsilon = \lim_{t \rightarrow \tau} \frac{\phi(t) - \phi(\tau)}{t - \tau} + \varepsilon$$

da cui, per la permanenza del segno esiste un $\delta > 0$, talché $\forall t \in [\tau, \tau + \varepsilon]$ risulta

$$\|g(t) - g(\tau)\| < \phi(t) - \phi(\tau) + \varepsilon(t - \tau)$$

sommando questa con la disuguaglianza precedente

$$\|g(\tau) - g(a)\| < \phi(\tau) - \phi(a) + \varepsilon(\tau - a)$$

si ottiene

$$\|g(t) - g(a)\| \leq \|g(t) - g(\tau)\| + \|g(\tau) - g(a)\| < \phi(t) - \phi(a) + \varepsilon(t - a)$$

(c.v.d.) perciò $t > \tau$ appartiene a T_ε , il che è assurdo avendo noi posto $\max T_\varepsilon = \tau$.

Teorema II.1
(del valor medio per funzioni reali a valori vettoriali)

Sia Y un $\mathbb{K}$ -spazio normato e sia $f : [a, b] \rightarrow Y$ una funzione continua e derivabile nel dominio. Allora

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \left\| \dot{f} \right\|_\infty |b - a|$$

dove si è supposto $\left\| \dot{f} \right\|_\infty < +\infty$

Dimostrazione

Sia $L \equiv \sup_{[a,b]} \left\| \dot{f}(t) \right\| = \left\| \dot{f} \right\|_\infty$. Prendiamo $\phi(t) = Lt, t \in [a, b]$. f e ϕ sono nelle ipotesi del lemma precedente, risulta perciò immediatamente

$$(c.v.d.) \quad \|f(b) - f(a)\| \leq L|b - a|$$

Siamo ora in grado di dimostrare il

Teorema II.2
(del valor medio per le derivate direzionali)

Siano X, Y $\mathbb{K}$ -spazi normati, $D \subseteq X$ e $f : D \rightarrow Y$ funzione. Siano $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ punti distinti di D tali che il segmento $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ sia contenuto in D . Posto $\mathbf{u} \equiv (\mathbf{b} - \mathbf{a}) / \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|_X$, versore, se per ogni punto $\mathbf{x} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ esiste $\partial_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x})$ vale

$$\|f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})\|_Y \leq \sup_{\mathbf{x} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]} \|\partial_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x})\|_Y \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|_X$$

Dimostrazione

Applichiamo il teorema del valor medio per funzioni vettoriali di variabile reale alla

$$g(t) = f(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})), t \in [0, 1]$$

da cui

$$\|g(1) - g(0)\|_Y \leq \sup_{t \in [0,1]} \|\dot{g}(t)\|$$

dove $g(1) = f(\mathbf{b})$, $g(0) = f(\mathbf{a})$ e

$$\begin{aligned} \dot{g}(\tau) &= \lim_{t \rightarrow \tau} \frac{f(\mathbf{a} + (t + \tau)(\mathbf{b} - \mathbf{a})) - f(\mathbf{a} + \tau(\mathbf{b} - \mathbf{a}))}{t} = \partial_{\mathbf{b} - \mathbf{a}} f(\mathbf{a} + \tau(\mathbf{b} - \mathbf{a})) = \\ &= \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|_X \partial_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a} + \tau(\mathbf{b} - \mathbf{a})) \end{aligned}$$

(c.v.d.) da cui, la tesi.

II.1.2 Derivate parziali

Definizione di derivata parziale

Molto frequente è il caso in cui si abbia $X = \mathbb{K}^n$ ($\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$). Risulta allora fissata la base standard $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in J_n}$. La derivata direzionale secondo l' i -esimo versore della base si definisce **derivata parziale i -esima**. Si scrive allora

$$\partial_{\mathbf{e}_i} f(\bar{\mathbf{x}}) \equiv \partial_k f(\bar{\mathbf{x}})$$

e la si denota anche con i simboli

$$D_i f(\bar{\mathbf{x}}), \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{\mathbf{x}}), f_{x_i}(\bar{\mathbf{x}})$$

Se scriviamo ogni elemento di $\mathbb{K}^n$ in componenti, $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, x_n)$, si vede che la i -esima derivata parziale in $\bar{\mathbf{x}}$ coincide con la normale derivata della funzione

$$x_i \mapsto f(\bar{x}_1, \dots, x_i, \dots, \bar{x}_n)$$

ottenuta tenendo costanti tutte le variabili di indice diverso da i .

Derivata parziale identicamente nulla

Abbiamo la seguente

Proposizione II.2

Se $D \subseteq X$, D aperto, ed $f : D \rightarrow Y$, Y normato, è tale che, per un dato $\mathbf{u} \in X \setminus \{0\}$, $\partial_{\mathbf{u}} f$ esiste su D ed è ivi continua, allora si ha, se $[\mathbf{a}, \mathbf{a} + t\mathbf{u}] \subseteq D$,

$$f(\mathbf{a} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{a}) = \int_0^t \partial_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a} + \tau\mathbf{u}) d\tau$$

Dimostrazione

Posto $g(\tau) \equiv f(\mathbf{a} + \tau\mathbf{u})$, $\tau \in [0, 1]$, si ha, $\dot{g}(\tau) = \partial_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a} + \tau\mathbf{u})$ continua. Ne deriva che, per il teorema fondamentale del calcolo

$$(c.v.d.) \quad f(\mathbf{a} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{a}) = g(t) - g(0) = \int_0^t \dot{g}(\tau) d\tau = \int_0^t \partial_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a} + \tau\mathbf{u}) d\tau$$

Consideriamo, adesso, una funzione $g : D \rightarrow Y$, continua sul dominio, come nell'ipotesi della proposizione, e un vettore $X \ni \nu \neq 0$, tale che, per una $w \in C^0(D, Y)$, sia

$$\partial_{\nu} w(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in D \quad [*]$$

Notiamo anzitutto che se w_0 risolve (II.1) allora, per linearità della derivazione secondo un vettore si ha che le soluzioni dell'equazione sono tutte e sole le $w_0 + w$, con w soluzione qualsiasi dell'omogenea associata

$$\partial_{\nu} w(\mathbf{x}) = 0 \quad [**]$$

Infatti, $w_0 + w$ risolve (II.1) per linearità. D'altra parte se v risolve (II.1), si ha

$$\partial_{\nu} (v - w_0)(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}) = 0$$

da cui $w = v - w_0$ risolve (II.1).

Discutiamo il caso omogeneo a livello qualitativo, nel caso più semplice in cui $X = \mathbb{R}^n$ e $\nu \equiv \mathbf{e}_n$, deve risultare allora

$$\partial_n w(x_1, \dots, x_n) = 0$$

siccome la derivata parziale si fa tenendo costanti tutte le variabili tranne quella rispetto alla quale si deriva si è indotti a ritenere che la w non debba dipendere dalla x_n . Cioè, w deve essere del tipo

$$w = a \circ p_n$$

con $p_n : D \rightarrow Y$ proiezione (si tratta di una funzione continua) sullo spazio $\text{Span}_{i \in J_{n-1}} \langle \mathbf{e}_i \rangle$ e $a : p_n(D) \rightarrow Y$ funzione continua da $\mathbb{R}^{n-1} \rightarrow Y$. Ciò è vero se e solo se per ogni $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}) \in p_n(D)$ la w è costante sull'insieme $\{\xi \in \mathbb{R} | (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}, \xi)\}$. Se tale insieme è un intervallo della retta reale si ha la tesi, essendo

$$0 = \partial_n w(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}, \xi) = \frac{d}{d\xi} w(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}, \xi), \forall \xi \in (a, b) \Rightarrow w(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}, \xi) = \text{const}$$

D'altra parte l'intersezione di D con la retta coordinata x_n non è necessariamente un intervallo. Poniamo allora la seguente

Definizione II.2 Diciamo convesso nella direzione di $\mathbf{e}_n$ ogni $D \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che le intersezioni di D con le rette parallele al vettore $\mathbf{e}_n$ sono tutte convesse (cioè se sono segmenti di tali retti).

Se, allora, D è convesso nella direzione di $\mathbf{e}_n$ si ha che, effettivamente, la $\partial_n w(x_1, \dots, x_n) = 0$ è equivalente a porre $w = a \circ p_n$. Si ammette allora che la w non dipende dalla n -esima variabile.

II.2 Differenziazione

II.2.1 Il differenziale

Approssimazione affine e definizione di differenziale

Abbiamo visto che, in generale, la derivabilità in ogni direzione non implica la continuità. Nel caso di una variabile reale, invece, la derivabilità garantisce la continuità ed era strettamente legata alla approssimazione della funzione mediante una retta. Ci proponiamo in questa sede di produrre, se possibile, un ente che approssimi la funzione in modo affine (come accadeva nel caso reale unidimensionale) e stabilisca la continuità della funzione.

Definizione II.3 Siano X, Y $\mathbb{K}$ -spazi normati, $D \subseteq X$, $f : D \rightarrow Y$, funzione, e $\bar{\mathbf{x}}$ interno a D , $\bar{\mathbf{x}} \in \dot{D}$. Si dice che f è differenziabile in $\bar{\mathbf{x}}$ se esiste T lineare e continua, $T \in L_{\mathbb{K}}(X, Y)$, tale che sia

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \in D} \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\bar{\mathbf{x}}) - T(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})\|_Y}{\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|_X} = 0$$

Osserviamo che f è differenziabile in $\bar{\mathbf{x}}$ se e solo se esiste una funzione $T \in L_{\mathbb{K}}(X, Y)$ tale che sia

$$f(\mathbf{x}) - f(\bar{\mathbf{x}}) - T(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = o(\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|_X).$$

Proposizione II.3 Fissati $X, Y, D, f, \bar{\mathbf{x}}$ come nella definizione precedente, si ha che se f è differenziabile in $\bar{\mathbf{x}}$ allora f è continua in $\bar{\mathbf{x}}$. Inoltre, per ogni vettore $\mathbf{v} \in X$, esiste la derivata $\partial_{\mathbf{v}} f(\bar{\mathbf{x}})$ e vale

$$\partial_{\mathbf{v}} f(\bar{\mathbf{x}}) = T(\mathbf{v})$$

da cui l'approssimazione lineare, T , se esiste è unica.

Dimostrazione Si ha, moltiplicando per $\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|_X$,

$$\|f(\mathbf{x}) - (f(\bar{\mathbf{x}}) + T(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}))\|_Y \rightarrow 0, \mathbf{x} \rightarrow \bar{\mathbf{x}}$$

ma poiché T è continua $T(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \rightarrow 0$ per $\mathbf{x} \rightarrow \bar{\mathbf{x}}$, ne deriva che

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \in D} \|f(\mathbf{x}) - f(\bar{\mathbf{x}})\|_Y = 0$$

Fissiamo ora $\mathbf{v} \in X$, posto $\mathbf{x} \equiv \bar{\mathbf{x}} + t\mathbf{v}$, dalla definizione, per restrizione alla retta per $\bar{\mathbf{x}}$ diretta secondo $\mathbf{v}$, si ha

$$(c.v.d.) \quad \frac{1}{\|\mathbf{v}\|_X} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|f(\bar{\mathbf{x}} + t\mathbf{v}) - f(\bar{\mathbf{x}}) - tT(\mathbf{v})\|_Y}{t} = 0 \Rightarrow \partial_{\mathbf{v}} f(\bar{\mathbf{x}}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{\mathbf{x}} + t\mathbf{v}) - f(\bar{\mathbf{x}})}{t} = T(\mathbf{v})$$

Risulta perciò ben posta la seguente

Definizione II.4 Sia $f : D \rightarrow Y$ differenziabile in $\bar{\mathbf{x}} \in \dot{D}$. L'applicazione $T \in L_{\mathbb{K}}(X, Y)$, parte lineare della funzione affine che meglio approssima f a $\bar{\mathbf{x}}$, si chiama differenziale (totale, o di Fréchet) di f in $\bar{\mathbf{x}}$, e si indica con uno dei seguenti simboli

$$df(\bar{\mathbf{x}}), \partial f(\bar{\mathbf{x}}), f'(\bar{\mathbf{x}})$$

Condizione necessaria per la differenziabilità

Dato un vettore $\mathbf{v}$ indicheremo con $df(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{v} = df(\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{v}) = \partial f(\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{v})$. Riassumendo

Proposizione II.4 *Condizione necessaria perché f sia differenziabile in $\bar{\mathbf{x}}$ è che f ammetta in $\bar{\mathbf{x}}$ derivate secondo ogni vettore $\mathbf{v} \in X$, in tal caso vale*

$$\partial_{\mathbf{v}} f(\bar{\mathbf{x}}) = df(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{v}$$

Osservazione II.2 Se X, Y sono spazi normati e $T \in L_{\mathbb{K}}(X, Y)$, allora T è differenziabile ad ogni $\bar{\mathbf{x}}$, e il suo differenziale coincide con la funzione T stessa. Lo stesso vale per funzioni affini $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{b} + T(\mathbf{x} - \mathbf{a})$, che ha per differenziale in ogni punto T .

Differenziale in spazi di dimensione finita

Supponiamo ora X di dimensione finita, $n \in \mathbb{N}_0$. Allora se $\mathcal{B}_X \equiv \{\mathbf{a}_i\}_{i \in J_n}$ è una base per X , il differenziale, in quanto applicazione lineare, è univocamente determinato dai valori che assume sui vettori della base $\mathcal{B}_X$. Sicché, $df(\bar{\mathbf{x}})$ è univocamente determinato dalle

$$\partial_{\mathbf{a}_i} f(\bar{\mathbf{x}}) = df(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{a}_i, \forall i \in J_n.$$

Sia ora $\mathbf{h} \in X$, allora esiste ed è unica la decomposizione

$$\mathbf{h} = \sum_{i=1}^n h_i \mathbf{a}_i, h_i \in \mathbb{K}, i \in J_n$$

perciò

$$df(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{h} = df(\bar{\mathbf{x}}) \left(\sum_{i=1}^n h_i \mathbf{a}_i \right) = \sum_{i=1}^n (df(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{a}_i) h_i = \sum_{i=1}^n h_i \partial_{\mathbf{a}_i} f(\bar{\mathbf{x}})$$

In particolare, consideriamo il caso $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^m$. La funzione ha allora m componenti reali:

$$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

si ha

$$df(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{h} = \sum_{i=1}^n h_i \partial_{\mathbf{a}_i} f(\bar{\mathbf{x}}).$$

D'altra parte, per un generico $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, calcoliamo $\partial_{\mathbf{v}} f(\bar{\mathbf{x}})$, abbiamo

$$\frac{f(\bar{\mathbf{x}} + t\mathbf{v}) - f(\bar{\mathbf{x}})}{t} = \left(\frac{f_1(\bar{\mathbf{x}} + t\mathbf{v}) - f_1(\bar{\mathbf{x}})}{t}, \dots, \frac{f_m(\bar{\mathbf{x}} + t\mathbf{v}) - f_m(\bar{\mathbf{x}})}{t} \right)$$

da cui si ricava immediatamente

$$\partial_{\mathbf{v}} f(\bar{\mathbf{x}}) = (\partial_{\mathbf{v}} f_1(\bar{\mathbf{x}}), \dots, \partial_{\mathbf{v}} f_m(\bar{\mathbf{x}})).$$

Si ha dunque che

$$df(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{h} = \sum_{i=1}^n h_i \partial_{\mathbf{e}_i} f(\bar{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^n h_i \sum_{j=1}^m \partial_{\mathbf{e}_i} f_j(\bar{\mathbf{x}}) \mathbf{e}'_j.$$

Passiamo alla notazione matriciale, considerate le basi canoniche di $\mathbb{R}^n, \mathcal{C}_n = \{\mathbf{e}_i\}_{i \in J_n}$, e di $\mathbb{R}^m, \mathcal{C}_m = \{\mathbf{e}'_j\}_{j \in J_m}$, si ha $df(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^n \delta_{ik} \sum_{j=1}^m \partial_{\mathbf{e}_i} f_j(\bar{\mathbf{x}}) \mathbf{e}'_j = \sum_{j=1}^m \partial_{\mathbf{e}_k} f_j(\bar{\mathbf{x}}) \mathbf{e}'_j = \partial_{\mathbf{e}_k} f(\bar{\mathbf{x}})$, perciò si ricava

$$[df(\bar{\mathbf{x}})]_{\mathcal{C}_m}^{\mathcal{C}_n} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \dots & \partial_n f_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m & \dots & \partial_n f_m \end{pmatrix} \equiv J_f(\bar{\mathbf{x}})$$

La matrice del differenziale rispetto alle basi standard ha per k -esima colonna la derivata direzionale di f secondo $\mathbf{e}_k$. Tale matrice si definisce **matrice jacobiana** di f in $\bar{\mathbf{x}}$. Si noti come la k -esima riga sia il vettore derivato della funzione f_k .

Si noti come nel caso che stiamo considerando, f sia differenziabile se e solo se lo sono le sue m componenti.

Una scrittura
per il
differenziale

Vediamo l'interpretazione dell'usuale scrittura del differenziale di funzioni reali

$$df(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0) dx_i$$

Consideriamo la base duale della base standard, cioè univocamente definita dalla

$$\mathbf{e}_j^*(\mathbf{e}_i) = \delta_{ij}$$

ora, se $x_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è tale che $x_j(\mathbf{x}) \mapsto \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_j = x_j$, si ha che

$$dx_j \cdot \mathbf{e}_i = \frac{\partial x_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = \delta_{ij}$$

da cui

$$\mathbf{e}_j^* = dx_j$$

Essendo df nel duale di $\mathbb{R}^n$ cerchiamo di scrivere df come combinazione lineare dei vettori della base duale. Se $\mathbf{v} = \sum_i v_i \mathbf{e}_i$ si ha $dx_j(\mathbf{x}_0) (\sum_i v_i \mathbf{e}_i) = \sum_i v_i dx_j(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{e}_i = \sum_i v_i \delta_{ij} = v_j$. Ne deriva che

$$dx_j(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v} = v_j$$

si è soliti, data la costanza di dx_j , eliminare nella scrittura il riferimento al punto $\mathbf{x}_0$, perciò si pone

$$dx_i \cdot \mathbf{v} = v_i$$

$$df(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0) dx_i \cdot \mathbf{v}$$

da cui si conclude

$$df(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0) dx_i = \sum_{i=1}^n \partial_i f(\mathbf{x}_0) dx_i$$

II.2.2 Teorema del differenziale totale

Come abbiamo visto, l'esistenza delle derivate direzionali è condizione necessaria per l'esistenza del differenziale, non è tuttavia condizione sufficiente. Infatti, la differenzialità, al contrario dell'esistenza delle derivate direzionali, implica la continuità della funzione.

Una condizione sufficiente è comunque fornita dal teorema del differenziale totale.

Caso reale

Teorema II.3 *Sia $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}^n$, e $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{D}$. f ammetta derivate parziali definite in un intorno U di $\mathbf{x}_0$ continue nel punto $\mathbf{x}_0$, allora f è differenziabile in $\mathbf{x}_0$.*

Dimostrazione Vediamo il caso $n = 2$. Sia $\mathbf{x}_0 \equiv (x_0, y_0)$. Sia δ il raggio di una palla centrata in $\mathbf{x}_0$ tutta contenuta nell'intorno U . Siano $h, k \in \mathbb{R}$ tali che $h^2 + k^2 \leq \delta^2$. Abbiamo

$$f(x_0 + h; y_0 + k) - f(x_0, y_0) = [f(x_0 + h; y_0 + k) - f(x_0; y_0 + k)] + [f(x_0; y_0 + k) - f(x_0; y_0)]$$

definiamo $\phi(x) = f(x; y_0 + k)$ e $\psi(y) = f(x_0; y)$. Ne deriva che ϕ è definita sull'intervallo $[x_0, x_0 + h]$ a valori reali ed è ivi derivabile (ammettendo derivata destra al secondo estremo e sinistra al primo):

$$\frac{\phi(x+t) - \phi(x)}{t} = \frac{f(x+t; y_0+k) - f(x; y_0+k)}{t} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0+k), t \rightarrow 0$$

analogamente si ha che ψ è definita in $[y_0, y_0 + k]$ ed è ivi derivabile, con derivata pari a $\partial f / \partial y(x_0, y)$. Per le due funzioni si può allora applicare il teorema di Lagrange. Dunque, esistono θ e ω in $]0, 1[$ tali che

$$\frac{\phi(x_0+h) - \phi(x_0)}{h} = \frac{d\phi}{dx}(x_0 + \theta h) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta h; y_0 + k)$$

$$\frac{\psi(y_0 + k) - \psi(y_0)}{k} = \frac{d\psi}{dy}(y_0 + \omega h) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0 + \omega k)$$

Da cui

$$f(x_0 + h; y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta h; y_0 + k) h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0 + \omega k) k$$

Poniamo

$$\begin{aligned} \sigma_f(x_0, y_0; h, k) &= f(x_0 + h; y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) k = \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta h; y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right] h - \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0 + \omega k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] k \end{aligned}$$

Ora se mostriamo che σ_f diviso la norma di (h, k) va a 0 per h, k tendenti a 0, abbiamo ottenuto la tesi:

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta h; y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right] h - \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0 + \omega k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \leq \\ &\left| \frac{\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta h; y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right] h}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| + \left| \frac{\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0 + \omega k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \end{aligned}$$

Ora, per la continuità in (x_0, y_0) delle derivate le quantità entro parentesi quadra vanno a 0, d'altra parte si ottiene che il limite è nullo notando che

$$\frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq 1, \quad \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq 1$$

Il caso generale è analogo ma più laborioso. Si procede sempre sfruttando il teorema di (c.v.d.) Lagrange.

Corollario II.1 Sia $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, con $D \subseteq \mathbb{R}^n$, e $\mathbf{x}_0 \in \dot{D}$. f ammetta derivate parziali definite in un intorno U di $\mathbf{x}_0$ continue nel punto $\mathbf{x}_0$, allora f è differenziabile in $\mathbf{x}_0$.

Dimostrazione Discende dal precedente teorema: infatti ciascuna componente risulta differenziabile.

Caso generale

Passiamo al caso più generale, in cui il codominio sia un qualunque spazio normato Y . Continueremo ad eseguire la dimostrazione solo nel caso $n = 2$.

Teorema II.4
(del differenziale totale)

Sia $D \subseteq \mathbb{K}^n$, sia Y $\mathbb{K}$ -spazio normato, $f : D \rightarrow Y$ e $\mathbf{x}_0 \in \dot{D}$. Se $\partial_i f(\mathbf{x}_0)$, $i \in J_n$, esistono in un intorno di $\mathbf{x}_0$ e sono continue in $\mathbf{x}_0$, allora f è differenziabile in $\mathbf{x}_0$.

Dimostrazione Vediamo $n = 2$. Il differenziale di f in $\mathbf{x}_0$, se esiste vale necessariamente

$$df(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} = \partial_1 f(\mathbf{x}_0) h_1 + \partial_2 f(\mathbf{x}_0) h_2.$$

Cominciamo col notare che non è restrittivo supporre le due derivate parziali nulle in $\mathbf{x}_0$. Basta considerare la funzione $g(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) - (\partial_1 f(\mathbf{x}_0) x_1 + \partial_2 f(\mathbf{x}_0) x_2)$ che ha derivate parziali nulle in $\mathbf{x}_0$ e, per linearità del differenziale ed essendo il secondo addendo certamente differenziabile ovunque, è differenziabile se e solo se è differenziabile f .

Dobbiamo provare che per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che se $\|(h_1, h_2)\|_\infty = \max\{|h_1|, |h_2|\} < \delta$, allora

$$\|f(x_0^1 + h_1, x_0^2 + h_2) - f(x_0^1, x_0^2)\|_Y \leq \varepsilon \|(h_1, h_2)\|_\infty.$$

Scriviamo

$$\begin{aligned} \|f(x_0^1 + h_1, x_0^2 + h_2) - f(x_0^1, x_0^2)\|_Y &\leq \|f(x_0^1 + h_1, x_0^2 + h_2) - f(x_0^1 + h_1, x_0^2)\|_Y + \\ &\quad + \|f(x_0^1 + h_1, x_0^2) - f(x_0^1, x_0^2)\|_Y \end{aligned}$$

essendo le derivate parziali nulle, per definizione di derivata e per la permanenza del segno, esiste $\delta_1(\varepsilon)$, tale che per $|h_1| \leq \delta_1$ vale

$$\|f(x_0^1 + h_1, x_0^2) - f(x_0^1, x_0^2)\|_Y \leq \varepsilon |h_1|$$

Per il teorema del valor medio per le derivate direzionali, abbiamo

$$\begin{aligned} & \|f(x_0^1 + h_1, x_0^2 + h_2) - f(x_0^1 + h_1, x_0^2)\|_Y \leq \\ & \leq \sup \{ \|\partial_2 f(\mathbf{x})\|_Y \mid \mathbf{x} \in [(x_0^1 + h_1, x_0^2 + h_2); (x_0^1 + h_1, x_0^2)] \} |h_2| \end{aligned}$$

per continuità della derivata parziale, esiste $\delta_2(\varepsilon)$, tale che se $\|(k_1, k_2)\|_\infty \leq \delta_2$ si ha $\|\partial_2 f(x_0^1 + k_1, x_0^2 + k_2)\|_Y \leq \varepsilon$. Poniamo allora $\delta \equiv \min\{\delta_1, \delta_2\}$ di modo che se $\|(h_1, h_2)\|_\infty \leq \delta$ risulta che i segmenti $[(x_0^1 + h_1, x_0^2 + h_2); (x_0^1 + h_1, x_0^2)]$ e $[(x_0^1, x_0^2); (x_0^1 + h_1, x_0^2)]$ sono tutti contenuti nella palla di centro $\mathbf{x}_0$ e raggio δ , valgono perciò, in tale palla, le disuguaglianze trovate. Infine,

$$\|f(x_0^1 + h_1, x_0^2 + h_2) - f(x_0^1, x_0^2)\|_Y \leq \varepsilon(|h_1| + |h_2|) \leq 2\varepsilon \|(h_1, h_2)\|_\infty$$

(c.v.d.) la tesi è dimostrata.

Si può notare che è sufficiente ipotizzare la continuità di tutte le derivate tranne una la quale si deve comunque supporre esistente.

II.3 Risultati del calcolo differenziale

Di qui in poi restringeremo la nostra attenzione al caso fondamentale di funzioni reali definite su spazi reali.

II.3.1 Derivate successive

Inversione dell'ordine di derivazione

Consideriamo una funzione le cui derivate parziali siano definite in un intorno e, almeno in un punto, derivabili a loro volta. Si parla in tal caso di derivate successive. Cominciamo col notare che in generale

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

a tal proposito si consideri il seguente

Esempio II.3 Sia

$$f(x, y) \equiv \begin{cases} 0 & \text{se } y = 0, \\ y^2 \arctan \frac{x}{y} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

calcoliamo le due derivate seconde nell'origine

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) \right) (0, 0) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{y^2}{y^2} \right) (0, 0) = 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) \right) (0, 0) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} y^2 \arctan \frac{x}{y} \right] (0, 0) = 0 \end{aligned}$$

esse risultano diverse.

Risulta però

Teorema II.5 (di Schwartz)

Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$ e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}^2$. Sia f derivabile in x e y in un intorno U del punto (x_0, y_0) . Se in U esistono le derivate parziali miste

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ o } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

e sono continue, insieme alle derivate prime, in (x_0, y_0) , allora si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

Dimostrazione Poniamo che esista la derivata parziale rispetto ad x e poi a y . Abbiamo, nelle ipotesi specificate,

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h; y_0 + k) - f(x_0; y_0 + k)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h; y_0) - f(x_0; y_0)}{h} \right]$$

da cui

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h; y_0 + k) - f(x_0; y_0 + k) - f(x_0 + h; y_0) + f(x_0; y_0)}{hk}$$

ove risulti $h^2 + k^2 \leq \delta^2$ con δ raggio di una palla centrata in (x_0, y_0) contenuta in U .

Definiamo

$$\omega(h, k) \equiv \frac{f(x_0 + h; y_0 + k) - f(x_0; y_0 + k) - f(x_0 + h; y_0) + f(x_0; y_0)}{hk}$$

poniamo

$$\phi(y) = f(x_0 + h; y) - f(x_0; y)$$

da cui

$$\omega(h, k) = \frac{\phi(y_0 + k) - \phi(y_0)}{hk}$$

Ora, ϕ è definita nell'intervallo $[y_0; y_0 + k]$ ed è ivi derivabile:

$$\frac{d\phi}{dy}(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h; y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y)$$

si può perciò applicare il teorema di Lagrange e trovare $\theta \in]0, 1[$ per cui

$$\phi(y_0 + k) - \phi(y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h; y_0 + \theta k) k - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0 + \theta k) k$$

e infine

$$\omega(h, k) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h; y_0 + \theta k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0 + \theta k)}{h}$$

Definiamo ora la funzione ψ tale che

$$\psi(x) \equiv \frac{\partial f}{\partial y}(x; y_0 + \theta k)$$

Essa è definita nell'intervallo $[x_0; x_0 + h]$ ed è ivi derivabile

$$\frac{d\psi}{dx}(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (x; y_0 + \theta k)$$

e ancora per il teorema di Lagrange esiste $\theta' \in]0, 1[$ per cui

$$\omega(h, k) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (x_0 + \theta' h; y_0 + \theta k)$$

passando al limite, per la continuità della derivazione mista rispetto a x e poi y si trova, anche in forza del teorema di cambio di variabile:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \omega(h, k) = \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (x_0 + \theta' h; y_0 + \theta k) = \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (x_0; y_0 + \theta k) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (x_0; y_0) \end{aligned}$$

(c.v.d.)

La dimostrazione appena fatta si estende facilmente a funzioni di più di una variabile e a derivazioni di ordine superiore al secondo.

II.3.2 Formula di Taylor

Diremo che una funzione è di classe C^k se è continua e ammette derivate fino all'ordine k continue, sicché esse non dipenderanno dall'ordine in cui si esegue la derivazione, per il teorema di Schwartz. Sarà allora sufficiente, per indicare una derivata parziale, dichiarare l' n -upla $\mathbf{p} \equiv (p_1, \dots, p_n)$ di numeri interi positivi, tali che ciascun p_i mostri il numero di volte che si effettua la derivazione rispetto alla i -esima variabile. L'ordine della derivazione varrà

$$k = |\mathbf{p}| \equiv \sum_{i=1}^n p_i.$$

Denoteremo con $D^{\mathbf{p}} f$ la derivata di ordine $|\mathbf{p}| \leq k$ della funzione f definita dal **multi-indice** $\mathbf{p}$, cioè

$$D^{\mathbf{p}} f \equiv \frac{\partial^{|\mathbf{p}|} f}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}}.$$

Si pone inoltre

$$\mathbf{p}! \equiv p_1! \dots p_n!$$

e se $\mathbf{w} \equiv (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{w}^{\mathbf{p}} \equiv w_1^{p_1} \dots w_n^{p_n}$$

Funzioni reali a valori vettoriali

Prima di passare allo studio della formula di Taylor per le funzioni definite in $\mathbb{R}^n$, è utile passare in rassegna alcune proprietà delle funzioni reali a valori vettoriali (ad esempio la velocità di un corpo dello spazio nel tempo...) cioè a valori in $\mathbb{R}^n$. Funzioni di questo tipo che siano definite su un intervallo chiuso e siano ivi continue si dicono **curve**.

Sia, intanto, $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{v}$ per $t \rightarrow t_0$, equivalentemente, per il teorema di collegamento, per ogni successione $\{t_n\} \subseteq \mathbb{R}$ tendente a t_0 la successione $\mathbf{x}(t_n) \rightarrow \mathbf{v}$ per $n \rightarrow \infty$. Per l'esempio I.4 ciò è vero se e solo se ogni componente $x^i(t_n)$ tende a v^i , di nuovo per il teorema di collegamento, ciò equivale a dire che ciascuna componente $x^i(t) \rightarrow v^i$ per $t \rightarrow t_0$. Riassumendo

Proposizione II.5 Sia $\mathbf{x} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $A \subseteq \mathbb{R}$ e $t_0 \in A$ sia un punto di accumulazione per A . Allora

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{x}(t) = \mathbf{v} \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} x^i(t) = v^i, \forall i \in J_n$$

Definita la derivata di $\mathbf{x}$ nel tempo in t_0 il limite per $h \rightarrow 0$, se esiste, della quantità

$$\frac{\mathbf{x}(t_0 + h) - \mathbf{x}(t_0)}{h}$$

si ha, per la proposizione precedente

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t_0) = \begin{pmatrix} dx^1/dt(t_0) \\ \vdots \\ dx^n/dt(t_0) \end{pmatrix}.$$

Si ha, poi, per funzioni derivabili in t_0 , per ciascuna componente i

$$x^i(t) = x^i(t_0) + \frac{dx^i}{dt}(t_0)(t - t_0) + o((t - t_0))$$

da cui

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x^1(t_0) + dx^1/dt(t_0)(t - t_0) + o((t - t_0)) \\ \vdots \\ x^n(t_0) + dx^n/dt(t_0)(t - t_0) + o((t - t_0)) \end{pmatrix} = \mathbf{x}(t_0) + \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t_0)(t - t_0) + \sigma_{\mathbf{x}}(t; t_0)$$

ove $\sigma_{\mathbf{x}}(t; t_0)$ è una funzione a valori in $\mathbb{R}^n$ avente ciascuna componente tendente a 0 se divisa per $(t - t_0)$ per $t \rightarrow t_0$. Riassumendo

Proposizione II.6 Sia $\mathbf{x} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, con A aperto in $\mathbb{R}$ derivabile in $t_0 \in A$. Allora

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t_0)(t - t_0) + \sigma_{\mathbf{x}}(t; t_0)$$

ove

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\sigma_{\mathbf{x}}(t; t_0)}{t - t_0} = 0.$$

Veniamo, infine, al risultato che ci occorrerà specificatamente per ricavare la formula di Taylor.

Teorema II.6 Sia $\mathbf{x} : A \rightarrow B$, con A aperto in $\mathbb{R}$ e B aperto in $\mathbb{R}^n$, derivabile in $t_0 \in A$. Sia $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$. Allora

$$\frac{d(f \circ \mathbf{x})}{dt}(t_0) = df(\mathbf{x}_0) \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t_0) \right)$$

Dimostrazione Sappiamo che, posto $h \equiv t - t_0$, per la proposizione II.6

$$\mathbf{x}(t_0 + h) = \mathbf{x}(t_0) + \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t_0)h + \sigma_{\mathbf{x}}(t_0; h)$$

e, per la differenziabilità di f

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{k}) = f(\mathbf{x}_0) + df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{k}) + \sigma_f(\mathbf{x}_0; \mathbf{k}).$$

Posto $\sigma_{\mathbf{x}}(t_0; 0) \equiv \mathbf{0}$

$$\mathbf{k}(h) \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t_0)h + \sigma_{\mathbf{x}}(t_0; h)$$

funzione continua in $h = 0$. Si ha

$$\begin{aligned} (f \circ \mathbf{x})(t_0 + h) &= f(\mathbf{x}(t_0)) + df(\mathbf{x}(t_0)) \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t_0)h + \sigma_{\mathbf{x}}(t_0; h) \right) + \sigma_f(\mathbf{x}(t_0); \mathbf{k}) \\ &= f(\mathbf{x}(t_0)) + df(\mathbf{x}(t_0)) \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t_0) \right) h + df(\mathbf{x}(t_0))(\sigma_{\mathbf{x}}(t_0; h)) + \sigma_f(\mathbf{x}(t_0); \mathbf{k}) \end{aligned}$$

da cui

$$(f \circ \mathbf{x})(t_0 + h) - f(\mathbf{x}(t_0)) - df(\mathbf{x}(t_0)) \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t_0) \right) h = df(\mathbf{x}(t_0))(\sigma_{\mathbf{x}}(t_0; h)) + \sigma_f(\mathbf{x}(t_0); \mathbf{k})$$

Non ci resta che mostrare che il limite per $h \rightarrow 0$ di

$$\frac{df(\mathbf{x}(t_0))(\sigma_{\mathbf{x}}(t_0; h)) + \sigma_f(\mathbf{x}(t_0); \mathbf{k})}{h}$$

è nullo. Ora, si ha

$$\frac{df(\mathbf{x}(t_0))(\sigma_{\mathbf{x}}(t_0; h))}{h} = df(\mathbf{x}(t_0)) \left(\frac{\sigma_{\mathbf{x}}(t_0; h)}{h} \right)$$

$\sigma_{\mathbf{x}}(t_0; h)/h$ tende a 0 per $h \rightarrow 0$ $df(\mathbf{x}(t_0))(\sigma_{\mathbf{x}}(t_0; h)/h) \rightarrow 0$ per linearità del differenziale. Infine, poniamo

$$\rho_f(\mathbf{k}) \equiv \begin{cases} 0 & \text{se } \mathbf{k} = 0 \\ \frac{\sigma_f(\mathbf{x}(t_0); \mathbf{k})}{\|\mathbf{k}\|} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

che è continua in $\mathbf{0}$

$$\frac{(\sigma_f(\mathbf{x}(t_0); \mathbf{k}))}{h} = \frac{\rho_f(\mathbf{k})}{h} \|\mathbf{k}\|$$

per $h \rightarrow 0$, $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{0}$ da cui $\rho_f(\mathbf{k}) \rightarrow 0$. D'altra parte

$$\left| \frac{\|\mathbf{k}\|}{h} \right| = \frac{\left\| \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t_0)h + \sigma_{\mathbf{x}}(t_0; h) \right\|}{|h|} \leq \left\| \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t_0) \right\| + \left\| \frac{\sigma_{\mathbf{x}}(t_0; h)}{h} \right\|$$

(c.v.d.) che tende a una quantità limitata.

Nelle ipotesi del teorema

$$\frac{d(f \circ \mathbf{x})}{dt}(t_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{x}(t_0)) \frac{dx^i}{dt}(t_0) = \nabla f(\mathbf{x}(t_0)) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t_0)$$

Formula di Taylor

Sia $f \in \mathcal{C}^k(A)$ a valori reali, con A aperto di $\mathbb{R}^n$. Sia $\mathbf{x}_0 \in A$. Se $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ è tale che $B(\mathbf{x}_0, \|\mathbf{w}\|) \subseteq A$ e se $t \in [0, 1]$ poniamo

$$F(t) \equiv f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{w}).$$

Tale funzione è definita in $[0, 1]$, è a valori reali ed è di classe $\mathcal{C}^k$. Infatti, per il teorema II.6 vale

$$F'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{w}) w_i$$

derivando nuovamente

$$F''(t) = \sum_{i=1}^n w_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{w}) w_j = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{w}) w_i w_j$$

simbolicamente possiamo scrivere

$$F''(t) = \left(w_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + w_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^2 (f)(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{w}).$$

In generale, si avrà

$$F^{(h)}(t) = \left(w_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + w_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^h (f)(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{w}),$$

infatti, per induzione

$$\begin{aligned} F^{(h+1)}(t) &= \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(w_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + w_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^h (f)(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{w}) = \\ &= \left(w_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + w_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \left(w_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + w_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^h (f)(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{w}) = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(w_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + w_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{h+1} (f)(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{w}) \end{aligned}$$

grazie allo sviluppo multinomiale avremo

$$F^{(h)}(t) = \sum_{p_1 + \dots + p_n = h} \frac{h!}{p_1! \dots p_n!} w_1^{p_1} \dots w_n^{p_n} \frac{\partial^{p_1}}{\partial x_1^{p_1}} \dots \frac{\partial^{p_n}}{\partial x_n^{p_n}} (f)(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{w})$$

con le notazioni introdotte prima

$$F^{(h)}(t) = h! \sum_{|\mathbf{p}|=h} D^{\mathbf{p}} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{w}) \frac{\mathbf{w}^{\mathbf{p}}}{\mathbf{p}!}$$

e $h \leq k$ per il teorema della differenziabilità totale e per il teorema II.6 (poiché le derivate di ordine k sono continue, le derivate di ordine $k-1$ sono differenziabili, perciò potremo derivare $F^{(k-1)}$ e ottenere $F^{(k)}$).

Possiamo dunque applicare la formula di Taylor in 0 alla F

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + \dots + \frac{F^{(k)}(0)}{k!} + R_k(1, 0)$$

da cui, posto $\mathbf{w} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{p}| \leq k} D^{\mathbf{p}} f(\mathbf{x}_0) \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^{\mathbf{p}}}{\mathbf{p}!} + R_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0).$$

Se $f \in \mathcal{C}^{k+1}$ si ha dal teorema di Taylor con resto di Lagrange, per funzioni di una variabile,

$$R_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{F^{(k+1)}(\tau)}{(k+1)!} = \sum_{|\mathbf{p}|=k+1} D^{\mathbf{p}} f(\mathbf{x}_0 + \tau(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^{\mathbf{p}}}{\mathbf{p}!}$$

ove, evidentemente $\tau \in]0, 1[$ e $\xi \equiv \mathbf{x}_0 + \tau(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ è un punto del segmento di estremi $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}$.

Sia ora f differenziabile in A . La F associata ammette derivata prima per il teorema di derivazione composta, II.6, in $t \in [0, 1]$ si può allora applicare il teorema di Lagrange

$$\begin{aligned} F(1) - F(0) &= F'(\tau) \\ f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) &= df(\mathbf{x}_0 + \tau(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \end{aligned}$$

Tornando a porre $t\mathbf{w} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ con $\mathbf{w}$ direzione, si ha, per il teorema di Taylor con resto di Peano,

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{F^k(0)}{k!}t^k + o(t^k)$$

da cui

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{w}) = \sum_{|\mathbf{p}| \leq k} D^{\mathbf{p}} f(\mathbf{x}_0) \frac{\mathbf{w}^{\mathbf{p}}}{\mathbf{p}!} t^{|\mathbf{p}|} + o(t^k)$$

essendo $t = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$,

$$t^{|\mathbf{p}|} \mathbf{w}^{\mathbf{p}} = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^{|\mathbf{p}|} \frac{(x^1 - x_0^1)^{p_1} \dots (x^n - x_0^n)^{p_n}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^{p_1} \dots \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^{p_n}} = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^{|\mathbf{p}|} \frac{(x^1 - x_0^1)^{p_1} \dots (x^n - x_0^n)^{p_n}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^{|\mathbf{p}|}} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^{\mathbf{p}}$$

perciò

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{p}| \leq k} D^{\mathbf{p}} f(\mathbf{x}_0) \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^{\mathbf{p}}}{\mathbf{p}!} + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^k)$$

Riassumendo

Teorema II.7 Sia $f \in \mathcal{C}^k(A)$ a valori reali, con A aperto di $\mathbb{R}^n$. Allora risulta, per $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in A$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \sum_{|\mathbf{p}| \leq k} D^{\mathbf{p}} f(\mathbf{x}_0) \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^{\mathbf{p}}}{\mathbf{p}!} + R_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \\ R_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) &= o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^k) \end{aligned}$$

se poi $f \in \mathcal{C}^{k+1}(A)$ si può scrivere il resto nella forma di Lagrange, esiste $\tau \in]0, 1[$

$$R_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \sum_{|\mathbf{p}|=k+1} D^{\mathbf{p}} f(\mathbf{x}_0 + \tau(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^{\mathbf{p}}}{\mathbf{p}!}$$

Teorema II.8
(di Lagrange)

Sia f differenziabile in A aperto di $\mathbb{R}^n$. Allora per $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in A$ esiste $\tau \in]0, 1[$ talché

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = df(\mathbf{x}_0 + \tau(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

Corollario II.2 Sia A un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$ e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Se f ha derivate prime nulle in A , allora f è costante.

Dimostrazione

Siccome f ha derivate costantemente nulle in A , ha derivate continue e risulta perciò differenziabile. Vale allora il teorema di Lagrange, II.8. Sia $\mathbf{x}_0 \in A$, $f(\mathbf{x}_0) \equiv a \in \mathbb{R}$. Siano poi

$$B \equiv \{\mathbf{x} \in A \mid f(\mathbf{x}) = a\}; \quad C \equiv \{\mathbf{x} \in A \mid f(\mathbf{x}) \neq a\}$$

si ha $B \neq \emptyset$ e $A = B \cup C$. D'altra parte

$$C = \{\mathbf{x} \in A \mid f(\mathbf{x}) > a\} \cup \{\mathbf{x} \in A \mid f(\mathbf{x}) < a\} = f^{-1}(]a, +\infty[) \cup f^{-1}(]-\infty, a[)$$

da cui per continuità di f , che è differenziabile, C è unione di due aperti e dunque è aperto. Ora, ammettiamo che C sia diverso dall'insieme vuoto, cioè neghiamo la tesi, per la quale l'immagine di A si riduce ad a e perciò A coincide con B . Entro tale ipotesi, se mostriamo che B è aperto, abbiamo costruito una partizione di A in due insiemi non vuoti aperti contraddicendo l'ipotesi secondo la quale A sarebbe connesso. Non ci resta che mostrare che $C \neq \emptyset \Rightarrow B$ aperto.

Sia $\mathbf{x}_1 \in B \subseteq A$, allora esiste $r > 0$ per cui $B(\mathbf{x}_1, r) \subseteq A$. Sia ora $\mathbf{x}_2 \in B(\mathbf{x}_1, r)$, il segmento $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ risulta tutto compreso nella palla $B(\mathbf{x}_1, r)$. Dal teorema di Lagrange ricaviamo

$$f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2) = 0$$

da cui

$$a = f(\mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}_2)$$

(c.v.d.) e dunque $\mathbf{x}_2 \in B$. Ne deriva che $B(\mathbf{x}_1, r) \subseteq B$ e B è aperto.

II.3.3 Differenziale della funzione composta

Il teorema di differenziazione composta

Vogliamo generalizzare il teorema II.6. A tal proposito vale il

Teorema II.9 *Siano A un aperto di $\mathbb{R}^n$ e B un aperto di $\mathbb{R}^m$. Siano poi $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : B \rightarrow \mathbb{R}^k$ tali che $f(A) \subseteq B$. Se f è differenziabile in $\mathbf{x}_0$ e g in $\mathbf{y}_0 \equiv f(\mathbf{x}_0)$, allora $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}^k$ è differenziabile in $\mathbf{x}_0$ ed inoltre*

$$d(g \circ f)(\mathbf{x}_0) = dg(f(\mathbf{x}_0)) \circ df(\mathbf{x}_0)$$

Dimostrazione Sia $r > 0$ talché $B(\mathbf{x}_0, r) \subseteq A$. Scegliamo $\|\mathbf{h}\|_n < r$ allora

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) + \sigma_f(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}),$$

ove

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\sigma_f(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|_n} = 0$$

Poniamo

$$\mathbf{k}(\mathbf{h}) \equiv df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) + \sigma_f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)$$

avremo allora, essendo $f(B(\mathbf{x}_0, r)) \subseteq f(A) \subseteq B$,

$$g(\mathbf{y}_0 + \mathbf{k}) = g(\mathbf{y}_0) + dg(\mathbf{y}_0)(\mathbf{k}) + \sigma_g(\mathbf{y}_0, \mathbf{k}),$$

ove

$$\lim_{\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\sigma_g(\mathbf{y}_0, \mathbf{k})}{\|\mathbf{k}\|_m} = 0.$$

Si ha $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \mathbf{k}(\mathbf{h}) = \mathbf{0}$. Consideriamo $(g \circ f)(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h})$, si ha

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) &= g(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h})) = g(f(\mathbf{x}_0) + [f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)]) = \\ &= g(f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{k}(\mathbf{h})) = \\ &= g(f(\mathbf{x}_0)) + dg(f(\mathbf{x}_0))(df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) + \sigma_f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h})) + \sigma_g(f(\mathbf{x}_0), \mathbf{k}) = \\ &= g(f(\mathbf{x}_0)) + dg(f(\mathbf{x}_0))(df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h})) + dg(f(\mathbf{x}_0))(\sigma_f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h})) + \sigma_g(f(\mathbf{x}_0), \mathbf{k}) \end{aligned}$$

dobbiamo mostrare che $dg(f(\mathbf{x}_0))(\sigma_f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h})) + \sigma_g(f(\mathbf{x}_0), \mathbf{k}(\mathbf{h}))$ diviso per la norma di $\mathbf{h}$ va a zero per $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$. Trattiamo separatamente i due addendi

$$\frac{dg(f(\mathbf{x}_0))(\sigma_f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}))}{\|\mathbf{h}\|_n} = dg(f(\mathbf{x}_0)) \left(\frac{\sigma_f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|_n} \right)$$

quando $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ l'argomento va a zero e per linearità e continuità del differenziale si ha che il limite è nullo. Passiamo al secondo addendo, definiamo

$$\rho_g(\mathbf{y}_0, \mathbf{k}) \equiv \begin{cases} 0 & \text{se } \mathbf{k} = \mathbf{0} \\ \frac{\sigma_g(\mathbf{y}_0, \mathbf{k})}{\|\mathbf{k}\|_m} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

avremo che è continua in 0. In conclusione

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\sigma_g(f(\mathbf{x}_0), \mathbf{k}(\mathbf{h}))}{\|\mathbf{h}\|_n} = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \rho_g(f(\mathbf{x}_0), \mathbf{k}(\mathbf{h})) \frac{\|\mathbf{k}\|_m}{\|\mathbf{h}\|_n}$$

il primo fattore, come notato sopra tende a 0. Per il secondo abbiamo

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{k}\|_m}{\|\mathbf{h}\|_n} = \lim_{\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0} \left\| df(\mathbf{x}_0) \left(\frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|_n} \right) \right\|_m + \lim_{\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0} \sigma_f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}) = \lim_{\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0} \left\| df(\mathbf{x}_0) (\hat{\mathbf{h}}) \right\|_m$$

(c.v.d.) che la norma del differenziale di un versore ed è perciò limitata.

Osservazione II.3 Nelle basi canoniche, risulta

$$dg(f(\mathbf{x}_0))(df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h})) = \mathcal{M}_{\mathcal{C}_k}^{\mathcal{C}_m} [dg(f(\mathbf{x}_0))] \cdot \left(\mathcal{M}_{\mathcal{C}_m}^{\mathcal{C}_n} [df(\mathbf{x}_0)] \cdot [\mathbf{h}]_{\mathcal{C}_n} \right) = J_g(f(\mathbf{x}_0)) \cdot J_f(\mathbf{x}_0) \cdot [\mathbf{h}]_{\mathcal{C}_n}$$

infine,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}_k}^{\mathcal{C}_n} [d(g \circ f)(\mathbf{x}_0)] = J_{g \circ f}(\mathbf{x}_0) = J_g(f(\mathbf{x}_0)) \cdot J_f(\mathbf{x}_0)$$

**Un esempio
notevole di
composizione**

L'ultima osservazione ci consente di ottenere in forma compatta un risultato notevole, utile nel seguito. Si consideri dunque una funzione f differenziabile in un punto $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ di un aperto di $\mathbb{R}^{m+n}$ a valori in $\mathbb{R}^p$. Sia poi g una funzione differenziabile in $\mathbf{x}_0$ da $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$ talché $g(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$. Vogliamo studiare la differenziabilità in $\mathbf{x}_0$ della funzione

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^p \\ \mathbf{x} &\mapsto f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) \end{aligned}$$

Poniamo $g^*: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ tale che $g^*(\mathbf{x}) \equiv (\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))$, allora $F = f \circ g^*$. Vediamo che g^* è differenziabile, a tale proposito basta notare che

$$g^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ g_1(x_1, \dots, x_m) \\ \vdots \\ g_n(x_1, \dots, x_m) \end{cases}$$

Avendo g^* componenti differenziabili è differenziabile in $\mathbf{x}_0$. Allora

$$J_F = J_f \cdot J_{g^*}$$

Se denotiamo con $J_f^{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}(p, m; \mathbb{R})$ la matrice $\partial f / \partial \mathbf{x}$, con $J_f^{\mathbf{y}} \in \mathcal{M}(p, n; \mathbb{R})$ la $\partial f / \partial \mathbf{y}$, e con I_m l'identità di $\mathbb{R}^m$, possiamo scrivere, intendendo tutte le derivate calcolate in $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$

$$J_F = J_f \cdot J_{g^*} = \begin{pmatrix} J_f^{\mathbf{x}} & J_f^{\mathbf{y}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m \\ J_g \end{pmatrix} = J_f^{\mathbf{x}} + J_f^{\mathbf{y}} \cdot J_g$$

da cui, se $k \in J_p$ e $i \in J_m$

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_i} = [J_F]_{ki} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial y_j} \frac{\partial g_j}{\partial x_i}$$

infine $F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))$ è differenziabile in $\mathbf{x}_0$.

Riassumendo

Proposizione II.7 Sia f definita su un aperto di $\mathbb{R}^{m+n}$ a valori in $\mathbb{R}^p$, differenziabile in $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ con $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$. Sia g definita su un aperto di $\mathbb{R}^m$ a valori in $\mathbb{R}^n$ differenziabile in $\mathbf{x}_0$ e tale che $g(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$. Allora definita

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^p \\ \mathbf{x} &\mapsto f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) \end{aligned}$$

si ha che essa è differenziabile in $\mathbf{x}_0$ e inoltre

$$\begin{aligned} J_F(\mathbf{x}_0) &= J_f^{\mathbf{x}} + J_f^{\mathbf{y}} \cdot J_g \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) &= \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial y_j}(\mathbf{x}_0) \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) \end{aligned}$$

II.4 Massimi e minimi relativi per funzioni reali definite in $\mathbb{R}^n$

Punti di massimo e minimo

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ con A sottoinsieme qualsiasi di $\mathbb{R}^n$. Sia $\mathbf{x}_0 \in A$. Poniamo la seguente

Definizione II.5 Diciamo che $\mathbf{x}_0$ è un punto di massimo relativo se esiste un intorno U di $\mathbf{x}_0$ tale che per ogni $\mathbf{x} \in U \cap A$ si ha

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0),$$

analogamente, $\mathbf{x}_0$ è un punto di minimo relativo se esiste un intorno U di $\mathbf{x}_0$ tale che per ogni $\mathbf{x} \in U \cap A$ vale

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0).$$

Condizioni necessarie

Generalizziamo il teorema di Fermat dimostrato per le funzioni reali di variabile reale

Teorema II.10 (di Fermat)

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $\mathbf{x}_0$ un punto interno ad A di massimo (o minimo) relativo. Se f è differenziabile in $\mathbf{x}_0$, risulta

$$df(\mathbf{x}_0) = 0$$

Dimostrazione

Sia $\mathbf{v}$ una direzione. Definiamo $F(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v})$ in un intorno di $t = 0$ essendo $\mathbf{x}_0$ interno ad A . Siccome f è differenziabile in $\mathbf{x}_0$ vale

$$F'(0) = df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v})$$

per il teorema II.6. D'altra parte, siccome f ha massimo in $\mathbf{x}_0$ F ha massimo in 0, ne deriva che, per il teorema di Fermat in una variabile, $F'(0) = 0$. Cioè per ogni versore

$$df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}) = 0$$

ciò sarà vero anche sui vettori della base canonica, perciò, essendo il differenziale una applicazione lineare, varrà

$$df(\mathbf{x}_0) = 0.$$

(c.v.d.)

Ne deriva che i punti di minimo e massimo andranno ricercati tra i punti stazionari e i punti alla frontiera di A .

Sia H un'applicazione autoaggiunta rispetto al prodotto scalare standard $\cdot$ di $\mathbb{R}^n$. Allora, nella base canonica, la matrice di H è simmetrica, denotiamola con $\{h_{ij}\}_{i,j \in J_n} \in \mathcal{S}(n; \mathbb{R})$. Risulta allora

$$H\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \sum_{i=1}^n (H_i \cdot \mathbf{v}) w_i = \sum_{i=1}^n w_i \sum_{j=1}^n h_{ij} v_j$$

Consideriamo la funzione definita su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ a valori in $\mathbb{R}$

$$F(\mathbf{v}) = \frac{H\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v_k} H\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial v_k} \left(v_i \sum_{j=1}^n h_{ij} v_j \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial v_k} \left(\sum_{j=1}^n h_{ij} v_j \right) + \sum_{i=1}^n v_i \sum_{j=1}^n h_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial v_k} = \\ &= \sum_{j=1}^n h_{kj} v_j + \sum_{i=1}^n h_{ik} v_i = \sum_{j=1}^n h_{kj} v_j + \sum_{j=1}^n h_{kj} v_j = 2 \sum_{j=1}^n h_{kj} v_j \end{aligned}$$

da cui, posto $H = I$

$$\frac{\partial}{\partial v_k} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \frac{\partial}{\partial v_k} \|\mathbf{v}\|^2 = 2 \sum_{j=1}^n \delta_{kj} v_j = 2v_k$$

infine,

$$\frac{\partial F}{\partial v_k}(\mathbf{v}) = \frac{2 \sum_{j=1}^n h_{kj} v_j \|\mathbf{v}\|^2 - 2v_k F(\mathbf{v}) \|\mathbf{v}\|^2}{\|\mathbf{v}\|^4} = 2 \frac{\sum_{j=1}^n h_{kj} v_j - F(\mathbf{v}) v_k}{\|\mathbf{v}\|^2} = 2 \frac{H_k \mathbf{v} - F(\mathbf{v}) v_k}{\|\mathbf{v}\|^2}$$

da cui F è differenziabile e ha punti stazionari ove ∇F è nullo, per ogni intero k

$$H_k \mathbf{v} = F(\mathbf{v}) v_k$$

da cui $\mathbf{v}$ è stazionario se e solo se

$$H\mathbf{v} = F(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$$

cioè se e solo se $F(\mathbf{v})$ è un autovalore per H . Ricordiamo che H ha n autovalori (non necessariamente distinti) reali, per il teorema spettrale. D'altra parte non è detto che F ammetta massimo e minimo, non essendo stata definita su un compatto non possiamo invocare il teorema di Weierstraß. D'altra parte, consideriamone la restrizione sulla sfera unitaria S^{n-1} . Quest'ultimo è un insieme chiuso in $\mathbb{R}^n$ perciò compatto: la F ammette ivi massimo e minimo. Esistono $m, M \in F(\mathbb{R}^n)$ tali che

$$m \leq F\left(\frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}\right) \leq M$$

tuttavia, $F(\mathbf{w}/\|\mathbf{w}\|) = F(\mathbf{w})$ e quindi F ammette massimo e minimo in $\mathbb{R}^n$. I numeri m e M corrispondono a punti stazionari, sicché sono autovalori di H . Inoltre essi sono, rispettivamente, il minimo e il massimo autovalore di H . Infatti, sia λ un autovalore della H allora, se $\mathbf{v}_0$ appartiene all'autospazio relativo a λ ,

$$F(\mathbf{v}_0) = \lambda \frac{\|\mathbf{v}_0\|^2}{\|\mathbf{v}_0\|^2} = \lambda$$

da cui $m \leq \lambda \leq M$. Ne deriva che

$$m \|\mathbf{v}\|^2 \leq H\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \leq M \|\mathbf{v}\|^2$$

da cui H è

- (i) definita positiva se e solo se $m > 0$;
- (ii) semidefinita positiva se e solo se $m \geq 0$
- (iii) definita negativa se e solo se $M < 0$;
- (iv) semidefinita negativa se e solo se $M \leq 0$.

Torniamo allo studio dei massimi e minimi relativi di f . Abbiamo visto che condizione necessaria affinché un punto sia di massimo o minimo è che sia stazionario. Vediamo un'altra condizione necessaria.

Proposizione II.8 Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe $\mathcal{C}^2(A)$. Sia $\mathbf{x}_0$ interno ad A e stazionario per f . Si indichi con $H(\mathbf{x}_0)$ la matrice hessiana associata a f nel punto $\mathbf{x}_0$, di elementi

$$h_{ij}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)$$

Se $\mathbf{x}_0$ è un punto di minimo relativo allora $H(\mathbf{x}_0)$ è semidefinita positiva.

Dimostrazione Siccome f è di classe $\mathcal{C}^2(A)$ possiamo applicare la formula di Taylor con resto di Peano:

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) = f(\mathbf{x}_0) + t df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}) + \frac{1}{2} t^2 H(\mathbf{x}_0) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + o(t^2)$$

Ora, $\mathbf{x}_0$ è un punto di minimo sicché $df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}) = 0$ e per t abbastanza piccolo

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0) \geq 0$$

da cui

$$\frac{1}{2}t^2 H(\mathbf{x}_0) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + o(t^2) \geq 0$$

$$H(\mathbf{x}_0) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \frac{o(t^2)}{t^2} \geq 0$$

passando al limite per $t \rightarrow 0$ per il teorema di permanenza del segno

$$(c.v.d.) \quad H(\mathbf{x}_0) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$$

**Ricerca dei
massimi e
dei minimi**

Veniamo infine al

Teorema II.11 *Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^2(A)$ e $\mathbf{x}_0$ punto stazionario interno ad A . Se la matrice $H(\mathbf{x}_0)$ è definita positiva, allora $\mathbf{x}_0$ è un punto di minimo relativo.*

Dimostrazione Torniamo a considerare la formula di Taylor con resto di Peano

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2}H(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + R_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$$

ove $R_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2)$. Se m è il minimo autovalore di H si ha

$$H(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \geq m \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2$$

da cui

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) \geq \frac{m \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2}{2} + R_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$$

siccome

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{R_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2} = 0$$

esiste un intorno di $\mathbf{x}_0$ nel quale

$$\left| \frac{R_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2} \right| \leq \frac{m}{2}$$

per cui, in tale intorno intersecato A , $R_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \geq -\frac{m}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2$ e

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) \geq \frac{m \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2}{2} - \frac{m \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2}{2} = 0$$

(c.v.d.) la tesi.

Analogamente si ha la proposizione per i punti di massimo. Il problema della ricerca dei massimi e dei minimi si riduce alla ricerca dei punti stazionari e poi degli autovalori degli hessiani associati. Ricordiamo che λ è autovalore di $H(\mathbf{x}_0)$ se e solo se

$$\det(H(\mathbf{x}_0) - \lambda I) = 0.$$

Siccome l'hessiano è simmetrico, per il teorema spettrale esso avrà n radici reali.

Funzioni implicite

In questo capitolo ci occuperemo dei problemi legati allo studio degli insiemi di livello per funzioni definite su uno spazio $\mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{R}^m$. Per motivare lo studio successivo premettiamo una sezione sulla descrizione delle curve.

III.1 Introduzione

III.1.1 Descrizione di curve

Descrizione
parametrica
e implicita

Nel capitolo II abbiamo definito curva in $\mathbb{R}^n$ una applicazione continua da un intervallo J di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^n$. Definiremo regolare una curva $\mathcal{C}^1(J)$, la cui derivata sia costantemente diversa da 0. Definiremo semplice una curva tale che comunque presi due punti $t_1, t_2 \in J$, di cui almeno uno interno a J , risulti $\phi(t_1) \neq \phi(t_2)$. Un esempio notevole di curva è l'equazione oraria del moto di un punto. La traiettoria associata a un'equazione oraria non è altro che l'insieme immagine della curva, che chiameremo **sostegno** della curva stessa. Il sostegno di una curva $\phi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ sarà descritto dal luogo dei punti

$$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \exists t \in J : (x_1, \dots, x_n) = \phi(t).$$

D'altra parte l'impostazione parametrica non esaurisce tutte le modalità di assegnazione di una curva, si consideri il seguente

Esempio III.1 Sia data la curva del piano

$$\phi(t) \equiv \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi[$$

da cui, elevando al quadrato e sommando

$$x^2 + y^2 = a^2$$

che è l'equazione di una circonferenza, e rappresenta la descrizione implicita del sostegno di ϕ .

Sembra allora possibile descrivere il sostegno di una curva come supporto di una funzione definita da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^{n-1}$. Il luogo si dirà fornito in forma **implicita**:

$$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \begin{cases} f(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_{n-1}(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Ci chiediamo in quali ipotesi è possibile passare dall'assegnazione parametrica a quella implicita e viceversa.

Caso piano

Per semplicità occupiamoci preliminarmente del caso $n = 2$. Sia data una funzione reale di variabile reale continua definita su un intervallo. Essa può essere scritta nella forma $y = f(x)$ o, equivalentemente

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$

di modo che il suo grafico rappresenti il sostegno di una curva semplice. Per curve regolari vale anche il viceversa.

Proposizione III.1 *Se $\phi(t), t \in J$ è una curva regolare semplice in $\mathbb{R}^2$, è possibile rappresentarla localmente come grafico di una funzione reale di variabile reale $\mathcal{C}^1$ nell'intorno di definizione.*

Dimostrazione Siano $t_0 \in J$ e

$$\phi(t) \equiv \begin{cases} x = \phi_1(t) \\ y = \phi_2(t) \end{cases}, t \in J.$$

Siccome la curva è regolare saranno diverse da 0 $d\phi_1/dt(t_0)$ o $d\phi_2/dt(t_0)$. Supponiamo sia

$$\frac{d\phi_1}{dt}(t_0) > 0$$

allora esisterà un intorno di t_0 in cui ϕ_1 risulterà strettamente monotona e perciò invertibile. In tale intorno varrà $t = \phi^{-1}(x)$ e perciò

$$y = \phi_2(\phi^{-1}(x))$$

che ha derivata pari a

$$(c.v.d.) \quad \frac{d\phi_2/dt}{d\phi_1/dt}(\phi^{-1}(x))$$

Abbiamo perciò visto che globalmente il grafico di una funzione reale $\mathcal{C}^1$ è sostegno di una curva e che localmente il sostegno di una curva è grafico di una funzione $\mathcal{C}^1$.

Abbiamo cioè risolto il problema solo per funzioni dal piano in $\mathbb{R}$ definite come

$$f(x, y) = y - f(x)$$

Per esaurire il problema più generale nel piano avremo bisogno del **teorema di Dini**, soltanto le sue generalizzazioni ci consentiranno di stabilire l'equivalenza locale di descrizione parametrica ed implicita delle curve. In ogni caso, non ci fermeremo allo studio di curve, ma ci occuperemo di superfici, ipersuperfici e - in generale - di varietà riemanniane.

III.2 Il teorema di Dini

III.2.1 Il teorema di Dini nel piano

Dimostrazione del teorema

Vogliamo risolvere completamente il problema della descrizione di una curva del piano. A tale scopo dimostriamo il fondamentale

Teorema III.1 (di Dini)

Siano A un aperto di $\mathbb{R}^2$, $f \in \mathcal{C}^1(A)$ a valori in $\mathbb{R}$, e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tali che

- (i) $f(x_0, y_0) = 0$;
- (ii) $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$;

allora, se, per fissare le idee è $\partial f/\partial y(x_0, y_0) \neq 0$, esistono un intorno U di x_0 e un intorno V di y_0 per cui

$$\forall x \in U \exists! y \in V : f(x, y) = 0,$$

inoltre, se definiamo $\phi : U \rightarrow V$ talché $f(x, \phi(x)) = 0$, allora $\phi \in \mathcal{C}^1(U)$ e

$$\frac{d\phi}{dx}(x) = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}(x, y)$$

Dimostrazione Per ipotesi $\partial f/\partial y(x_0, y_0) \neq 0$ e supponiamo - per fissare le idee - $\partial f/\partial y(x_0, y_0) > 0$. Inoltre f è di classe $\mathcal{C}^1$, da cui $\partial f/\partial y$ è continua in A . Per la proprietà di permanenza del segno esiste un intorno W del punto (x_0, y_0) tale che

$$\frac{\partial f}{\partial y}(W) > 0.$$

Siano poi $h, k \in \mathbb{R}^+$ tali che $[x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - k, y_0 + k] \subseteq W$. Per ogni $\xi \in [x_0 - h, x_0 + h]$ definiamo la funzione da $[y_0 - k, y_0 + k]$ in $\mathbb{R}$ data da

$$y \mapsto f(\xi, y)$$

la quale è monotona strettamente crescente, in particolare per $\xi = x$ si ha $f(x_0, y_0 - k) < f(x_0, y_0) = 0 < f(x_0, y_0 + k)$. D'altra parte la funzione

$$x \mapsto f(x, y_0 - k)$$

è continua, sicché, per la permanenza del segno, esiste $0 < h' \leq h$ per cui

$$f(x, y_0 - k) < 0, \forall x \in [x_0 - h', x_0 + h'],$$

analogamente esiste $0 < h'' \leq h$ per cui

$$f(x, y_0 + k) > 0, \forall x \in [x_0 - h'', x_0 + h''].$$

Posto $\delta \equiv \min\{h', h''\}$ si ha per ogni $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \equiv U$

$$f(x, y_0 - k) < 0 < f(x, y_0 + k);$$

per ogni $x \in U$ torniamo a considerare la funzione $y \mapsto f(x, y)$ essa è continua e strettamente monotona in $V \equiv [y_0 - k, y_0 + k]$, perciò per il teorema degli zeri ammette una e una sola radice in V , e questo per ogni $x \in U$. Abbiamo così dimostrato l'esistenza della ϕ . Vediamo che si tratta di una funzione continua e poi derivabile.

Sia $\lambda < \delta$, consideriamo

$$f(x + \lambda, \phi(x + \lambda)) - f(x, \phi(x)) = 0$$

per il teorema di Lagrange, che sussiste in quanto f di classe $\mathcal{C}^1$ su A , posto $\mu \equiv \phi(x + \lambda) - \phi(x)$, esiste $\tau \in]0, 1[$:

$$\begin{aligned} 0 &= df(x + \tau\lambda, \phi(x) + \tau\mu)(\lambda, \phi(x + \lambda) - \phi(x)) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x + \tau\lambda, \phi(x) + \tau\mu)\lambda + \frac{\partial f}{\partial y}(x + \tau\lambda, \phi(x) + \tau\mu)(\phi(x + \lambda) - \phi(x)) \end{aligned}$$

essendo la derivata in y diversa da 0 in W

$$\phi(x + \lambda) - \phi(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x + \tau\lambda, \phi(x) + \tau\mu)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x + \tau\lambda, \phi(x) + \tau\mu)}\lambda$$

per continuità delle derivate parziali e compattezza di $U \times V$

$$|\phi(x + \lambda) - \phi(x)| \leq \frac{\max_{U \times V} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right|}{\min_{U \times V} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right|} |\lambda|$$

da cui ϕ è lipschitziana e perciò continua. Adesso possiamo passare al limite per $\lambda \rightarrow 0$ nell'equazione di sopra e ottenere

$$(c.v.d.) \quad \frac{d\phi}{dx}(x) = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}(x, y).$$

È ovvio a questo punto che se avessimo supposto $\partial f/\partial x(x_0, y_0) \neq 0$ avremmo esplicitato x in funzione di y .

Il problema delle curve del piano

Vediamo allora che abbiamo effettivamente risolto il problema della descrizione di una curva nel piano. Sia data una curva regolare in forma parametrica, allora, come notato nella sezione precedente, troviamo una $F \in \mathcal{C}^1$ dal piano in $\mathbb{R}$ il cui insieme di livello è il sostegno della curva stessa, nella forma $F(x, y) = y - f(x)$ con f reale di variabile reale. D'altra parte, sia data ora una qualunque F di classe $\mathcal{C}^1$ il cui supporto sia non vuoto. Allora, per il teorema di Dini, è possibile trovare, nell'intorno di un punto del supporto, una funzione f reale di variabile reale, $\mathcal{C}^1$ talché $F(x, f(x)) = 0$. Localmente l'insieme di livello è il grafico della f , e come visto esso è il sostegno di una curva regolare.

Il problema più generale, per una curva come per una varietà, è molto più complicato. Lo affronteremo passo per passo.

Derivate successive

Sia, oltre alle ipotesi del teorema, $f \in \mathcal{C}^2(A)$. Vogliamo mostrare che ϕ è, essa stessa, di classe $\mathcal{C}^2$. A tale proposito, essendo ϕ di classe $\mathcal{C}^1$, si può applicare la proposizione II.12 alla $\partial f / \partial x(x, \phi(x))$ per trovare

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, \phi(x)) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, \phi(x))_{\phi(x)} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, \phi(x)) \phi'(x) = f_{xx} + f_{xy} \phi' \\ \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x, \phi(x)) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, \phi(x)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, \phi(x))_{\phi(x)} \phi'(x) = f_{xy} + f_{yy} \phi' \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = - \frac{f_y (f_{xx} + f_{xy} \phi') - f_x (f_{xy} + f_{yy} \phi')}{f_y^2} = - \frac{f_y^2 f_{xx} + f_x^2 f_{yy} - 2 f_{xy} f_x f_y}{f_y^3}$$

per induzione, con ragionamenti del tutto analoghi, si ha che $f \in \mathcal{C}^k \Rightarrow \phi \in \mathcal{C}^k$.

III.2.2 Il teorema di Dini in $\mathbb{R}^{n+1}$

Una prima generalizzazione del teorema di Dini è la seguente

Teorema III.2 *Siano A un aperto di $\mathbb{R}^{n+1}$, $(\mathbf{x}_0, y_0) \in A$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ e $f \in \mathcal{C}^1(A)$ a valori reali. Se*

- (i) $f(\mathbf{x}_0, y_0) = 0$;
- (ii) $\partial f / \partial y(\mathbf{x}_0, y_0) \neq 0$;

allora esistono un intorno rettangolare $U = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |x^j - x_0^j| \leq h_j, h_j > 0, \forall j \in J_m \}$ di $\mathbf{x}_0$ e un intorno $V = [y_0 - k, y_0 + k]$, talché per ogni $\mathbf{x} \in U$ esiste uno e un solo $y \in V$ per cui $f(\mathbf{x}, y) = 0$. Risulta allora definita la funzione $\phi : U \rightarrow V$, $f(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x})) = 0$, $\phi \in \mathcal{C}^1(U)$ e

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^j} = - \frac{\partial f / \partial x^j}{\partial f / \partial y}(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x}))$$

Dimostrazione

Si procede esattamente come prima. Sommariamente riproponiamo la linea della dimostrazione. Supponiamo sia $\partial f / \partial y(\mathbf{x}_0, y_0) > 0$, sicché esiste un intorno rettangolare di $(\mathbf{x}_0, y_0)$, della forma specificata nella tesi del teorema, per cui, per continuità delle derivate prime di f e per la permanenza del segno,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, y) > 0$$

Ne deriva che la funzione $y \mapsto f(\mathbf{x}_0, y)$ è strettamente crescente e risulta

$$f(\mathbf{x}_0, y_0 - k) < f(\mathbf{x}_0, y_0) = 0 < f(\mathbf{x}_0, y_0 + k)$$

D'altra parte $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}, y_0 \mp k)$ è continua, sicché per continuità e permanenza del segno, esiste un intorno di $\mathbf{x}_0$ nel quale

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, y_0 - k) &< 0 \\ f(\mathbf{x}, y_0 + k) &> 0 \end{aligned}$$

Fissato ciascun $\mathbf{x}$ la funzione $y \mapsto f(\mathbf{x}, y)$ è strettamente crescente e gode delle ipotesi del teorema degli zeri, sicché esiste ed è unico y per cui essa si annulla.

Vale poi, posto $\mu = \phi(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \phi(\mathbf{x})$,

$$\begin{aligned} 0 &= f(\mathbf{x} + \mathbf{h}, \phi(\mathbf{x} + \mathbf{h})) - f(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x})) = df(\mathbf{x} + \tau\mathbf{h}, \phi(\mathbf{x}) + \tau\mu)(\mathbf{h}, \mu) = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x} + \tau\mathbf{h}, \phi(\mathbf{x}) + \tau\mu) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x} + \tau\mathbf{h}, \phi(\mathbf{x}) + \tau\mu) \right) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{h} \\ \mu \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x} + \tau\mathbf{h}, \phi(\mathbf{x}) + \tau\mu) \cdot \mathbf{h} + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x} + \tau\mathbf{h}, \phi(\mathbf{x}) + \tau\mu) \mu \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \phi(\mathbf{x}) &= - \frac{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x} + \tau\mathbf{h}, \phi(\mathbf{x}) + \tau\mu) \cdot \mathbf{h}}{\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x} + \tau\mathbf{h}, \phi(\mathbf{x}) + \tau\mu)} \\ |\phi(\mathbf{x} + h\mathbf{u}) - \phi(\mathbf{x})| &= \left| \frac{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x} + \tau\mathbf{h}, \phi(\mathbf{x}) + \tau\mu) \cdot \mathbf{h}}{\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x} + \tau\mathbf{h}, \phi(\mathbf{x}) + \tau\mu)} \right| \leq \frac{\left\| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x} + \tau\mathbf{h}, \phi(\mathbf{x}) + \tau\mu) \right\| \|\mathbf{h}\|}{\left| \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x} + \tau\mathbf{h}, \phi(\mathbf{x}) + \tau\mu) \right|} \leq \\ &\leq \frac{\max_U \left\| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, y) \right\|}{\min_V \left| \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, y) \right|} h \end{aligned}$$

avendo posto $\mathbf{h} = h\mathbf{u}$ con $\mathbf{u}$ versore. Per lipschitzianità, la continuità. Passando al limite dell'equazione precedente

$$\frac{\phi(\mathbf{x} + h\mathbf{u}) - \phi(\mathbf{x})}{h} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x} + \tau h\mathbf{u}, \phi(\mathbf{x}) + \tau\mu) \cdot \mathbf{u}}{\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x} + \tau h\mathbf{u}, \phi(\mathbf{x}) + \tau\mu)}$$

da cui

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{u}} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{u}}{\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x}))}$$

ponendo poi $\mathbf{u} \equiv \mathbf{e}_i$ si ha

$$(c.v.d.) \quad \frac{\partial \phi}{\partial x^i} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x}))}{\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x}))}$$

Assegnata allora una superficie come insieme di livello di una funzione dallo spazio tridimensionale al piano, nei punti in cui il gradiente è diverso, è possibile esplicitare una variabile in funzione delle altre due, passando così alla rappresentazione parametrica della superficie stessa. Si tratta del teorema di Dini in tre dimensioni.

III.3 Il teorema delle funzioni implicite nel caso generale

III.3.1 Il teorema delle funzioni implicite da $\mathbb{R}^{m+n}$ in $\mathbb{R}^n$

Consideriamo il seguente sistema

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

ove ciascuna $f_i : \mathbb{R}^n \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe $\mathcal{C}^1(A)$. Vogliamo studiare le condizioni in cui esso è risolvibile, e in che termini.

Sistemi lineari

Un sistema di m equazioni lineari in n incognite, può essere scritto nella forma $F(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m$, dove $F \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Esista $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ soluzione del sistema. L'insieme soluzione sarà dato dalle soluzioni del sistema omogeneo $F(\mathbf{x}) = 0$ traslate di $\mathbf{x}_0$, per linearità di F . D'altra parte le soluzioni del sistema omogeneo sono tutti e soli i vettori $\mathbf{x} \in \ker F$ e

$\dim \ker F = n - \dim \operatorname{Im} F = n - \operatorname{rk} F$. Ne consegue che la soluzione del sistema di partenza è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n - \operatorname{rk} F$ qualora esista la soluzione particolare $\mathbf{x}_0$, cioè risulti $\mathbf{y}_0 \in \operatorname{Im} F$ (in altri termini il rango della matrice completa coincida col rango della matrice incompleta, nei termini della formulazione di Rouché-Capelli). Si ha inoltre che, se $m - \operatorname{rk} F > 0$, $m - \operatorname{rk} F$ equazioni dipendono linearmente dalle altre e possono essere eliminate dal sistema. Ora, $\operatorname{rk} F \leq \min\{m, n\}$, se $m > n$ si avrà necessariamente $m - \operatorname{rk} F > 0$ e il numero delle equazioni sarà sovrabbondante. In generale, dovrà risultare $m \leq n$.

Dimostrazione del teorema

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \\ \vdots \\ F_n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \end{cases}$$

di m equazioni in $m + n$ incognite. Ciascuna F_i sia di classe $\mathcal{C}^1$ definita da $\mathbb{R}^{m+n}$ a valori in $\mathbb{R}$. Denotiamo con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ il vettore $(x_1, \dots, x_m)$ e con $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $(y_1, \dots, y_n)$. Definita poi $F : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ di componenti $F_1, \dots, F_n$, scriviamo il sistema nella forma più compatta $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Sussiste il

Teorema III.3 (delle funzioni implicite, I)

Sia A un aperto di $\mathbb{R}^{m+n}$ e sia $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ un'applicazione di A a valori in $\mathbb{R}^n$ di classe $\mathcal{C}^1(A)$. Se nel punto $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in A$ risulta

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) &= 0 \\ \det \frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}} &\neq 0 \end{aligned}$$

allora si possono determinare un intorno $U \subseteq \mathbb{R}^m$ di $\mathbf{x}_0$ e un intorno $V \subseteq \mathbb{R}^n$ di $\mathbf{y}_0$ in modo che per ogni $\mathbf{x} \in U$ esista uno e un solo $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ tale che $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Inoltre $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $f \in \mathcal{C}^1(U)$, ove

$$J_f(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = - \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \right]^{-1} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$$

Dimostrazione

A meno di traslazione è sempre possibile supporre $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = (0, 0)$. Per la proposizione II.12, risulta

$$J_F = J_F^{\mathbf{x}} + J_F^{\mathbf{y}} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}$$

in ogni punto. Da cui

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(0, 0) \mathbf{x} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}(0, 0) \mathbf{y} + \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

con σ , come somma di funzioni $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^1$ e tale che

$$\lim_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_{m+n}} = 0,$$

d'altra parte, $\sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b$,

$$\|(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_{m+n} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_m^2 + y_1^2 + \dots + y_n^2} \leq \|\mathbf{x}\|_m + \|\mathbf{y}\|_n$$

$$\frac{\|\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_n}{\|\mathbf{x}\|_m + \|\mathbf{y}\|_n} \leq \frac{\|\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_n}{\|(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_{m+n}} \rightarrow 0$$

perciò

$$\lim_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|_m + \|\mathbf{y}\|_n} = 0.$$

Per ipotesi $J_F^y(0)$ è invertibile sicché

$$\mathbf{y} = \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}(0,0) \right)^{-1} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}(0,0) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(0,0) \mathbf{x} - \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}(0,0) \right)^{-1} \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

definiamo

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &\equiv - \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}(0,0) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(0,0) \mathbf{x} \\ G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\equiv - \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}(0,0) \right)^{-1} \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

e otteniamo

$$\mathbf{y} = \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}(0,0) \right)^{-1} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \phi(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

Allora sarà $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ se e solo se $\mathbf{y} = \phi(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Il problema si riduce a determinare un intorno U dell'origine di $\mathbb{R}^m$ e un intorno V dell'origine di $\mathbb{R}^n$ tali che $\forall \mathbf{x} \in U \exists! \mathbf{y} \in V : \mathbf{y} = \phi(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Facciamo alcune osservazioni sulle funzioni ausiliarie introdotte.

(i) $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{C}^1$, in quanto composizione di una funzione lineare e di una funzione $\mathcal{C}^1$. Inoltre, per linearità

$$\lim_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow (0,0)} - \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}(0,0) \right)^{-1} \frac{\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|_m + \|\mathbf{y}\|_n} = 0$$

D'altra parte si ha, posto $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{m+n}$

$$\lim_{\mathbf{v} \rightarrow 0} \frac{G(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{m+n}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = 0$$

siccome, poi, G è differenziabile si ha $dG(0,0) = 0$. Per quanto visto, è sempre possibile determinare un intorno dell'origine di $\mathbb{R}^m$ e uno dell'origine di $\mathbb{R}^n$ di raggio r_0 , rispettivamente U_{r_0} e V_{r_0} , ove valgano contemporaneamente, per il limite di cui sopra e per la continuità delle funzioni considerate, per ogni $\mathbf{x} \in U_{r_0}, \mathbf{y} \in V_{r_0}$

$$\begin{aligned} \|G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_n &\leq \frac{1}{2} (\|\mathbf{x}\|_m + \|\mathbf{y}\|_n) \\ \left\| \frac{\partial G_i}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\|_n &\leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \\ \left\| \frac{\partial G_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\|_m &\leq \frac{1}{2\sqrt{m}} \\ \det \frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\neq 0 \end{aligned}$$

(ii) $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V_{r_0}$ da cui, per ogni $i \in J_n$, per il teorema di Lagrange, esiste $\boldsymbol{\eta}_i$ nel segmento di estremi $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ talché

$$G_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) - G_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2) = \frac{\partial G_i}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}_i) \cdot (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$$

da cui

$$\|G(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) - G(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2)\|_n = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial G_i}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}_i) \cdot (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) \right)^2}$$

per la diseuguaglianza di Schwartz

$$\|G(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) - G(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2)\|_n = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial G_i}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}_i) \right\|_n^2} \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|_n \leq \sqrt{n} \left(\frac{1}{2\sqrt{n}} \right) \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|_n$$

da cui $\forall \mathbf{x} \in U_{r_0}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V_{r_0}$ si ha

$$\|G(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) - G(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2)\|_n \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|_n$$

(iii) $\phi(\mathbf{x})$ è lineare, poniamo $B \in \mathcal{M}(n, m; \mathbb{R})$,

$$B = - \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}(0, 0) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(0, 0)$$

sicché $\phi(\mathbf{x}) = B \cdot \mathbf{x}$. Ora, risulta

$$\begin{aligned} \|\phi(\mathbf{x})\|_n &= \left\| \begin{pmatrix} B_1 \cdot \mathbf{x} \\ \vdots \\ B_n \cdot \mathbf{x} \end{pmatrix} \right\|_n = \sqrt{\sum_{i=1}^n (B_i \cdot \mathbf{x})^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \|B_i\|_m^2 \|\mathbf{x}\|_m^2} \\ &= \|\mathbf{x}\|_m \sqrt{\sum_{i=1}^n \|B_i\|_m^2} \equiv \|B\| \|\mathbf{x}\|_m \end{aligned}$$

infine, $\|\phi(\mathbf{x})\|_n \leq \|B\| \|\mathbf{x}\|_m$.

(iv) Fissiamo $r_1 < r_0$ e $\mathbf{x} \in U_{r_1}, \mathbf{y} \in V_{r_0}$

$$\|\phi(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_n \leq \|B\| \|\mathbf{x}\|_m + \frac{1}{2} (\|\mathbf{x}\|_m + \|\mathbf{y}\|_n) \leq \left(\|B\| + \frac{1}{2} \right) r_1 + \frac{r_0}{2}$$

posto $r_1 \equiv \frac{r_0}{2\|B\|+1}$ da cui $\|\phi(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_n \leq r_0$ il che vale per ogni $\mathbf{x} \in U_{r_1}, \mathbf{y} \in V_{r_0}$.

Fissiamo $\mathbf{x} \in U_{r_1}$ e sia

$$\Phi : \mathbf{y} \mapsto \phi(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

Se $\mathbf{y} \in V_{r_0}$ $\Phi(\mathbf{y}) \in V_{r_0}$ per la disuguaglianza precedente. Ne deriva che Φ è una trasformazione da V_{r_0} in sé. Inoltre

$$\|\Phi(\mathbf{y}_1) - \Phi(\mathbf{y}_2)\|_n = \|G(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) - G(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2)\|_n \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|_n$$

da cui Φ è una contrazione. Per il teorema delle contrazioni esiste ed è unico, fissato $\mathbf{x} \in U_{r_1}, \mathbf{y} \in V_{r_0}$, talché $\mathbf{y} = \phi(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sicché $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. La prima parte del teorema, l'esistenza della f , è dimostrata.

Vediamo adesso che essa è continua. Calcoliamo

$$f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2) = \phi(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + G(\mathbf{x}_1, f(\mathbf{x}_1)) - G(\mathbf{x}_2, f(\mathbf{x}_2))$$

da cui

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)\|_n &\leq \|B\| \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_m + \|G(\mathbf{x}_1, f(\mathbf{x}_1)) - G(\mathbf{x}_1, f(\mathbf{x}_2))\|_n \\ &\quad + \|G(\mathbf{x}_1, f(\mathbf{x}_2)) - G(\mathbf{x}_2, f(\mathbf{x}_2))\|_n \end{aligned}$$

in modo del tutto analogo a quello usato al punto (ii) si prova che $\|G(\mathbf{x}_1, f(\mathbf{x}_2)) - G(\mathbf{x}_2, f(\mathbf{x}_2))\|_n \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_m$, per trovare infine che

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)\|_n &\leq \left(\|B\| + \frac{1}{2} \right) \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_m + \frac{1}{2} \|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)\|_n \\ \|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)\|_n &\leq 2 \left(\|B\| + \frac{1}{2} \right) \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_m \end{aligned}$$

risultando lipschitziana la f è continua.

Veniamo alla derivazione. Siano $\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \in U_{r_1}$, per ogni intero $i \in J_n$ esiste, per il teorema di Lagrange, un punto (ξ_i, η_i) nel segmento di estremi $(\bar{\mathbf{x}}, f(\bar{\mathbf{x}}))$ e $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$ tale che

$$0 = F_i(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) - F_i(\bar{\mathbf{x}}, f(\bar{\mathbf{x}})) = \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{x}}(\xi_i, \eta_i)(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{y}}(\xi_i, \eta_i)(f(\mathbf{x}) - f(\bar{\mathbf{x}}))$$

poniamo $L \in \mathcal{M}(n, m; \mathbb{R})$ e $M \in \mathcal{M}(n, n; \mathbb{R})$ di righe

$$L_i = \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{x}}(\xi_i, \eta_i) - \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}, f(\bar{\mathbf{x}}))$$

$$M_i = \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{y}}(\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\eta}_i) - \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{y}}(\bar{\mathbf{x}}, f(\bar{\mathbf{x}}))$$

sicché possiamo scrivere

$$0 = \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}, f(\bar{\mathbf{x}}))(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{y}}(\bar{\mathbf{x}}, f(\bar{\mathbf{x}}))(f(\mathbf{x}) - f(\bar{\mathbf{x}})) + L_i(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + M_i(f(\mathbf{x}) - f(\bar{\mathbf{x}}))$$

da cui

$$0 = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}, f(\bar{\mathbf{x}}))(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}(\bar{\mathbf{x}}, f(\bar{\mathbf{x}}))(f(\mathbf{x}) - f(\bar{\mathbf{x}})) + L(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + M(f(\mathbf{x}) - f(\bar{\mathbf{x}}))$$

Poniamo $Q(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = L(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + M(f(\mathbf{x}) - f(\bar{\mathbf{x}}))$. Per continuità delle derivate, al tendere di $\mathbf{x} \rightarrow \bar{\mathbf{x}}$, ciascun elemento di L ed M si annulla, sicché

$$\frac{\|L(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})\|_n}{\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|_m} \leq \|L\| \rightarrow 0$$

sicché $\|L(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})\|_n = o(\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|_m)$, inoltre

$$\frac{\|M(f(\mathbf{x}) - f(\bar{\mathbf{x}}))\|_n}{\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|_m} \leq \|M\| \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\bar{\mathbf{x}})\|_n}{\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|_m} \leq 2 \left(\|B\| + \frac{1}{2} \right) \|M\| \rightarrow 0$$

da cui $\|M(f(\mathbf{x}) - f(\bar{\mathbf{x}}))\|_n = o(\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|_m)$. Ne deriva che, fissato $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{h}$, per invertibilità di J_f^y si ricava

$$f(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{h}) = f(\bar{\mathbf{x}}) + \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}(\bar{\mathbf{x}}, f(\bar{\mathbf{x}})) \right]^{-1} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}, f(\bar{\mathbf{x}})) \mathbf{h} + o(\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|_m)$$

da cui f è differenziabile e ha jacobiano pari a

$$(c.v.d.) \quad J_f(\mathbf{x}_0) = \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}(\bar{\mathbf{x}}, f(\bar{\mathbf{x}})) \right]^{-1} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}, f(\bar{\mathbf{x}}))$$

III.3.2 Dipendenza funzionale

Definizioni

Torniamo a considerare il sistema

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

di n variabili e m equazioni di livello definite su un aperto di $\mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{R}$ e di classe $\mathcal{C}^1$. Esse si dicono **dipendenti funzionalmente** in un intorno U di un punto quando esiste una funzione f definita su $\mathbb{R}^m$ a valori in $\mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1$, di derivate non tutte nulle, tale che

$$f(F_1, \dots, F_m)(x_1, \dots, x_n) = 0, \forall (x_1, \dots, x_n) \in U.$$

Si noti come quanto posto, applicato alle funzioni lineari, ricalchi la definizione di dipendenza lineare. Infatti, m funzioni lineari si dicono dipendenti linearmente se esiste una combinazione lineare, a coefficienti non tutti nulli, che dia la funzione identicamente nulla. La combinazione lineare non è altro che una funzione lineare di m variabili, ovviamente $\mathcal{C}^1$, le cui derivate parziali sono i coefficienti della combinazione e, come tali, non devono essere tutti nulli.

Stabiliamo un primo risultato:

Teorema III.4 *Sia data F da un aperto A di $\mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{C}^1(A)$, di componenti $F_1, \dots, F_m$. Se la matrice delle derivate parziali è tale che*

$$\text{rk} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(A) = m$$

allora le m funzioni sono indipendenti.

Dimostrazione

Esista per assurdo una funzione f definita su $\mathbb{R}^m$ tale che $f(F)(A) = 0$. Per ogni $\mathbf{x} \in A$ sarà

$$f(F(\mathbf{x})) = 0$$

differenziando, il che è possibile per ipotesi, per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

$$J_f \cdot J_F \cdot \mathbf{v} = 0$$

ponendo $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i$ al variare di $i \in J_n$ si ottiene

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} = 0$$

ne deriva che abbiamo determinato, per ciascun $\mathbf{x} \in A$, una combinazione lineare delle righe di J_F , a coefficienti non nulli per ipotesi, che sia nulla. Perciò $\text{rk } J_F < m$, assurdo.

(c.v.d.)

Fondamentale è il seguente

Teorema III.5 *Sia data F da un aperto A di $\mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{C}^1(A)$, di componenti $F_1, \dots, F_m$. Se la matrice delle derivate parziali ha rango r , per ogni punto $\mathbf{x}_0 \in A$, si possono scegliere tra le $F_1, \dots, F_m$, r funzioni indipendenti in un intorno di $\mathbf{x}_0$, dalle quali, in detto intorno, dipendano tutte le altre.*

Dimostrazione Sia $\text{rk } J_F(\mathbf{x}_0) = r$, allora esiste un minore di $J_F(\mathbf{x}_0)$ avente determinante diverso da 0 in $\mathbf{x}_0$, e, per continuità, diverso da 0 in un intorno V del punto $\mathbf{x}_0$. Per semplicità di notazione, sia il minore considerato formato dalle prime r righe e colonne, per cui

$$\det \frac{\partial (F_1, \dots, F_r)}{\partial (x_1, \dots, x_r)}(V) \neq 0$$

Vogliamo vedere che, se $0 < j \leq n - r$, si ha che F_{r+j} dipende da $F_1, \dots, F_r$. Poiché $\text{rk } J_F = r$ in V si ha che la $r + j$ -esima riga dipende linearmente dalle prime r , cioè sono definite in V le funzioni

$$\lambda_{r+j,1}, \dots, \lambda_{r+j,r}$$

tali che, per ogni $\mathbf{x} \in V$

$$\sum_{i=1}^r \lambda_{r+j,i}(\mathbf{x}) \frac{\partial F_i}{\partial x_s}(\mathbf{x}) = \frac{\partial F_{r+j}}{\partial x_s}(\mathbf{x}), \forall s \in J_n$$

ne deriva che

$$dF_{r+j}(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^n \frac{\partial F_{r+j}}{\partial x_s}(\mathbf{x}) dx_s = \sum_{s=1}^n \sum_{i=1}^r \lambda_{r+j,i}(\mathbf{x}) \frac{\partial F_i}{\partial x_s}(\mathbf{x}) dx_s = \sum_{i=1}^r \lambda_{r+j,i}(\mathbf{x}) dF_i(\mathbf{x})$$

Ora, poniamo

$$\begin{cases} y_1 \equiv F_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_r \equiv F_r(x_1, \dots, x_n) \\ \bar{x}_{r+1} \equiv x_{r+1} \\ \vdots \\ \bar{x}_n \equiv x_n \end{cases}$$

Le prime r equazioni del sistema rispettano le ipotesi del teorema delle funzioni implicite, essendo

$$\det \frac{\partial (F_1, \dots, F_r)}{\partial (x_1, \dots, x_r)}(V) \neq 0$$

sicché è possibile esprimere ciascuna $x_1, \dots, x_r$ in funzione delle $y_1, \dots, y_r, x_{r+1}, \dots, x_n$, in altre parole esiste la funzione ϕ , differenziabile, a valori in V per la quale

$$\phi(y_1, \dots, y_r, \bar{x}_{r+1}, \dots, \bar{x}_n) = (x_1, \dots, x_n).$$

Ne deriva che

$$F_{r+j}(x_1, \dots, x_n) = F_{r+j}(\phi(y_1, \dots, y_r, \bar{x}_{r+1}, \dots, \bar{x}_n))$$

da cui, differenziando

$$\begin{aligned} dF_{r+j} &= \sum_{s=1}^r \frac{\partial (F_{r+j} \circ \phi)}{\partial y_s} dy_s + \sum_{s=r+1}^n \frac{\partial (F_{r+j} \circ \phi)}{\partial \bar{x}_s} d\bar{x}_s = \\ &= \sum_{s=1}^r \frac{\partial (F_{r+j} \circ \phi)}{\partial y_s} dF_s + \sum_{s=r+1}^n \frac{\partial (F_{r+j} \circ \phi)}{\partial x_s} dx_s = \end{aligned}$$

ora, $\left\{ \{dF_s\}_{s \in J_r}; \{dx_{r+j}\}_{j \in J_{n-r}} \right\}$ è una base linearmente indipendente di $\text{Hom}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$, da cui, per unicità della decomposizione in tale base di ciascun omomorfismo, si ricava

$$\frac{\partial (F_{r+j} \circ \phi)}{\partial x_s} = 0, \quad r < s \leq n$$

perciò $F_{r+j} \circ \phi$ non dipende dalle variabili di indice maggiore di r , cioè

$$F_{r+j}(x_1, \dots, x_n) = F_{r+j}(\phi(y_1, \dots, y_r)) = F_{r+j}(\phi(F_1, \dots, F_r))(x_1, \dots, x_n)$$

(c.v.d.) la tesi.

Osservazione III.1 Sia $m > n$, cioè il numero delle equazioni di un sistema sia maggiore del numero delle incognite. Allora il rango della matrice jacobiana sarà necessariamente minore di m e $m - \text{rk } J_F$ saranno dipendenti.

Esempio III.2 Consideriamo il seguente sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

rispettivamente, la sfera di raggio unitario e centro nell'origine, il cilindro di asse z e raggio 1, il piano xy . Ovviamente l'intersezione di ogni coppia darà la circonferenza giacente in xy e di raggio unitario. Possiamo supporre che le funzioni siano dipendenti. Infatti, fuori dall'origine,

$$\text{rk} \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 < 3$$

un minore invertibile, nell'intorno di $(0, 1, 0)$ è quello formato dalle righe e colonne 2 e 3. Sicché, la prima equazione dipenderà, in tale intorno, dalla seconda e dalla terza. Infatti, siano

$$\bar{x}_1 = x \quad y_2 = x^2 + y^2 - 1 \quad y_3 = z$$

esprimiamo (x, y, z) in funzione di $(\bar{x}_1, y_2, y_3)$ abbiamo subito $x = \bar{x}_1$ e $z = y_3$, sicché

$$y^2 = y_2 - \bar{x}_1^2 + 1$$

calcoliamo

$$F_1(\bar{x}_1, y_2, y_3) = \bar{x}_1^2 + y_2 - \bar{x}_1^2 + 1 + y_3^2 - 1 = y_2 + y_3^2$$

che come si vede non dipende da $\bar{x}_1$. Infine,

$$F_1 = F_2 + F_3^2$$

il che è vero.

III.3.3 Il teorema delle funzioni implicite: caso generale, da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$

Sia ancora

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

di n variabili e m equazioni di livello definite su un aperto di $\mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{R}$ e di classe $\mathcal{C}^1$. Valga in un punto $F(\bar{\mathbf{x}}_0) = 0$ e in un suo intorno W $\text{rk } J_F = n - \ell$. Restretto il sistema alle $n - \ell$ equazioni definite dagli indici $\{j_1, \dots, j_{n-\ell}\} \subseteq J_m$ delle righe del minore di ordine $n - \ell$ non nullo. Siano gli indici delle altre righe $\{i_1, \dots, i_\ell\}$. Per il teorema delle funzioni implicite, troviamo una funzione ϕ definita in un intorno $U \subseteq \mathbb{R}^\ell$ del punto $(x_0^{i_1}, \dots, x_0^{i_\ell})$, a valori in un intorno V del punto $(x_0^{j_1}, \dots, x_0^{j_{n-\ell}}) \in \mathbb{R}^{n-\ell}$, tale che per ogni $s \in J_\ell$ esiste ed è unico $\mathbb{R}^{n-\ell} \ni \mathbf{y} = \phi(x^{i_1}, \dots, x^{i_\ell})$

$$F_{i_s}(x^{i_1}, \dots, x^{i_\ell}; \phi(x^{i_1}, \dots, x^{i_\ell})) = 0.$$

D'altra parte in W le funzioni F_{i_t} dipendono funzionalmente dalle F_{j_s} , sicché, preso $\mathbf{x} \in U$

$$F_{i_t}(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x})) = H_t(F_{j_1}, \dots, F_{j_{n-\ell}})(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x})) = H_t(0)$$

d'altra parte $H_t(F_{j_1}, \dots, F_{j_{n-\ell}})(\mathbf{x}_0) = H_t(0) = F_{i_t}(\bar{\mathbf{x}}_0) = 0$, infine

$$F_{i_t}(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x})) = 0$$

Se ne conclude col più generale

Teorema III.6
(delle funzioni implicite, II)

Sia il sistema

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

di n variabili e m equazioni di livello definite su un aperto di $\mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{R}$, di classe $\mathcal{C}^1$. Valga in un punto $\bar{\mathbf{x}}_0$ del dominio, $F(\bar{\mathbf{x}}_0) = 0$. In un intorno W di $\mathbf{x}_0$, sia $\text{rk } J_F(W) = n - \ell$. Siano $\{j_1, \dots, j_{n-\ell}\} \subseteq J_m$ gli indici delle righe di un minore di ordine $n - \ell$ non nullo in $\mathbf{x}_0$. Siano gli indici delle altre righe $\{i_1, \dots, i_\ell\}$. Esiste allora una funzione ϕ di classe $\mathcal{C}^1$, definita in un intorno $U \subseteq \mathbb{R}^\ell$ del punto $\mathbf{x}_0 \equiv (x_0^{i_1}, \dots, x_0^{i_\ell})$, a valori in un intorno V del punto $\mathbf{y}_0 \equiv (x_0^{j_1}, \dots, x_0^{j_{n-\ell}}) \in \mathbb{R}^{n-\ell}$, tale che per ogni $s \in J_m$ esiste ed è unico $\mathbb{R}^{n-\ell} \ni \mathbf{y} = \phi(x^{i_1}, \dots, x^{i_\ell})$ per cui

$$F_{i_s}(x^{i_1}, \dots, x^{i_\ell}; \phi(x^{i_1}, \dots, x^{i_\ell})) = 0.$$

Inoltre, risulta

$$J_\phi(\mathbf{x}) = - \left[\frac{\partial(F_{j_1}, \dots, F_{j_{n-\ell}})}{\partial(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-\ell}})}(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x})) \right]^{-1} \frac{\partial(F_{j_1}, \dots, F_{j_{n-\ell}})}{\partial(x_{i_1}, \dots, x_{i_\ell})}(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x}))$$

Ai fini della determinazione del luogo di intersezione degli insiemi di livello le funzioni di indici $i_1, \dots, i_\ell$ sono localmente irrilevanti. Infine, si noti come l'intersezione è posta in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}^\ell$: dato un punto dell'intersezione (cioè un punto di $\mathbb{R}^n$ soluzione del sistema) basta considerare la sua proiezione sulle coordinate $\{i_1, \dots, i_\ell\}$, per avere una funzione dal luogo in $\mathbb{R}^\ell$; dato un punto di $\mathbb{R}^\ell$ sarà la funzione ϕ a fornirci il modo per tornare al luogo univocamente. Si dice allora che il luogo così costruito (si definisce propriamente **sottovarietà**) ha dimensione ℓ .

III.4 Diffeomorfismi

III.4.1 Definizioni e prime proprietà

Definizione di diffeomorfismo

Poniamo la seguente

Definizione III.1

Siano A e B aperti di $\mathbb{R}^n$ e $f : A \rightarrow B$. Si dice che f è un diffeomorfismo di classe $\mathcal{C}^1$ se

- (i) f è iniettiva;
- (ii) f è suriettiva, $f(A) = B$;
- (iii) f e la sua inversa f^{-1} sono di classe $\mathcal{C}^1$, cioè sono ambedue differenziabili con derivate parziali continue.

Condizione necessaria

Sia f un diffeomorfismo. Siano $\mathbf{x}_0 \in A$ e $\mathbf{y}_0 = f(\mathbf{x}_0) \in B$. Dall'identità su A , $(f^{-1} \circ f)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, si ricava, differenziando, per il teorema di differenziazione della funzione composta

$$J_{f^{-1}}(\mathbf{y}_0) \cdot J_f(\mathbf{x}_0) = I$$

con I identità di $\mathcal{M}(n, n; \mathbb{R})$, $[I]_{ij} = \delta_{ij}$, $i, j \in J_n$. Ne deriva che $J_f(\mathbf{x}_0)$ ha per inversa proprio $J_{f^{-1}}(f(\mathbf{x}_0))$, cioè

Proposizione III.2

Sia f un diffeomorfismo da A in B , aperti di $\mathbb{R}^n$. Preso $\mathbf{x}_0 \in A$, si ha che la matrice jacobiana di f calcolata in $\mathbf{x}_0$ è invertibile e ha per inversa la matrice jacobiana dell'inversa f^{-1} di f calcolata nel punto $\mathbf{y}_0 = f(\mathbf{x}_0) \in B$.

Proposizione III.3

Se f è un diffeomorfismo allora

$$\det J_f(A) \neq 0$$

III.4.2 Invertibilità e diffeomorfismi locali

Dopo aver stabilito una condizione necessaria, ci interessa vederne una sufficiente. In altre parole, vogliamo metterci in grado di capire, data $f : A \rightarrow B$, $f \in \mathcal{C}^1(A)$, se f è un diffeomorfismo o meno. Il problema globale risulta molto complesso. Localmente, il teorema delle funzioni implicite ci fornisce la soluzione cercata.

Diffeomorfismi locali

Definizione III.2

Siano A e B due aperti di $\mathbb{R}^n$ e sia $f : A \rightarrow B$ di classe $\mathcal{C}^1$. Preso $\mathbf{x}_0 \in A$, diremo che f è un diffeomorfismo locale in $\mathbf{x}_0$ se esiste un intorno U di $\mathbf{x}_0$ talché la restrizione di f a U sia un diffeomorfismo tra U e la sua immagine.

Posta questa definizione, vediamo che la condizione stabilita in III.3 è anche sufficiente nel caso locale:

Teorema III.7 (dell'invertibilità locale)

Siano A e B due aperti di $\mathbb{R}^n$, sia $f : A \rightarrow B$ di classe $\mathcal{C}^1$ e sia $\mathbf{x}_0 \in A$. Se risulta

$$\det J_f(\mathbf{x}_0) \neq 0$$

allora f è un diffeomorfismo locale in $\mathbf{x}_0$.

Dimostrazione

Consideriamo la funzione $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y} - f(\mathbf{x})$, definita in $A \times \mathbb{R}^n$ a valori reali. Poniamo $\mathbf{y}_0 = f(\mathbf{x}_0)$. L'applicazione F è di classe $\mathcal{C}^1$ e si ha

$$F(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0, \det \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} = \det \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \neq 0$$

siamo allora nelle ipotesi del teorema delle funzioni implicite nella prima forma. Si conclude che esistono un intorno V di $\mathbf{y}_0$, un intorno U di $\mathbf{x}_0$, e una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ $\phi(\mathbf{y}) : V \rightarrow U$ tale che

(c.v.d.)

$$F(\phi(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow f(\phi(\mathbf{y})) = \mathbf{y} \Leftrightarrow (f \circ \phi)(V) = I$$

III.5 Massimi e minimi vincolati

Nel capitolo II, alla sezione III, abbiamo affrontato il problema dell'individuazione dei massimi e dei minimi di una funzione a valori reali, definita su un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$. In quella sede, abbiamo stabilito che i punti di massimo e minimo relativo fossero da ricercare tra i punti interni stazionari, nel caso di funzioni differenziabili. Posto il dominio compatto, la ricerca dei massimi e minimi assoluti, la cui esistenza è sancita dal teorema di Weierstraß, si riduce al confronto dei massimi e minimi relativi con i valori assunti dalla funzione sulla frontiera del dominio.

Proprio quest'ultimo problema è l'oggetto della presente sezione.

III.5.1 Il teorema dei moltiplicatori di Lagrange

Considerazioni preliminari

Preso A aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, consideriamo $f : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$. Vogliamo studiarne il comportamento su ∂A . Supponiamo di riuscire a esprimere la frontiera in forma parametrica in modo continuo e differenziabile:

$$\mathbf{x} \in \partial A \Leftrightarrow \exists \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m) \in U \subseteq \mathbb{R}^m : \mathbf{x} = \phi(\mathbf{u})$$

allora $f|_{\partial A} = (f \circ \phi)(U)$. Cioè ci siamo ricondotti allo studio dei massimi e dei minimi di una funzione $f \circ \phi$ da un aperto di $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}$. Restringere f alla frontiera significa imporre sui valori del dominio un **vincolo**, ∂A , che noi parametrizziamo con la funzione ϕ . Ora, notiamo che se $\mathbf{x} \in \partial A$ è un massimo o un minimo per la f vincolata su ∂A , cioè se $\mathbf{x}$ è un massimo o minimo **vincolato** (tramite ∂A) per f , risulta

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{u}} = 0$$

cioè il gradiente di f in $\mathbf{x}$ è **normale al vincolo**.

Il teorema dei moltiplicatori di Lagrange

Consideriamo ora un generico vincolo compatibile col dominio assegnato a f , che sia espresso in forma implicita. Sia cioè G , il vincolo, dato dal luogo di zeri della $F(\mathbf{x})$, con $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ di classe $\mathcal{C}^1$, con $m \leq n$.

Il rango della matrice jacobiana di F sia massimo sul dominio, dunque pari a m . In tal caso determiniamo l'insieme delle parametrizzazioni locali (carte) di G tramite il teorema delle funzioni implicite. I punti di minimo o massimo di f sul vincolo G avranno gradiente ortogonale allo spazio tangente al vincolo, per le considerazioni esposte prima. Ne deriva che, in tali punti, il gradiente di f appartiene allo spazio ortogonale al vincolo. Cioè in tali punti $\mathbf{x}_0$, esisteranno m moltiplicatori reali $\lambda_i, i \in J_m$, tali che

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) + \lambda_1 \nabla F_1(\mathbf{x}_0) + \dots + \lambda_m \nabla F_m(\mathbf{x}_0) = 0$$

essendo $\{\nabla F_i(\mathbf{x}_0)\}_{i \in J_m}$ base dello spazio normale al vincolo¹ in $\mathbf{x}_0$.

Se ne conclude che i massimi e i minimi vincolati di f si **dovranno ricercare tra le soluzioni** del sistema di $n + m$ equazioni in $n + m$ incognite

$$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{x}) + \lambda_1 \nabla F_1(\mathbf{x}) + \dots + \lambda_m \nabla F_m(\mathbf{x}) & = 0 \\ F_1(\mathbf{x}) & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ F_m(\mathbf{x}) & = 0 \end{cases}$$

In definitiva,

Teorema III.8 (dei moltiplicatori di Lagrange)

Sia $F : \mathbb{R}^n \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}^m$, di classe $\mathcal{C}^1$ con $n \geq m$ e $\text{rk } J_F(A) = m$. Posto G il luogo di zeri di F , consideriamo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, vincolata a G . Se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ è un punto di massimo o minimo

¹ Per il problema della parametrizzazione e dello studio degli spazi tangenti e normali a una sottovarietà regolare si veda **Alberto Maggi: Meccanica Razionale**, ed. **Tortuga Publisher**, capitolo I

vincolato per f allora esiste una m -upla $\boldsymbol{\lambda} \equiv (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ tale che $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ risolve

$$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{x}) + \lambda_1 \nabla F_1(\mathbf{x}) + \dots + \lambda_m \nabla F_m(\mathbf{x}) & = 0 \\ F_1(\mathbf{x}) & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ F_m(\mathbf{x}) & = 0 \end{cases}$$

cioè $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ è un punto stazionario libero per

$$H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \lambda_1 F_1(\mathbf{x}) + \dots + \lambda_m F_m(\mathbf{x})$$

definita in $G \times \mathbb{R}^m$ a valori in $\mathbb{R}$.

Equazioni differenziali ordinarie

In questo capitolo studieremo le equazioni differenziali ordinarie negli spazi $\mathbb{R}^n$. Dopo aver presentato i teoremi di esistenza e unicità locale e globale, ci occuperemo della risoluzione delle equazioni differenziali lineari, introducendo l'esponenziale di matrici. Infine, torneremo su problemi di carattere generale con alcuni risultati complementari, eppure di grande utilità in Meccanica Analitica, quali il teorema di rettificazione, e i teoremi sulla continuità e la differenziabilità del flusso.

IV.1 Introduzione

IV.1.1 Notazioni e terminologia

Spazio delle fasi e flusso di fase

Le equazioni differenziali ordinarie rappresentano il modello matematico di un qualunque processo dinamico **deterministico**. Assegnato un conveniente insieme (**spazio delle fasi**) costituito da tutti i possibili punti rappresentativi delle configurazioni di un sistema, un processo che abbia carattere deterministico è tale che a ogni punto rappresentativo, per ogni istante iniziale, è associato univocamente il suo **evoluto** secondo il processo a un istante finale fissato. Cioè un processo deterministico è tale da definire nello spazio delle fasi l'**operatore di avanzamento temporale** in t che al punto $\mathbf{x}$ all'istante t_0 fa corrispondere il punto $\mathbf{y}$ rappresentativo del sistema all'istante t :

$$\Phi_{t_0}^t : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$$

Posto $t_0 = 0$ possiamo scrivere brevemente $\Phi_{t_0}^t = \Phi^t$ e ottenere subito che l'avanzamento temporale è un **gruppo a un parametro di trasformazioni** dello spazio delle fasi:

$$\begin{aligned}\Phi^0 &= I \\ \Phi^{t+s} &= \Phi^t \Phi^s\end{aligned}$$

Inoltre fissato $\mathbf{x}$ l'applicazione $\Phi^t(\mathbf{x})$ al passare del tempo descrive nello spazio delle fasi un'**orbita** del sistema o **curva di fase**. L'insieme delle curve di fase si dice **flusso di fase**. Riassumendo, posto M un insieme arbitrario:

Definizione IV.1 Una famiglia di applicazioni $\{\Phi^t\}$ di un insieme M in sé, numerata dall'insieme reale, $t \in \mathbb{R}$, si dice gruppo a un parametro di trasformazioni di M , se

$$\begin{aligned}\Phi^0 &= I \\ \Phi^{t+s} &= \Phi^t \Phi^s\end{aligned}$$

Definizione IV.2 Si dice flusso di fase una coppia $(M, \{\Phi^t\})$ costituita da un insieme e da un gruppo a un parametro di trasformazioni su di esso. L'insieme M si dice spazio delle fasi del flusso e i suoi punti si dicono punti rappresentativi.

Definizione IV.3 Si definisce moto di un punto rappresentativo $\mathbf{x} \in M$ per effetto del flusso di fase,

l'applicazione dall'asse reale nello spazio delle fasi

$$\begin{aligned}\varphi &: \mathbb{R} \rightarrow M \\ t &\mapsto \Phi^t(\mathbf{x})\end{aligned}$$

l'immagine del moto si dice curva di fase.

Definizione IV.4 Si definisce punto di equilibrio del sistema un punto rappresentativo che è esso stesso curva di fase.

Definizione IV.5 Il prodotto diretto $\mathbb{R} \times M$ si dice spazio delle fasi allargato al tempo e il grafico del moto φ in tale spazio si dice curva integrale.

Equazioni differenziali

Nel prodotto diretto di un aperto Ω di uno spazio euclideo di dimensione finita e un intervallo della retta reale J , sia dato un campo vettoriale continuo $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$. Esso definisce un'equazione differenziale ordinaria

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}), (t, \mathbf{x}) \in J \times \Omega$$

Il dominio Ω è detto **spazio delle fasi**. Mentre un'applicazione $\mathcal{C}^1 \varphi : J \rightarrow \Omega$, è **soluzione dell'equazione differenziale** se per ogni $\tau \in J$

$$\frac{d\varphi}{dt}(\tau) = \mathbf{v}(\tau, \varphi(\tau))$$

L'immagine di una soluzione è detta curva di fase.

Definizione IV.6 Il problema di Cauchy consiste nel trovare una soluzione $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, \Omega)$ dell'equazione differenziale definita in $J \times \Omega$, $J \subseteq \mathbb{R}$ e Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, dal campo continuo $\mathbf{v}$, talché fissato un istante $t_0 \in J$ e un punto $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, valga $\varphi(t_0) = \mathbf{x}_0$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (\text{P})$$

φ si dice soluzione del problema di Cauchy.

Se mostriamo che per ogni problema di Cauchy si ha esistenza e unicità della soluzione, ricaviamo che l'equazione differenziale definisce nello spazio Ω una applicazione di avanzamento temporale che è un gruppo a un parametro. Allora l'equazione differenziale avrà definito sullo spazio delle fasi Ω un flusso di fase le cui curve integrali sono le soluzioni del problema di Cauchy.

IV.2 Esistenza e unicità locale

IV.2.1 Equazione integrale di Volterra

Dal problema di Cauchy all'equazione di Volterra

Consideriamo il problema di Cauchy che richiameremo sinteticamente come (P). Sia $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, \Omega)$ una sua soluzione. Allora

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = \mathbf{v}(t, \varphi(t))$$

definiamo la funzione $f : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $f(t) = \mathbf{v}(t, \varphi(t))$. Come composizione di funzioni continue essa è continua; d'altra parte non ci vuole nulla a vederlo direttamente: sia $t \in J$ e sia $\{t_\nu\} \subseteq J$ convergente a t . Per continuità di φ si ha che $\varphi(t_\nu) \rightarrow \varphi(t)$, allora la successione a valori in $\Omega \{((t_\nu), \varphi(t_\nu))\}$ converge a $(t, \varphi(t))$ e per continuità di $\mathbf{v}$ la successione $f(t_\nu) = \mathbf{v}(t_\nu, \varphi(t_\nu)) \rightarrow \mathbf{v}(t, \varphi(t))$. Dunque,

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t),$$

applicando componente per componente il teorema fondamentale del calcolo si perviene alla

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau \\ &= \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\tau, \varphi(\tau)) d\tau\end{aligned}$$

ricordando (P) si ha

$$\varphi(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\tau, \varphi(\tau)) d\tau.$$

Definizione IV.7 Dato in $J \times \Omega$, $J \subseteq \mathbb{R}$ e Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, il campo vettoriale continuo $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ e preso $(t_0, \mathbf{x}_0) \in J \times \Omega$, si definisce equazione integrale di Volterra la seguente

$$\varphi(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \quad (\text{V})$$

nell'incognita $\varphi \in \mathcal{C}^0(J, \Omega)$.

Lemma IV.1 Se $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, \Omega)$ risolve il problema di Cauchy (P) allora risolve l'equazione di Volterra (V).

Dall'equazione di Volterra al problema di Cauchy

Sia $\varphi \in \mathcal{C}^0(J, \Omega)$ soluzione di (V) allora si ha, posto $f(t) = \mathbf{v}(t, \varphi(t))$ continua per quanto visto prima,

$$\varphi(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$$

e immediatamente $\varphi(t_0) = \mathbf{x}_0$. D'altra parte dal teorema fondamentale del calcolo integrale si ha, derivando ambo i membri,

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t)$$

per cui φ è di classe $\mathcal{C}^1$ e la sua derivata eguaglia in J $\mathbf{v}(t, \varphi(t))$. Infine φ soluzione dell'equazione di Volterra risolve il problema di Cauchy.

Teorema IV.1 L'equazione di Volterra e il problema di Cauchy sono equivalenti. In altre parole, se $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, \Omega)$ risolve (P) allora risolve (V), viceversa se $\varphi \in \mathcal{C}^0(J, \Omega)$ risolve (V) allora è di classe $\mathcal{C}^1$ e risolve (P).

IV.2.2 Il teorema di Cauchy e Lipschitz

L'equivalenza del problema di Cauchy con quello di Volterra, suggerisce di cercare la soluzione dell'equazione differenziale come punto fisso dell'operatore $u \mapsto \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\tau, u(\tau)) d\tau$. Nel proseguo della trattazione stabiliamo fissate le ipotesi di cui alla definizione di problema di Cauchy (P).

Caso unidimensionale

Seppure del tutto analoghi i casi unidimensionale e multidimensionale, per semplicità preferiamo dimostrare a parte il primo. Si può comunque passare direttamente alla dimostrazione del secondo. Allora il nostro spazio delle fasi sarà l'intervallo $I \equiv (c, d)$ e il campo di velocità continuo sarà $v(t, x)$ definito su $J \times I$, con $J \equiv (a, b)$. Il problema di Cauchy si riduce a determinare $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, I)$ tale che

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt}(t) &= v(t, \varphi(t)) \\ \varphi(t_0) &= x_0\end{aligned}$$

con $(t_0, x_0) \in J \times I$. La corrispondente soluzione dell'equazione di Volterra sarà $\varphi \in \mathcal{C}^0(J, I)$ tale che

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(\tau, \varphi(\tau)) d\tau$$

Vale allora il fondamentale

Teorema IV.2
(di esistenza
e unicità
locale, Cauchy-
Lipschitz)

Sia A aperto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e $v \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{R})$. Sia v lipschitziano nella seconda variabile, cioè esista $K \in \mathbb{R}^+$ tale che, per ogni $(t, x_1), (t, x_2) \in A$

$$|v(t, x_1) - v(t, x_2)| \leq K |x_1 - x_2|.$$

Allora esiste l'intervallo $J \equiv (t_0 - r_0, t_0 + r_0)$ per cui esiste ed è unica $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, I)$ tale che $J \times I \subseteq A$ e φ è soluzione del problema di Cauchy definito dal campo $v(t, x)$ su $J \times I$ e dal dato iniziale $(t_0, x_0) \in A$.

Dimostrazione

Siccome A è aperto in $\mathbb{R}^2$ esiste un rettangolo $R \equiv [t_0 - r_1, t_0 + r_1] \times I$, con $I = [x_0 - r_2, x_0 + r_2]$, centrato sul dato iniziale tutto contenuto in A . Sia allora $r_0 \leq r_1$ e consideriamo l'applicazione sulle funzioni in $\mathcal{C}^0(J)$

$$T(u) t = x_0 + \int_{t_0}^t v(\tau, u(\tau)) d\tau$$

Abbiamo subito che se esiste il punto fisso di tale applicazione e ha immagine inclusa in I , esso è anche soluzione dell'equazione di Volterra e perciò del problema di Cauchy.

Se mostriamo che T è una contrazione dello spazio $\mathcal{C}^0(J, I) = X \equiv \{u \in \mathcal{C}_B^0(J) \mid \|u - x_0\|_\infty \leq r_2\}$ e se mostriamo che tale spazio è completo, per il lemma delle contrazioni, abbiamo la tesi del teorema di Cauchy e Lipschitz.

È presto visto che X è completo. Infatti, esso è sottoinsieme di $\mathcal{C}_B^0(J)$ che è completo nella metrica uniforme. Basta adesso vedere che è chiuso. A tale scopo consideriamo una successione $\{u_n\}$ a valori in X e convergente uniformemente a $\bar{u} \in \mathcal{D}X \subseteq (\mathcal{C}_B^0(J), \|\cdot\|_\infty)$. Si ha, per ogni intero

$$\|u_n - x_0\|_\infty \leq r_2$$

e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ per cui, se $n > \nu$,

$$\|u_n - \bar{u}\|_\infty < \varepsilon$$

dalla disuguaglianza triangolare

$$\|\bar{u} - x_0\|_\infty < r_2 + \varepsilon$$

per arbitrarietà di ε , $\|\bar{u} - x_0\|_\infty < r_2$. Ne deriva che $\bar{u} \in X$ e perciò quest'ultimo è chiuso e dunque completo.

Come si vede ciò che ancora non è stato fissato è r_0 , dobbiamo restringerlo opportunamente in modo da ottenere che T sia una trasformazione contrattiva.

In primo luogo facciamo in modo che $T(u) \in \mathcal{C}^0(J, I)$. Siccome v è continua, $|v|$ ammetterà, teorema di Weierstraß, massimo M su $J \times I$. Allora

$$|T(u) t - x_0| = \left| \int_{t_0}^t v(\tau, u(\tau)) d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |v(\tau, u(\tau))| d\tau \right| \leq M |t - t_0| \leq M r_0$$

basterà scegliere $M r_0 \leq r_2$, cioè $r_0 \leq r_2/M$.

Imponiamo che T sia una contrazione,

$$\begin{aligned} |T(u_1) - T(u_2)|(t) &= \left| \int_{t_0}^t [v(\tau, u_1(\tau)) - v(\tau, u_2(\tau))] d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |v(\tau, u_1(\tau)) - v(\tau, u_2(\tau))| d\tau \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t K |u_1(\tau) - u_2(\tau)| d\tau \right| \leq K \|u_1 - u_2\|_\infty r_0 \end{aligned}$$

da cui

$$\|T(u_1) - T(u_2)\|_\infty \leq K r_0 \|u_1 - u_2\|_\infty$$

e deve essere $K r_0 < 1$ da cui $r_0 < 1/K$.

Per avere la tesi basterà allora scegliere

$$r_0 < \min \left\{ r_1, \frac{r_2}{M}, \frac{1}{K} \right\}.$$

(c.v.d.)

Caso multi-
dimensionale
(Sistemi di
equazioni
differenziali)

Come detto il caso multidimensionale è del tutto analogo a quello unidimensionale, salvo lavorare in un aperto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ e sostituire al valore assoluto il significato di $\|\cdot\|_m$. In ogni caso, per chiarezza la replichiamo.

Teorema IV.3
(di esistenza
e unicità
locale, Cauchy-
Lipschitz)

Sia A aperto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{v} \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{R}^m)$. Sia $\mathbf{v}$ lipschitziano nella seconda variabile, cioè esista $K \in \mathbb{R}^+$ tale che, per ogni $(t, \mathbf{x}_1), (t, \mathbf{x}_2) \in A$

$$\|\mathbf{v}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{v}(t, \mathbf{x}_2)\|_m \leq K \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_m.$$

Allora esiste l'intervallo $J \equiv (t_0 - r_0, t_0 + r_0)$ per cui esiste ed è unica $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, \Omega)$, Ω aperto in $\mathbb{R}^m$, tale che $J \times \Omega \subseteq A$ e φ è soluzione del problema di Cauchy definito dal campo $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ su $J \times \Omega$ e dal dato iniziale $(t_0, \mathbf{x}_0) \in A$.

Dimostrazione

Siccome A è aperto in $\mathbb{R}^{m+1}$ esiste il cilindro $R \equiv [t_0 - r_1, t_0 + r_1] \times \Omega$, con $\Omega \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_m \leq r_2\}$ centrato sul dato iniziale tutto contenuto in A . Sia allora $r_0 \leq r_1$ e consideriamo l'applicazione sulle funzioni in $\mathcal{C}^0(J)$

$$T(\mathbf{u})t = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\tau, \mathbf{u}(\tau)) d\tau$$

Abbiamo subito che se esiste il punto fisso di tale applicazione e ha immagine inclusa in Ω , esso è anche soluzione dell'equazione di Volterra e perciò del problema di Cauchy.

Se mostriamo che T è una contrazione dello spazio $\mathcal{C}^0(J, \Omega) = X \equiv \{\mathbf{u} \in \mathcal{C}_B^0(J) \mid \|\mathbf{u} - \mathbf{x}_0\|_\infty \leq r_2\}$ per il lemma delle contrazioni, abbiamo la tesi del teorema di Cauchy e Lipschitz. Infatti X è chiuso e dunque completo.

Consideriamo una successione $\{\mathbf{u}_n\}$ a valori in X e convergente uniformemente a $\bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{D}X \subseteq (\mathcal{C}_B^0(J), \|\cdot\|_\infty)$. Si ha, per ogni intero

$$\|\mathbf{u}_n - \mathbf{x}_0\|_\infty \leq r_2$$

e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ per cui, se $n > \nu$,

$$\|\mathbf{u}_n - \bar{\mathbf{u}}\|_\infty < \varepsilon$$

dalla disuguaglianza triangolare

$$\|\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{x}_0\|_\infty < r_2 + \varepsilon$$

per arbitrarietà di ε , $\|\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{x}_0\|_\infty < r_2$. Ne deriva che $\bar{\mathbf{u}} \in X$ e perciò quest'ultimo è chiuso e dunque completo.

Restringiamo opportunamente r_0 in modo da ottenere che T sia una trasformazione contrattiva.

In primo luogo facciamo in modo che $T(\mathbf{u}) \in X$. Siccome $\mathbf{v}$ è continuo, $\|\mathbf{v}\|_m$ ammetterà, teorema di Weierstraß, massimo M su $J \times \Omega$. Allora

$$\begin{aligned} |T(\mathbf{u})_i t - \mathbf{x}_{0i}| &= \left| \int_{t_0}^t \mathbf{v}_i(\tau, \mathbf{u}(\tau)) d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |\mathbf{v}_i(\tau, \mathbf{u}(\tau))| d\tau \right| \leq M |t - t_0| \leq Mr_0 \\ \|T(\mathbf{u}) - \mathbf{x}_0\|_m &\leq \left(\sum_{i=1}^m (Mr_0)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{m}Mr_0 \end{aligned}$$

basterà scegliere $\sqrt{m}Mr_0 \leq r_2$, cioè $r_0 \leq r_2/(\sqrt{m}M)$.

Imponiamo che T sia una contrazione,

$$\begin{aligned} |T(\mathbf{u}_1)_i - T(\mathbf{u}_2)_i|(t) &= \left| \int_{t_0}^t [\mathbf{v}_i(\tau, \mathbf{u}_1(\tau)) - \mathbf{v}_i(\tau, \mathbf{u}_2(\tau))] d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |\mathbf{v}_i(\tau, \mathbf{u}_1(\tau)) - \mathbf{v}_i(\tau, \mathbf{u}_2(\tau))| d\tau \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t K \|\mathbf{u}_1(\tau) - \mathbf{u}_2(\tau)\|_m d\tau \right| \leq K \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_\infty r_0 \end{aligned}$$

da cui

$$\|T(\mathbf{u}_1) - T(\mathbf{u}_2)\|_\infty \leq K\sqrt{m}r_0 \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_\infty$$

e deve essere $\sqrt{m}Kr_0 < 1$ da cui $r_0 < 1/(K\sqrt{m})$.

Per avere la tesi basterà allora scegliere

$$(c.v.d.) \quad r_0 < \min \left\{ r_1, \frac{r_2}{\sqrt{m}M}, \frac{1}{\sqrt{m}K} \right\}.$$

Osservazione IV.1 Sia $\mathbf{v}$ di classe $\mathcal{C}^k$ allora φ , soluzione del problema di Cauchy associato, è di classe $\mathcal{C}^{k+1}$. Procediamo per induzione. Se $k = 0$ allora φ è di classe $\mathcal{C}^1$. Sia $\mathbf{v}$ di classe $\mathcal{C}^{k-1}$ allora φ è di classe $\mathcal{C}^k$. Se $\mathbf{v}$ è di classe $\mathcal{C}^k$, è pure di classe $\mathcal{C}^{k-1}$ e φ è di classe $\mathcal{C}^k$, ma $\dot{\varphi} = \mathbf{v}(t, \varphi(t)) \equiv f(t)$, siccome $\mathbf{v}$ e φ sono di classe $\mathcal{C}^k$, anche f (composizione di funzioni $\mathcal{C}^k$) è $\mathcal{C}^k$. Infine, $\dot{\varphi}$ è di classe $\mathcal{C}^k$ e φ è $\mathcal{C}^{k+1}$.

IV.2.3 Osservazioni e complementi

Equazioni differenziali di ordine superiore

Consideriamo l'equazione

$$u^{(m)} = f(t, u, \dot{u}, \dots, u^{(m-1)})$$

con f definita su $\mathbb{R} \times \Omega$, quest'ultimo, aperto di $\mathbb{R}^{m-1}$, continua sul dominio e lipschitziana rispetto alla seconda variabile. Fissato il dato iniziale

$$\begin{cases} u(t_0) = u_0 \\ \vdots \\ u^{(m-1)}(t_0) = u_{m-1} \end{cases}$$

la soluzione del nuovo problema ammette una e una sola soluzione in un intervallo di tempo sufficientemente piccolo centrato intorno a t_0 . Per vederlo basta operare le seguenti sostituzioni

$$\begin{cases} v_1(t) \equiv u(t) \\ \vdots \\ v_m(t) \equiv u^{(m-1)}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{v}_1(t) = v_2(t) \\ \vdots \\ \dot{v}_{m-1}(t) = v_m(t) \\ \dot{v}_m(t) = f(t, \mathbf{v}) \end{cases}$$

e risolvere il problema di Cauchy con $\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0 \equiv (u_0, \dots, u_{m-1})$.

L'algoritmo di Volterra-Picard e il teorema di Peano

Abbiamo trovato la soluzione del problema di Cauchy come punto fisso della trasformazione T . Alternativamente, si può dire che φ è il limite uniforme, se esiste, del processo dinamico (**algoritmo di Volterra Picard**) nello spazio $\mathcal{C}^0(J)$, J da determinare, dato da

$$\begin{cases} \mathbf{u}_0(t) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}_n(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\tau, \mathbf{u}_{n-1}(\tau)) d\tau \end{cases}$$

Infatti se il limite esiste poniamo

$$\varphi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{u}_n$$

ma allora,

$$\varphi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{u}_{n-1} = \mathbf{x}_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\tau, \mathbf{u}_{n-1}(\tau)) d\tau$$

ma $g_n \equiv \mathbf{v}(\cdot, \mathbf{u}_{n-1})$ converge uniformemente a $g \equiv \mathbf{v}(\cdot, \varphi)$. Dimostriamolo, senza far uso della lipschitzianità di $\mathbf{v}$. Ora, $\mathbf{v} \in \mathcal{C}^0(J \times \Omega)$, con $J \times \Omega$ compatto, dunque, dal teorema dell'uniforme continuità, $\mathbf{v}$ è uniformemente continua. Dunque, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon)$, per cui

$$\|(t_1, \mathbf{u}_1) - (t_2, \mathbf{u}_2)\|_{m+1} < \delta \Rightarrow \|\mathbf{v}(t_1, \mathbf{u}_1) - \mathbf{v}(t_2, \mathbf{u}_2)\|_m < \varepsilon$$

abbiamo ammesso che esista il limite di $\mathbf{u}_n$ perciò, in corrispondenza di $\delta(\varepsilon)$ troviamo, per

completezza, $\nu = (\varepsilon)$, per cui

$$n > k \geq \nu \Rightarrow \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_k\|_\infty < \delta$$

Allora, per ogni tempo

$$\|\mathbf{v}(t, \mathbf{u}_n) - \mathbf{v}(t, \mathbf{u}_k)\|_m < \varepsilon$$

sicché $g_n = \mathbf{v}(\cdot, \mathbf{u}_n)$ è di Cauchy e perciò converge uniformemente. Il limite puntuale delle $g_n(t)$ è, per continuità di $\mathbf{v}$, g , perciò esso è anche limite uniforme.

Dunque, per il teorema di passaggio del limite sotto il segno di integrale, avremo

$$\varphi(t) = \mathbf{x}_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\tau, \varphi(\tau)) d\tau$$

Per poter usare opportunamente l'algoritmo dovremmo preliminarmente dimostrare che a ogni passo $(t, \mathbf{u}_n(t))$ rimane in A . Per far ciò si procede per induzione e si giunge a buon fine posto, come nella dimostrazione del teorema di esistenza e unicità, $r_0 < \min\left\{r_1, \frac{r_2}{\sqrt{m}M}\right\}$. Ora, ripresa l'ipotesi (per ora accantonata) di lipschitzianità, possiamo riscrivere la $\mathbf{u}_n$ come

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{x}_0 + \sum_{j=1}^n (\mathbf{u}_j(t) - \mathbf{u}_{j-1}(t))$$

sicché ci basterà discutere la convergenza della serie $\sum_{j=1}^n (\mathbf{u}_j(t) - \mathbf{u}_{j-1}(t))$ per pervenire al teorema di esistenza. Notiamo che

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_0(t)\|_m &= \|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{x}_0\|_m \leq \tilde{M}(t - t_0) \\ \|\mathbf{u}_2(t) - \mathbf{u}_1(t)\|_m &= \left\| \int_{t_0}^t [\mathbf{v}(\tau, \mathbf{u}_1(\tau)) - \mathbf{v}(\tau, \mathbf{u}_0(\tau))] d\tau \right\|_m \leq \tilde{K} \int_{t_0}^t \|\mathbf{u}_1(\tau) - \mathbf{u}_0(\tau)\|_m d\tau \leq \\ &\leq \tilde{K} \tilde{M} \frac{(t - t_0)^2}{2} \\ &\vdots \\ \|\mathbf{u}_n(t) - \mathbf{u}_{n-1}(t)\|_m &\leq \tilde{K}^{n-1} \tilde{M} \frac{(t - t_0)^n}{n!} \end{aligned}$$

Vediamo allora che si ha convergenza totale della serie e perciò convergenza

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}\|_\infty \leq \frac{\tilde{M}}{\tilde{K}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tilde{K}r_0)^n}{n!} = \frac{\tilde{M}}{\tilde{K}} (e^{\tilde{K}r_0} - \tilde{K})$$

ritroviamo così per altra via il risultato di esistenza incluso nel teorema di Cauchy e Lipschitz. Il metodo è in realtà interessante perché consente di mostrare l'esistenza della soluzione nel caso si torni a togliere a $\mathbf{v}$ l'ipotesi di lipschitzianità. In effetti per procedere alla dimostrazione del nuovo teorema (**teorema di Peano**) si deve ricorrere al **teorema di Ascoli e Arzelà** che non abbiamo visto. Si dimostra cioè che la successione $\mathbf{u}_n$ è **uniformemente limitata** ($\forall n, t \|\mathbf{u}_n\|_m \leq L$) ed **equicontinua** ($\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \|\mathbf{u}_n(t) - \mathbf{u}_n(t')\|_m < \varepsilon$ se $|t - t'| < \delta \forall n$), sicché (qui interviene il teorema di Ascoli-Arzelà) $\mathbf{u}_n$ converge uniformemente. L'equilimitatezza si ha subito:

$$\|\mathbf{u}_n\|_\infty \leq \mathbf{x}_0 + \sqrt{m}Mr_0$$

Per l'equicontinuità, si deve mostrare che per ogni n

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |t - t'| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{u}_n(t) - \mathbf{u}_n(t')\| < \varepsilon$$

Allo scopo si calcola

$$\|\mathbf{u}_n(t) - \mathbf{u}_n(t')\| = \left\| \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\tau, \mathbf{u}_n(\tau)) d\tau - \int_{t_0}^{t'} \mathbf{v}(\tau, \mathbf{u}_n(\tau)) d\tau \right\| = \left\| \int_t^{t'} \mathbf{v}(\tau, \mathbf{u}_n(\tau)) d\tau \right\| \leq \sqrt{m}M |t - t'|$$

se si sceglie

$$\delta < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}M}$$

valida indipendentemente da n . Abbiamo dunque dimostrato il

Teorema IV.4
(di esistenza
di Peano)

Sia A aperto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{v} \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{R}^m)$. Allora esiste l'intervallo $J \equiv (t_0 - r_0, t_0 + r_0)$ per cui esiste ed è unica $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, \Omega)$, Ω aperto in $\mathbb{R}^m$, tale che $J \times \Omega \subseteq A$ e φ è soluzione del problema di Cauchy definito dal campo $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ su $J \times \Omega$ e dal dato iniziale $(t_0, \mathbf{x}_0) \in A$.

IV.3 Prolungabilità delle soluzioni

IV.3.1 Prolungamenti e soluzioni massimali

**Definizioni e
prime proprietà**

Ci porremo, d'ora in poi, nelle ipotesi del teorema di esistenza e unicità di Cauchy e Lipschitz. Nella sezione precedente abbiamo visto che la soluzione esiste ed è unica in un piccolo intorno del dato iniziale. Adesso vogliamo vedere se è possibile prolungarla fino a ottenere la soluzione definita sul più ampio intervallo di tempo possibile.

Definizione IV.8 Siano $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ soluzioni dell'equazione $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{u})$, negli intervalli, rispettivamente $J_1 \equiv (a_1, b_1)$ e $J_2 \equiv (a_2, b_2)$. Diremo che $(J_2, \mathbf{u}_2)$ è un prolungamento di $(J_1, \mathbf{u}_1)$ se $J_1 \subseteq J_2$ e $\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}_2(t) \forall t \in J_1$.

Definizione IV.9 $(J, \mathbf{u})$ è una soluzione massimale dell'equazione $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{u})$ se non ammette nessun prolungamento.

Affinché $(J_2, \mathbf{u}_2)$ sia un prolungamento di $(J_1, \mathbf{u}_1)$, se $J_1 \subseteq J_2$, è sufficiente che $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ in un solo punto di J_1 . Vale infatti

Lemma IV.2 Siano $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ soluzioni dell'equazione $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{u})$ nell'intervallo (a, b) . Se esiste un punto $\bar{t} \in (a, b)$ talché $\mathbf{u}_1(\bar{t}) = \mathbf{u}_2(\bar{t})$ si ha che $\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}_2(t)$ per ogni $t \in (a, b)$.

Dimostrazione Sia E l'insieme dei punti contenuti in $(\bar{t}, b)$ tali che $\mathbf{u}_1(t) \neq \mathbf{u}_2(t)$. Sia, per assurdo, E non vuoto. Allora ammette estremo inferiore $t_0 \geq \bar{t}$. Se $\bar{t} = t_0$ si ha $\mathbf{u}_1(t_0) = \mathbf{u}_2(t_0)$. Altrimenti si ha $\bar{t} < t_0$ e in ogni punto t dell'intervallo $[\bar{t}, t_0[$ risulta $\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}_2(t)$. Prendiamo una successione t_ν in $[\bar{t}, t_0[$ tendente a t_0 si ha, per ogni $\nu \in \mathbb{N}$

$$(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)(t_\nu) = 0$$

passando al limite, per continuità di $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, si ha, ancora, $\mathbf{u}_1(t_0) = \mathbf{u}_2(t_0)$.

D'altra parte per il teorema di esistenza e unicità $\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}_2(t)$ in un intorno di t_0 sicché (c.v.d.) $t_0 \neq \inf E$, assurdo.

Si ha allora il seguente

Corollario IV.1 Se $(J_1, \mathbf{u}_1)$ e $(J_2, \mathbf{u}_2)$ risolvono il problema di Cauchy (P) e $J_1 \subseteq J_2$, allora $(J_2, \mathbf{u}_2)$ è un prolungamento di $(J_1, \mathbf{u}_1)$.

**Esistenza
delle soluzioni
massimali**

Veniamo a dimostrare l'esistenza delle soluzioni massimali

Teorema IV.5 Per ogni soluzione $(J, \mathbf{u})$ esiste un prolungamento massimale.

Dimostrazione Sia $\mathcal{U}$ l'insieme di tutti i prolungamenti di $(J, \mathbf{u})$. Ogni $\mathbf{w} \in \mathcal{U}$ è definita su un intervallo $J_w = (a_w, b_w)$ contenente J . Inoltre se $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathcal{U}$ esse coincidono in J e perciò in tutto $J_{w_1} \cap J_{w_2}$.

Siano

$$a \equiv \inf_{\mathbf{w} \in \mathcal{U}} J_w \text{ e } b \equiv \sup_{\mathbf{w} \in \mathcal{U}} J_w$$

Se $t \in (a, b)$ allora esiste $\mathbf{w} \in \mathcal{U}$ talché $t \in J_w$, perciò poniamo

$$\bar{\mathbf{u}}(t) \equiv \mathbf{w}(t)$$

La definizione data individua univocamente la $\bar{\mathbf{u}}$. Infatti, se esiste $\bar{\mathbf{w}}$ talché $t \in J_{\bar{w}}$, $t \in J_w \cap J_{\bar{w}}$ per cui $\mathbf{w}(t) = \bar{\mathbf{w}}(t)$. $\bar{\mathbf{u}}$ è definita su $\bar{J} = (a, b)$ con $J \subseteq \bar{J}$. Se mostriamo che $\bar{\mathbf{u}}$ è soluzione del problema di Cauchy, abbiamo terminato.

Ora, se $\tau \in J_w$, risulta $\bar{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{w}(t)$, per ogni $t \in J_w$, allora

(c.v.d.)
$$\bar{\mathbf{u}}(\tau) = \dot{\mathbf{w}}(\tau) = \mathbf{v}(\tau, \mathbf{w}(\tau)) = \mathbf{v}(\tau, \bar{\mathbf{u}}(\tau)).$$

IV.3.2 Prolungabilità e fuga dai compatti

Prolungabilità di una soluzione

Vogliamo vedere ora in quali casi la soluzione è effettivamente prolungabile. Cominciamo col premettere il semplice

Lemma IV.3 *Sia $\mathbf{u}(t)$ continua nell'intervallo (a, b) e derivabile in $(a, b) \setminus \{t_0\}$. Se esiste finito*

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \dot{\mathbf{u}}(t) = \boldsymbol{\lambda}$$

allora $\mathbf{u}$ è derivabile in t_0 e la sua derivata vale ivi $\boldsymbol{\lambda}$.

Dimostrazione Per il teorema (II.16) di Lagrange sussiste la relazione

$$\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t_0) = d\mathbf{u}(\tau)(t - t_0) = \dot{\mathbf{u}}(\tau)(t - t_0)$$

con $t_0 < \tau < t$. Se $t \neq t_0$

$$\frac{\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t_0)}{t - t_0} = \dot{\mathbf{u}}(\tau)$$

(c.v.d.) passando al limite per $t \rightarrow t_0$, il secondo membro, per il teorema di cambio di variabile, tende a $\boldsymbol{\lambda}$, (essendo $\tau \rightarrow t_0$) mentre il primo è la derivata di $\mathbf{u}$ in t_0 .

Corollario IV.2 *Sia $\mathbf{u}(t)$ una funzione continua in (a, b) e sia $t_0 \in (a, b)$. Supponiamo che $\mathbf{u}$ sia soluzione dell'equazione $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{u})$ negli intervalli aperti $]a, t_0[$ e $]t_0, b[$. Se $(t_0, \mathbf{u}(t_0)) \in A$, allora $\mathbf{u}(t)$ è soluzione su $]a, b[$.*

Dimostrazione Per ogni $t \neq t_0$ risulta $\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{v}(t, \mathbf{u}(t))$, perciò basta verificare che $\mathbf{u}$ è derivabile in t_0 e la derivata soddisfa ivi la prescrizione $\mathbf{v}$. Abbiamo

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \dot{\mathbf{u}}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{v}(t, \mathbf{u}(t)) = \mathbf{v}(t_0, \mathbf{u}(t_0))$$

(c.v.d.) grazie al lemma, la tesi.

Sfruttiamo il corollario per mostrare la possibilità del prolungamento in un caso particolare. Sia $\mathbf{y}(t)$ soluzione dell'equazione differenziale nell'intervallo $]a, b[$ e risulti

$$\lim_{t \rightarrow b} \mathbf{y}(t) = \mathbf{x}_0$$

Supponiamo di avere $(b, \mathbf{x}_0) \in A$. Allora è possibile, teorema di Cauchy-Lipschitz, trovare $\mathbf{w}(t)$ soluzione dell'equazione differenziale con dato iniziale $(b, \mathbf{x}_0)$ estesa fino all'istante $b + r_0$. Consideriamo allora la funzione

$$\mathbf{x}(t) = \begin{cases} \mathbf{y}(t) & t \in]a, b[\\ \mathbf{w}(t) & t \in]b, b + r_0[\end{cases}$$

che risulta continua sul dominio e tale che $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$. Siccome $(b, \mathbf{x}_0) \in A$, $\mathbf{x}$ si trova nelle ipotesi del corollario precedente ed è perciò soluzione dell'equazione differenziale. Come si vede $\mathbf{x}$ rappresenta un **prolungamento futuro** di $\mathbf{y}$ (e uno passato di $\mathbf{w}$)

Si ha di più

Teorema IV.6 Sia $\mathbf{u}(t)$ una soluzione dell'equazione differenziale $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{u})$ nell'intervallo (a, b) . Supponiamo che esista una successione $\{t_\nu\}$ crescente convergente al punto b tale che

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathbf{u}(t_\nu) = \mathbf{u}_0$$

e che $(b, \mathbf{u}_0) \in A$. Allora risulta

$$\lim_{t \rightarrow b} \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0$$

e dunque $\mathbf{u}(t)$ ammette prolungamento futuro.

Dimostrazione Siccome $(b, \mathbf{u}_0) \in A$, aperto, esistono una palla $B(\mathbf{u}_0, r_1)$ e un intervallo J aperto della retta reale centrato in b , tali che $J \times B(\mathbf{u}_0, r_1) \subseteq A$. Sia, ancora, $M \equiv \sup_{J \times B(\mathbf{u}_0, r_1)} \|\mathbf{v}\|_m$. Per dimostrare il teorema mostreremo che per ogni fissato $\varepsilon < r_1$ esiste un indice $\nu \in \mathbb{N}$ per cui, se $t \in (t_\nu, b)$ allora $\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_0\|_m < \varepsilon$. Ora, siccome la successione converge a b e $\mathbf{u}(t_\nu) \rightarrow \mathbf{u}_0$, esisterà, fissato $\varepsilon < r_1$, un indice $\nu \in \mathbb{N}$ per cui valgono contemporaneamente

$$\begin{aligned} |t_\nu - b| &< \frac{\varepsilon}{4M} \\ \|\mathbf{u}(t_\nu) - \mathbf{u}_0\|_m &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Per la disuguaglianza triangolare, ci basta vedere che se $t_\nu < t < b$ allora

$$\|\mathbf{u}(t_\nu) - \mathbf{u}(t)\|_m < \frac{\varepsilon}{2}$$

Questa dunque è la nostra tesi. Procediamo a dimostrarla per assurdo. Sia

$$E \equiv \left\{ t \in (t_\nu, b) \mid \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t_\nu)\|_m \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

per assurdo, non vuoto. Allora esso ammette estremo inferiore τ , $t_\nu < \tau < b$. Per continuità della funzione $t \mapsto \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t_\nu)\|_m$ si ha che $\|\mathbf{u}(\tau) - \mathbf{u}(t_\nu)\|_m = \frac{\varepsilon}{2}$. Prendiamo ora $\xi \in]t_\nu, \tau[$ si ha

$$\|\mathbf{u}(\xi) - \mathbf{u}(t)\|_m < \frac{\varepsilon}{2}$$

e perciò $\mathbf{u}(\xi) \in B(\mathbf{u}_0, r_1)$ e dunque $\|\dot{\mathbf{u}}(\xi)\|_m = \|\mathbf{v}(\xi, \mathbf{u}(\xi))\|_m < M$, allora

$$\frac{\varepsilon}{2} = \|\mathbf{u}(\tau) - \mathbf{u}(t_\nu)\|_m = \|\dot{\mathbf{u}}(\xi)\|_m |t_\nu - \tau| \leq M |t_\nu - \tau|$$

da cui

$$\frac{\varepsilon}{2} \leq M |t_\nu - b| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

(c.v.d.) il che è palesemente assurdo.

Ovviamente lo stesso teorema vale per il primo estremo a . Basta che esista una successione decrescente tendente a a il cui limite appartenga al dominio del campo di velocità, affinché esista un prolungamento passato della soluzione.

Teorema di fuga dei compatti

Come conseguenza del teorema precedente, si ricava il fondamentale

Teorema IV.7 (fuga dai compatti)

Sia $\mathbf{u}(t)$ una soluzione massimale dell'equazione $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{u})$ e sia (a, b) il suo intervallo di definizione. Per ogni compatto $K \subseteq A$ esiste un $\delta > 0$ talché per ogni t fuori dall'intervallo $(a + \delta, b - \delta)$ il punto $(t, \mathbf{u}(t))$ cade fuori da K .

Dimostrazione Procediamo per assurdo. Per ogni $\delta > 0$ esiste $t_\delta \in (a, b) \setminus (a + \delta, b - \delta)$, per cui $(t_\delta, \mathbf{u}(t_\delta)) \in K$. Posto $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, determiniamo una successione di punti in $(a, b) \setminus (a + \delta, b - \delta)$ tali che

$$(t_n, \mathbf{u}(t_n)) \in K$$

ora, estraiamo una sottosuccessione crescente dalla $\{t_n\}$ di punti tali che $b - \frac{1}{n} < t_n^* < b$ (questo sarà sempre possibile a meno di usare l'altro estremo, a). La $\{t_n^*\}$ converge a b e

inoltre

$$\{(t_n^*, \mathbf{u}(t_n^*))\} \subseteq K$$

con K compatto, sicché da essa è possibile estrarre una sottosuccessione convergente a un punto $(b, \mathbf{u}_0)$ in K perciò in A . Per il teorema precedente, si ha allora che la soluzione può essere prolungata oltre b , il che è assurdo poiché essa è massimale per ipotesi.

(c.v.d.)

Corollario IV.3 Sia $(J, \mathbf{u})$ una soluzione di $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{u})$ con $J = (a_1, b_1)$ e $A = (a, b) \times \mathbb{R}^m$. Sia $b_1 < b$. Supponiamo che $\mathbf{u}(t)$ sia limitata in un intorno di b_1 allora $\mathbf{u}$ ammette prolungamento futuro.

Dimostrazione Esiste $0 < \delta < b_1 - a_1$ tale che esiste $M > 0$ per cui $\forall t \in (b_1 - \delta, b_1) \|\mathbf{u}(t)\|_m \leq M$. Preso il compatto $K = [b_1 - \delta, b_1] \times B(0, M)$ si ha che se $\mathbf{u}$ non fosse prolungabile allora, per il teorema di fuga dai compatti, esisterebbe $\delta_1 > 0$ talché per ogni $t \in (b_1 - \delta_1, b_1)$ $(t, \mathbf{u}(t))$ non appartiene a K , allora $\|\mathbf{u}(t)\|_m \geq M$ il che è assurdo.

(c.v.d.)

IV.4 Esistenza e unicità globale

Nel caso in cui l'aperto di $\mathbb{R}^{m+1}$ sia definito come il prodotto diretto tra J intervallo reale e Ω aperto di $\mathbb{R}^m$, una soluzione massimale può estendersi al più su J . Se esiste una soluzione - massimale - definita su tutto J essa si dirà **soluzione globale**. Per il teorema di equivalenza delle norme, in questa sezione utilizzeremo una norma conveniente, quella della somma delle componenti (a meno di una costante moltiplicativa essa coincide, nelle disuguaglianze, con la norma euclidea). Perciò intenderemo $\|\mathbf{x}\|_m \equiv \sum_{i=1}^m |x_i|$

Per arrivare alla formulazione del problema ci occorre un lemma:

Lemma IV.4
(disuguaglianza di Gronwall)

Sia $\mathbf{w}$ di classe $C^1(a, b)$ e supponiamo che esistano due costanti $\varepsilon \geq 0$ e $Q > 0$ tali che

$$\|\dot{\mathbf{w}}(t)\|_m \leq \varepsilon + Q \|\mathbf{w}(t)\|_m, \quad \forall t \in (a, b)$$

allora, per ogni $t, t_0 \in (a, b)$ risulta

$$\|\mathbf{w}(t)\|_m \leq \left(\frac{\varepsilon}{Q} + \|\mathbf{w}(t_0)\|_m \right) e^{Q|t-t_0|}$$

Inoltre, se $Q = 0$,

$$\|\mathbf{w}(t)\|_m - \varepsilon(t - t_0) \leq \|\mathbf{w}(t)\|_m \leq \|\mathbf{w}(t)\|_m + \varepsilon(t - t_0)$$

Dimostrazione Definiamo la funzione ausiliaria, posto $\sigma > 0$,

$$z(t) \equiv \sqrt{\sigma^2 + \|\mathbf{w}(t)\|_m^2}$$

si ha

$$|\dot{z}(s)| \leq \left| \frac{\|\mathbf{w}\|_m \frac{d}{ds} \|\mathbf{w}\|_m}{\sqrt{\sigma^2 + \|\mathbf{w}\|_m^2}} \right|$$

D'altra parte (è facile vederlo direttamente anche per la norma euclidea) si ha

$$\frac{d}{ds} \|\mathbf{w}\|_m \leq \|\dot{\mathbf{w}}\|_m$$

Infatti,

$$\frac{d}{ds} \sum_{i=1}^m |w_i| = \sum_{i=1}^m \frac{w_i}{|w_i|} \dot{w}_i \leq \sum_{i=1}^m |\dot{w}_i|.$$

Allora

$$|\dot{z}(s)| \leq \left| \frac{\|\mathbf{w}\|_m \|\dot{\mathbf{w}}\|_m}{\sqrt{\sigma^2 + \|\mathbf{w}\|_m^2}} \right| \leq \|\dot{\mathbf{w}}\|_m \leq \varepsilon + Qz(s)$$

sicché

$$-Q \leq \frac{Qz'(s)}{\varepsilon + Qz(s)} \leq Q$$

perciò

$$\left| \frac{d}{ds} \log(\varepsilon + Qz(s)) \right| \leq Q$$

integrando tra t e t_0

$$\log \frac{\varepsilon + Qz(t)}{\varepsilon + Qz(t_0)} \leq Q|t - t_0| \Rightarrow \varepsilon + Qz(t) \leq (\varepsilon + Qz(t_0)) e^{Q|t-t_0|}$$

siccome $Q \|\mathbf{w}\|_m \leq \varepsilon + Qz$ ricaviamo

$$\|\mathbf{w}(t)\|_m \leq \left(\frac{\varepsilon}{Q} + z(t_0) \right) e^{Q|t-t_0|}$$

valida per ogni $\sigma > 0$, passando al limite per $\sigma \rightarrow 0$ si perviene alla tesi. La seconda parte si dimostra in modo del tutto analogo.

(c.v.d.)

Si perviene infine al teorema di esistenza e unicità in grande:

Teorema IV.8
(esistenza e unicità globale)

Sia $\mathbf{v} \in C^0(J \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^{m+1})$ tale che

(i) $\mathbf{z} \mapsto \mathbf{v}(t, \mathbf{z})$ è localmente lipschitziana, per ogni $M > 0$ esiste K_M tale che per ogni $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in B(0, M)$

$$\|\mathbf{v}(t, \mathbf{z}_1) - \mathbf{v}(t, \mathbf{z}_2)\|_m \leq K_M \|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|_m;$$

(ii) per ogni compatto $K \subseteq J$ esistono due costanti non negative P, Q dipendenti da K tali che per ogni istante $t \in K$ e per ogni $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ risulti

$$\|\mathbf{v}(t, \mathbf{u})\|_m \leq P + Q \|\mathbf{u}\|_m$$

Allora fissato un dato iniziale $(t_0, \mathbf{u}_0) \in J \times \mathbb{R}^m$ esiste ed è unica la soluzione globale del problema di Cauchy (P).

Dimostrazione

Si usano il corollario al teorema di fuga dai compatti e il lemma precedente. Per (i) e per il teorema di esistenza e unicità locale, esisterà una soluzione definita in un intorno temporale di t_0 del problema (P). Della soluzione locale consideriamo $(I, \mathbf{u})$ prolungamento massimale. Vogliamo far vedere che $I = J$. Sia per assurdo $b \equiv \sup I < \sup J \equiv \beta$. Per (ii), abbiamo

$$\|\dot{\mathbf{u}}(t)\|_m = \|\mathbf{v}(t, \mathbf{u}(t))\|_m \leq P + Q \|\mathbf{u}(t)\|_m$$

sicché, essendo $b \in \mathbb{R}$, per il lemma precedente, $\mathbf{u}$ è limitata in un intorno di b ed essendo $b < \beta$ per il corollario del teorema di fuga dai compatti, $(I, \mathbf{u})$ risulta prolungabile, il che è

(c.v.d.)

IV.5 Equazioni differenziali a variabili separabili

IV.5.1 Equazioni a variabili separabili

Le equazioni differenziali a variabili separabili sono molto comuni e possono essere risolte, almeno implicitamente. Per questo meritano una trattazione un po' più dettagliata. Esse sono del tipo

$$\dot{\mathbf{x}} = f(t) \mathbf{w}(\mathbf{x}),$$

il campo di velocità si fattorizza nel prodotto di una funzione dipendente solo dal tempo e di una dipendente solo dalla posizione. Se f e $\mathbf{w}$ sono continue e $\mathbf{w}$ è lipschitziana l'equazione rientra nelle ipotesi del teorema di Cauchy-Lipschitz. In questo caso, si nota subito che se il

dato iniziale cade su uno zero di $\mathbf{w}$, la soluzione (che è unica) del corrispondente problema di Cauchy, è la funzione identicamente eguale al dato iniziale (equilibrio).

Caso unidimensionale

Studiamo la seguente equazione differenziale a variabili separabili definita in uno spazio delle fasi bidimensionale

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t)g(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$t \in (a, b)$, $x \in (c, d)$. Abbiamo detto che se x_0 annulla g la soluzione è identicamente pari a x_0 . D'altra parte se $g(x_0) \neq 0$, allora $g(x(t)) \neq 0$ per ogni tempo su cui la soluzione è definita. Infatti, se così non fosse, avremmo nel punto $\bar{t}$, $g(x(\bar{t})) = 0$, allora $x(\bar{t}) = 0$ per ogni tempo e quindi $g(x(t_0)) = g(x_0) = 0$, assurdo. Si conclude che se $g(x_0) \neq 0$, allora l'immagine di $x(t)$, soluzione del corrispondente problema di Cauchy, è tutta compresa nell'intervallo tra due radici consecutive di $g(x)$. In tale intervallo, per il teorema degli zeri, $g(x)$ ha segno costante e così $x(t)$ sarà o crescente o decrescente, comunque monotona. In tal caso è allora possibile scrivere

$$\frac{\dot{x}}{g(x)} = f(t)$$

integrando tra t_0 e t ambo i membri

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{\dot{x}(\sigma)}{g(x(\sigma))} d\sigma = \int_{t_0}^t f(\sigma) d\sigma$$

dall'invertibilità di $x(t)$ si ha, cambiando variabile nel primo integrale

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{g(x)} = \int_{t_0}^t f(\sigma) d\sigma$$

se G è una primitiva di $1/g$ e F una primitiva di f , si ha

$$G(x(t)) = G(x_0) + F(t) - F(t_0)$$

Ma $1/g$ ha segno costante, perciò G è monotona e perciò invertibile

$$x(t) = G^{-1}(G(x_0) + F(t) - F(t_0)).$$

Esempio IV.1 Consideriamo un'equazione differenziale lineare a coefficiente continuo,

$$\dot{x} = a(t)x$$

con $a(t)$ funzione continua definita sull'intervallo (a, b) . Essa ha esistenza globale. Ha campo lipschitziano

$$|a(t)x - a(t)y| \leq |a(t)||x - y| \leq \left(\max_{t \in (-R, R) \cap (a, b)} |a(t)| \right) |x - y|$$

(si è usato il teorema di Weierstraß); e inoltre è lineare (soddisfa immediatamente la condizione di crescita sublineare).

Sia $x(t_0) = x_0 \neq 0$, allora la soluzione è sempre diversa da 0 ed è monotona. Sarà perciò sempre positiva se $x_0 > 0$, altrimenti, sarà sempre negativa. Ovviamente $x(t) = 0$ è l'unica soluzione costante se $a(t) \neq 0$. Proviamo a risolvere l'equazione

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x} = \int_{t_0}^t a(t) dt$$

sia $A(t) = \int_{t_0}^t a(t) dt$ primitiva di $a(t)$, allora

$$\log \frac{x(t)}{x_0} = A(t) - A(t_0)$$

da cui

$$x(t) = x_0 \exp \left(\int_{t_0}^t a(t) dt \right)$$

IV.5.2 Equazioni omogenee

Un altro tipo di equazione notevole, in uno spazio delle fasi bidimensionale, è

$$\dot{x} = f\left(\frac{x}{t}\right), f: I \rightarrow \mathbb{R}, t \neq 0$$

che si dice **equazione omogenea**. Supponiamo che f non sia l'applicazione identica, altrimenti siamo subito ricondotti ad un'equazione a variabili separabili. Poniamo

$$w(t) \equiv \frac{x(t)}{t}$$

allora

$$\dot{x} = t\dot{w} + w = f(w)$$

da cui

$$\dot{w} = \frac{f(w) - w}{t}$$

che è di nuovo un'equazione a variabili separabili.

IV.5.3 Sistemi autonomi

I sistemi autonomi sono fondamentali, specie in Meccanica, e sono - peraltro - molto comuni. Si tratta di processi a variabili separate in cui la funzione del tempo è l'identità. In altre parole, sono processi il cui campo di velocità è dipendente solo dalla posizione e non dal tempo:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

Il primo fatto fondamentale, non comune alle considerazioni sulle equazioni a variabili separabili, collegato all'autonomia del sistema dal tempo è il seguente

Proposizione IV.1 *L'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale autonoma è invariante per traslazioni temporali.*

Dimostrazione Sia $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^m$ soluzione del problema di Cauchy considerato

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

allora, vogliamo mostrare che $\psi(t) = \tau_c \circ \varphi = \varphi(t - c)$ definita sull'intervallo $I + c$ è soluzione del problema

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0 + c) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

infatti,

$$\begin{aligned} \psi(t_0 + c) &= \varphi(t_0 + c - c) = \varphi(t_0) = \mathbf{x}_0; \\ \frac{d(\tau_c \circ \varphi)}{dt} &= \frac{d\varphi}{dt}(t - c) = \mathbf{v}(\varphi(t - c)) = \mathbf{v}(\tau_c \circ \varphi); \end{aligned}$$

(c.v.d.)

Se il campo di velocità è definito sull'aperto Ω , allora per ogni punto di Ω , passa al più un'orbita (una traiettoria). Siano infatti $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ soluzioni formanti orbite distinte del problema di Cauchy, tali che

$$\Omega \ni \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_1(t_1) = \mathbf{x}_2(t_2)$$

La funzione $\boldsymbol{\xi}(t) \equiv \tau_{t_1 - t_2} \circ \mathbf{x}_2(t)$ è ancora soluzione dell'equazione differenziale per la proposizione precedente e inoltre

$$\boldsymbol{\xi}(t_1) = \mathbf{x}_2(t_1 - t_1 + t_2) = \mathbf{x}_2(t_2) = \bar{\mathbf{x}}$$

allora per il teorema di unicità $\boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{x}_1(t)$ per ogni tempo, cioè

$$\mathbf{x}_2(t + t_1 - t_2) = \mathbf{x}_1(t), \forall t$$

da cui tutti i punti descritti da $\mathbf{x}_1$ sono descritti anche da $\mathbf{x}_2$, cioè le traiettorie dei punti con leggi orarie $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ coincidono.

Vale inoltre la seguente

Proposizione IV.2 Se $\mathbf{x}(t)$ risolve il problema di Cauchy definito in Ω dal campo autonomo $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, e risulta

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{w} \in \Omega$$

allora $\mathbf{v}(\mathbf{w}) = 0$.

Lemma IV.5
(criterio dell'asintoto)

Sia $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile; supponiamo che esista finito $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ e che esista $\lim_{t \rightarrow \infty} f'(t) \in \overline{\mathbb{R}}$, allora

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f'(t) = 0$$

Dimostrazione Si applica il teorema dell'Hôpital, caso numero/ $\infty = 0$

$$(c.v.d.) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f'(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} = 0$$

Dimostrazione Siccome $\mathbf{v}$ è un campo continuo si ha

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{x}}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{v}(\mathbf{w})$$

poniamo

$$\mathbf{v}(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{e}_k = h_k$$

Si ha poi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_k = w_k \in \mathbb{R}$$

essendo $\mathbf{w} \in \Omega$. Inoltre

$$\dot{x}_k = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_k$$

(c.v.d.) siccome $\dot{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{w})$, ciascun $\dot{x}_k \rightarrow h_k$. Applicando il criterio dell'asintoto a ciascuna componente si trova $h_k = 0$ per ogni k . Infine, $\mathbf{v}(\mathbf{w}) = 0$.

Orbite periodiche

Sia $\mathbf{x}(t)$ soluzione del problema definito dal sistema autonomo considerato. $\mathbf{x}(t)$ si dice periodica se esiste un $T > 0$, per cui, per ogni tempo,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t + T)$$

L'orbita associata a una soluzione periodica è chiusa. Il tempo di percorrenza della curva è, al più, T .

Più avanti studieremo (teorema di rettificazione) gli integrali del moto. Si tratta di funzioni continue H definite in Ω a valori in $\mathbb{R}$, tali che per ogni tempo in cui la soluzione $\mathbf{x}(t)$ esiste risulta

$$H(\mathbf{x}_0) = \text{const} = H(\mathbf{x}(t))$$

Ora, l'equazione

$$H(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x}_0)$$

descrive, se il gradiente di H è diverso da 0, una curva in $\mathbb{R}^m$, **curva integrale**. La curva integrale scritta sopra contiene la traiettoria del moto $\mathbf{x}(t)$. Ora, sia Γ una curva integrale chiusa. Se essa non contiene **punti singolari** del sistema autonomo, cioè zeri del campo di velocità, allora Γ è un'orbita percorsa in modo periodico. All'istante t_0 valga $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in \Gamma$. Sui punti di Γ è fissato un campo di velocità $\mathbf{v}|_{\Gamma}$, talché il moto non può essere invertito, cioè non è possibile che un arco sia percorso prima in senso orario e poi antiorario. Ne deriva che il verso di percorrenza di Γ è fissato. Notiamo adesso che la $\mathbf{x}(t)$ è definita per ogni tempo. Ciò perché $\mathbf{v}$ definito su Γ è limitato per il teorema di Weierstraß. Dunque, se non esiste T per

cui $\mathbf{x}(t_0 + T) = \mathbf{x}_0$, allora deve esistere il limite di $\mathbf{x}(t)$ per $t \rightarrow \infty$, ma per la proposizione precedente esso dovrebbe essere un punto singolare, il che è assurdo, infatti $\ell = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t)$ deve appartenere a Γ che non contiene punti singolari

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H(\mathbf{x}(t)) = H(\mathbf{x}_0) \Rightarrow \ell \in \Gamma.$$

Abbiamo ammesso che il limite esista senza dimostrarlo. Questo perché $\mathbf{x}(t)$ può essere letta con un'applicazione continua sull'ascissa curvilinea di Γ . Perciò, la nostra $s(t)$ (il verso di percorrenza dell'orbita è fissato) deve essere una funzione monotona. Ne deriva che essa ammette limite per $t \rightarrow \infty$. In definitiva,

Teorema IV.9 Se $H(\mathbf{x})$ è un integrale primo del sistema autonomo

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

e se la curva Γ definita da $H(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x}_0)$ è chiusa, è contenuta nell'aperto Ω di definizione di $\mathbf{x}$ e non contiene punti singolari di $\mathbf{v}$, allora la traiettoria di $\mathbf{x}(t)$ è tutta e sola la curva Γ . Inoltre, Γ viene percorsa in modo periodico (esiste cioè un periodo finito).

IV.6 Equazioni differenziali lineari

IV.6.1 Introduzione

Definizione ed esistenza globale

Si chiamano equazioni differenziali lineari quelle definite da un campo di velocità affine, cioè le equazioni del tipo

$$\dot{\mathbf{u}} + A(t)\mathbf{u} = \mathbf{b}(t)$$

con $A(t) \in \mathcal{M}(n, n; \mathbb{R})$ per ogni istante t . Le funzioni $A(t)\mathbf{u}$ e $\mathbf{b}(t)$ siano continue. Allora l'equazione risulta definita su $J \times \mathbb{R}^n$ ed ogni sua soluzione è globale. Infatti, il campo

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{u}) = -A(t)\mathbf{u} + \mathbf{b}(t)$$

risponde ai requisiti del teorema di esistenza e unicità globale:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}(t, \mathbf{u}_1) - \mathbf{v}(t, \mathbf{u}_2)\|_n &= \|A(t)\mathbf{u}_2 - A(t)\mathbf{u}_1\|_n = \|A(t)(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)\|_n \leq \|A(t)\| \|(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)\|_n \\ &\leq \max_{t \in J} \|A(t)\| \|(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)\|_n; \\ \|\mathbf{v}(t, \mathbf{u})\|_n &\leq \|A(t)\mathbf{u}\|_n + \|\mathbf{b}(t)\|_n \leq \max_{t \in J} \|A(t)\| \|\mathbf{u}\|_n + \max_{t \in J} \|\mathbf{b}(t)\|_n \end{aligned}$$

dove si è usato il teorema di Weierstraß.

Equazioni lineari di ordine superiore

Quanto appena dimostrato assicura l'esistenza in grande per le soluzioni dell'equazione di ordine superiore

$$u^{(m)} + a_{m-1}(t)u^{(m-1)} + \dots + a_1(t)\dot{u} + a_0(t)u = b(t)$$

con $a_i(t), b(t) \in \mathcal{C}^0(J, \mathbb{R})$ per ogni indice i da 0 a $m-1$, $i \in J_{m-1}^0$. Il sistema del primo ordine cui si può infatti ricondurre tale equazione è lineare (si veda 2.3.1): posto

$$\mathbf{u} \equiv (u, \dot{u}, \dots, u^{(m-1)})$$

si ha

$$\dot{\mathbf{u}} = A(t)\mathbf{u}$$

con

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{m-1} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.1})$$

IV.6.2 Equazioni lineari scalari di ordine superiore

Caratterizzazione delle soluzioni

Stabilite le funzioni $a_i(t)$ e $b(t)$ continue sull'intervallo J , definiamo l'applicazione E che a ogni applicazione $u \in \mathcal{C}^m(J)$ associa

$$E(u) = u^{(m)} + a_{m-1}(t)u^{(m-1)} + \dots + a_1(t)\dot{u} + a_0(t)u$$

sicché scriveremo la nostra equazione differenziale lineare come

$$E(u) = b(t) \quad (\text{L})$$

definiamo $b(t)$ **termine forzante**. Inoltre definiamo l'equazione

$$E(u) = 0 \quad (\text{O})$$

equazione **omogenea** associata alla $E(u) = b(t)$.

Notiamo che E è un'applicazione lineare nello spazio vettoriale delle funzioni di classe $\mathcal{C}^m(J)$:

$$E(u + \lambda v) = E(u) + \lambda E(v)$$

Soffermiamoci momentaneamente su (O). Sia $\mathcal{V}$ l'insieme delle sue soluzioni dalla linearità di E si ha subito che $\mathcal{V}$ è uno spazio vettoriale (chiuso per somma e moltiplicazione per scalare, contiene la funzione identicamente nulla, sicché è un sottospazio di $\mathcal{C}^m(J)$).

Se u e v risolvono ambedue (L) si ha

$$E(u - v) = E(u) - E(v) = b(t) - b(t) = 0$$

perciò $u - v$ risolve (O). Si ha allora la seguente

Proposizione IV.3 *Se $\bar{u} \in \mathcal{C}^m(J)$ risolve (L) e $\mathcal{V}$ è lo spazio delle soluzioni dell'omogenea associata (O) si ha che l'insieme $\mathcal{V}_b$ delle soluzioni di (L) è*

$$\mathcal{V}_b = \{u \in \mathcal{C}^m(J) \mid u = \bar{u} + w, w \in \mathcal{V}\}$$

Dimostrazione Sia $u \in \mathcal{V}_b$ allora $w \equiv u - \bar{u}$ risolve (O), perciò $w \in \mathcal{V}$

$$u = \bar{u} + w$$

D'altra parte, sia $u = \bar{u} + w$ allora

$$E(u) = E(\bar{u} + w) = E(\bar{u}) + E(w) = b(t) + 0 = b(t)$$

(c.v.d.) perciò $u \in \mathcal{V}_b$.

Torniamo allo spazio vettoriale $\mathcal{V}$ mostriamo il seguente

Teorema IV.10 *Lo spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione di ordine m , $E(u) = 0$, ha dimensione m .*

Dimostrazione Denotiamo con $\mathbf{u}(t_0)$ il vettore

$$\mathbf{u}(t_0) \equiv \left(u(t_0), \dots, u^{(m-1)}(t_0) \right)$$

Consideriamo i seguenti m problemi di Cauchy,

$$\begin{cases} E(u) = 0 \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{e}_i \end{cases}, i \in J_m$$

e siano $u_i, i \in J_m$ le rispettive soluzioni. La nostra tesi è che $\mathcal{B} \equiv \{u_i\}_{i \in J_m}$ è una base di $\mathcal{V}$. Cominciamo col far vedere che è linearmente indipendente. Sia $\boldsymbol{\lambda} \equiv (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, poniamo

$$0 = \lambda_1 u_1(t) + \dots + \lambda_m u_m(t)$$

introducendo la **matrice wronskiana** associata a $\mathcal{B}$,

$$W(t) \equiv \begin{pmatrix} u_1(t) & \dots & u_m(t) \\ \dot{u}_1(t) & \dots & \dot{u}_m(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(m-1)}(t) & \dots & u_m^{(m-1)}(t) \end{pmatrix}$$

l'equazione diventa

$$W(t) \boldsymbol{\lambda} = 0$$

calcoliamo all'istante $t = t_0$

$$I \boldsymbol{\lambda} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\lambda} = 0$$

Resta da vedere che $\mathcal{V} = \text{Span} \langle \mathcal{B} \rangle$. Prendiamo $u \in \mathcal{V}$. Poniamo $\boldsymbol{\alpha} \equiv \mathbf{u}(t_0)$ e consideriamo

$$z(t) \equiv \alpha_1 u_1(t) + \dots + \alpha_m u_m(t)$$

abbiamo

$$\begin{aligned} z(t) &= \alpha_1 \dot{u}_1(t) + \dots + \alpha_m \dot{u}_m(t) \\ &\vdots \\ z^{(m-1)}(t) &= \alpha_1 u^{(m-1)}(t) + \dots + \alpha_m u_m^{(m-1)}(t) \end{aligned}$$

Sicché $\bar{u}$ appartiene a $\mathcal{V}$ e, valutando in t_0 , si ottiene $\mathbf{z}(t_0) = \boldsymbol{\alpha}$. Perciò, siccome risolvono lo stesso problema di Cauchy, per unicità, risulta

$$(c.v.d.) \quad u(t) = z(t) = \alpha_1 u_1(t) + \dots + \alpha_m u_m(t).$$

In base ai risultati trovati si ha che la **soluzione generale** dell'equazione (L) risulta, fissata $\mathcal{B}$ base di $\mathcal{V}$,

$$u(t) = \bar{u} + c_1 u_1 + \dots + c_m u_m$$

Il wronskiano

Date m soluzioni di (O) ci chiediamo quando siano linearmente indipendenti. Definita la matrice wronskiana, definiamo pure il **wronskiano** come il suo determinante

$$w(t) \equiv \det W(t)$$

Sussiste la

Proposizione IV.4 $\mathcal{S} \equiv \{v_1, \dots, v_m\} \subseteq \mathcal{V}$ è linearmente dipendente se e solo se esiste $t_0 \in J$ tale che $w(t_0) = \det W(t) = 0$

Dimostrazione All'istante $t_0 \in J$ sussista $w(t_0) = \det W(t_0) = 0$, allora $W(t_0)$ è singolare ed esiste in $\mathbb{R}^m$ il vettore $\mathbf{c} \neq 0$ tale che

$$W(t_0) \mathbf{c} = 0.$$

Definiamo

$$u(t) \equiv c_1 u_1(t) + \dots + c_m u_m(t)$$

all'istante t_0 risulta

$$\mathbf{u}(t_0) = W(t) \mathbf{c} = 0$$

(c.v.d.) perciò, per unicità, $u(t) = 0$ identicamente su J . Siccome $\mathbf{c} \neq 0$ si ha la tesi.

$\mathcal{S}$ è indipendente se il wronskiano non si annulla mai in J .

Prima di proseguire, notiamo che dalla definizione fondamentale di determinante di una matrice, si deduce immediatamente che, se $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^m, i \in J_m$,

$$\frac{d}{dt} \det \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \dot{\mathbf{u}}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m \end{pmatrix} + \dots + \det \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{u}}_m \end{pmatrix}$$

Sussiste allora

Teorema IV.11
(di Liouville)

Il wronskiano associato a $\mathcal{S} \equiv \{v_1, \dots, v_m\} \subseteq \mathcal{V}$ soddisfa l'equazione differenziale lineare

$$\dot{w} = -a_{m-1}(t) w$$

Dimostrazione

Calcoliamo la derivata del wronskiano

$$\dot{w} = \det \begin{pmatrix} \dot{v}_1 & \dots & \dot{v}_m \\ \dot{v}_1 & \dots & \dot{v}_m \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ v_1^{(m-1)} & \dots & v_m^{(m-1)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_m \\ \ddot{v}_1 & \dots & \ddot{v}_m \\ \ddot{v}_1 & \dots & \ddot{v}_m \\ \vdots & \dots & \vdots \\ v_1^{(m-1)} & \dots & v_m^{(m-1)} \end{pmatrix} + \dots + \det \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_m \\ \dot{v}_1 & \dots & \dot{v}_m \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ v_1^{(m)} & \dots & v_m^{(m)} \end{pmatrix}$$

se ne ricava che

$$\dot{w} = \det \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_m \\ \dot{v}_1 & \dots & \dot{v}_m \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ v_1^{(m-1)} & \dots & v_m^{(m-1)} \end{pmatrix}$$

sostituiamo all'ultima riga la combinazione delle m righe ottenuta moltiplicando le prime $m-1$ righe per il corrispondente a_{i-1} . Il k -esimo elemento dell' m -esima riga diviene

$$\begin{aligned} a_0 v_k + a_1 \dot{v}_k + \dots + a_{m-2} v_k^{(m-2)} + v_k^{(m)} &= \\ \left[a_0 v_k + a_1 \dot{v}_k - \dots + a_{m-2} v_k^{(m-2)} + a_{m-1} v_k^{(m-1)} + v_k^{(m)} \right] - a_{m-1} v_k^{(m-1)} &= -a_{m-1} v_k^{(m-1)} \end{aligned}$$

sicché, per la multilinearità nelle righe del determinante

$$\dot{w} = -a_{m-1} \det \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_m \\ \dot{v}_1 & \dots & \dot{v}_m \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ v_1^{(m-1)} & \dots & v_m^{(m-1)} \end{pmatrix}$$

ossia

$$(c.v.d.) \quad \dot{w} = -a_{m-1} w$$

Osservazione IV.2

Consideriamo il sistema del primo ordine associato all'equazione

$$\dot{\mathbf{u}} = A(t) \mathbf{u}$$

dalla (IV.1) si ottiene per la proposizione precedente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\det W(t)] &= \text{Tr } A(t) \det W(t) \\ \dot{w} &= \text{Tr } A(t) w \end{aligned}$$

Si ha immediatamente il seguente

Corollario IV.4 Il wronskiano associato a $\mathcal{S} \equiv \{v_1, \dots, v_m\} \subseteq \mathcal{V}$ vale

$$w(t) = w(t_0) e^{-\int_{t_0}^t a_{m-1}(\tau) d\tau}$$

Dal quale si ricava, tenendo conto della proposizione IV.4

Teorema IV.12 $\mathcal{S} \equiv \{v_1, \dots, v_m\} \subseteq \mathcal{V}$ è linearmente indipendente se e solo se esiste $t_0 \in J$ tale che $w(t_0) \neq 0$

**Un metodo
per il calcolo
della soluzione
particolare**

Data un'equazione del tipo (L), determinata una base dello spazio delle soluzioni di (O), resta il problema di trovare una soluzione particolare di (L). Usiamo il **metodo di variazione delle costanti**. Cioè dato il sistema fondamentale di soluzioni, $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_m\}$, cerchiamo una soluzione di (L) del tipo

$$u(t) = c_1(t)v_1(t) + \dots + c_m(t)v_m(t)$$

con $c_i(t)$ funzioni definite su J . Per determinare tali funzioni abbiamo a disposizione una sola relazione, la (L). Possiamo allora fissare $m-1$ condizioni indipendenti sulle $c_i(t)$. Facciamo questo in modo da semplificare i conti. Stabiliamo $c_i \in \mathcal{C}^1(J)$ e poniamo (le $m-1$ condizioni)

$$\sum_{j=1}^m \dot{c}_j v_j^{(k)}(t) = 0, \forall k \in J_{m-2}^0$$

sicché, dalla definizione e derivando successivamente, troviamo

$$u(t) = c_1(t)v_1(t) + \dots + c_m(t)v_m(t)$$

$$\dot{u}(t) = c_1(t)\dot{v}_1(t) + \dots + c_m(t)\dot{v}_m(t)$$

$\vdots$

$$u^{(m)}(t) = \dot{c}_1(t)v_1^{(m-1)}(t) + \dots + \dot{c}_m(t)v_m^{(m-1)}(t) + c_1(t)v_1^{(m)}(t) + \dots + c_m(t)v_m^{(m)}(t)$$

moltiplichiamo la prima riga per a_0 e così via fino alla $(m-1)$ -esima. Sommiamo e otteniamo

$$E(u) = c_1(t) \left(a_0 v_1 + a_1 \dot{v}_1 + \dots + a_{m-1} v_1^{(m-1)} + v_1^{(m)} \right) + \dots + c_m(t) \left(a_0 v_m + a_1 \dot{v}_m + \dots + a_{m-1} v_m^{(m-1)} + v_m^{(m)} \right) + \dot{c}_1(t) v_1^{(m-1)}(t) + \dots + \dot{c}_m(t) v_m^{(m-1)}(t)$$

da cui, siccome $E(v_i) = 0$, si ottiene

$$\dot{c}_1(t) v_1^{(m-1)}(t) + \dots + \dot{c}_m(t) v_m^{(m-1)}(t) = E(u) = b(t)$$

cioè ci ritroviamo col sistema differenziale

$$\sum_{j=1}^m \dot{c}_j v_j^{(k)}(t) = 0, \forall k \in J_{m-2}^0$$

$$\sum_{j=1}^m \dot{c}_j v_j^{(m-1)}(t) = b(t)$$

cioè, posto $\mathbf{b}(t) \equiv (0, \dots, 0, b(t)) \in \mathbb{R}^m$

$$W(t) \dot{\mathbf{c}} = \mathbf{b}(t)$$

siccome $\mathcal{B}$ è indipendente, $W(t)$ è non singolare per $t \in J$ e possiamo usare il teorema di Cramer a ogni istante t . Definiamo la matrice $W_j(t)$ come la wronskiana cui alla colonna j -esima sia sostituito il vettore $\mathbf{b}(t)$. Allora

$$\dot{c}_j(t) = \frac{\det W_j(t)}{\det W(t)}$$

Sviluppiamo il determinante al numeratore, sia $W_{m,j}$ il minore ottenuto da $W(t)$ sopprimendo l' m -esima riga e la j -esima colonna e sia $w_{m,j} \equiv (-1)^{j+m} \det W_{m,j}$:

$$\det W_j(t) = (-1)^{j+m} b(t) \det W_{m,j}(t) = b(t) w_{m,j}(t)$$

infine, per il teorema fondamentale del calcolo

$$c_j(t) = \int_{t_0}^t \frac{b(\tau) w_{m,j}(\tau)}{w(\tau)} d\tau$$

IV.6.3 Funzione esponenziale dalla retta reale allo spazio delle matrici

**Esponenziale
di matrici:
definizione e
serie di Taylor**

Lo spazio delle matrici quadrate $\mathcal{M}(n, n; \mathbb{R})$ è isomorfo a $\mathbb{R}^{n^2}$, cioè può essere riguardato come spazio euclideo, sicché un'equazione del tipo

$$\dot{X}(t) = AX$$

con $A, X(t) \in \mathcal{M}(n, n; \mathbb{R})$ è un'equazione differenziale **lineare** (ci vuole poco a convincersene, ogni componente di $\dot{X}$ è una combinazione lineare delle componenti di X) e autonoma (indipendente dal tempo) del primo ordine definita in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n^2}$. Come tale, posto il dato iniziale, il problema di Cauchy associato ha soluzione unica e globale, cioè definita su tutto l'asse reale. Sfruttiamo quanto detto per fissare la seguente fondamentale

Definizione IV.10 Presa $A \in \mathcal{M}(n, n; \mathbb{R})$ si definisce la funzione esponenziale

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{M}(n, n; \mathbb{R}) \\ t &\mapsto \exp(tA) \end{aligned}$$

la soluzione (che è unica) del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX \\ X(0) = I \end{cases}$$

con $X(t) \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{M}(n, n; \mathbb{R}))$.

La definizione risulta molto semplice pensando a $\mathcal{M}(n, n; \mathbb{R})$ come spazio euclideo $\mathbb{R}^{n^2}$. Risultano allora naturalmente derivazione e continuità di funzioni dall'asse reale a $\mathcal{M}(n, n; \mathbb{R})$. Come detto l'esponenziale è una funzione C^∞ e grazie al teorema di Taylor si trova che

$$\exp(tA) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} A^k + R_{n+1}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

essendo, dall'equazione differenziale,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \exp(tA) &= A \exp(tA) \\ \frac{d^2}{dt^2} \exp(tA) &= A \frac{d}{dt} \exp(tA) = A^2 \exp(tA) \\ &\vdots \\ \frac{d^k}{dt^k} \exp(tA) &= A^k \exp(tA) \end{aligned}$$

è infatti facile vedere che $\frac{d}{dt}(A(t)B(t)) = \dot{A}(t)B(t) + A(t)\dot{B}(t)$. La serie di Taylor dell'esponenziale è convergente uniformemente in piccolo, dato che, localmente, l'algoritmo di Volterra-Picard è convergente uniformemente

$$\begin{cases} X_0(t) = I \\ X_n(t) = I + A \int_0^t X_{n-1}(\tau) d\tau \end{cases}$$

e

$$\begin{aligned} X_1(t) &= I + At \\ X_2(t) &= I + At + A \frac{t^2}{2} \\ &\vdots \\ X_n(t) &= \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} A^k \end{aligned}$$

X_n è proprio $\exp(tA) - R_{n+1}(t)$, esso converge uniformemente a $\exp(tA)$, sicché $R_n(t)$ converge uniformemente a 0. D'altra parte la serie converge su $\mathbb{R}$. Essa appartiene a $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n^2})$ che è completo, inoltre

$$\left\| \sum_{n=\nu_1}^{\nu_2} \frac{t^n}{n!} A^n \right\|_{n^2} \leq \sum_{n=\nu_1}^{\nu_2} \left\| \frac{t^n}{n!} A^n \right\|_{n^2} \leq \sum_{n=\nu_1}^{\nu_2} \left| \frac{t^n}{n!} \right| \|A^n\|_{n^2} \leq \sum_{n=\nu_1}^{\nu_2} \left| \frac{t^n}{n!} \right| (\|A\|_{n^2})^n$$

posto $M \equiv \|A\|_{n^2}$ si ha

$$\left\| \sum_{n=\nu_1}^{\nu_2} \frac{t^n}{n!} A^n \right\|_{n^2} \leq \sum_{n=\nu_1}^{\nu_2} \left| \frac{M^n t^n}{n!} \right|$$

Ora, siccome $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n t^n}{n!}$ converge uniformemente su $\mathbb{R}$, è di Cauchy. Perciò fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\nu(\varepsilon)$ tale che per ogni $\nu_1, \nu_2 \geq \nu$, per ogni $t \in \mathbb{R}$, vale

$$\sum_{n=\nu_1}^{\nu_2} \left| \frac{M^n t^n}{n!} \right| < \varepsilon \Rightarrow \left\| \sum_{n=\nu_1}^{\nu_2} \frac{t^n}{n!} A^n \right\|_{n^2} < \varepsilon$$

se ne deduce che anche la serie di Taylor dell'esponenziale è di Cauchy e perciò converge uniformemente. Siccome in piccolo converge a $\exp(tA)$ così sarà anche in grande. Abbiamo così dimostrato

Proposizione IV.5 *La serie di Taylor dell'esponenziale converge uniformemente su $\mathbb{R}$*

$$\exp(tA) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$$

Si ha dunque in particolare

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Il metodo delle approssimazioni successive di Volterra e Picard consente di risolvere in generale il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX \\ X(0) = X_0 \in \mathcal{M}(n, n; \mathbb{R}) \end{cases}$$

si ricava

$$X(t) = \exp(tA) X_0$$

Proprietà dell'esponenziale

Passiamo qui in rassegna alcune proprietà dell'esponenziale di matrici.

Osservazione IV.3 L'esponenziale di matrici è tale che

$$\exp[(t + \tau)A] = \exp(tA) \exp(\tau A)$$

Fissiamo $\tau \in \mathbb{R}$. Sia $X \equiv \exp[(t + \tau)A]$. Calcoliamone la derivata temporale $\frac{dX}{dt}$, si ha

$$\begin{aligned} t &\mapsto s \equiv t + \tau \mapsto \exp(sA) \\ \frac{dX}{dt} &= \frac{ds}{dt} \frac{dX}{ds} = A \exp[(t + \tau)A] = AX \end{aligned}$$

Inoltre $X(0) = \exp(\tau A)$, perciò

$$\exp[(t + \tau)A] = X(t) = \exp(tA) \exp(\tau A)$$

Osservazione IV.4 La matrice $X \equiv \exp(tA)$ è invertibile e vale $X^{-1} = \exp(-tA)$, infatti

$$I = \exp(0A) = \exp[(t - t)A] = \exp(tA) \exp(-tA)$$

Osservazione IV.5 Se A è **nilpotente**, cioè esiste $k \in \mathbb{N}$ per cui $A^k = 0$, allora si ha subito

$$\exp(tA) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^{k-1}.$$

Osservazione IV.6 A ed $\exp(tA)$ commutano, si scrive $[A, \exp(tA)] = 0$. Vogliamo verificare che

$$A \exp(tA) - \exp(tA) A = 0$$

poniamo $X \equiv \exp(tA)$, abbiamo

$$\frac{d}{dt}(AX - XA) = A\dot{X} - \dot{X}A = A(AX) - (AX)A = A(AX - XA)$$

inoltre, all'istante $t = 0$ risulta $(AX - XA)(0) = 0$, perciò 0 risolve

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(AX - XA) = A(AX - XA) \\ (AX - XA)(0) = 0 \end{cases}$$

per unicità, si ha identicamente su $\mathbb{R}$ $(AX - XA) = 0$, la tesi.

Osservazione IV.7 Se A, B commutano, allora commutano $B \exp(tA)$ e $\exp(tA) B$, cioè si ha

$$[A, B] = 0 \Rightarrow [B \exp(tA), \exp(tA) B]$$

Procediamo come per l'osservazione precedente. Scriviamo $X \equiv \exp(tA)$,

$$\frac{d}{dt}(BX - XB) = BAX - AXB = ABX - AXB = A(BX - XB)$$

perciò, ancora 0 risolve

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(BX - XB) = A(BX - XB) \\ (BX - XB)(0) = 0 \end{cases}$$

da cui la tesi.

Osservazione IV.8 Se A, B commutano, allora $\exp[t(A + B)] = \exp(tA) \exp(tB)$, cioè

$$[A, B] = 0 \Rightarrow \exp[t(A + B)] = \exp(tA) \exp(tB)$$

Poniamo $X \equiv \exp(t(A + B)) - \exp(tA) \exp(tB)$ e scriviamone la derivata usando l'osservazione precedente,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}X &= (A + B) \exp(t(A + B)) - A \exp(tA) \exp(tB) - \exp(tA) B \exp(tB) = \\ &= (A + B) (\exp(t(A + B)) - \exp(tA) \exp(tB)) = (A + B) X \end{aligned}$$

calcolando il dato iniziale a $t = 0$, si ha la tesi come nelle osservazioni precedenti.

Osservazione IV.9 Siano $A \in \mathcal{M}(n, n; \mathbb{R})$ e $G \in \text{GL}(n; \mathbb{R})$ allora

$$\exp(tG^{-1}AG) = G^{-1} \exp(tA) G$$

Poniamo $B \equiv G^{-1}AG$ e $X \equiv \exp(tA)$. Allora

$$\frac{d}{dt}(G^{-1}XG) = G^{-1}AXG = G^{-1}AGG^{-1}XG = B(G^{-1}XG)$$

inoltre $G^{-1}XG(0) = I$. Perciò $G^{-1}XG$ risolve lo stesso problema di Cauchy di $\exp(tB)$. Per unicità si ha la tesi.

Osservazione IV.10 Sia $A \in \mathcal{M}(n, n; \mathbb{R})$ una matrice qualsiasi. Scriviamola nella forma canonica di Jordan

$$\exists G \in \text{GL}(n; \mathbb{R}) : G^{-1}AG = J = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_{\lambda_k} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(n, n; \mathbb{C})$$

dove per ogni autovalore di A , λ_i di molteplicità algebrica $m(\lambda_i)$, J_{λ_i} è il blocco di Jordan

$$\mathcal{M}(m(\lambda_i), m(\lambda_i); \mathbb{C}) \ni J_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix} = \lambda_i I + J_0$$

Siccome

$$J^k = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1}^k & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_{\lambda_k}^k \end{pmatrix}$$

si ha che

$$\exp(tJ) = \begin{pmatrix} \exp(tJ_{\lambda_1}) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \exp(tJ_{\lambda_k}) \end{pmatrix}$$

e, dall'osservazione precedente, $\exp(tA) = G \exp(tJ) G^{-1}$. Non ci resta che calcolare l'esponenziale del generico blocco di Jordan J_λ . Cominciamo col notare che $[J_0, \lambda I] = 0$, allora

$$\exp(tJ_\lambda) = \exp(tJ_0 + t\lambda I) = \exp(tJ_0) \exp(t\lambda I).$$

Per la matrice diagonale, matrice a blocchi 1×1 sulla diagonale, si ha

$$\exp(t\lambda I) = \begin{pmatrix} \exp(t\lambda) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \exp(t\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{t\lambda} \end{pmatrix}$$

Per calcolare l'esponenziale del blocco ad autovalore nullo, useremo prima la definizione e poi l'osservazione IV.5.

Se $X \equiv \exp(tJ_0)$ si ha $\dot{X} = J_0 X$, da cui, posto $\mu \equiv m(\lambda)$ l'ordine di J_0 ,

$$\begin{cases} \dot{X}_{i,j} = X_{i+1,j} & \text{se } i \neq \mu \\ \dot{X}_{\mu,j} = 0 \\ X_{i,j}(0) = \delta_{i,j} \end{cases}$$

Si ha $\dot{X}_{\mu,\mu} = 0$ e $X_{\mu,\mu} = 1$ da cui $X_{\mu,\mu}(t) = 1$. Inoltre $X_{\mu,j}(t) = 0$ per $j \neq \mu$. Ora, risolviamo $\dot{X}_{\mu-1,j} = X_{\mu,j} = 0$ per $j \neq \mu$. Ne deriva che per $j < \mu - 1$, il dato iniziale essendo nullo, $X_{\mu-1,j} = 0$; per $j = \mu - 1$ il dato iniziale vale 1 e si ha perciò $X_{\mu-1,\mu-1}(t) = 1$. Infine,

$$\dot{X}_{\mu-1,\mu} = 1$$

perciò, essendo il dato iniziale nullo, si ha $X_{\mu-1,\mu}(t) = t$. Adesso si riprende alla $(\mu - 2)$ -esima riga. Si ha la soluzione 0 fino alla colonna $\mu - 2$, ove

$$\dot{X}_{\mu-2,\mu-2} = 0$$

ma siccome il dato iniziale vale 1, si ha $X_{\mu-2,\mu-2}(t) = 1$. Poi,

$$\begin{aligned} \dot{X}_{\mu-2,\mu-1} &= 1 \Rightarrow X_{\mu-2,\mu-1} = t \\ \dot{X}_{\mu-2,\mu} &= t \Rightarrow X_{\mu-2,\mu} = \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

procedendo in modo ricorsivo si perviene alla

$$\begin{pmatrix} 1 & t & \dots & \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & t \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Allo stesso risultato si perviene molto più velocemente usando l'osservazione IV.5. Infatti,

è facile calcolare le potenze successive di J_0 e rendersi conto che J_0 è nilpotente, $J_0^\mu = 0$. Calcoliamo J_0^2 . La prima colonna è $J_0^2 \mathbf{e}_1 = J_0 (J_0 \mathbf{e}_1) = J_0 0 = 0$, la seconda colonna è $J_0^2 \mathbf{e}_2 = J_0 (J_0 \mathbf{e}_2) = J_0 \mathbf{e}_1 = 0$ e così via. Perciò J_0^k ha le prime k colonne nulle e le colonne da $k + 1$ a μ formate dai vettori colonna $\mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_\mu$. Allora

$$\exp(tJ_0) = I + tJ_0 + \frac{t^2}{2} J_0^2 + \dots + \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!} J_0^{\mu-1},$$

infine

$$\exp(tJ_\lambda) = e^{t\lambda} I \left(I + tJ_0 + \frac{t^2}{2} J_0^2 + \dots + \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!} J_0^{\mu-1} \right)$$

da cui

$$\exp(tJ_\lambda) = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} & \dots & \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!} e^{t\lambda} \\ 0 & e^{t\lambda} & \dots & \frac{t^{\mu-2}}{(\mu-2)!} e^{t\lambda} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{t\lambda} \end{pmatrix}$$

IV.6.4 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

Sistemi differenziali omogenei a coefficienti costanti

Nella sottosezione precedente non abbiamo fatto altro che definire e studiare una funzione, l'esponenziale di matrici. Vogliamo adesso usare tale funzione per risolvere i sistemi differenziali a coefficienti costanti, almeno nel caso omogeneo. Sia dato cioè il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, & A \in \mathcal{M}(n, n; \mathbb{R}) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Usiamo, ancora una volta, l'algoritmo di Volterra-Picard, che sappiamo convergente uniformemente sulla retta reale alla soluzione del problema.

$$\begin{cases} \mathbf{x}_0(t) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_k(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t A\mathbf{x}_{k-1}(\tau) d\tau \end{cases}$$

abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= \mathbf{x}_0 + A\mathbf{x}_0 t \\ \mathbf{x}_2(t) &= \mathbf{x}_0 + A \int_0^t (\mathbf{x}_0 + A\mathbf{x}_0 \tau) d\tau = \mathbf{x}_0 + A\mathbf{x}_0 t + A^2 \mathbf{x}_0 \frac{t^2}{2} \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_k(t) &= \mathbf{x}_0 + tA\mathbf{x}_0 + \dots + \frac{t^k}{k!} A^k \mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

infine

$$\mathbf{x}(t) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \right) \mathbf{x}_0 = \exp(tA) \mathbf{x}_0$$

Risulta immediatamente definita l'applicazione di avanzamento temporale (cfr. Introduzione) associata all'equazione differenziale

$$\Phi_0^t(\mathbf{x}_0) = \exp(tA) \mathbf{x}_0.$$

L'applicazione trovata è continua e differenziabile infinite volte (è un risultato generale).

Soluzione del problema di Cauchy per sistemi non omogenei

Vogliamo adesso risolvere il sistema non omogeneo

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$$

fissato $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. L'omogenea associata ha, per quanto visto prima, soluzione generale

$$\mathbf{x}(t) = \exp(tA) \mathbf{c}$$

Col metodo di variazione delle costanti cerchiamo una soluzione del problema del tipo $\mathbf{x}(t) = \exp(tA) \mathbf{c}(t)$, con $\mathbf{c}(t) \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R}^n)$. Abbiamo

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} (\exp(tA) \mathbf{c}(t)) = A \exp(tA) \mathbf{c} + \exp(tA) \dot{\mathbf{c}}$$

da cui, imponendo che $\mathbf{x}$ sia soluzione

$$A \exp(tA) \mathbf{c} + \exp(tA) \dot{\mathbf{c}} = A \exp(tA) \mathbf{c} + \mathbf{b}(t)$$

da cui

$$\exp(tA) \dot{\mathbf{c}} = \mathbf{b}(t)$$

cioè $\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{b}(t) \exp(-tA)$,

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \exp(-\tau A) \mathbf{b}(\tau) d\tau$$

ora, riapplichiamo l'esponenziale ad ambo i membri

$$\mathbf{x}(t) = \exp(tA) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \exp(tA) \exp(-\tau A) \mathbf{b}(\tau) d\tau$$

Infine, si ha la seguente

Proposizione IV.6 *Il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), & A \in \mathcal{M}(n, n; \mathbb{R}), \mathbf{b} \in \mathcal{C}^0(J, \mathbb{R}^n) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

ha soluzione globale

$$\mathbf{x}(t) = \exp(tA) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \exp((t-\tau)A) \mathbf{b}(\tau) d\tau$$

Calcolo della
soluzione
particolare per
un'equazione
di ordine n

Il risultato trovato consente di ricavare una formula per le **equazioni differenziali di ordine superiore lineari a coefficienti costanti**, quando sia noto l'integrale generale (ed è sempre noto come avremo modo di vedere tra poco) dell'equazione omogenea associata. Come sappiamo, si tratta di determinare una soluzione particolare del problema. Se ci riduciamo al sistema del primo ordine, per quanto visto sopra, una soluzione particolare è senz'altro

$$\bar{\mathbf{y}}(t) = \int_0^t \exp((t-\tau)A) \mathbf{b}(\tau) d\tau,$$

d'altra parte $\mathbf{b}(t) = (0, \dots, 0, b(t))$ per cui l'integranda si riduce al prodotto della colonna n -esima dell'esponenziale di A per $b(\tau)$, del vettore ottenuto ci interessa la prima componente, cioè $b(\tau)$ per l'elemento $1, n$ dell'esponenziale. Quest'ultimo è la soluzione dell'omogenea associata quando il dato iniziale sia $(0, \dots, 0, 1)$. Perciò se $u(t)$ è la soluzione dell'omogenea al dato iniziale $u(0) = \dot{u}(0) = \dots = u^{(n-2)}(0) = 0$ e $u^{(n-1)}(0) = 1$ si ha che una soluzione particolare è

$$y(t) = \int_0^t u(t-\tau) b(\tau) d\tau$$

Si ricava allora la

Proposizione IV.7 *Data l'equazione lineare a coefficienti costanti di ordine n*

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{u} + a_0u = b(t)$$

se $\mathcal{B} \equiv \{u_1, \dots, u_n\}$ è una base dello spazio vettoriale delle soluzioni dell'omogenea associata e se $u(t)$ è soluzione dell'omogenea associata al dato iniziale $u(0) = \dot{u}(0) = \dots = u^{(n-2)}(0) = 0$ e $u^{(n-1)}(0) = 1$, la soluzione generale dell'equazione completa è

$$c_1u_1(t) + \dots + c_nu_n(t) + \int_0^t u(t-\tau) b(\tau) d\tau$$

al variare di $c_i \in \mathbb{R}$ per $i \in J_n$.

**Soluzione
generale
dell'equazione
omogenea
di ordine n**

Vogliamo trovare l'integrale generale dell'equazione

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \dots + a_1\dot{u} + a_0u = 0 \quad (\text{OL})$$

Definito il **polinomio caratteristico dell'equazione differenziale** in $\mathbb{R}_n[z]$, $z \in \mathbb{C}$

$$p(z) \equiv z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$$

l'equazione può essere riscritta come

$$p(D)u = 0$$

dove D è l'operatore derivata temporale.

Siccome la derivata k -esima di un'esponenziale è proporzionale all'esponenziale stesso, cerchiamo una soluzione del tipo $u(t) = e^{\lambda t}$ con $\lambda \in \mathbb{C}$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= \lambda e^{\lambda t} \\ \ddot{u}(t) &= \lambda^2 e^{\lambda t} \\ &\vdots \\ u^{(n)}(t) &= \lambda^n e^{\lambda t} \end{aligned}$$

imponendo che u sia soluzione otteniamo

$$\begin{aligned} \lambda^n e^{\lambda t} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda t} + \dots + a_1\lambda e^{\lambda t} + a_0e^{\lambda t} &= 0 \\ (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda t} &= 0 \\ p(\lambda)e^{\lambda t} &= 0 \end{aligned}$$

da cui $e^{\lambda t}$ è soluzione se e solo se $\lambda \in \mathbb{C}$ è radice di p , cioè se e solo se $p(\lambda) = 0$. D'altra parte $p(z)$ è un polinomio reale a variabile complessa. Ha perciò n soluzioni in $\mathbb{C}$, il numero di radici complesse è pari perché se ζ è radice, tale è $\bar{\zeta}$. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ le radici distinte del nostro polinomio di molteplicità $m_1, \dots, m_k$ rispettivamente.

Notiamo che $(D - \alpha)(D - \beta)u = (D - \beta)(D - \alpha)u$, infatti

$$\begin{aligned} (D - \alpha)(Du - \beta u) &= D^2u - (\alpha + \beta)Du + \alpha\beta u = (D^2 - (\alpha + \beta)D + \alpha\beta)u \\ (D - \beta)(Du - \alpha u) &= D^2u - (\alpha + \beta)Du + \alpha\beta u = (D^2 - (\alpha + \beta)D + \alpha\beta)u \end{aligned}$$

sicché, se

$$p(z) = \prod_{i=1}^k (z - \lambda_i)^{m_i}$$

allora l'equazione potrà essere riscritta come

$$\prod_{i=1}^k (D - \lambda_i)^{m_i} u = 0$$

ove i termini nella produttoria sono interscambiabili. Questo semplifica molto il nostro studio. Abbiamo

Lemma IV.6 Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ e $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\nu \in \mathbb{N}$. Si ha

$$(D - \lambda)^\nu (ue^{\lambda t}) = (D^\nu u)e^{\lambda t}$$

Dimostrazione Induzione su ν :

$$(D - \lambda)(ue^{\lambda t}) = (Du)e^{\lambda t} + \lambda ue^{\lambda t} - \lambda ue^{\lambda t} = (Du)e^{\lambda t}$$

si ha

$$(\text{c.v.d.}) \quad (D - \lambda)^\nu (ue^{\lambda t}) = (D - \lambda)(D - \lambda)^{\nu-1} (ue^{\lambda t}) = (D - \lambda)((D^{\nu-1}u)e^{\lambda t}) = (D^\nu u)e^{\lambda t}$$

Corollario IV.5 Se λ è radice di molteplicità m di $p(z)$ allora $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{m-1}e^{\lambda t}$ sono soluzioni dell'equazione (OL).

Dimostrazione Basta riscrivere $p(D) = q(D)(D - \lambda)^m (ue^{\lambda t})$ si ha

$$0 = q(D)(D - \lambda)^m (ue^{\lambda t}) = q(D)(D^m u)e^{\lambda t}$$

(c.v.d.) se e solo se $D^m u = 0$, posto $u = t, \dots, t^{m-1}$ la tesi.

È istruttivo vedere per altra via che, per ogni autovalore λ con $m \equiv m(\lambda)$, oltre alla soluzione $e^{\lambda t}$ risolvono (OL) anche le $te^{\lambda t}, \dots, t^{m-1}e^{\lambda t}$. Consideriamo la funzione C^∞ su $\mathbb{R}^2$ data da

$$(z, t) \mapsto e^{zt}$$

La nostra equazione differenziale si riscrive come

$$E(t^r e^{\lambda t}) = E\left(\frac{\partial^r}{\partial z^r} e^{zt}\right) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \frac{\partial^r}{\partial z^r} e^{zt} + a_{n-1} \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \frac{\partial^r}{\partial z^r} e^{zt} + \dots + a_0 \frac{\partial^r}{\partial z^r} e^{zt}$$

dal teorema di Schwartz

$$\begin{aligned} E\left(\frac{\partial^r}{\partial z^r} e^{zt}\right) &= \frac{\partial^r}{\partial z^r} \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{zt} + a_{n-1} \frac{\partial^r}{\partial z^r} \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} e^{zt} + \dots + a_0 \frac{\partial^r}{\partial z^r} e^{zt} = \frac{\partial^r}{\partial z^r} (p(z) e^{zt}) \Big|_{z=\lambda} = \\ &= \sum_{j=1}^r \binom{r}{j} \frac{d^j}{dz^j} p(z) \Big|_{z=\lambda} \frac{\partial^{r-j}}{\partial z^{r-j}} e^{zt} = 0 \end{aligned}$$

essendo chiaramente $\frac{d^j}{dz^j} p(z) \Big|_{z=\lambda} = 0$

Infine abbiamo che, se m_i è la molteplicità di λ_i e $\{\lambda_i \mid i \in J_k\}$ è l'insieme di tutte le radici del polinomio caratteristico, l'insieme

$$\mathcal{S} \equiv \{e^{\lambda_i t}, te^{\lambda_i t}, \dots, t^{m_i-1} e^{\lambda_i t} \mid i \in J_k\}$$

giace in $\mathcal{V}$. Inoltre, $\mathcal{S}$ contiene $\sum m_i = n$ elementi. Se mostriamo che $\mathcal{S}$ è linearmente indipendente abbiamo che $\mathcal{S}$ è una base di $\mathcal{V}$ e abbiamo concluso il problema.

Per mostrare l'indipendenza di $\mathcal{S}$ dobbiamo vedere che

$$\sum_{i=1}^k (c_{i1} e^{\lambda_i t} + c_{i2} t e^{\lambda_i t} + \dots + c_{im_i} t^{m_i-1} e^{\lambda_i t}) = 0 \Rightarrow c_{ij} = 0 \forall i \in J_k, \forall j \in J_{m_i}$$

si tratta di mostrare che, per il principio di identità dei polinomi,

$$\sum_{i=1}^k p_i(t) e^{\lambda_i t} = 0, \deg p_i = m_i - 1 \Rightarrow p_i(t) = 0$$

Siamo ridotti a dimostrare la seguente

Proposizione IV.8 Se $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono complessi distinti e $p_1, \dots, p_k$ sono polinomi, allora $\sum_{i=1}^k p_i(t) e^{\lambda_i t} = 0$ se e solo se ciascun $p_i \equiv 0$.

Dimostrazione Cominciamo col notare che $D(p_i(t) e^{\lambda_i t})$ è ancora un quasi polinomio, $q_i(t) e^{\lambda_i t}$, con $\deg q_i = \deg p_i$, se $\lambda_i \neq 0$. Adesso, procediamo per assurdo. Esista un **minimo** intero k per cui

$$\sum_{i=1}^k p_i(t) e^{\lambda_i t} = 0$$

e ogni $p_i(t) \neq 0$. Dividiamo per $e^{\lambda_k t}$ troviamo, posto $\mu_j \equiv \lambda_j - \lambda_k$,

$$\sum_{i=1}^{k-1} p_i(t) e^{\mu_i t} = -p_k(t)$$

Deriviamo $m_k + 1$ volte e otteniamo

$$\sum_{i=1}^{k-1} q_i(t) e^{\mu_i t} = 0$$

con q_i polinomi e μ_i $k-1$ complessi distinti. Siccome $\mu_i \neq 0$ i q_i hanno lo stesso grado dei p_i (c.v.d.) che sono non nulli perciò sono non nulli. Questo contraddice la minimalità di k .

Teorema IV.13 Data l'equazione (OL) e definito il polinomio caratteristico $p(z) \equiv z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$, se $\{\lambda_i \mid i \in J_k\}$ è l'insieme degli zeri di $p(z)$ allora una base per lo spazio vettoriale delle soluzioni $\mathcal{V}$ è

$$\mathcal{B} \equiv \{e^{\lambda_i t}, t e^{\lambda_i t}, \dots, t^{m_i-1} e^{\lambda_i t} \mid i \in J_k\}$$

Come detto, siccome $p(z)$ è a coefficienti reali, ogni suo zero complesso $\zeta = \alpha + i\beta$ è accompagnato dal coniugato $\bar{\zeta}$. Per ogni coppia di autovalore complessi coniugati prendiamo le combinazioni indipendenti

$$\begin{aligned} t^k \frac{e^{\zeta t} + e^{\bar{\zeta} t}}{2} &= t^k e^{\alpha t} (\cos \beta t) \\ t^k \frac{e^{\zeta t} - e^{\bar{\zeta} t}}{2i} &= t^k e^{\alpha t} (\sin \beta t) \end{aligned}$$

per cui se l'insieme degli autovalori è

$$\{\lambda_i \in \mathbb{R} \mid i \in J_{k_1}\} \cup \{\zeta_j, \bar{\zeta}_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \mid i \in J_{k_2}\}$$

la base di $\mathcal{V}$ diventa, posto $m_i \equiv m(\lambda_i)$, $n_j \equiv m(\zeta_j) = m(\bar{\zeta}_j)$,

$$\left\{ t^r e^{\lambda_i t} \mid r \in J_{m_i-1}^0, i \in J_{k_1} \right\} \cup \left\{ t^r e^{\operatorname{Re} \zeta_j t} \cos(\operatorname{Im} \zeta_j t), t^r e^{\operatorname{Re} \zeta_j t} \sin(\operatorname{Im} \zeta_j t) \mid r \in J_{n_j-1}^0, j \in J_{k_2} \right\}$$

Il problema è ora completamente risolto.

Per completezza, riportiamo un ultimo per il calcolo di una soluzione particolare nel caso il termine forzante sia un quasi polinomio

Proposizione IV.9 Siano $a(t)$ un polinomio e $\alpha \neq 0 \in \mathbb{C}$. Sia data l'equazione a coefficienti costanti

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \dots + a_1\dot{u} + a_0u = a(t)e^{\alpha t}.$$

Allora

- (i) se α non è radice del polinomio caratteristico, una soluzione è data da $c(t)e^{\alpha t}$ con $c(t)$ polinomio dello stesso grado di a ;
- (ii) se α è radice di molteplicità ν del polinomio caratteristico, una soluzione è data da $t^\nu c(t)e^{\alpha t}$ con $c(t)$ polinomio dello stesso grado di a .

Dimostrazione Prova di questa proposizione si ha considerando il lemma proposto e l'annotazione fatta al principio della dimostrazione dell'ultima proposizione. Nel caso (ii) si ha

$$q(D)(D - \alpha)^\nu (t^\nu c(t)e^{\alpha t}) = q(D)(c_1 e^{\alpha t})$$

con c_1 ancora di grado pari a $\deg a$ grazie alla presenza del termine moltiplicativo t^ν . Dopodiché il caso (ii) è ricondotto al caso (i). Qui, si ha

$$E(c(t)e^{\alpha t}) = d(t)e^{\alpha t}$$

(c.v.d.) con $d(t)$ polinomio di grado pari a quello di c e perciò pari a quello di a .

IV.6.5 L'equazione di Eulero

Si dice **equazione di Eulero** o equidimensionale, l'equazione differenziale, definita per $x > 0$ oppure per $t < 0$

$$x^m u^{(m)} + a_{m-1}x^{m-1}u^{(m-1)} + \dots + a_1x\dot{u} + a_0u = f(x)$$

Pensiamo al caso $x > 0$, è allora lecito effettuare la sostituzione

$$x = e^t \Leftrightarrow t = \log x, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$$

si tratterà di determinare allora la funzione

$$v(t) = u(e^t)$$

perciò

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= e^t \frac{du}{dx}(e^t) = x \frac{du}{dx} \\ \frac{d^2v}{dt^2} &= e^t \frac{du}{dx}(e^t) + e^{2t} \frac{d^2u}{dx^2} = x \frac{du}{dx} + x^2 \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{dv}{dt} + x^2 \frac{d^2u}{dx^2} \\ \frac{d^3v}{dt^3} &= \frac{d^2v}{dt^2} + 2e^{2t} \frac{d^2u}{dx^2} + e^{3t} \frac{d^3u}{dx^3} = \frac{d^2v}{dt^2} + 2x^2 \frac{d^2u}{dx^2} + x^3 \frac{d^3u}{dx^3} = \\ &= \frac{d^2v}{dt^2} + 2 \frac{d^2v}{dt^2} - 2 \frac{dv}{dt} + x^3 \frac{d^3u}{dx^3} \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned} x \frac{du}{dx} &= \frac{dv}{dt} \\ x^2 \frac{d^2u}{dx^2} &= \frac{d^2v}{dt^2} - \frac{dv}{dt} = \left(\frac{d}{dt} - 1 \right) \frac{dv}{dt} \\ x^3 \frac{d^3u}{dx^3} &= \frac{d^3v}{dt^3} - 3 \frac{d^2v}{dt^2} + 2 \frac{dv}{dt} = \left(\frac{d}{dt} - 2 \right) \left(\frac{d}{dt} - 1 \right) \frac{dv}{dt} \end{aligned}$$

per induzione si prova allora che

$$x^k \frac{d^k u}{dx^k} = \left(\frac{d}{dt} - k + 1 \right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{d}{dt} - 1 \right) \frac{dv}{dt}$$

infatti, derivando nel tempo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(e^{kt} \frac{d^k u}{dx^k} \right) &= e^{(k+1)t} \frac{d^{(k+1)} u}{dx^{(k+1)}} + k e^{kt} \frac{d^k u}{dx^k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} - k + 1 \right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{d}{dt} - 1 \right) \frac{dv}{dt} = \\ x^{k+1} \frac{d^{(k+1)} u}{dx^{(k+1)}} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} - k + 1 \right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{d}{dt} - 1 \right) \frac{dv}{dt} - k x^k \frac{d^k u}{dx^k} = \\ x^{k+1} \frac{d^{(k+1)} u}{dx^{(k+1)}} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} - k + 1 \right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{d}{dt} - 1 \right) \frac{dv}{dt} - k \left(\frac{d}{dt} - k + 1 \right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{d}{dt} - 1 \right) \frac{dv}{dt} = \\ x^{k+1} \frac{d^{(k+1)} u}{dx^{(k+1)}} &= \left(\frac{d}{dt} - k \right) \left(\frac{d}{dt} - k + 1 \right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{d}{dt} - 1 \right) \frac{dv}{dt}. \end{aligned}$$

Perciò operando la sostituzione si perviene a una equazione differenziale lineare a coefficienti costanti per $v(t)$. Determinata $v(t)$ si torna a $u(x)$ ricordando che

$$v(\log(x)) = u(x)$$

IV.7 Flusso di un'equazione differenziale

IV.7.1 Continuità del flusso

Poniamoci nuovamente nelle ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale di Cauchy e Lipschitz. In un piccolo intorno del dato iniziale $(t_0, \mathbf{x}_0)$ è univocamente determinato il flusso $\Phi_{t_0}^t(\mathbf{x})$ che associa alla condizione iniziale $(t_0, \mathbf{x})$ la soluzione del corrispondente problema di Cauchy $\mathbf{u}(t) = \Phi_{t_0}^t(\mathbf{x})$. Il flusso è una funzione di t e $\mathbf{x}$ punto rappresentativo delle spazio delle fasi da cui si avvia il moto. Abbiamo già visto che come funzione di t il flusso è $\mathcal{C}^1$. Adesso vogliamo studiare la continuità di Φ rispetto a $\mathbf{x}$.

Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e J un intervallo della retta reale. Dato il campo di velocità continuo e lipschitziano nella seconda variabile $\mathbf{v} : J \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, se $\mathbf{y}(t)$ e $\mathbf{z}(t)$ sono soluzioni dell'equazione differenziale associata ai dati iniziali $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ e $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, $t \in [t_0, t_1] \subseteq J$, allora, posto $\mathbf{w} \equiv (\mathbf{y} - \mathbf{z})(t)$

$$\|\dot{\mathbf{w}}(t)\|_n = \|\mathbf{v}(\mathbf{y}(t), t) - \mathbf{v}(\mathbf{z}(t), t)\|_n \leq K \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}(t)\|_n = K \|\mathbf{w}(t)\|_n$$

dalla disuguaglianza di Gronwall si ha

$$\|\mathbf{w}(t)\|_n \leq \|\mathbf{w}(t_0)\|_n e^{K|t-t_0|} \leq \|\mathbf{w}(t_0)\|_n e^{K|t_1-t_0|}$$

cioè

$$\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}(t)\|_n \leq \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{z}_0\|_n e^{K|t_1-t_0|}$$

ossia

$$\|\Phi_{t_0}^t(\mathbf{y}_0) - \Phi_{t_0}^t(\mathbf{z}_0)\|_n \leq \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{z}_0\|_n e^{K|t_1-t_0|}$$

Si ha che il flusso è lipschitziano e perciò **continuo** nel dato iniziale. Riassumendo

Teorema IV.14
(continuità del flusso)

Nelle ipotesi del teorema di esistenza e unicità in piccolo, si ha che, nell'intorno del dato iniziale ove il flusso è definito e unico per lo stesso teorema di esistenza e unicità in piccolo, il flusso è continuo nel dato iniziale $\mathbf{y} = \mathbf{x}(t_0)$. Cioè nell'intorno detto l'applicazione di avanzamento temporale $\Phi_{t_0}^t(\mathbf{y})$ è continua in $\mathbf{y}$. Si ha di più, il flusso è lipschitziano, se $\alpha = |t_1 - t_0|$ è l'ampiezza dell'intervallo temporale di esistenza,

$$\|\Phi_{t_0}^t(\mathbf{y}) - \Phi_{t_0}^t(\mathbf{z})\|_n \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_n e^{K\alpha}$$

IV.7.2 Differenziabilità del flusso

Il teorema di differenziabilità

Consideriamo un campo di velocità $\mathcal{C}^1$ di modo che valga la continuità del flusso nel dato iniziale, oltre al teorema di Cauchy-Lipschitz in piccolo. Sia $\mathcal{B} \equiv \Omega_0 \times J_0 \subseteq \Omega \times J$ un compatto contenente $(\mathbf{y}, t_0)$ sul quale è definito il flusso $\Phi_{t_0}^t(\mathbf{y})$. Consideriamo il seguente sistema

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}(t)) \\ \dot{\mathbf{z}}(t) = \frac{\partial \mathbf{v}(t, \mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{z}(t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{y} \\ \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0 \end{cases}$$

Risolviamo il problema di Cauchy per $\mathbf{x}$, esso rispetta le condizioni del teorema di esistenza e unicità in piccolo. Perciò esiste ed è continua nel tempo la funzione $\mathbf{x}(t)$. Possiamo riformulare il problema per $\mathbf{z}$, si ha

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \frac{\partial \mathbf{v}(t, \mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{z}(t) = A(t) \mathbf{z}(t)$$

che ha un campo di velocità $A(t) \mathbf{z}$. Quest'ultima applicazione è continua nel tempo come composizione di applicazioni continue (si rammenti che $\mathbf{v} \in \mathcal{C}^1$) ed è lineare nello spazio. È facile vedere che su J_0 che è compatto, usando il teorema di Weierstraß per $\|A(t)\|$,

$$\|A(t) \mathbf{z}_1 - A(t) \mathbf{z}_2\| \leq \|A(t)\| \cdot \|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\| \leq \max_{t \in J_0} \{\|A(t)\|\} \|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|$$

Dunque,

posto $\mathbf{w} = (\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$, $\mathbf{w}_0 = (\mathbf{y}, \mathbf{z}_0)$ e $\mathcal{F}(\mathbf{w}, t) = (\mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t), [\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t) / \partial \mathbf{x}] \mathbf{z}(t))$, il problema

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{w}}(t) = \mathcal{F}(\mathbf{w}(t), t) \\ \mathbf{w}(t_0) = \mathbf{w}_0 \end{cases}$$

ammette soluzione in un intorno di $(t_0, \mathbf{w}_0)$.

Vogliamo mostrare che la soluzione $\mathbf{z}(t)$ è la derivata spaziale del flusso $\Phi_{t_0}^t(\mathbf{y})$ in direzione $\mathbf{z}_0$, cioè vogliamo vedere che

$$\lim_{\|\mathbf{z}_0\| \rightarrow 0^+} \frac{\|\Phi_{t_0}^t(\mathbf{y} + \mathbf{z}_0) - \Phi_{t_0}^t(\mathbf{y}) - \mathbf{z}(t)\|}{\|\mathbf{z}_0\|} = 0$$

Se così fosse, sostituendo a $\mathbf{z}_0$ i versori della base standard otterremmo lo jacobiano di $\Phi_{t_0}^t(\mathbf{y})$ in $\mathbf{y}$. Ne deriverebbe che tale jacobiano calcolato in $\mathbf{y}$, risolve il seguente problema (simultaneo

al problema di Cauchy dato) definito, come per l'esponenziale, su $\mathcal{M}(n, n, \mathbb{R})$:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{v}(t, \Phi_{t_0}^t(\mathbf{y}))}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{X} \\ \mathbf{X}(t_0) = I \end{cases}$$

In questa veste, **equazione alle variazioni**, si ha subito che il flusso è $\mathcal{C}^1$. Inoltre, le componenti di $\dot{\mathbf{X}}$ sono le derivate miste (tempo-spazio) del flusso: esse sono allora continue.

Per proseguire, ci occorre un lemma

Lemma IV.7
(disuguaglianza di Gronwall (II))

Preso $f : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ una funzione integrabile non negativa per cui esistono α e β non negativi tali che

$$0 \leq f(t) \leq \beta + \alpha \int_{t_0}^t f(s) ds, \quad t_0, t \in I$$

vale

$$f(t) \leq \beta e^{\alpha t}$$

Dimostrazione

Se $\alpha = 0$ la tesi è immediata. Sia $\alpha > 0$. Sia $\beta > 0$, allora

$$u(t) \equiv \beta + \alpha \int_{t_0}^t f(s) ds > 0$$

u è derivabile e risulta

$$\dot{u} = \alpha f(t) \leq \alpha u(t)$$

da cui, $u > 0$, si ha

$$\frac{\dot{u}}{u} \leq \alpha$$

e integrando $f(t) \leq u(t) \leq \beta e^{\alpha t}$. Sia $\beta = 0$. Preso $\beta_n > 0$ e $\beta_n \rightarrow 0$, per ogni n si può definire u_n come u sopra, si ottiene perciò

(c.v.d.)

$$f(t) \leq u_n(t) \leq \beta_n e^{\alpha t} \rightarrow 0$$

Vogliamo applicare la disuguaglianza trovata alla

$$f(t) \equiv \|\Phi_{t_0}^t(\mathbf{y} + \mathbf{z}_0) - \Phi_{t_0}^t(\mathbf{y}) - \mathbf{z}(t)\|$$

Dall'equazione di Volterra, abbiamo $\Phi_{t_0}^t(\mathbf{w}) = \mathbf{w} + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(s, \Phi_{t_0}^s(\mathbf{w})) ds$, perciò

$$\begin{aligned} f(t) &= \left\| \mathbf{y} + \mathbf{z}_0 - \mathbf{y} - \mathbf{z}_0 + \int_{t_0}^t \left[\mathbf{v}(s, \Phi_{t_0}^s(\mathbf{y} + \mathbf{z}_0)) - \mathbf{v}(s, \Phi_{t_0}^s(\mathbf{y})) - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}(s, \Phi_{t_0}^s(\mathbf{y})) \mathbf{z}(s) \right] ds \right\| \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t \left\| \mathbf{v}(s, \Phi_{t_0}^s(\mathbf{y} + \mathbf{z}_0)) - \mathbf{v}(s, \Phi_{t_0}^s(\mathbf{y})) - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}(s, \Phi_{t_0}^s(\mathbf{y})) \mathbf{z}(s) \right\| ds \end{aligned}$$

ora, dal teorema di Taylor, ricaviamo che

$$\left\| \mathbf{v}(s, \mathbf{y}_2) - \mathbf{v}(s, \mathbf{y}_1) - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}(s, \mathbf{y}_1) \cdot (\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) \right\| = o(\|\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1\|), \quad \mathbf{y}_2 \rightarrow \mathbf{y}_1$$

dalla continuità del flusso, per $\mathbf{z}_0$ che tende a 0 si ha

$$\begin{aligned} &\left\| \mathbf{v}(s, \Phi_{t_0}^s(\mathbf{y} + \mathbf{z}_0)) - \mathbf{v}(s, \Phi_{t_0}^s(\mathbf{y})) - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}(s, \Phi_{t_0}^s(\mathbf{y})) \cdot (\Phi_{t_0}^s(\mathbf{y} + \mathbf{z}_0) - \Phi_{t_0}^s(\mathbf{y})) \right\| = \\ &= o(\|\Phi_{t_0}^s(\mathbf{y} + \mathbf{z}_0) - \Phi_{t_0}^s(\mathbf{y})\|) \leq \varepsilon \|\Phi_{t_0}^s(\mathbf{y} + \mathbf{z}_0) - \Phi_{t_0}^s(\mathbf{y})\| \end{aligned}$$

per ogni $\varepsilon > 0$, scelto $\mathbf{z}_0$ sufficientemente piccolo. Dal teorema di continuità del flusso, in $\mathcal{B}$ a meno di riscaldare ε , il flusso è lipschitziano, per cui, **ancora per ogni** ε a patto di scegliere $\mathbf{z}_0$ piccolo a seconda di ε ,

$$\left\| \mathbf{v}(s, \Phi_{t_0}^s(\mathbf{y} + \mathbf{z}_0)) - \mathbf{v}(s, \Phi_{t_0}^s(\mathbf{y})) - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}(s, \Phi_{t_0}^s(\mathbf{y})) \cdot (\Phi_{t_0}^s(\mathbf{y} + \mathbf{z}_0) - \Phi_{t_0}^s(\mathbf{y})) \right\| \leq \varepsilon \|\mathbf{z}_0\|$$

Se chiamiamo $A(s, \mathbf{y}) \equiv \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}(s, \Phi_{t_0}^s(\mathbf{y}))$, abbiamo

$$\begin{aligned} f(t) &\leq \int_{t_0}^t \|A(s, \mathbf{y}) \cdot (\Phi_{t_0}^s(\mathbf{y} + \mathbf{z}_0) - \Phi_{t_0}^s(\mathbf{y})) - A(s, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}(s)\| ds + \int_{t_0}^t \varepsilon \|\mathbf{z}_0\| ds \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t \|A(s, \mathbf{y}) \cdot (\Phi_{t_0}^s(\mathbf{y} + \mathbf{z}_0) - \Phi_{t_0}^s(\mathbf{y}) - \mathbf{z}(s))\| ds + C_2 \varepsilon \|\mathbf{z}_0\| \end{aligned}$$

preso, essendo $\mathcal{B}$ compatto

$$C_1 \equiv \max_{(X,t) \in \mathcal{B}} \left\{ \left\| \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right\| \right\}$$

troviamo

$$\begin{aligned} f(t) &\leq C_1 \int_{t_0}^t \|\Phi_{t_0}^s(\mathbf{y} + \mathbf{z}_0) - \Phi_{t_0}^s(\mathbf{y}) - \mathbf{z}(s)\| ds + C_2 \varepsilon \|\mathbf{z}_0\| = \\ &= C_1 \int_{t_0}^t f(s) ds + C_2 \varepsilon \|\mathbf{z}_0\| \end{aligned}$$

per il lemma di Gronwall

$$\|\Phi_{t_0}^t(\mathbf{y} + \mathbf{z}_0) - \Phi_{t_0}^t(\mathbf{y}) - \mathbf{z}(t)\| \leq C_2 \varepsilon \|\mathbf{z}_0\| e^{C_1 t}, t \in J_0$$

per l'arbitrarietà di ε , si ha

$$\lim_{\|\mathbf{z}_0\| \rightarrow 0^+} \frac{\|\Phi_{t_0}^t(\mathbf{y} + \mathbf{z}_0) - \Phi_{t_0}^t(\mathbf{y}) - \mathbf{z}(t)\|}{\|\mathbf{z}_0\|} = 0$$

Si conclude finalmente con il

Teorema IV.15
(differenziabilità
del flusso)

Se il campo di velocità nel problema di Cauchy è di classe $\mathcal{C}^1$ in un intorno del punto $(t_0, \mathbf{x}_0)$ allora esiste il flusso $\Phi_{t_0}^t(\mathbf{y})$ che è ivi univocamente definito, continuo e differenziabile con continuità (di classe $\mathcal{C}^1$). Esistono, poi, e sono continue le derivate miste del tipo

$$\frac{\partial^2 \Phi_{t_0}^t(\mathbf{y})}{\partial t \partial \mathbf{y}} = \frac{\partial^2 \Phi_{t_0}^t(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y} \partial t}$$

Si ha inoltre che lo jacobiano del flusso risolve l'equazione alle variazioni

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}(t, \Phi_{t_0}^t(\mathbf{y})) \cdot \mathbf{X} \\ \mathbf{X}(t_0) = I \end{cases}$$

$$\mathbf{X}(t) = \partial \Phi_{t_0}^t(\mathbf{y}) / \partial \mathbf{y}.$$

Per induzione si trova che se il campo di velocità è $\mathcal{C}^r$ allora il flusso è di classe $\mathcal{C}^r$.

Linearizzazione
e piccole
oscillazioni

Consideriamo un sistema autonomo. Sia $\mathbf{x}_0$ un punto di equilibrio, cioè, valga, $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0) = 0$, allora $\Phi_{t_0}^t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$. Calcoliamo lo jacobiano del flusso in $\mathbf{x}_0$. Abbiamo

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}(\Phi_{t_0}^t(\mathbf{x}_0)) \cdot \mathbf{X} \\ \mathbf{X}(t_0) = I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{X} \\ \mathbf{X}(t_0) = I \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\frac{\partial \Phi_{t_0}^t(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}_0} = \exp\left(t \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0)\right)$$

Sia $A \equiv \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0)$. Vogliamo approssimare linearmente il campo di velocità nelle vicinanze di un punto di equilibrio, in modo da poter trovare esplicitamente la soluzione del problema (ne è celebre esempio l'**approssimazione delle piccole oscillazioni**). Il campo diventa, posto $t_0 = 0$, $\mathbf{x}_0 = 0$, preso un dato iniziale $\bar{\mathbf{x}}$ in un intorno di 0

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(0) + A\mathbf{x} = A\mathbf{x}$$

sicchè il problema

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}} \end{cases}$$

viene trasformato nel **linearizzato**

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} \\ \mathbf{y}(0) = \bar{\mathbf{x}} \end{cases}$$

quest'ultimo ha soluzione $\mathbf{y}(t) = \exp(tA)\bar{\mathbf{x}} = \frac{\partial\Phi^t(0)}{\partial\bar{\mathbf{x}}}\bar{\mathbf{x}}$. Sfruttiamo la differenziabilità del campo in $\bar{\mathbf{x}}$ per sviluppare, intorno a 0 la soluzione del problema completo:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi^t(\bar{\mathbf{x}}) = \Phi^t(0) + \frac{\partial\Phi^t(0)}{\partial\bar{\mathbf{x}}}\bar{\mathbf{x}} + o(\bar{\mathbf{x}}) = 0 + \frac{\partial\Phi^t(0)}{\partial\bar{\mathbf{x}}}\bar{\mathbf{x}} + o(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{y}(t) + o(\bar{\mathbf{x}})$$

Perciò la soluzione del sistema linearizzato e quella del sistema completo differiranno per un o -piccolo della distanza del dato iniziale dal punto di equilibrio. Fissati ora un $\varepsilon > 0$ e un tempo $T > 0$ si ha che, per ogni tempo t

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\| = o(\bar{\mathbf{x}})$$

ma, nel compatto $[0, T]$ esiste $\bar{t}$ per cui, per il teorema di Weierstraß, risulta

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\| \leq \|\mathbf{x}(\bar{t}) - \mathbf{y}(\bar{t})\|$$

d'altra parte, fissato ora l'istante $\bar{t}$, esiste $\delta > 0$ per cui se $\|\bar{\mathbf{x}}\| < \delta$ allora

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(\bar{t}) - \mathbf{y}(\bar{t})\| &< \varepsilon \|\bar{\mathbf{x}}\| < \varepsilon\delta \\ \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\| &< \|\mathbf{x}(\bar{t}) - \mathbf{y}(\bar{t})\| < \varepsilon\delta \end{aligned}$$

da cui si ricava il

Teorema IV.16 *Sia 0 un punto di equilibrio per un campo di velocità autonomo $\mathcal{C}^1 \mathbf{v}$. Per ogni $T > 0$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ per cui se $\|\bar{\mathbf{x}}\| < \delta$, la soluzione $\mathbf{x}(t)$ del problema di Cauchy al dato $\mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}}$ differisce dalla soluzione del corrispondente problema linearizzato $\mathbf{y}(t)$ secondo la disuguaglianza*

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\| < \varepsilon\delta, \forall t \in [0, T]$$

Il teorema afferma perciò che per $\bar{\mathbf{x}}$ sufficientemente piccoli, la differenza tra le soluzioni del sistema linearizzato e di quello iniziale è piccola rispetto al dato iniziale e perciò durante un intervallo di tempo lungo le soluzioni di entrambi i sistemi rimangono vicine. Questo teorema giustifica l'utilità dello studio dei problemi linearizzati e perciò dell'**approssimazione delle piccole oscillazioni**.

IV.7.3 Il teorema di rettificazione

Azione di un diffeomorfismo su un'equazione differenziale

Lo studio delle equazioni differenziali può essere interamente derivato dal **teorema di rettificazione** o **teorema fondamentale delle equazioni differenziali**. Esso studia l'azione di un diffeomorfismo su un'equazione differenziale.

Sia dato un problema di Cauchy, per semplicità autonomo,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

allora se f è un diffeomorfismo locale in $\mathbf{x}_0$, si può equivalentemente studiare il problema nelle coordinate $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ introdotte dal diffeomorfismo,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = df(f^{-1}(\mathbf{y}))\mathbf{v}(f^{-1}(\mathbf{y})) \\ \mathbf{y}(t_0) = f(\mathbf{x}_0) \end{cases}$$

poiché, $\phi(t)$ risolve il primo se e solo se $f \circ \phi(t)$ risolve il secondo:

$$\frac{df \circ \phi(t)}{dt} = df(\phi(t))\dot{\phi}(t) = df(\phi(t))\mathbf{v}(\phi(t))$$

ed essendo $\phi(t) = f^{-1}(f \circ \phi)(t)$, si ha la tesi.

Si tratta allora di cercare diffeomorfismi convenienti, tali cioè da semplificare la soluzione del problema di Cauchy. A questo scopo si dimostra il teorema di rettificazione.

Dimostrazione del teorema di rettificazione

Il teorema di rettificazione si ottiene facilmente dai teoremi di differenziabilità del flusso di cui alla sottosezione precedente. Consideriamo un sistema autonomo con campo di velocità di classe $\mathcal{C}^1(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

con $\mathbf{v}_0 \equiv \mathbf{v}(\mathbf{x}_0) \neq 0$. Presa la retta r individuata in $\mathbb{R}^n$ da $\mathbf{v}_0$, condieriamo l'iperpiano π ortogonale ad essa, sicché

$$\mathbb{R}^n = \pi \oplus r$$

Con una trasformazione lineare, fissiamo un nuovo sistema di coordinate cartesiane $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in J_n}$ di modo che $\mathbf{v}_0 = \lambda \mathbf{e}_n$, $\lambda \neq 0$. Se V è un intorno di $\mathbf{x}_0$ giacente sul piano π sottoinsieme di Ω , definiamo l'applicazione $G: V \times I \rightarrow W \subseteq \mathbb{R}^n$, I intervallo di $\mathbb{R}$, talché $(\xi, y) \mapsto \Phi_{t_0}^{y+t_0}(\tilde{\xi})$, $\tilde{\xi} \equiv (\xi, 0)$. Come funzione di y G è certamente $\mathcal{C}^1$, altrettanto per ξ , infatti, fissato y , è composizione di funzioni $\mathcal{C}^1$

$$\xi \mapsto \tilde{\xi} \equiv (\xi, 0) \mapsto \Phi_{t_0}^{y+t_0}(\tilde{\xi})$$

con

$$\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \xi} = \begin{pmatrix} I_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo allora lo jacobiano di G nel punto $(0, 0)$ che coincide con $\mathbf{x}_0$. Allora,

$$\mathcal{M}(n, n; \mathbb{R}) \ni \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial \xi}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial G}{\partial y}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

calcoliamo il primo blocco: fissiamo $y = 0$ abbiamo, dall'equazione alle variazioni,

$$\frac{\partial G}{\partial \xi}(\mathbf{x}_0) = \left. \frac{\partial \Phi_{t_0}^{t_0}(\tilde{\xi})}{\partial \tilde{\xi}} \right|_{\mathbf{x}_0} = \left. \frac{\partial \Phi_{t_0}^{t_0}(\tilde{\xi})}{\partial \tilde{\xi}} \right|_{(\mathbf{x}_0, t_0)} \cdot \begin{pmatrix} I_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} = I_n \cdot \begin{pmatrix} I_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix};$$

calcoliamo il secondo blocco: fissato il dato iniziale si tratta di derivare in t_0 rispetto al tempo la soluzione, otteniamo il campo all'istante iniziale; infine,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial \xi}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial G}{\partial y}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n-1} & \mathbf{v}_0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

dal fatto che λ è diverso da 0 si ha che lo jacobiano nel punto $\mathbf{x}_0$ dell'applicazione G è diverso da 0. Se ne conclude che G è un diffeomorfismo locale, perciò un **buon cambiamento di coordinate**. Con interpretazione attiva, preso un punto $\mathbf{x} = \Phi_{t_0}^{y+t_0}(\xi, 0)$, immagine del punto $\mathbf{z} = (\xi, y)$, esso è l'evoluto temporale del punto $\tilde{\xi}$ dopo il tempo y . Se $\mathbf{x}(t)$ è soluzione dell'equazione differenziale $(\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0)$, mentre $\mathbf{x}$ si sposta sulla curva di fase, esso rimane l'evoluto temporale di $\tilde{\xi}$, perciò, scorre la componente n -esima di $\mathbf{z}$, che diviene $y = t - t_0$, mentre restano invariate tutte le altre. In questo senso il sistema nelle coordinate $\mathbf{z}$ è **rettificato**, e fornisce $n - 1$ **integrali primi del moto**.

Rendiamo rigorosa l'osservazione. Sia $\mathbf{x} = G(\mathbf{z})$, cioè $\mathbf{z}$ sia la parametrizzazione dell'intorno di $\mathbf{x}_0$ introdotta dal diffeomorfismo G . Consideriamo l'equazione differenziale

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{e}_n$$

riscritta in termini delle $\mathbf{x}$ diventa

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial G}{\partial \mathbf{z}}(G^{-1}(\mathbf{x})) \dot{\mathbf{z}} = \frac{\partial G}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}) \mathbf{e}_n$$

d'altra parte, come prima, $\mathbf{z} = (\xi, y)$

$$\frac{\partial G}{\partial \xi}(\mathbf{z}) = A \begin{pmatrix} I_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \dots & \mathbf{e}_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1 & \dots & A^{n-1} \end{pmatrix}$$

con A opportuna matrice di colonne $A^1, \dots, A^n$. Inoltre,

$$\frac{\partial G}{\partial y}(\mathbf{z}) = \frac{\partial}{\partial y} \Phi_{t_0}^{y+t_0}(\xi, 0) = \mathbf{v}(\Phi_{t_0}^{y+t_0}(\xi, 0)) = \mathbf{v}(G(\mathbf{z})) = \mathbf{v}(\mathbf{x})$$

allora

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial G}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}) \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} A^1 & \dots & A^{n-1} & \mathbf{v}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \mathbf{e}_n = \mathbf{v}(\mathbf{x})$$

Cioè il diffeomorfismo G manda l'equazione

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{e}_n$$

nell'equazione di partenza. Se ne conclude che G^{-1} manda il sistema differenziale di partenza in quello rettificato, ove, $\mathbf{x}_0 = \Phi_{t_0+y}^{t_0+y}(\boldsymbol{\xi}, 0) \Leftrightarrow \boldsymbol{\xi} = 0, y = 0$:

$$\begin{aligned} z_i &= \xi_i = z_i(t_0), \quad i \in J_{n-1} \\ z_n &= y = z_n(t_0) + (t - t_0) = t - t_0 \end{aligned}$$

L'ultima equazione fornisce il tempo di percorrenza della curva di fase $\mathbf{x}(t)$.

Questa è la dimostrazione del fondamentale

Teorema
IV.17 (di
rettificazione)

Sia dato il campo vettoriale di classe $\mathcal{C}^1(\Omega)$, Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{v}$ non nullo nel punto $\mathbf{x}_0$. Esiste allora un intorno V di $\mathbf{x}_0$, tale che, dato il problema

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \bar{\mathbf{x}} \in V \end{cases}$$

esiste un diffeomorfismo $f(\mathbf{x})$ di classe $\mathcal{C}^1(V)$ in $\mathbf{x}_0$ tale che, posto $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$, trasforma l'equazione differenziale nella equivalente

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{e}_n \\ \mathbf{y}(t_0) = f(\bar{\mathbf{x}}) \end{cases}$$

La misura di Lebesgue

In questo e nel prossimo capitolo ci occuperemo della teoria della misura e dell'integrazione alla Lebesgue. Essa presenta notevoli vantaggi rispetto a quella più rudimentale di Riemann, soprattutto per quello che riguarda il passaggio sotto il segno di integrale di limite e derivata. Inoltre, l'integrale di Lebesgue è una estensione di quello di Riemann, sicché restano validi tutti i risultati ottenuti in Analisi I.

V.1 Misura di un insieme

V.1.1 Misura di plurirettangoli

Misura di un intervallo n -dimensionale

Un **intervallo n -dimensionale** $I \subseteq \mathbb{R}^n$ è il prodotto cartesiano di n -intervalli unidimensionali I_i , $i \in J_n$, sicché

$$I = I_1 \times \dots \times I_n,$$

perciò se $I_i \equiv [a_i, b_i]$ si ha, se $\mathbf{x} \equiv (x_1, \dots, x_n)$

$$I \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i, i \in J_n\}$$

La misura di un intervallo n -dimensionale è il volume di un “rettangolo” n -dimensionale, perciò si pone

$$m(I) \equiv \prod_{i=1}^n m(I_i) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

Reticolati e plurirettangoli. Misura di un plurirettangolo

Su ciascun asse coordinato fissiamo un numero finito di punti: sull'asse i -esimo essi siano, in ordine strettamente crescente, $a_1^{(i)}, \dots, a_{k_i}^{(i)} \in \mathbb{R}$. Ciascun punto fissato individua un **iperpiano** di equazione $x_i = a_j^{(i)}$. L'unione dei $\sum k_i$ iperpiani costituisce un **reticolato** $\mathcal{P}$ in $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{P}$ divide $\mathbb{R}^n$ in un numero finito di intervalli n -dimensionali (**intervalli di $\mathcal{P}$**) e in un certo numero di intervalli illimitati. Poniamo allora la seguente

Definizione V.1 Un insieme X si dice plurirettangolo (o plurintervallo) se esiste un reticolato $\mathcal{P}$ talché X sia l'unione di un numero finito di intervalli di $\mathcal{P}$.

Se, poi, $I_1, \dots, I_m$ sono gli intervalli di $\mathcal{P}$ per cui

$$X = \bigcup_{i=1}^m I_i$$

allora si assegna alla misura di X la somma delle misura degli intervalli

$$m(X) = \sum_{i=1}^m m(I_i)$$

Dobbiamo assicurarci che la definizione data sia buona, cioè che la misura di un plurirettangolo

sia univoca, visto che un plurirettangolo non individua in modo definitivo un reticolato. Ci occorre introdurre la nozione di **raffinamento** $\mathcal{P}'$ di $\mathcal{P}$, si scrive $\mathcal{P} \prec \mathcal{P}'$. Banalmente, si dice che $\mathcal{P}'$ è più fine di $\mathcal{P}$ se esso contiene tutti gli iperpiani appartenenti a $\mathcal{P}$, ossia se $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}'$. Evidentemente, la misura di X non cambia se sostituiamo a $\mathcal{P}$ un suo raffinamento: infatti la misura non cambia se aggiungiamo a $\mathcal{P}$ un solo iperpiano. Siano ora $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ due reticolati tali che X si possa scrivere come unione di intervalli di $\mathcal{P}_1$ o $\mathcal{P}_2$. Allora X può essere ottenuto dall'unione di intervalli di $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. D'altra parte quest'ultimo è un raffinamento di $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$, perciò la misura di X letta su $\mathcal{P}_1$ o su $\mathcal{P}_2$ è necessariamente la stessa.

Siano ora X e Y due plurirettangoli per cui $X \subseteq Y$. Come ogni coppia di plurirettangoli essi sono definiti dal medesimo reticolato $\mathcal{P}$ (unione dei reticolati rispettivi). Inoltre, se $X = \bigcup_{i=1}^m I_i$, allora dal fatto che X è contenuto in Y

$$I_i \subseteq Y$$

ma Y è $Y = \bigcup_{i=1}^{\ell} J_i$, perciò

$$Y = \left(\bigcup_{i=1}^m I_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\ell} J_i \right)$$

da cui

$$m(Y) = \sum_{i=1}^{\ell} m(J_i) + \sum_{i=1}^m m(I_i) = \sum_{i=1}^{\ell} m(J_i) + m(X)$$

ma $\sum_{i=1}^{\ell} m(J_i) \geq 0$, da cui $m(Y) \geq m(X)$:

Proposizione V.1 Se $X \subseteq Y$ sono due plurirettangoli in $\mathbb{R}^n$, allora risulta $m(X) \leq m(Y)$.

V.1.2 Misura di aperti e compatti

Misura di un aperto

Poniamo immediatamente la seguente

Definizione V.2 Sia A un aperto in $\mathbb{R}^n$. Si definisce allora misura di A l'estremo superiore delle misure dei plurirettangoli contenuti in A :

$$m(A) \equiv \sup \{m(X) \mid X \subseteq A \text{ plurirettangolo}\}.$$

La definizione è ben posta poiché se A è aperto esso contiene palle aperte e perciò rettangoli. Si noti che $m(A)$ è un numero positivo e che può valere $+\infty$. Tuttavia, se A è limitato, è possibile trovare un rettangolo n -dimensionale che lo contenga, e perciò, dalla proposizione precedente, $m(A) \in \mathbb{R}$.

Lemma V.1 Siano A e B due aperti e sia $K \subseteq A \cup B$ un compatto. Esiste allora un numero $\delta > 0$ tale che, per ogni $\mathbf{x} \in K$, la δ -palla di centro $\mathbf{x}$ è tutta contenuta in A o in B :

$$B(\mathbf{x}, \delta) \subseteq A \text{ o } B(\mathbf{x}, \delta) \subseteq B$$

Dimostrazione Consideriamo le funzioni da K a valori in $\mathbb{R}$,

$$f(\mathbf{x}) \equiv d(\mathbf{x}, \mathbb{R}^n \setminus A)$$

$$g(\mathbf{x}) \equiv d(\mathbf{x}, \mathbb{R}^n \setminus B)$$

in base alla proposizione I.20 esse sono ben definite e continue. Si ha che, se $\mathbf{x} \in K$, allora $f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) > 0$. Infatti, $f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) = 0$ se e solo se $f(\mathbf{x}) = 0$ e $g(\mathbf{x}) = 0$, essendo entrambe non negative. Questo se e solo se

$$x \in \overline{\mathbb{R}^n \setminus A} \text{ \& } x \in \overline{\mathbb{R}^n \setminus B},$$

ma siccome A e B sono aperti, ciò è vero se e solo se $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ e $\mathbb{R}^n \setminus B$. Dalle leggi di de Morgan,

ciò accade se e solo se $x \in \mathbb{R}^n \setminus (A \cup B)$, ma essendo $x \in A \cup B$ questo è assurdo.

Allora, $f + g$ è continua e positiva ed inoltre è definita su un compatto. Per il teorema di Weierstraß essa assume un valore minimo positivo c . Posto $\delta \equiv c/2 > 0$ si ha, per ogni $\mathbf{x} \in K$

$$f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \geq 2\delta$$

percì dovrà essere $f(\mathbf{x}) \geq \delta$ o $g(\mathbf{x}) \geq \delta$. Nel primo caso si ha $B(\mathbf{x}, \delta) \subseteq A$, nel secondo caso (c.v.d.) $B(\mathbf{x}, \delta) \subseteq B$, la tesi.

Lemma V.2 *Siano A e B due aperti. Allora*

$$m(A \cup B) \leq m(A) + m(B)$$

Dimostrazione Sia W un plurirettangolo contenuto in $A \cup B$. Poiché W è un compatto possiamo applicare il lemma precedente, posto $K \equiv W$. Esiste allora una costante $\delta > 0$ per cui ogni punto di W ammette una palla di raggio δ tutta contenuta in $A \cup B$. Raffinando eventualmente il reticolato possiamo supporre che ogni intervallo di W abbia diametro minore di δ . Perciò ogni intervallo di W appartiene tutto ad A o B . Sia ora Y l'unione di tutti gli intervalli di W contenuti in A e Z l'unione di tutti gli intervalli contenuti in B , risulta $W = Y \cup Z$ e perciò

$$m(W) \leq m(Y) + m(Z)$$

Poiché $Y \subseteq A$ e $Z \subseteq B$ si ha, dalla definizione come sup della misura di una aperto,

$$m(Y) \leq m(A), \quad m(Z) \leq m(B)$$

percì $m(W) \leq m(A) + m(B)$, ciò vale per ogni plurirettangolo contenuto in $A \cup B$, perciò, essendo il sup il minimo dei maggioranti, $m(A \cup B) \leq m(A) + m(B)$. (c.v.d.)

Osservazione V.1 Se A e B sono aperti e tali che $B \subseteq A$, allora $m(B) \leq m(A)$. Infatti, se $X \subseteq B$ allora $X \subseteq A$

$$m(B) = \sup \{m(X) \mid X \subseteq B \text{ plurirettangolo}\} \leq \sup \{m(X) \mid X \subseteq A \text{ plurirettangolo}\} = m(B)$$

Misura di un compatto

Poniamo subito la seguente

Definizione V.3 *Sia K un compatto di $\mathbb{R}^n$. Si definisce misura di K l'estremo inferiore delle misure dei plurirettangoli che contengono K :*

$$m(K) \equiv \inf \{m(X) \mid X \supseteq K \text{ plurirettangolo}\}$$

Osserviamo che $m(K)$ è un numero reale (i compatti sono limitati) non negativo.

Osservazione V.2 Siano $I \equiv [a, b]$ un intervallo e $\varepsilon > 0$ un reale. Allora esiste J intervallo per cui $I \subseteq J$ e $m(J) < m(I) + \varepsilon$. Infatti, se c e d sono gli estremi di J , dovrà essere $c < a$ e $b < d$ affinché I sia contenuto nella parte interna di J che è $]c, d[$. Siccome $m(I) = b - a$, posto $c \equiv a - \varepsilon/4$ e $d \equiv b + \varepsilon/4$ si ha

$$m(J) = b - a + \varepsilon/2 < b - a + \varepsilon = m(I) + \varepsilon$$

La stessa cosa si estende facilmente a intervalli n -dimensionali, essendo la loro misura data dal prodotto di misure unidimensionali.

Preso allora Y plurirettangolo, avremo $Y = I_1 \cup \dots \cup I_m$, definiti $J_1, \dots, J_m$ tali che $m(J_i) < m(I_i) + \varepsilon/m$, con $I_i \subseteq J_i$, avremo, se $Z \equiv J_1 \cup \dots \cup J_m$

$$\begin{aligned} Y &\subseteq Z \\ m(Z) &< m(Y) + \varepsilon \end{aligned}$$

Detto questo, poniamo

$$m'(K) = \inf \left\{ m(X) \mid X \text{ plurirettangolo tale che } X \supseteq K \right\},$$

Ora, se $K \subseteq \dot{X} \subseteq X$, perciò $m'(K) \geq m(K)$. D'altra parte, per ogni $X \supseteq K$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste Z per cui $K \subseteq X \subseteq \dot{Z}$ e $m(Z) \leq m(X) + \varepsilon$. Allora

$$m'(K) \leq m(Z) \leq m(X) + \varepsilon$$

per ogni X e ε . Ne deriva che $m'(K) \leq m(X)$, per massimalità dell'inf si conclude $m'(K) \leq m(K)$ e infine $m'(K) = m(K)$ e

$$m(K) = \inf \left\{ m(X) \mid X \text{ plurirettangolo tale che } \dot{X} \supseteq K \right\}$$

Infine, possiamo sostituire a $m(X)$ $m(\dot{X})$, poiché

$$m(\dot{X}) = \sup \left\{ m(X) \mid X \subseteq \dot{X} \text{ plurirettangolo} \right\} = m(X)$$

Dimostriamolo. Se X è il plurirettangolo $X = \bigcup_1^m I_i$ si ha $\dot{X} = \bigcup_1^m \dot{I}_i$, e ogni plurirettangolo Y contenuto in $\dot{X}$ è contenuto in X perciò $m(Y) \leq m(X)$, passando al sup $m(\dot{X}) \leq m(X)$. Del resto, fissato $\varepsilon > 0$, sarà sempre possibile (tagliando di un opportuno δ ogni intervallo rettangolare) trovare un plurirettangolo strettamente contenuto in X e perciò in $\dot{X}$ per cui

$$m(X) - \varepsilon < m(Z)$$

infine, avremo

$$m(K) = \inf \left\{ m(\dot{X}) \mid X \text{ plurirettangolo tale che } \dot{X} \supseteq K \right\}$$

Lemma V.3 *Siano K e L due compatti disgiunti ($K \cap L = \emptyset$). Allora $m(K \cup L) \geq m(K) + m(L)$*

Dimostrazione Sia $f(\mathbf{x}) = d(\mathbf{x}, L)$, allora (siccome i compatti contengono la loro frontiera) $f(K) \subseteq \mathbb{R}^+$. D'altra parte f ammette minimo positivo δ in K , per il teorema di Weierstraß. Sia W un plurirettangolo contenente $K \cup L$, raffinando il reticolato si può sempre supporre che ciascun intervallo di W abbia diametro minore di $\delta/2$. Se si indica con Y l'unione degli intervalli di W che hanno punti in comune con K e con Z l'unione degli intervalli che intersecano L , abbiamo

$$\begin{aligned} Y \cup Z &\subseteq W \\ Y \cap Z &= \emptyset \end{aligned}$$

dove l'ultima è dovuta al fatto che ogni intervallo che ha punti in comune con K è totalmente contenuto nel complementare di L . Inoltre, $K \subseteq Y$ e $L \subseteq Z$. Sicché

$$m(W) \geq m(Y \cup Z) = m(Y) + m(Z) \geq m(K) + m(L)$$

sicché, dalla definizione di estremo inferiore come massimo dei minoranti,

$$(c.v.d.) \quad m(K \cup L) \geq m(K) + m(L)$$

In realtà nel lemma vale l'uguaglianza, ma questo lo stabiliremo in seguito.

V.1.3 Misura di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$

**Misura esterna
e misura interna**

Stabiliti i risultati per plurirettangoli, aperti e compatti, adesso definiamo la misura di insiemi qualsiasi in $\mathbb{R}^n$:

Definizione V.4 *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$, si chiam misura esterna di E l'estremo inferiore delle misure degli aperti che contengono E :*

$$\bar{m} \equiv \inf \{ m(A) \mid E \subseteq A \text{ aperto} \}$$

Analogamente, si definisce misura interna di E l'estremo superiore delle misure dei compatti contenuti in E :

$$\underline{m} \equiv \sup \{ m(K) \mid K \subseteq E \text{ compatto} \}$$

Lemma V.4 Sia K compatto contenuto in A aperto, allora esiste un plurirettangolo W tale che $K \subseteq W \subseteq A$.

Dimostrazione Si procede esattamente come nei lemmi precedenti. Si considera allora la funzione $f(\mathbf{x}) \equiv d(\mathbf{x}, \mathbb{R}^n \setminus A)$. Siccome $K \subseteq A$ per ogni $\mathbf{x} \in K$ $f(\mathbf{x}) > 0$, altrimenti $\mathbf{x}$ apparterebbe alla frontiera di A e perciò non apparterebbe ad A (in quanto aperto), il che è assurdo. Allora $f(\mathbf{x})$ è una funzione continua e positiva definita sul compatto K , perciò per il teorema di Weierstraß ammette minimo positivo in K , δ . Prendiamo un reticolato che abbia maglie più fini di $\delta/2$ e sia Y un plurirettangolo di tale reticolato che contiene K . Sia W l'unione degli intervalli di Y che hanno un punto in comune con K (cioè leviamo da Y gli intervalli che non intersecano K). Allora $K \subseteq W$ e $W \subseteq A$.

(c.v.d.)

Proposizione V.2 Per ogni insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ risulta $\overline{m}(E) \geq \underline{m}(E)$.

Dimostrazione Prendiamo A aperto contenente E e K compatto contenuto in E . Per il lemma precedente esiste un plurirettangolo W contenuto in A e contenente K . Essendo la misura di A il sup delle misure dei plurirettangoli interni, $m(A) \geq m(W)$, d'altra parte per motivi analoghi, $m(W) \geq m(K)$. Perciò, per ogni coppia A, K il primo aperto, il secondo compatto con $K \subseteq E \subseteq A$, vale

$$m(K) \leq m(A)$$

da cui, per minimalità del sup vale $\underline{m}(E) \leq m(A)$ e, per massimalità dell'inf,

$$\underline{m}(E) \leq \overline{m}(E)$$

(c.v.d.)

Se A è aperto risulta evidentemente $\overline{m}(A) = m(A)$, d'altra parte i plurirettangoli sono compatti,

$$m(A) = \sup \{m(X) \mid X \subseteq A, \text{ plurirettangolo}\} \leq \sup \{m(K) \mid K \subseteq A, \text{ compatto}\} = \underline{m}(A)$$

perciò $\overline{m}(A) \leq \underline{m}(A)$ e per la proposizione precedente $\overline{m}(A) = \underline{m}(A) = m(A)$.

Se K è compatto si ha subito che $\underline{m}(K) = m(K)$. Inoltre, dall'osservazione V.2,

$$m(K) = \inf \left\{ m(\dot{X}) \mid K \subseteq \dot{X}, X \text{ plurirettangolo} \right\},$$

ma $\dot{X}$ è un aperto, perciò

$$\underline{m}(K) = m(K) = \inf \left\{ m(\dot{X}) \mid K \subseteq \dot{X}, X \text{ plurirettangolo} \right\} \geq \{m(A) \mid K \subseteq A \text{ aperto}\} = \overline{m}(K)$$

e ancora $\overline{m}(K) = \underline{m}(K) = m(K)$.

La misura di Lebesgue

Si può porre allora la

Definizione V.5 Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice misurabile secondo Lebesgue se la misura esterna e la misura interna di E coincidono e sono finite, in tal caso la quantità

$$m(E) \equiv \underline{m}(E) = \overline{m}(E)$$

si chiama misura di Lebesgue n -dimensionale di E .

Per quanto detto si ha subito che aperti limitati e compatti sono misurabili.

Misura di Peano-Jordan

Una teoria della misura precedente a quella di Lebesgue è quella di Peano e Jordan. Misura esterna ed interna di un insieme qualsiasi E sono definite direttamente mediante approssimazione per plurirettangoli,

$$\begin{aligned} \overline{\mu}(E) &\equiv \inf \{m(X) \mid E \subseteq X \text{ plurirettangolo}\} \\ \underline{\mu}(E) &\equiv \sup \{m(X) \mid E \supseteq X \text{ plurirettangolo}\} \end{aligned}$$

Un insieme si dirà misurabile secondo Peano-Jordan se $\bar{\mu}(E) = \underline{\mu}(E) \equiv \mu(E)$. Abbiamo allora che la misura di Lebesgue estende quella di Peano-Jordan, essendo

$$\begin{aligned}\bar{\mu}(E) &= \inf \{m(X) \mid E \subseteq X \text{ plurirettangolo}\} = \inf \left\{ m(\dot{X}) \mid E \subseteq \dot{X} \text{ plurirettangolo} \right\} \geq \\ &\geq \inf \{m(X) \mid E \subseteq X \text{ aperto}\} = \bar{m}(E)\end{aligned}$$

e

$$\underline{m}(E) = \sup \{m(K) \mid E \supseteq K \text{ compatto}\} \geq \sup \{m(X) \mid E \supseteq X \text{ plurirettangolo}\} = \underline{\mu}(E)$$

sicché

$$\underline{\mu}(E) \leq \underline{m}(E) \leq \bar{m}(E) \leq \bar{\mu}(E)$$

se $\underline{\mu}(E) = \bar{\mu}(E)$ allora $\underline{m}(E) = \bar{m}(E)$.

Un criterio di misurabilità

Dalla definizione di misurabilità, tornando a considerare la teoria di Lebesgue, troviamo che

Proposizione V.3 *Un insieme E è misurabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un aperto A e un compatto K , con $K \subseteq E \subseteq A$ tali che*

$$m(A) - m(K) < \varepsilon$$

Dimostrazione Abbiamo che

$$\begin{aligned}\underline{m}(E) &\geq m(K) \\ \bar{m}(E) &\leq m(A)\end{aligned}$$

ma, allora, per ogni $\varepsilon > 0$ troviamo A e K per cui

$$\bar{m}(E) - \underline{m}(E) \leq m(A) - m(K) < \varepsilon$$

dall'arbitrarietà di ε si ha la tesi.

D'altra parte, sia E misurabile. Allora da $\bar{m}(E) = \inf \{m(A)\} = \sup \{m(K)\} = \underline{m}(E)$ si ha che per ogni $\varepsilon > 0$, esistono un aperto contenente E e un compatto contenuto in E tali che

$$\begin{aligned}m(A) &\leq m(E) + \frac{\varepsilon}{2} \\ m(E) &\leq m(K) + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow -m(K) \leq -m(E) + \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

(c.v.d.) perciò $m(A) - m(K) < \varepsilon$.

Misurabilità di unione, intersezione e differenza

Poniamo ancora un

Lemma V.5 *Siano E ed F due insiemi di $\mathbb{R}^n$; si ha*

$$\bar{m}(E \cup F) \leq \bar{m}(E) + \bar{m}(F),$$

inoltre, se $E \cap F = \emptyset$ si ha

$$\underline{m}(E \cup F) \geq \underline{m}(E) + \underline{m}(F)$$

Dimostrazione Se le misure esterne di E o F sono infinite la tesi della prima disuguaglianza è verificata. Siano perciò reali le due misure esterne. Per $\varepsilon > 0$ siano A e B due aperti, con $E \subseteq A$ e $F \subseteq B$, tali che

$$m(A) < \bar{m}(E) + \varepsilon, \quad m(B) < \bar{m}(F) + \varepsilon$$

d'altra parte, per il lemma V.2,

$$\bar{m}(E \cup F) \leq m(A \cup B) \leq m(A) + m(B) < \bar{m}(E) + \bar{m}(F) + 2\varepsilon,$$

dall'arbitrarietà di ε , la tesi.

In maniera analoga usando il lemma successivo a quello di cui sopra, si perviene alla seconda disuguaglianza: fissato $\varepsilon > 0$ esistono K e L compatti tali che $K \subseteq E$ e $L \subseteq F$

$$\underline{m}(E) < m(K) + \varepsilon, \underline{m}(F) < m(L) + \varepsilon$$

da cui

$$\underline{m}(E \cup F) \geq m(K \cup L) \geq m(K) + m(L) > \underline{m}(E) + \underline{m}(F) - 2\varepsilon$$

(c.v.d.) per l'arbitrarietà di ε la tesi.

Siano ora gli insiemi E ed F misurabili e disgiunti, allora

$$\overline{m}(E \cup F) \leq m(E) + m(F) \leq \underline{m}(E \cup F)$$

ma $\underline{m}(E \cup F) \leq \overline{m}(E \cup F)$ perciò

$$\overline{m}(E \cup F) = \underline{m}(E \cup F) = m(E) + m(F)$$

In particolare se A è un aperto e K è un compatto contenuto in A , $A \setminus K = A \cap \mathbb{R}^n \setminus K$ è un aperto e perciò è misurabile, posto $E = K$ e $F = A \setminus K$ si ricava

$$m(A) = m(E \cup F) = m(K) + m(A \setminus K)$$

cioè $m(A \setminus K) = m(A) - m(K)$. Ne deriva che:

Proposizione V.4 *Un insieme E è misurabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un aperto A e un compatto K tali che*

$$\begin{aligned} K \subseteq E &\subseteq A \\ m(A \setminus K) &< \varepsilon \end{aligned}$$

Per induzione si prova il seguente

Corollario V.1 *Sia dato un numero finito di insiemi misurabili a due a due disgiunti, $E_1, \dots, E_m$. Allora, la loro unione è misurabile e si ha*

$$m\left(\bigcup_{i=1}^m E_i\right) = \sum m(E_i)$$

Teorema V.1 *Dati due insiemi misurabili E ed F , anche $E \cup F$, $E \cap F$, $E \setminus F$ sono misurabili.*

Dimostrazione Vediamo anzitutto che $E \setminus F$ è misurabile. Sia $\varepsilon > 0$ e siano A e A' due aperti e K e K' due compatti, con

$$K \subseteq E \subseteq A, K' \subseteq F \subseteq A'$$

e tali che

$$\begin{aligned} m(A \setminus K) &< \frac{\varepsilon}{2} \\ m(A' \setminus K') &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Se si pone $B \equiv A \setminus K' = A \cap (\mathbb{R}^n \setminus K')$ e $L \equiv K \setminus A' = K \cap (\mathbb{R}^n \setminus A')$ si ha subito che B è un aperto, L è un compatto e inoltre è banale verificare che

$$L \subseteq E \setminus F \subseteq B$$

(se $\mathbf{x} \in L$ allora appartiene a K ma non ad A' , cioè appartiene a E ma non a F ; se $\mathbf{x} \in E \setminus F$ allora appartiene ad A ma non a F cioè non a K'). D'altra parte $B \setminus L$ è aperto e vale

$$B \setminus L \subseteq (A \setminus K) \cup (A' \setminus K')$$

poiché indicando il complementare di un insieme D con $\mathcal{C}D$

$$B \setminus L = (A \cap \mathcal{C}K') \cap \mathcal{C}(K \cap \mathcal{C}A') = (A \cap \mathcal{C}K') \cap \mathcal{C}(\mathcal{C}(K) \cap \mathcal{C}A')$$

per la legge di De Morgan si ha $\mathcal{C}D \cap \mathcal{C}G = \mathcal{C}(D \cup G)$, perciò

$$B \setminus L = (A \cap \mathcal{C}K') \cap (\mathcal{C}K \cup A') = A \cap \{\mathcal{C}K' \cap (\mathcal{C}K \cup A')\} =$$

$$= A \cap \{(\mathcal{C}K' \cap \mathcal{C}K) \cup (\mathcal{C}K' \cap A')\} = (A \cap \mathcal{C}K' \cap \mathcal{C}K) \cup (A \cap A' \cap \mathcal{C}K') \subseteq \\ \subseteq (A \cap \mathcal{C}K) \cup (A' \cap \mathcal{C}K') = (A \setminus K) \cup (A' \setminus K')$$

da cui, essendo $(A \setminus K)$, $(A' \setminus K')$ aperti,

$$m(B \setminus L) \leq m(A \setminus K) + m(A' \setminus K') < \varepsilon$$

da cui $E \setminus F$ è misurabile.

Ora, $E \setminus (E \setminus F) = E \cap (\mathcal{C}(E \setminus F)) = E \cap (\mathcal{C}E \cup F) = \emptyset \cup E \cap F = E \cap F$, in definitiva

$$E \cap F = E \setminus (E \setminus F)$$

per cui, se E ed F sono misurabili, tale è $E \setminus F$ e perciò $E \setminus (E \setminus F)$ da cui la tesi.

(c.v.d.) Infine, $(E \cap F) \cup (E \setminus F) \cup (F \setminus E) = E \cup F$ che perciò è misurabile per il corollario precedente, essendo $E \cap F$, $E \setminus F$ e $F \setminus E$ misurabili e disgiunti a due a due.

Osservazione V.3 Nelle ipotesi del teorema precedente, si noti che dal corollario segue anche

$$m(E \cup F) = m(E \cap F) + m(E \setminus F) + m(F \setminus E)$$

d'altra parte $E = (E \cap F) \cup (E \setminus F)$ e $F = (E \cap F) \cup (F \setminus E)$ e ancora dal corollario

$$m(E) = m(E \cap F) + m(E \setminus F) \\ m(F) = m(E \cap F) + m(F \setminus E)$$

sommando

$$m(E) + m(F) = 2m(E \cap F) + m(E \setminus F) + m(F \setminus E)$$

ricordando la relazione precedente si conclude, per ogni coppia di insiemi misurabili,

$$m(E) + m(F) = m(E \cap F) + m(E \cup F)$$

V.2 Additività e subadditività numerabile della misura di Lebesgue

V.2.1 Stime per la misura interna ed esterna di famiglie numerabili

Unione di una famiglia numerabile di aperti

Adesso vogliamo estendere i risultati delle sezioni precedenti a un'infinità numerabile di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$. Poniamo, dunque, il seguente

Lemma V.6 Sia data una famiglia numerabile di insiemi aperti $\mathcal{F} \equiv \{A_i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ e sia

$$A \equiv \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

allora

$$m(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

se poi si ha $A_i \subseteq A_{i+1}$ per ogni $i \in \mathbb{N}_0$ allora

$$m(A) = \lim_{i \rightarrow \infty} m(A_i).$$

Dimostrazione A è un aperto ed è perciò misurabile. Sia Y un plurirettangolo contenuto in A , allora Y è un compatto e $\mathcal{F}$ un ricoprimento aperto di Y . Perciò, teorema di caratterizzazione degli spazi compatti, esiste una sottofamiglia finita di $\mathcal{F}$ che ricopre tutto Y , cioè, a meno di rinominare gli insiemi, esiste un intero $j \in \mathbb{N}$ talché

$$Y \subseteq \bigcup_{i=1}^j A_i$$

allora

$$m(Y) \leq \sum_{i=1}^j m(A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

essendo l'ultima una serie a termini non negativi. La disuguaglianza è valida per ogni plurirettangolo contenuto in A , perciò, per minimalità del sup si ha

$$m(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

Sia ora $A_i \subseteq A_{i+1}$ per ogni $i \in \mathbb{N}_0$, si ha subito

$$Y \subseteq A_j$$

da cui

$$m(Y) \leq m(A_j) \leq \sup_{i \in \mathbb{N}_0} m(A_i)$$

perciò, essendo $\{m(A_i)\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ una successione reale monotona crescente,

$$m(A) \leq \sup_{i \in \mathbb{N}_0} m(A_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} m(A_i)$$

Del resto, per ogni intero i $A_i \subseteq A$ da cui $m(A_i) \leq m(A)$ passando al sup

$$m(A) \geq \sup_{i \in \mathbb{N}_0} m(A_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} m(A_i)$$

in definitiva,

$$m(A) = \lim_{i \rightarrow \infty} m(A_i)$$

(c.v.d.)

Unione di una famiglia numerabile: misura esterna ed interna
Proposizione V.3

Passiamo ora all'estensione per misura interna ed esterna

Sia data una famiglia numerabile di insiemi in $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F} \equiv \{E_i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ e sia

$$E \equiv \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

allora

$$\overline{m}(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \overline{m}(E_i).$$

Se gli insiemi sono a due a due disgiunti, vale

$$\underline{m}(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \underline{m}(E_i).$$

Dimostrazione

Se il secondo membro della prima disuguaglianza è infinito, non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo allora che ogni insieme E_i sia limitato. Sia $\varepsilon > 0$ e per ogni intero $i \in \mathbb{N}_0$ sia A_i un aperto che contiene E_i e tale che

$$m(A_i) < \overline{m}(E_i) + \varepsilon' = \overline{m}(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$$

avendo posto $\varepsilon' \equiv 2^{-i}\varepsilon$. Posto $A \equiv \bigcup_1^{\infty} A_i$, risulta $E \subseteq A$ da cui $\overline{m}(E) \leq m(A)$. Dal lemma precedente

$$\overline{m}(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{m}(E_i) + \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$$

cioè

$$\overline{m}(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \overline{m}(E_i) + \varepsilon$$

per l'arbitrarietà di ε la prima disuguaglianza è dimostrata.

Per ciò che riguarda la seconda, si ha che, per ogni intero $k \in \mathbb{N}_0$

$$\bigcup_{i=1}^k E_i \subseteq E$$

perciò dal lemma V.5 si ricava

$$\underline{m}(E) \geq \underline{m}\left(\bigcup_{i=1}^k E_i\right) \geq \sum_{i=1}^k \underline{m}(E_i)$$

(c.v.d.) ciò vale per ogni k , passando al limite per $k \rightarrow \infty$, si ha la tesi.

Proposizione V.6 *Sia data una famiglia numerabile di insiemi in $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F} \equiv \{E_i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ ove sia, per ogni intero i , $E_i \subseteq E_{i+1}$, allora, posto*

$$E \equiv \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

si ha

$$\overline{m}(E) = \lim_{i \rightarrow \infty} \overline{m}(E_i).$$

Dimostrazione Fissato $\varepsilon > 0$, per ogni intero $i \in \mathbb{N}_0$ sia A_i un aperto che contiene E_i e tale che

$$m(A_i) < \overline{m}(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$$

Per $k \in \mathbb{N}_0$, poniamo poi $B_k \equiv \bigcup_1^k A_i$. Mostriamo per induzione che

$$m(B_k) < \overline{m}(E_k) + \varepsilon \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i}$$

La disuguaglianza è certo vera per $k = 1$. Veniamo al passo induttivo, sia cioè vera per $k > 1$. Allora, poiché $B_{k+1} = B_k \cup A_{k+1}$, si ha $m(B_{k+1}) = m(B_k) + m(A_{k+1}) - m(B_k \cap A_{k+1})$

$$m(B_{k+1}) < m(B_k) + \overline{m}(E_{k+1}) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} - m(B_k \cap A_{k+1})$$

ma $E_k \subseteq A_k \subseteq B_k$ e $E_k \subseteq E_{k+1} \subseteq A_{k+1}$ da cui $E_k \subseteq B_k \cap A_{k+1}$ e $-m(B_k \cap A_{k+1}) \leq -\overline{m}(E_k)$

$$m(B_{k+1}) < \overline{m}(E_k) + \varepsilon \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i} + \overline{m}(E_{k+1}) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} - \overline{m}(E_k) = \overline{m}(E_{k+1}) + \varepsilon \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{2^i}$$

D'altra parte,

$$m(B_k) < \overline{m}(E_k) + \varepsilon \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i} < \overline{m}(E_k) + \varepsilon,$$

posto $B \equiv \bigcup_1^{\infty} B_k$ si ha che $E \subseteq B$ e

$$\overline{m}(E) \leq m(B) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(B_k) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{m}(E_k) + \varepsilon$$

per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si ha $\overline{m}(E) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{m}(E_k)$.

Poi, $E_k \subseteq E$, perciò $\overline{m}(E_k) \leq \overline{m}(E)$, passando al limite per $k \rightarrow \infty$ (che ricordiamo esiste in quanto si tratta di una successione crescente)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{m}(E_k) \leq \overline{m}(E)$$

(c.v.d.) infine, $\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{m}(E_k) = \overline{m}(E)$.

V.2.2 I teoremi di additività e subadditività numerabile della misura

Nel caso in cui gli insiemi di cui al paragrafo precedente siano misurabili, si hanno i due

seguenti teoremi fondamentali.

Il teorema di additività

Sia ora la famiglia $\mathcal{F}$ di insiemi a due a due disgiunti di $\mathbb{R}^n$ tale che per ogni $E_i \in \mathcal{F}$ E_i è misurabile. Sia E l'unione degli insiemi appartenenti a $\mathcal{F}$. Sia E limitato di modo che $\overline{m}(E) < +\infty$. Si ha

$$\begin{aligned} \overline{m}(E) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \overline{m}(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) \\ \underline{m}(E) &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \underline{m}(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) \end{aligned}$$

perciò $\underline{m}(E) \geq \overline{m}(E)$, ma $\underline{m}(E) \leq \overline{m}(E)$, sicché E è misurabile. Ma allora $m(E) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$. Cioè si ha il

Teorema V.2 (additività numerabile della misura)

Sia $\mathcal{F} \equiv \{E_i | i \in \mathbb{N}_0\}$ una famiglia numerabile di insiemi misurabili a due a due disgiunti. Sia $E \equiv \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ e si supponga $\overline{m}(E_i) < +\infty$, allora E è misurabile e

$$m(E) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$$

Il teorema di subadditività

Se viene meno l'ipotesi della disgiunzione degli insiemi E_i , sussiste comunque il seguente

Teorema V.3 (subadditività numerabile della misura)

Sia $\mathcal{F} \equiv \{E_i | i \in \mathbb{N}_0\}$ una famiglia numerabile di insiemi misurabili. Sia $E \equiv \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ e si supponga $\overline{m}(E_i) < +\infty$, allora E è misurabile e

$$m(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$$

Se poi, per ogni intero i , $E_i \subseteq E_{i+1}$ si ha

$$m(E) = \lim_{i \rightarrow \infty} m(E_i)$$

Dimostrazione

Costruiamo la seguente famiglia numerabile di insiemi

$$\begin{cases} F_1 = E_1 \\ F_{i+1} = E_{i+1} \setminus F_i, \quad i \geq 1 \end{cases}$$

di modo che ciascun insieme è misurabile e inoltre gli F_i sono a due a due disgiunti. Inoltre per ogni intero i si ha $F_i \subseteq E_i$, $m(F_i) \leq m(E_i)$, per cui

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(F_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$$

D'altra parte $E = \bigcup_1^{\infty} F_i$, sicché per il teorema di additività

$$m(E) = \sum_{i=1}^{\infty} m(F_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$$

Per la seconda parte, abbiamo come già dimostrato,

$$\overline{m}(E) = \lim_{i \rightarrow \infty} \overline{m}(E_i)$$

ma $\overline{m}(E_i) = m(E_i)$ e $\overline{m}(E) = m(E)$ sicché

$$m(E) = \lim_{i \rightarrow \infty} m(E_i)$$

(c.v.d.)

Alcuni esempi

Esempio V.1

Una famiglia di insiemi misurabili di misura nulla è essa stessa misurabile con misura nulla. In particolare ogni insieme numerabile è una famiglia numerabile di punti, ciascuno avente

misura nulla. Allora ogni insieme misurabile ha misura nulla. $\mathbb{Q}$ ha misura nulla secondo Lebesgue.

Esempio V.2 L'insieme dei numeri irrazionali compresi tra $[0, 1]$, $\mathbb{I} \cap [0, 1]$, è misurabile e ha misura unitaria, infatti

$$\mathbb{I} \cap [0, 1] = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1] = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$$

e perciò

$$m(\mathbb{I} \cap [0, 1]) = 1 - m(\mathbb{Q}) = 1.$$

Esempio V.3 (insieme di Cantor)

L'insieme di Cantor si ottiene nel seguente modo: si apre dall'intervallo $[0, 1]$, si divide in tre parti uguali e si toglie l'intervallo aperto centrale $E_1 \equiv (1/3, 2/3)$. Il secondo passo consiste nel dividere ciascuno degli intervalli rimasti in tre parti uguali e toglierne le parti centrali, cioè

$$E_2 \equiv (1/9, 2/9) \cup (7/9, 8/9)$$

Proseguendo il procedimento, al k -esimo passo si divide ognuno dei 2^{k-1} intervalli rimasti in tre parti uguali e se ne scartano le 2^{k-1} parti centrali. Ognuna delle parti eliminate ha misura 3^{-k} , al $k-1$ -esimo passo viene tolto un insieme E_k che misura

$$m(E_k) = \frac{2^k}{2} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

poiché gli intervalli sono aperti e a due a due disgiunti, posto $E \equiv \bigcup_1^\infty E_i$ si ha che

$$m(E) = \sum_{k=1}^\infty m(E_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-2/3} - 1\right) = 1$$

L'insieme compatto $K = [0, 1] \setminus E$, detto **insieme di Cantor**, ha perciò misura nulla. Perciò l'insieme di Cantor non contiene alcun intervallo e si può mostrare che ha la potenza del continuo e perciò non è numerabile.

V.3 Estensione della misurabilità

V.3.1 Misurabilità di insiemi di misura infinita

Definizione

Abbiamo definito misurabili insiemi per i quali misura interna e misura esterna coincidono e sono finite. Risulta però utile avere una definizione di misurabilità per insiemi aventi misura infinita. Si pone allora la seguente

Definizione V.6 Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice misurabile se per ogni $r > 0$ l'insieme $E \cap B(0, r)$ è misurabile, cioè se per ogni $r > 0$ vale

$$\overline{m}(E \cap B(0, r)) = \underline{m}(E \cap B(0, r)).$$

La nuova definizione è una estensione della precedente, definizione V.5. Sia, infatti, E misurabile secondo la definizione V.5, $B(0, r)$ è misurabile per ogni r essendo un aperto, sicché, teorema V.1, $E \cap B(0, r)$ è misurabile perciò

$$\overline{m}(E \cap B(0, r)) = \underline{m}(E \cap B(0, r))$$

dunque E è misurabile rispetto anche all'ultima definizione che abbiamo dato. Diversamente un insieme misura infinita misurabile secondo questa definizione, non lo sarà rispetto alla prima, perché la misura esterna risulterà infinita. Assumiamo come definizione definitiva quella data adesso.

Proposizione V.7 Se E è misurabile, risulta

$$\overline{m}(E) = \underline{m}(E) = \lim_{r \rightarrow \infty} m(E \cap B(0, r))$$

Dimostrazione Sia $L \equiv \lim_{r \rightarrow \infty} m(E \cap B(0, r))$, tale limite esiste perché $r \mapsto m(E \cap B(0, r))$ è una funzione crescente. Per ogni $r > 0$, esiste un compatto $K_r \subseteq E \cap B(0, r)$ tale che

$$m(K_r) > m(E \cap B(0, r)) - \frac{1}{r}$$

poiché $K_r \subseteq E$, risulta pure

$$\underline{m}(E) \geq m(K_r) > m(E \cap B(0, r)) - \frac{1}{r}$$

da cui, passando al limite per $r \rightarrow \infty$, si ha

$$\underline{m}(E) \geq L$$

D'altra parte possiamo scrivere

$$E = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (E \cap B(0, i))$$

perciò, essendo $E_i \subseteq E_{i+1}$,

$$\overline{m}(E) = \lim_{i \rightarrow \infty} m(E \cap B(0, i)) = L$$

dove l'ultima eguaglianza segue dal teorema di collegamento, infine, avendo $\underline{m}(E) \leq \overline{m}(E) = L$

(c.v.d.)

$$\underline{m}(E) = \overline{m}(E) = L$$

Osserviamo che se un insieme è misurabile anche secondo la nuova definizione risulta $m(E) = \underline{m}(E)$.

**Revisione
dei risultati
precedenti**

Il teorema V.1 continua a valere anche secondo la nuova definizione di misurabilità, si ha infatti che

$$\begin{aligned} (E \cup F) \cap B(0, r) &= (E \cap B(0, r)) \cup (F \cap B(0, r)) \\ (E \cap F) \cap B(0, r) &= (E \cap B(0, r)) \cap (F \cap B(0, r)) \\ (E \setminus F) \cap B(0, r) &= (E \cap B(0, r)) \setminus (F \cap B(0, r)) \end{aligned}$$

quindi se E ed F sono misurabili lo saranno anche la loro unione, intersezione e differenza. Anche i teoremi di additività e subadditività restano inalterati:

Teorema V.4 Sia $\mathcal{F} \equiv \{E_i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ una famiglia numerabile di insiemi misurabili e sia $E \equiv \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Allora E è misurabile e

$$m(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

Se gli insiemi della famiglia sono a due a due disgiunti, allora

$$m(E) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

Se poi, per ogni intero i , $E_i \subseteq E_{i+1}$ si ha

$$m(E) = \lim_{i \rightarrow \infty} m(E_i).$$

Dimostrazione L'insieme E è misurabile. Per vederlo, scriviamo

$$E \cap B(0, r) = B(0, r) \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (E_i \cap B(0, r)),$$

cioè $E \cap B(0, r)$ è l'unione numerabile di insiemi limitati misurabili, perciò è misurabile per ogni $r > 0$, dunque

$$\underline{m}(E \cap B(0, r)) = \overline{m}(E \cap B(0, r))$$

e anche E è misurabile.

Dalla proposizione precedente si ha che $m(E) = \overline{m}(E) = \lim_{r \rightarrow \infty} m(E \cap B(0, r))$, perciò, si ha subito dalla proposizione V.5

$$m(E) = \overline{m}(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \overline{m}(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$$

Ancora dalla proposizione V.5, se gli insiemi sono disgiunti,

$$m(E) = \underline{m}(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \underline{m}(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$$

perciò, usando la disuguaglianza precedente, si ha

$$m(E) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$$

Resta da mostrare l'ultima eguaglianza, ma essa discende direttamente dalla proposizione V.6:

$$(c.v.d.) \quad m(E) = \overline{m}(E) = \lim_{i \rightarrow \infty} \overline{m}(E_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} m(E_i).$$

Osservazione V.4 Nella prossima sottosezione ci servirà il seguente risultato. Sia $\mathcal{F} \equiv \{F_i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ una famiglia *decescente* di insiemi misurabili. Vogliamo studiare

$$F \equiv \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$$

notiamo che, posto $E_i \equiv F_1 - F_i$ ed $E \equiv \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subseteq F_1$ si ha

$$F_1 \setminus E = F_1 \cap \mathcal{C}E = F_1 \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{C}E_i$$

ma $\mathcal{C}E_i = \mathcal{C}(F_1 \cap \mathcal{C}F_i) = \mathcal{C}F_1 \cup F_i$ da cui

$$F_1 \setminus E = F_1 \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} (\mathcal{C}F_1 \cup F_i) = F_1 \cap \left(\mathcal{C}F_1 \cup \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \right) = \emptyset \cup F_1 \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$$

se mostriamo che E è misurabile abbiamo che F è misurabile. Notiamo che ciascun E_i è misurabile e

$$E_i \subseteq E_{i+1}$$

poiché se un punto non appartiene a F_i non appartiene a F_{i+1} . Ma allora E è misurabile e

$$m(E) = \lim_{i \rightarrow \infty} m(E_i) = m(F_1) - \lim_{i \rightarrow \infty} m(F_i),$$

infine, poiché $E \subseteq F_1$,

$$m(F) = m(F_1) - m(E) = \lim_{i \rightarrow \infty} m(F_i).$$

V.3.2 La misura nei prodotti cartesiani

Il primo risultato di questo paragrafo sarà ridimostrato nell'ambito del teorema di Fubini-Tonelli di cui è un caso particolare.

Approssimazione di un aperto con una famiglia di rettangoli

Consideriamo un aperto qualsiasi A in uno spazio euclideo m -dimensionale. Dividiamo ogni asse coordinato in intervalli di ampiezza 1, otteniamo infiniti quadrati m -dimensionali che *reticolano* lo spazio, definiamo Y_0 il plurirettangolo ottenuto dall'unione di tutti i quadrati che sono contenuti in A . Ripetiamo l'operazione raffinando la partizione infinita, rendendola di ampiezza $1/2$, e chiamando Y_1 l'unione dei nuovi quadrati contenuti in A . I quadrati che già appartenevano ad A essendo di lato 1 continueranno a farlo ora che sono suddivisi in 2^m parti. Procediamo per induzione e costruiamo così una successione di plurirettangoli tali che $Y_k \subseteq Y_{k+1}$. I quadrati in Y_k avranno lato $1/2^k$. Evidentemente $Y \equiv \bigcup_{k=0}^{\infty} Y_k$ sarà contenuto

in A , d'altra parte vale anche il viceversa. Prendiamo $\mathbf{x} \in A$, esiste un reale $\varepsilon > 0$, tale che la ε -palla di centro $\mathbf{x}$ è tutta contenuta in A . Ora, per qualsiasi k , per l' i -esimo asse coordinato, sarà possibile determinare un intero n_i per cui

$$\frac{n_i - 1}{2^k} \leq x_i \leq \frac{n_i}{2^k}$$

scegliamo ora $k = \bar{k}$ per cui $2^{\bar{k}} > \sqrt{m}/\varepsilon$ (proprietà di Archimede). In questo modo otteniamo un quadrato del reticolato al $\bar{k}$ passo che è tutto contenuto nella sfera che contiene $\mathbf{x}$ e che è tutta contenuta in A :

$$x_i - \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} < \frac{n_i - 1}{2^{\bar{k}}} \leq x_i \leq \frac{n_i}{2^{\bar{k}}} < x_i + \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$$

Allora $\mathbf{x} \in Y_{\bar{k}}$ e perciò appartiene a Y .

Dato un aperto si costruisce una successione *crescente* di plurirettangoli inclusi nell'aperto, la cui unione infinita dà l'aperto stesso.

Approssimazione di un compatto con una famiglia di rettangoli

Preso un compatto K , possiamo agire allo stesso modo generando una successione di plurirettangoli Z_i tali che $Z_{i+1} \subseteq Z_i$, ove includiamo in Z_i i quadrati che all' i -esimo passo hanno un punto in comune con K . Vogliamo mostrare che $K = \bigcap_{i=0}^{\infty} Z_i$. Cominciamo col prendere $\bar{\mathbf{x}} \in \bigcap_{i=0}^{\infty} Z_i$, allora $\forall i \in \mathbb{N} \bar{\mathbf{x}} \in Z_i$, sicché per ogni i esiste un elemento di K , $\mathbf{x}_i$ tale che

$$\|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_i\| \leq \frac{\sqrt{m}}{2^i}$$

siccome $\{\mathbf{x}_i\}$ è a valori in un compatto ammette una sottosuccessione convergente a $\mathbf{x} \in K$ mappata da k_i monotona crescente $k_i \geq i$,

$$\|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_{k_i}\| \leq \frac{\sqrt{m}}{2^{k_i}}$$

passando al limite per $i \rightarrow \infty$, per la continuità della norma, si ha

$$\|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| = 0$$

da cui $\bar{\mathbf{x}} \in K$. Se $\mathbf{x} \in K$ allora a ogni passo si trova un quadrato che contiene $\mathbf{x}$, appartenendo questo a K , tale quadrato verrà incluso in Z_i , perciò, $\mathbf{x} \in Z_i \forall i \in \mathbb{N}$, la tesi.

Dato un compatto K è possibile trovare una successione *decrescente* di plurirettangoli contenenti il compatto, la cui intersezione infinita è il compatto stesso

Misura del prodotto cartesiano

Servendoci dei risultati discussi nei due paragrafi precedenti dimostriamo per passi il seguente

Teorema V.5 *Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e $F \subseteq \mathbb{R}^k$ due insiemi misurabili (indicheremo con $m_n(E)$ e $m_k(F)$ le rispettive misure), allora $E \times F \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ è misurabile e si ha*

$$m_{n+k}(E \times F) = m_n(E) \cdot m_k(F)$$

Dimostrazione Siano E ed F dei rettangoli, e poniamo

$$\begin{aligned} E &\equiv I_1 \times \dots \times I_n \\ F &\equiv I_{n+1} \times \dots \times I_{n+k} \end{aligned}$$

allora

$$E \times F = I_1 \times \dots \times I_n \times I_{n+1} \times \dots \times I_{n+k}$$

$E \times F$ è un rettangolo di $\mathbb{R}^{n+k}$, perciò

$$m_{n+k}(E \times F) = \prod_{i=1}^{n+k} m(I_i) = \left(\prod_{i=1}^n m(I_i) \right) \cdot \left(\prod_{i=n+1}^{n+k} m(I_i) \right) = m_n(E) \cdot m_k(F)$$

Siano ora E ed F plurirettangoli, perciò, se $I_i, i \in J_{n+k}$ sono rettangoli,

$$E \equiv I_1 \cup \dots \cup I_m$$

$$F \equiv I_{m+1} \cup \dots \cup I_{m+p}$$

allora $E \times F$ è l'unione di nk rettangoli in $\mathbb{R}^{n+k}$, cioè

$$\begin{aligned} E \times F &= (I_1 \times I_{m+1}) \cup \dots \cup (I_1 \times I_{m+p}) \cup \dots \cup (I_m \times I_{m+1}) \cup \dots \cup (I_m \times I_{m+p}) \\ m(E \times F) &= m_n(I_1) \sum_{i=1}^p m_k(I_{m+i}) + \dots + m_n(I_m) \sum_{i=1}^p m_k(I_{m+i}) = m_n(E) \cdot m_k(F) \end{aligned}$$

Vediamo che il teorema continua a valere per insiemi aperti e compatti. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^k$ aperti. Sia $\{P_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una successione di plurirettangoli con $P_i \subseteq P_{i+1}$ e $\bigcup_{i=0}^{\infty} P_i = A$ (che abbiamo costruito al primo paragrafo). Allora

$$m_n(A) = \lim_{i \rightarrow \infty} m_n(P_i)$$

Analogamente la successione $\{Q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ per l'aperto B , allora

$$m_k(B) = \lim_{i \rightarrow \infty} m_k(Q_i)$$

Posto $R_i \equiv P_i \times Q_i$ si ha che $R_i \subseteq R_{i+1}$ e che, come è ovvio, $\bigcup_{i=0}^{\infty} R_i = A \times B$, perciò

$$\begin{aligned} m_{n+k}(A \times B) &= \lim_{i \rightarrow \infty} m_{n+k}(P_i \times Q_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} (m_n(P_i) \cdot m_k(Q_i)) = \lim_{i \rightarrow \infty} m_n(P_i) \cdot \lim_{i \rightarrow \infty} m_k(Q_i) \\ &= m_n(A) \cdot m_k(B) \end{aligned}$$

Siano ora $K \subseteq \mathbb{R}^n$ e $L \subseteq \mathbb{R}^k$ due compatti. Sia $\{P_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una successione di plurirettangoli con $P_{i+1} \subseteq P_i$ e $\bigcap_{i=0}^{\infty} P_i = K$ (che abbiamo costruito al primo paragrafo). Allora, per l'osservazione di cui alla chiusura della sottosezione precedente,

$$m_n(K) = \lim_{i \rightarrow \infty} m_n(P_i)$$

Analogamente la successione $\{Q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ per il compatto L , allora

$$m_k(L) = \lim_{i \rightarrow \infty} m_k(Q_i)$$

Posto $R_i \equiv P_i \times Q_i$, esso è compatto e si ha che $R_{i+1} \subseteq R_i$ e che $\bigcap_{i=0}^{\infty} R_i = K \times L$, perciò

$$m_{n+k}(K \times L) = \lim_{i \rightarrow \infty} m_{n+k}(R_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} (m_n(P_i) \cdot m_k(Q_i)) = m_n(K) \cdot m_k(L)$$

Siano, infine, E ed F due insiemi misurabili. Dalla definizione di insieme misurabile segue che è possibile trovare una famiglia di aperti A_i le cui misure convergano alla misura (esterna) di E (successione minimizzante) contenenti E e tale che

$$m_n(A_i) \rightarrow \overline{m}_n(E),$$

analogamente per F troviamo una famiglia di aperti B_i contenenti F per cui

$$m_k(B_i) \rightarrow \overline{m}_k(F),$$

allora, siccome $E \times F \subseteq A_i \times B_i$ si ha

$$\overline{m}_{n+k}(E \times F) \leq m_{n+k}(A_i \times B_i) = m_n(A_i) m_k(B_i)$$

per cui passando al limite

$$\overline{m}_{n+k}(E \times F) \leq \overline{m}_n(E) \overline{m}_k(F)$$

ragionando allo stesso modo coi compatti (e usando successioni massimizzanti), si ricava

$$\underline{m}_{n+k}(E \times F) \geq \underline{m}_n(E) \underline{m}_k(F)$$

nel caso E ed F siano misurabili

$$\overline{m}_{n+k}(E \times F) \leq m_n(E) m_k(F) \leq \underline{m}_{n+k}(E \times F)$$

da cui, dovendo valere $\overline{m}_{n+k}(E \times F) \geq \underline{m}_{n+k}(E \times F)$, si ricava $E \times F$ misurabile e

$$(c.v.d.) \quad m_{n+k}(E \times F) = m_n(E) \cdot m_k(F)$$

Si osservi che se E ed F non sono misurabili si è comunque trovato

$$\overline{m}_{n+k}(E \times F) \leq \overline{m}_n(E) \overline{m}_k(F)$$

$$\underline{m}_{n+k}(E \times F) \geq \underline{m}_n(E) \underline{m}_k(F)$$

La seconda è, in realtà un'eguaglianza. Dimostriamolo. Consideriamo Σ compatto contenuto in $E \times F$. Sia H la proiezione di Σ su $\mathbb{R}^n$,

$$H \equiv \text{proj}_n(\Sigma) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \exists \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Sigma \}$$

sia inoltre $K \equiv \text{proj}_k(\Sigma)$, proiezione di Σ su $\mathbb{R}^k$. H e K sono compatti. Infatti, sia $\{\mathbf{x}_n\} \subseteq H$, allora esiste $\{\mathbf{y}_n\}$ tale che $\{(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)\} \subseteq \Sigma$, siccome Σ è compatto, esiste una sottosuccessione mappata da k_n che converge al punto $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Sigma$, per cui, siccome per $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ esiste $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$ di modo che $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Sigma$, si ha che $\mathbf{x} \in H$, e allora $\mathbf{x}_{k_n} \rightarrow \mathbf{x} \in H$, da cui la compattezza della proiezione di un compatto. Ora, si ha $H \subseteq E$ e $K \subseteq F$ e poiché $\Sigma \subseteq H \times K$ si ottiene

$$m_{n+k}(\Sigma) \leq m_{n+k}(H \times K) = m_n(H) m_k(K) \leq \underline{m}_n(E) \underline{m}_k(F)$$

il che è valido per ogni compatto, passando al sup, per la sua minimalità,

$$\underline{m}_{n+k}(E) \leq \underline{m}_n(E) \underline{m}_k(F)$$

dalla disuguaglianza precedente, infine

$$\underline{m}_{n+k}(E) = \underline{m}_n(E) \underline{m}_k(F)$$

Vale anche un'altra disuguaglianza che diverrà poi utile:

Proposizione V.8 *Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e $F \subseteq \mathbb{R}^k$ allora*

$$\overline{m}_n(E) \underline{m}_k(F) \leq \overline{m}_{n+k}(E \times F)$$

Dimostrazione Se la misura esterna del prodotto cartesiano è infinita, il problema non si pone. Allora, supponiamo $\overline{m}_{n+k}(E \times F) < +\infty$. Prendiamo C un compatto contenuto in F e fissato $\varepsilon > 0$ sia A un aperto contenente $E \times F$ tale che

$$m_{n+k}(A) < \overline{m}_{n+k}(E \times F) + \varepsilon$$

Poniamo $B \equiv \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \{ \mathbf{x} \} \times C \subseteq A \}$. Sia $\mathbf{x} \in B$, allora per ogni $\mathbf{y} \in C$, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in A$. Se $\mathbf{x} \in E$, per ogni $\mathbf{y} \in C$, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E \times C \subseteq E \times F \subseteq A$, allora $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in B \times C$ e per ogni $\mathbf{z} \in C$, $(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in A$, dunque $B \times C \subseteq A$. Ora, per ogni $\mathbf{x} \in B$ il segmento $\{ \mathbf{x} \} \times C$ è compatto. Consideriamo $d(\xi, \mathbb{R}^n \setminus A)$, con $\xi \in \{ \mathbf{x} \} \times C$. Essa è positiva e definita su un compatto perciò ammette minimo positivo $2\delta_{\mathbf{x}}$. Preso di nuovo $\mathbf{x}$, $\delta_{\mathbf{x}}$ è tale che per ogni $\mathbf{y}$, $B((\mathbf{x}, \mathbf{y}), \delta_{\mathbf{x}}) \subseteq A$. Dunque, se $\bar{\mathbf{x}} \in B(\mathbf{x}, \delta_{\mathbf{x}})$ per ogni $\mathbf{y} \in C$, $(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) \in B((\mathbf{x}, \mathbf{y}), \delta_{\mathbf{x}}) \subseteq A$, perciò $\bar{\mathbf{x}} \in B$ e B è aperto.

Allora

$$m_{n+k}(A) \geq m_{n+k}(B \times C) = m_n(B) m_k(C) \geq \overline{m}(E) m_k(C)$$

Perciò

$$\overline{m}_{n+k}(E \times F) > \overline{m}(E) m_k(C) - \varepsilon$$

dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si ha $\overline{m}_{n+k}(E \times F) > \overline{m}(E) m_k(C)$ che resta valida per ogni compatto C contenuto in F , per minimalità del sup si ha

$$(c.v.d.) \quad \overline{m}_{n+k}(E \times F) > \overline{m}(E) \cdot \underline{m}(F)$$

Osservazione V.5 Evidentemente, nelle ipotesi della proposizione, dovrà valere

$$\underline{m}_n(E) \overline{m}_k(F) \leq \overline{m}_{n+k}(E \times F)$$

confrontando questa con le

$$\begin{aligned} \overline{m}_n(E) \underline{m}_k(F) &\leq \overline{m}_{n+k}(E \times F) \\ \overline{m}_{n+k}(E \times F) &\leq \overline{m}_n(E) \overline{m}_k(F) \\ \underline{m}_{n+k}(E \times F) &= \underline{m}_n(E) \underline{m}_k(F) \end{aligned}$$

si ha, se per esempio F è misurabile, combinando la prima e la seconda disuguaglianza del

secondo gruppo,

$$\overline{m}_n(E) m_k(F) \leq \overline{m}_{n+k}(E \times F) \leq \overline{m}_n(E) m_k(F)$$

cioè $\overline{m}_{n+k}(E \times F) = \overline{m}_n(E) m_k(F)$.

Se $F \equiv (a, b)$ allora, posto

$$E_a^b \equiv E \times]a, b[, \tilde{E}_a^b \equiv E \times [a, b]$$

si ricava

$$\begin{aligned} \overline{m}_{n+1}(\tilde{E}_a^b) &= \overline{m}_n(E)(b-a) = \overline{m}_{n+1}(E_a^b) \\ \underline{m}_{n+1}(\tilde{E}_a^b) &= \underline{m}_n(E)(b-a) = \underline{m}_{n+1}(E_a^b) \end{aligned}$$

L'integrale di Lebesgue negli spazi reali

VI.1 L'integrale di Lebesgue

VI.1.1 L'integrale delle funzioni semplici

**Funzioni
semplici**

Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si definisce **funzione caratteristica** di E , la funzione a valori reali

$$\chi_E(\mathbf{x}) \equiv \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \in E \\ 0 & \mathbf{x} \notin E \end{cases}$$

Per definire l'integrale è necessario porre prima la seguente

Definizione VI.1 Si dice funzione semplice in $\mathbb{R}^n$ una combinazione lineare di funzioni caratteristiche di insiemi E_i misurabili e limitati di $\mathbb{R}^n$ a due a due disgiunti,

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \chi_{E_i}(\mathbf{x})$$

Se ϕ è una funzione semplice, la quantità

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \equiv \sum_{i=1}^m \lambda_i m(E_i)$$

si definisce integrale di ϕ .

Una funzione semplice si può scrivere in più modi come combinazione lineare di funzioni caratteristiche, perciò dobbiamo mostrare che il valore dell'integrale è indipendente dalla decomposizione di ϕ . Cominciamo con l'imporre che ogni coefficiente della combinazione lineare sia diverso da 0, altrimenti togliamo l'insieme corrispondente e l'integrale non cambia. Ora, valgano

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^m \lambda_i \chi_{E_i}(\mathbf{x}) \\ \phi(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^p \mu_i \chi_{F_i}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

con gli E_i e gli F_i limitati, misurabili e a due a due disgiunti. Fissiamo un punto $\mathbf{x}$ dello spazio reale. Tale punto potrà appartenere al più a uno degli E_i (essendo essi disgiunti). Se non esiste alcun indice i per cui $\mathbf{x} \in E_i$ allora $\phi(\mathbf{x}) = 0$, d'altra parte (ancora poiché gli insiemi sono disgiunti e abbiamo imposto λ_i e μ_i diversi da 0) varrà pure il viceversa e così $\mathbf{x}$ non apparterrà a nessuno degli F_i . D'altra parte, se esiste (ed è in tal caso unico, si è detto) un indice $\bar{i}$ per cui $\mathbf{x} \in E_{\bar{i}}$, allora esiste pure un unico indice $\bar{k}$ tale che $\mathbf{x} \in F_{\bar{k}}$. Perciò $\mathbf{x} \in E_{\bar{i}} \cap F_{\bar{k}}$

e a nessun altro degli E_i e F_k . In tal caso vale anche $\lambda_{\bar{i}} = \mu_{\bar{k}}$. Infine,

$$E_i = \bigcup_{k=1}^p (E_i \cap F_k)$$

$$F_k = \bigcup_{i=1}^m (E_i \cap F_k)$$

e scriviamo E_i e F_k come unioni finite e **disgiunte** di misurabili. Per tutto quanto detto,

$$\chi_{E_i}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^p \chi_{E_i \cap F_k}(\mathbf{x})$$

$$\chi_{F_k}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \chi_{E_i \cap F_k}(\mathbf{x})$$

si potrà scrivere

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^p \lambda_i \chi_{E_i \cap F_k}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^m \mu_k \chi_{E_i \cap F_k}(\mathbf{x})$$

Quindi,

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i m(E_i) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \sum_{k=1}^p m(E_i \cap F_k) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^p \lambda_i m(E_i \cap F_k)$$

$$\sum_{k=1}^p \mu_k m(F_k) = \sum_{k=1}^p \mu_k \sum_{i=1}^m m(E_i \cap F_k) = \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^m \mu_k m(E_i \cap F_k)$$

ma non appena $E_i \cap F_k \neq \emptyset$ e cioè $m(E_i \cap F_k) \neq 0$, come detto prima, $\lambda_i = \mu_k$, perciò le due espressioni sono uguali e l'integrale non dipende dalla decomposizione.

**Proprietà
dell'integrale
delle funzioni
semplici**

Siano ora ϕ e ψ due funzioni semplici, consideriamone la somma $\sigma \equiv \phi + \psi$. Cominciamo col vedere che σ è semplice. Siano

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \chi_{E_i}(\mathbf{x})$$

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^p \mu_k \chi_{F_k}(\mathbf{x})$$

avremo, un po' laboriosamente, analogamente per E_i e F_k

$$E_i = \bigcup_{k=1}^p (E_i \cap F_k) \cup \bigcup_{k=1}^p (E_i \setminus F_k) \Rightarrow \chi_{E_i} = \sum_{k=1}^p (\chi_{E_i \cap F_k} + \chi_{E_i \setminus F_k})$$

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^p \lambda_i \chi_{E_i \cap F_k}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^p \lambda_i \chi_{E_i \setminus F_k}(\mathbf{x})$$

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^m \mu_k \chi_{E_i \cap F_k}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^m \mu_k \chi_{F_k \setminus E_i}(\mathbf{x})$$

La famiglia di insiemi $\{E_i \cap F_k; E_i \setminus F_k; F_k \setminus E_i\}$ è ovviamente formata da insiemi disgiunti limitati e misurabili. Su tale famiglia si può scrivere σ che perciò risulterà semplice.

$$\sigma(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^p (\lambda_i + \mu_k) \chi_{E_i \cap F_k}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^p \lambda_i \chi_{E_i \setminus F_k}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^m \mu_k \chi_{F_k \setminus E_i}(\mathbf{x})$$

perciò l'integrale di σ varrà

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sigma(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^p (\lambda_i + \mu_k) m(E_i \cap F_k) + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^p \lambda_i m(E_i \setminus F_k) + \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^m \mu_k m(F_k \setminus E_i) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^p \lambda_i (m(E_i \cap F_k) + m(E_i \setminus F_k)) + \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^m \mu_k (m(E_i \cap F_k) + m(F_k \setminus E_i)) = \\
&= \sum_{i=1}^m \lambda_i m \left[\bigcup_{k=1}^p ((E_i \cap F_k) \cup (E_i \setminus F_k)) \right] + \sum_{k=1}^p \mu_k m \left[\bigcup_{i=1}^m ((E_i \cap F_k) \cup (F_k \setminus E_i)) \right] = \\
&= \sum_{i=1}^m \lambda_i m(E_i) + \sum_{k=1}^p \mu_k m(F_k) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}
\end{aligned}$$

Banale è invece vedere che se ψ è semplice e $c \in \mathbb{R}$ allora $c\psi$ è semplice e il suo integrale è c volte l'integrale di ψ . Abbiamo allora che l'insieme delle funzioni semplici che denoteremo con $\mathcal{S}$ è un $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale.

Facilmente si ha che se ψ è semplice, tale è $|\psi|$. Inoltre, se anche ϕ è semplice e risulta $\phi \leq \psi$, si trova

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

Dimostriamolo. Adottiamo le scritte usate per la discussione della somma di funzioni semplici, ed eliminiamo i domini su cui i coefficienti sono nulli. Ora, se $\mathbf{x} \in E_i$ e $\mathbf{x} \notin F_k$ per qualche i e per tutti i k , allora deve essere $\lambda_i = \phi(\mathbf{x}) < 0$ poiché $\psi(\mathbf{x}) = 0$. Al contrario se $\mathbf{x}$ è incluso in un F_k , ma in nessuno degli E_i , allora $\mu_k > 0$. Perciò si ha

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^p \lambda_i \chi_{E_i \cap F_k}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^p \lambda_i \chi_{E_i \setminus F_k}(\mathbf{x}) \\
\psi(\mathbf{x}) &= \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^m \mu_k \chi_{E_i \cap F_k}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^m \mu_k \chi_{F_k \setminus E_i}(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

dove i secondi addendi sono, rispettivamente, negativo e positivo. Inoltre, non appena $E_i \cap F_k$, $\lambda_i \leq \mu_k$. Se ne ricava

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &\leq \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^p \lambda_i m(E_i \cap F_k) \leq \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^m \mu_k m(E_i \cap F_k) \leq \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^m \mu_k (m(E_i \cap F_k) + m(F_k \setminus E_i)) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}
\end{aligned}$$

Siccome $\phi \leq |\phi|$ si ha che

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x}$$

Procedendo a decomporre come prima, si mostra che se ψ e ϕ sono semplici, allora sono semplici anche $\max(\phi, \psi)$ e $\min(\phi, \psi)$. Da cui sono semplici ϕ^+ e ϕ^- .

VI.1.2 Integrale per funzioni qualsiasi

Definizione di integrale

Siamo finalmente in grado di passare alla definizione di integrale per funzioni reali qualsiasi definite in $\mathbb{R}^n$. Sia $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, una funzione **limitata e nulla fuori da un compatto** (o, come si dice, a **supporto compatto**), allora indichiamo con $\mathcal{S}^+(f)$ la famiglia delle funzioni semplici che maggiorano la f e con $\mathcal{S}^-(f)$ la famiglia di funzioni semplici che sono inferiori alla f , cioè

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^+(f) &\equiv \{ \phi \in \mathcal{S} \mid \phi(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \} \\
\mathcal{S}^-(f) &\equiv \{ \psi \in \mathcal{S} \mid \psi(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \}
\end{aligned}$$

I due insiemi sono chiaramente non vuoti, sia infatti K il compatto al di fuori del quale la funzione si annulla. Siccome f è limitata, sarà $|f(\mathbf{x})| < M \in \mathbb{R}$, allora

$$-M \chi_K(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \leq M \chi_K(\mathbf{x})$$

Definizione VI.2 Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e nulla fuori da un compatto. Definiamo integrale superiore della f

la quantità

$$\overline{\int} f \, d\mathbf{x} \equiv \inf \left\{ \int \phi \, d\mathbf{x} \mid \phi \in \mathcal{S}^+(f) \right\}$$

e integrale inferiore

$$\underline{\int} f \, d\mathbf{x} \equiv \sup \left\{ \int \psi \, d\mathbf{x} \mid \psi \in \mathcal{S}^-(f) \right\}$$

La funzione f si dirà sommabile secondo Lebesgue se il suo integrale superiore coincide con quello inferiore. In tal caso il valore comune si chiama integrale della funzione

$$\overline{\int} f \, d\mathbf{x} = \underline{\int} f \, d\mathbf{x} \equiv \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mathbf{x}$$

Vediamo che l'integrale superiore è maggiore o eguale di quello inferiore: è immediato che se $\phi \in \mathcal{S}^+(f)$ e $\psi \in \mathcal{S}^-(f)$ allora $\phi \geq \psi$ e ciò vale per gli integrali. Fissiamo ora $\varepsilon > 0$, troviamo $\phi \in \mathcal{S}^+(f)$ per cui

$$\overline{\int} f \, d\mathbf{x} + \varepsilon > \int \phi \, d\mathbf{x} \geq \int \psi \, d\mathbf{x}$$

per ogni $\psi \in \mathcal{S}^-(f)$, allora, per minimalità del sup si ha

$$\overline{\int} f \, d\mathbf{x} + \varepsilon \geq \underline{\int} f \, d\mathbf{x}$$

per l'arbitrarietà di ε si conclude

$$\overline{\int} f \, d\mathbf{x} \geq \underline{\int} f \, d\mathbf{x}$$

Criteri di sommabilità

Valgono le seguenti due

Proposizione VI.1 *Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione $f(\mathbf{x})$, limitata e a supporto compatto, sia sommabile, è che esistano due successioni di funzioni semplici $\{\phi_k\} \subseteq \mathcal{S}^+(f)$ e $\{\psi_k\} \subseteq \mathcal{S}^-(f)$ tali che*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int (\phi_k - \psi_k) \, d\mathbf{x} = 0$$

In tal caso esistono i limiti delle successioni degli integrali di ϕ_k e ψ_k e si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int \phi_k \, d\mathbf{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \psi_k \, d\mathbf{x} = \int f \, d\mathbf{x}$$

Dimostrazione Sia f integrabile allora esistono e coincidono

$$\inf \left\{ \int \phi \, d\mathbf{x} \mid \phi \in \mathcal{S}^+(f) \right\} = \sup \left\{ \int \psi \, d\mathbf{x} \mid \psi \in \mathcal{S}^-(f) \right\}$$

in ciascuno dei due insiemi è allora possibile costruire una successione $\{a_k\}$, rispettivamente minimizzante e massimizzante, che converga, rispettivamente, a inf e sup. Siccome per ogni k , a_k appartiene, ad esempio, all'insieme $\left\{ \int \phi \, d\mathbf{x} \mid \phi \in \mathcal{S}^+(f) \right\}$ esiste ϕ_k successione a valori in $\mathcal{S}^+$ tale che risulti $\int \phi_k \, d\mathbf{x} = a_k \rightarrow \overline{\int} f \, d\mathbf{x}$.

Veniamo al viceversa,

$$\begin{aligned} \overline{\int} f \, d\mathbf{x} &\leq \int \phi_k \, d\mathbf{x} \\ -\underline{\int} f \, d\mathbf{x} &\leq -\int \psi_k \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

sicché

$$\overline{\int} f \, d\mathbf{x} - \underline{\int} f \, d\mathbf{x} \leq \int (\phi_k - \psi_k) \, d\mathbf{x} \rightarrow 0$$

da cui si ha che f è sommabile. Ora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste ν per cui se $k > \nu$

$$\left| \int (\phi_k - \psi_k) \, d\mathbf{x} \right| = \int \phi_k \, d\mathbf{x} - \int \psi_k \, d\mathbf{x} < \varepsilon$$

ma

$$\int \phi_k \, d\mathbf{x} - \int f \, d\mathbf{x} \leq \int \phi_k \, d\mathbf{x} - \int \psi_k \, d\mathbf{x} < \varepsilon$$

(c.v.d.) da cui si perviene immediatamente alla tesi.

Proposizione VI.2 *Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione $f(\mathbf{x})$, limitata e a supporto compatto, sia sommabile, è per ogni $\varepsilon > 0$ esistano $\phi \subseteq \mathcal{S}^+(f)$ e $\psi \subseteq \mathcal{S}^-(f)$ tali che*

$$\int (\phi - \psi) \, d\mathbf{x} < \varepsilon$$

Dimostrazione Si potrebbe utilizzare la proposizione precedente e concludere in fretta. Ma è istruttivo ragionare daccapo. Sia f sommabile allora dalla coincidenza di sup e inf delle funzioni semplici minoranti e maggioranti, si ha, fissato $\varepsilon > 0$, per una maggiorante ϕ e una minorante ψ

$$\begin{aligned} \int f(\mathbf{x}) + \frac{\varepsilon}{2} &> \int \phi \, d\mathbf{x} \\ \int f(\mathbf{x}) - \frac{\varepsilon}{2} &< \int \psi \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

per cui

$$\int \phi \, d\mathbf{x} - \int \psi \, d\mathbf{x} = \int (\phi - \psi) \, d\mathbf{x} < \varepsilon$$

Viceversa, essendo

$$\begin{aligned} \overline{\int} f \, d\mathbf{x} &\leq \int \phi \, d\mathbf{x} \\ -\underline{\int} f \, d\mathbf{x} &\leq -\int \psi \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

si ricava

$$\overline{\int} f \, d\mathbf{x} - \underline{\int} f \, d\mathbf{x} \leq \int (\phi - \psi) \, d\mathbf{x} < \varepsilon$$

(c.v.d.) per ogni $\varepsilon > 0$. Dall'arbitrarietà di ε si conclude.

Proprietà dell'integrale

Cominciamo col vedere che se f è sommabile, tali sono anche $f^+ = \max\{f, 0\}$ e $f^- = -\min\{f, 0\}$. Notiamo che se $\psi \leq \phi$ allora risulta

$$\begin{aligned} \psi^+ = \max\{\psi, 0\} &\leq \max\{\phi, 0\} = \phi^+ \\ -\psi^- = \min\{\psi, 0\} &\leq \min\{\phi, 0\} = -\phi^- \end{aligned}$$

perciò $\phi^+ - \psi^+ \geq 0$ e $\phi^- - \psi^- \leq 0$.

Siccome f è integrabile, siano $\{\phi_k\} \subseteq \mathcal{S}^+(f)$ e $\{\psi_k\} \subseteq \mathcal{S}^-(f)$ come nella prima proposizione, perciò $\phi_k \geq \psi_k$ e, siccome $\phi = \phi^+ - \phi^-$, si ha

$$\phi_k^+ - \psi_k^+ = \phi_k + \phi_k^- - \psi_k - \psi_k^- = \phi_k - \psi_k + (\phi_k^- - \psi_k^-)$$

essendo l'addendo tra parentesi negativo, si ha

$$\phi_k^+ - \psi_k^+ \leq \phi_k - \psi_k$$

ne deriva che

$$\int (\phi_k^+ - \psi_k^+) dx \leq \int (\phi_k - \psi_k) dx \rightarrow 0$$

Essendo ϕ^+ e ψ^+ funzioni semplici, valendo $f \leq \phi_k$ e $\psi_k \leq f$ si ha, per quanto detto prima, $f^+ \leq \phi_k^+$ e $\psi_k^+ \leq f^+$, si può allora usare la proposizione VI.1 e concludere che f^+ è sommabile. Analogamente si procede per f^- , si ha $f^- \leq \psi_k^-$, $\phi_k^- \leq f^-$ e $\phi_k^+ \geq \psi_k^+$, per cui $\{\psi_k^-\} \subseteq \mathcal{S}^+(f^-)$ e $\{\phi_k^-\} \subseteq \mathcal{S}^-(f^-)$

$$\psi_k^- - \phi_k^- = \psi_k^+ - \psi_k - \phi_k^+ + \phi_k = \phi_k - \psi_k + (\psi_k^+ - \phi_k^+) \leq \phi_k - \psi_k$$

e, dalla proposizione VI.1 si ottiene la tesi essendo

$$\int (\psi_k^- - \phi_k^-) dx \leq \int (\phi_k - \psi_k) dx \rightarrow 0$$

Passiamo a vedere che se f e g sono integrabili, allora la loro somma è integrabile. Siano $\{\phi_k\} \subseteq \mathcal{S}^+(f)$, $\{\psi_k\} \subseteq \mathcal{S}^-(f)$ e $\{\gamma_k\} \subseteq \mathcal{S}^+(g)$, $\{\delta_k\} \subseteq \mathcal{S}^-(g)$, inoltre

$$\begin{aligned} \int (\phi_k - \psi_k) dx &\rightarrow 0 \\ \int (\gamma_k - \delta_k) dx &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Usiamo ancora le proprietà delle funzioni semplici e dei loro integrali, abbiamo che $\{\phi_k + \gamma_k\} \subseteq \mathcal{S}^+(f+g)$, $\{\psi_k + \delta_k\} \subseteq \mathcal{S}^-(f+g)$, inoltre

$$\int (\phi_k + \gamma_k - \psi_k - \delta_k) dx = \int (\phi_k - \psi_k) dx + \int (\gamma_k - \delta_k) dx \rightarrow 0$$

sicché dalla proposizione VI.1 si ha la tesi. D'altra parte, sempre in forza della detta proposizione si ha

$$\int (f+g) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int (\phi_k + \gamma_k) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \phi_k dx + \lim_{k \rightarrow \infty} \int \gamma_k dx = \int f dx + \int g dx$$

Se f è sommabile, tali sono f^+ e f^- perciò anche $|f| = f^+ + f^-$ è sommabile.

Se $c \in \mathbb{R}$ e f è sommabile allora, usando di nuovo la proposizione VI.1, si trova che cf è sommabile e che

$$\int c \cdot f(x) dx = c \int f dx$$

da cui si ha che lo spazio delle funzioni sommabili è uno spazio vettoriale e che l'operatore di integrazione, definito in tale spazio, è lineare.

Se f è una funzione sommabile non negativa, allora il suo integrale è non negativo. Infatti, sia $\{\phi_k\} \subseteq \mathcal{S}^+(f)$ si ha $\phi_k \geq 0$ e con ciò

$$\int \phi_k dx \geq 0$$

passando al limite, che esiste ed è l'integrale di f ,

$$\int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \phi_k dx \geq 0$$

Da questo si ricava che se $f(x) \leq g(x)$ allora

$$\int f dx \leq \int g dx$$

Perciò, essendo $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ si ricava

$$\left| \int f dx \right| \leq \int |f| dx$$

Riassumendo

Proposizione VI.3 Siano f e g due funzioni limitate a supporto compatto e sommabili, allora f^+ , f^- , $|f|$, $f+g$

e, se $c \in \mathbb{R}$, cf sono sommabili. Inoltre,

$$\begin{aligned}\int (f + g) \, d\mathbf{x} &= \int f \, d\mathbf{x} + \int g \, d\mathbf{x} \\ \int c \cdot f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= c \int f \, d\mathbf{x}\end{aligned}$$

se poi $f \leq g$ allora

$$\int f \, d\mathbf{x} \leq \int g \, d\mathbf{x}$$

infine,

$$\left| \int f \, d\mathbf{x} \right| \leq \int |f| \, d\mathbf{x}$$

Confronto con l'integrale di Riemann

L'unica differenza che si ha nelle definizioni di integrale secondo Lebesgue e secondo Riemann riguarda le funzioni semplici. Mentre per Lebesgue possiamo usare insiemi misurabili qualsiasi, con Riemann siamo costretti a riferirci ai soli intervalli.

Indichiamo con $\mathcal{S}$ la classe delle funzioni semplici secondo Lebesgue, e con $\mathcal{S}'$ la classe delle funzioni semplici elementari, cioè aventi per base solo intervalli. Vale ovviamente

$$\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$$

Perciò se f è limitata e a supporto compatto

$$\mathcal{S}'_+(f) \subseteq \mathcal{S}^+(f), \quad \mathcal{S}'_-(f) \subseteq \mathcal{S}^-(f)$$

da cui

$$\sup \left\{ \int \psi \, d\mathbf{x} \mid \psi \in \mathcal{S}'_-(f) \right\} \leq \sup \left\{ \int \psi \, d\mathbf{x} \mid \psi \in \mathcal{S}^-(f) \right\} \leq \inf \left\{ \int \phi \, d\mathbf{x} \mid \phi \in \mathcal{S}^+(f) \right\} \leq \inf \left\{ \int \phi \, d\mathbf{x} \mid \phi \in \mathcal{S}'_+(f) \right\}$$

da cui se una funzione è integrabile secondo Riemann, è sommabile per Lebesgue. In particolare l'integrale di Lebesgue è un'estensione dell'integrale di Riemann e tutti i risultati ottenuti nella teoria di Lebesgue (integrabilità di funzioni monotone o continue e teorema fondamentale del calcolo) restano validi.

VI.2 Funzioni misurabili

VI.2.1 Definizione di funzione misurabile

Cominciamo a considerare funzioni $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ e poniamo la seguente

Definizione VI.3 Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, diremo che f è misurabile se per ogni $t \in \mathbb{R}$ l'insieme

$$F_t \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) > t\}$$

è misurabile.

Si vede subito che se f è continua allora è misurabile. Infatti, F_t è la controimmagine secondo f di un aperto e perciò è aperto e quindi misurabile.

La scelta di F_t fatta nella definizione non è l'unica possibile, vale la seguente

Proposizione VI.4 Le seguenti proprietà sono equivalenti:

- (i) $F_t \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) \leq t\}$ è misurabile per ogni $t \in \mathbb{R}$;
- (ii) $F_t'' \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) < t\}$ è misurabile per ogni $t \in \mathbb{R}$;
- (iii) $F_t''' \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) \geq t\}$ è misurabile per ogni $t \in \mathbb{R}$;
- (iv) $f(\mathbf{x})$ è misurabile.

Dimostrazione

Cominciamo col vedere che (iv) implica (i). Abbiamo che F_t è misurabile e che

$$F_t' = \mathbb{R}^n \setminus F_t$$

ma lo spazio $\mathbb{R}^n$ è misurabile essendo ogni palla aperta e perciò misurabile. Differenza di misurabili è misurabile, perciò F_t' è misurabile.

Adesso vediamo che (i) implica (ii). F_t'' è misurabile come unione infinita di misurabili

$$F_t'' = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_{t-1/k}'$$

Infine, (ii) $\Rightarrow$ (iii), infatti

$$(c.v.d.) \quad F_t''' = \mathbb{R}^n \setminus F_t''$$

VI.2.2 Proprietà delle funzioni misurabili

**Osservazioni
sulle funzioni
misurabili**

Stabiliamo il seguente

Lemma VI.1 Se $f(\mathbf{x})$ e $g(\mathbf{x})$ sono due funzioni misurabili, l'insieme

$$E \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) > g(\mathbf{x})\}$$

è misurabile.

Dimostrazione Sia $\mathbf{x} \in E$, allora risulta $f(\mathbf{x}) > g(\mathbf{x})$ ed esisterà un razionale r per cui

$$f(\mathbf{x}) > r > g(\mathbf{x})$$

da cui

$$E = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} F_r \cap G_r''$$

(c.v.d.) poiché $\mathbb{Q}$ è numerabile, F_r e G_r'' sono misurabili, E è misurabile.

Indichiamo con $\mathcal{M}$ la classe delle funzioni misurabili. Vale il seguente

**Teorema VI.1
(proprietà delle
funzioni
misurabili)**

Valgono le seguenti proprietà

(i) se $f \in \mathcal{M}$ e $c \in \mathbb{R}$ allora $f + c$ e $cf \in \mathcal{M}$;

(ii) se $f, g \in \mathcal{M}$ allora $f + g$ e fg sono misurabili;

(iii) se $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ allora le funzioni

$$M(\mathbf{x}) \equiv \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k(\mathbf{x}), \quad m(\mathbf{x}) \equiv \inf_{k \in \mathbb{N}} f_k(\mathbf{x})$$

sono misurabili;

(iv) se $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ e $f_k(\mathbf{x}) \leq f_{k+1}(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x}$, allora la funzione

$$f(\mathbf{x}) \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\mathbf{x})$$

è misurabile;

(v) se $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ le funzioni

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &\equiv \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k(\mathbf{x}) \\ g(\mathbf{x}) &\equiv \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

sono misurabili.

Dimostrazione

Vediamo la (i). Per ogni reale $t \in \mathbb{R}$ l'insieme $F_t = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) > t\}$ è misurabile, perciò è misurabile l'insieme $F_{t/c} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid cf(\mathbf{x}) > t\}$ per ogni t . Da cui cf è misurabile. Considerando F_{t-c} si ottiene che $f + c$ è misurabile.

Vediamo (ii). Si ha

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) > t\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) > t - g(\mathbf{x})\}$$

per (i) e per il lemma quest'ultimo è misurabile per cui $f + g \in \mathcal{M}$.

Ora mostriamo che f^2 è misurabile: se $t \geq 0$

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f^2(\mathbf{x}) > t\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) > \sqrt{t}\} \cup \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) < -\sqrt{t}\}$$

che è un insieme misurabile. Se $t < 0$ allora l'insieme diviene $\mathbb{R}^n$. In ogni caso si avrà misurabilità e perciò $f^2 \in \mathcal{M}$. D'altra parte per questo e per i punti precedenti fg è misurabile essendo

$$fg = \frac{1}{4}(f+g)^2 - \frac{1}{4}(f-g)^2$$

Veniamo a (iii). Per ogni t

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid M(\mathbf{x}) > t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f_k(\mathbf{x}) > t\}$$

se un punto appartiene al primo insieme, per le proprietà del sup, dovrà esistere un indice k per cui $f_k(\mathbf{x}) > t$ e allora il punto apparterrà al secondo insieme. Se un punto appartiene al secondo insieme, ovviamente apparterrà al primo. Il secondo insieme è l'unione numerabile di insiemi misurabili, perciò è misurabile. Usando l'insieme

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid m(\mathbf{x}) < t\}$$

si deduce in modo del tutto analogo la misurabilità di $m(\mathbf{x})$.

Adesso (iv). Essa discende subito da (iii), in quanto $f(\mathbf{x}) = \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k(\mathbf{x})$.

Per (v) si ha

$$M_k(\mathbf{x}) = \sup_{j \geq k} f_j(\mathbf{x})$$

è misurabile per ogni k , perciò è misurabile anche

$$f(\mathbf{x}) = \inf_{k \in \mathbb{N}} M_k(\mathbf{x}) = \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k(\mathbf{x})$$

(c.v.d.) in modo completamente analogo si dimostra l'asserzione per il minimo limite.

Una conseguenza immediata di (v) è che se una successione di funzioni misurabili converge puntualmente alla funzione f , allora f (limite puntuale) è misurabile.

Prese ora due funzioni misurabili, $f(\mathbf{x})$ e $g(\mathbf{x})$, posto $f_1(\mathbf{x}) \equiv f(\mathbf{x})$ e $f_k(\mathbf{x}) \equiv g(\mathbf{x})$ per ogni $k > 1$, allora

$$M(\mathbf{x}) = \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k(\mathbf{x}) = \max\{f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})\} \equiv f(\mathbf{x}) \vee g(\mathbf{x})$$

è misurabile, così come

$$m(\mathbf{x}) = \inf_{k \in \mathbb{N}} f_k(\mathbf{x}) = \min\{f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})\} \equiv f(\mathbf{x}) \wedge g(\mathbf{x})$$

in particolare sono misurabili $f^+(\mathbf{x})$ e $f^-(\mathbf{x})$. Viceversa se f^+ e f^- sono misurabili allora $f = f^+ - f^-$ è misurabile. Sarà misurabile anche $|f|$.

Misurabilità e sottografico

A questo punto è interessante vedere la correlazione tra le proprietà discusse e il sottografico di una funzione misurabile. Se $f(\mathbf{x})$ è una funzione reale definita in $\mathbb{R}^n$ si definisce **sottografico** di $f(\mathbf{x})$ l'insieme di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

$$\mathcal{G}^-(f) \equiv \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid y < f(\mathbf{x})\}$$

Vale allora il seguente

Teorema VI.2 Una funzione è misurabile se e solo se il suo sottografico è misurabile.

Dimostrazione ($\Leftarrow$) Sia $\mathcal{G}^-(f)$ misurabile. Sia $t \in \mathbb{R}$. Dobbiamo far vedere che l'insieme

$$F_t = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) > t\}$$

è misurabile. Sia $R > 0$ e per $h \in \mathbb{N}$ poniamo

$$\mathcal{G}_{t,h}^R \equiv \{(\mathbf{x}, y) \in \mathcal{G}^-(f) \mid \|\mathbf{x}\| < R, t < y < t + h\}$$

tale insieme comprende sicuramente le $\mathbf{x}$ tali che $t < y < f(\mathbf{x})$, perciò sarà di certo sottoinsieme di

$$(F_t \cap B_n(0, R)) \times \left] t, t + \frac{1}{h} \right[$$

D'altra parte, $\mathcal{G}_{t,h}^R$, conterrà $\mathbf{x}$ per cui $f(\mathbf{x}) > t + 1/h$ e, in definitiva, avremo

$$(F_{t+1/h} \cap B_n(0, R)) \times \left] t, t + \frac{1}{h} \right[\subseteq \mathcal{G}_{t,h}^R \subseteq (F_t \cap B_n(0, R)) \times \left] t, t + \frac{1}{h} \right[$$

inoltre, $\mathcal{G}_{t,h}^R$ è chiaramente limitato ed è misurabile, poiché è intersezione di misurabili

$$\mathcal{G}_{t,h}^R = \left(B_n(0, R) \times \left] t, t + \frac{1}{h} \right[\right) \cap \mathcal{G}^-(f)$$

Posto $F_\tau^R \equiv F_\tau \cap B_n(0, R)$ e ricordando l'osservazione V.5 abbiamo

$$\begin{aligned} \underline{m}_n(F_t^R) \frac{1}{h} &\geq \underline{m}_{n+1}(\mathcal{G}_{t,h}^R) \\ \overline{m}_n(F_{t+1/h}^R) \frac{1}{h} &\leq \overline{m}_{n+1}(\mathcal{G}_{t,h}^R) \end{aligned}$$

cioè

$$\overline{m}_n(F_{t+1/h}^R) \leq h \overline{m}_{n+1}(\mathcal{G}_{t,h}^R) \leq \underline{m}_n(F_t^R)$$

per ogni $h \in \mathbb{N}$ si ha

$$\overline{m}_n(F_{t+1/h}^R) \leq \underline{m}_n(F_t^R)$$

la successione $h \mapsto \overline{m}_n(F_{t+1/h}^R)$ è monotona decrescente perciò ammette limite e vale

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \overline{m}_n(F_{t+1/h}^R) \leq \underline{m}_n(F_t^R),$$

ma

$$F_t^R = \bigcup_{h=1}^{\infty} F_{t+1/h}^R$$

sicché, essendo $F_{t+1/h}^R \subseteq F_{t+1/(h+1)}^R$ per quanto visto nella proposizione V.14,

$$\overline{m}_n(F_t^R) = \lim_{h \rightarrow \infty} \overline{m}_n(F_{t+1/h}^R) \leq \underline{m}_n(F_t^R)$$

da cui $F_t \cap B(0, R)$ è misurabile per ogni $R > 0$, perciò F_t è misurabile.

($\Rightarrow$) Sia f misurabile. Per ogni $r \in \mathbb{Q}$ l'insieme

$$F_r \times]-\infty, r[$$

è misurabile. Se $(\mathbf{x}, y) \in \mathcal{G}^-(f)$, cioè $y < f(\mathbf{x})$, esisterà $r \in \mathbb{Q}$ tale che

$$y < r < f(\mathbf{x})$$

per cui

$$\mathcal{G}^-(f) = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} F_r \times]-\infty, r[$$

(c.v.d.) da cui, essendo $\mathbb{Q}$ numerabile, $\mathcal{G}^-(f)$ è misurabile.

Misurabilità e sommabilità

Veniamo ora a mettere in relazione i concetti di misurabilità e di sommabilità

Teorema VI.3 Sia $f(\mathbf{x})$ una funzione misurabile, limitata e a supporto compatto K . Allora f è sommabile.

Dimostrazione Supponiamo, intanto, che f sia a valori non negativi. Sia $P \in \mathbb{N}$ per cui $f(\mathbf{x}) < P$. Sia $h \in \mathbb{N}$ e per $j \in J_{hP}$ definiamo l'insieme

$$G_j \equiv \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \frac{j-1}{h} < f(\mathbf{x}) \leq \frac{j}{h} \right\} = F_{(j-1)/h} \setminus F_{j/h}$$

allora gli insiemi G_j saranno misurabili e disgiunti a due a due. Poniamo

$$\begin{aligned} \phi_h(\mathbf{x}) &\equiv \sum_{j=1}^{hP} \frac{j}{h} \chi_{G_j}(\mathbf{x}) \\ \psi_h(\mathbf{x}) &\equiv \sum_{j=1}^{hP} \frac{j-1}{h} \chi_{G_j}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

ne avremo $\{\phi_h\} \subseteq \mathcal{S}^+(f)$ e $\{\psi_h\} \subseteq \mathcal{S}^-(f)$. Inoltre

$$\int (\phi_h - \psi_h) d\mathbf{x} = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^{hP} m(G_j)$$

siccome $f(\mathbf{x}) \geq 0$ in K allora l'unione dei G_j sarà contenuta in K e

$$\int (\phi_h - \psi_h) d\mathbf{x} = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^{hP} m(G_j) = \frac{1}{h} m \left(\bigcup_{j=1}^{hP} G_j \right) \leq \frac{1}{h} m(K) \rightarrow 0$$

da cui per la proposizione VI.1, la tesi.

Se ora f è misurabile e di segno variabile, saranno misurabili f^+ e f^- che ricadranno nelle ipotesi restrittiva per cui il teorema è dimostrato. Ne deriva che f^+ e f^- sono sommabili e (c.v.d.) $f = f^+ - f^-$ è sommabile.

Consideriamo ora una funzione $f(\mathbf{x})$ sommabile, limitata, **non negativa**, e nulla fuori da un compatto. Consideriamo i due insiemi

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0^-(f) &\equiv \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid 0 < y < f(\mathbf{x})\} \\ \mathcal{G}_0^-(f) &\equiv \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid 0 < y \leq f(\mathbf{x})\} \end{aligned}$$

Prese le successioni $\{\phi_h\} \subseteq \mathcal{S}^+(f)$ e $\{\psi_h\} \subseteq \mathcal{S}^-(f)$ definite come nella proposizione VI.1, poniamo

$$\begin{aligned} \Phi_h^- &\equiv \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid 0 < y \leq \phi_h(\mathbf{x})\} \\ \Psi_h &\equiv \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid 0 < y < \psi_h(\mathbf{x})\} \end{aligned}$$

si ha

$$\Psi_h \subseteq \mathcal{G}_0^-(f) \subseteq \mathcal{G}_0^-(f) \subseteq \Phi_h^-$$

d'altra parte

$$\Psi_h = \bigcup_{i=1}^m E_i \times (0, \psi_h(E_i))$$

per cui, Ψ_h e Φ_h^- sono misurabili. Per il teorema V.19 e la proposizione VI.1 si ha

$$\begin{aligned} m_{n+1}(\Psi_h) &= \sum_{i=1}^m m_n(E_i) \psi_h(E_i) = \int \psi_h d\mathbf{x} \rightarrow \int f d\mathbf{x} \\ m_{n+1}(\Phi_h^-) &= \sum_{i=1}^m m_n(F_i) \phi_h(F_i) = \int \phi_h d\mathbf{x} \rightarrow \int f d\mathbf{x} \end{aligned}$$

per cui, dato che $m_{n+1}(\Psi_h) = m_{n+1}(\Phi_h^-)$ e che sussistono le seguenti disuguaglianze

$$m_{n+1}(\Psi_h) \leq \overline{m}_{n+1}(\mathcal{G}_0^-(f)) \leq \overline{m}_{n+1}(\mathcal{G}_0^-(f)) \leq m_{n+1}(\Phi_h^-)$$

$$m_{n+1}(\Psi_h) \leq \underline{m}_{n+1}(\mathcal{G}_0^-(f)) \leq \underline{m}_{n+1}(\mathcal{G}_0^{\bar{}}(f)) \leq m_{n+1}(\Phi_h^{\bar{}})$$

si conclude che $\mathcal{G}_0^-(f)$ e $\mathcal{G}_0^{\bar{}}(f)$ sono misurabili e inoltre hanno misura pari all'integrale della funzione. Riassumendo si ha il seguente fondamentale

Teorema VI.4 Sia $f(\mathbf{x})$ sommabile, limitata, a supporto compatto e non negativa, allora gli insiemi

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_0^-(f) &\equiv \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid 0 < y < f(\mathbf{x})\} \\ \mathcal{G}_0^{\bar{}}(f) &\equiv \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid 0 < y \leq f(\mathbf{x})\}\end{aligned}$$

sono misurabili e risulta

$$m_{n+1}(\mathcal{G}_0^-(f)) = m_{n+1}(\mathcal{G}_0^{\bar{}}(f)) = \int f \, d\mathbf{x}$$

Possiamo usare subito il teorema per invertire il teorema precedente. Sia $f(\mathbf{x})$ limitata, a supporto compatto e sommabile. Sia, intanto, $f(\mathbf{x})$ non negativa. Allora $\mathcal{G}_0^-(f)$ è misurabile. Ma, essendo f positiva,

$$\mathcal{G}^-(f) = \mathcal{G}_0^-(f) \cup (\mathbb{R}^n \times]-\infty, 0])$$

il quale come unione di misurabili è misurabile. Per cui f è misurabile. Sia ora f una funzione qualsiasi, allora f^+ e f^- sono positive limitate e a supporto compatto, inoltre sono sommabili. Perciò f^+ e f^- sono sommabili e infine $f = f^+ - f^-$ è misurabile.

Riassumendo si ha il seguente

Teorema VI.5 Una funzione $f(\mathbf{x})$ definita in $\mathbb{R}^n$, limitata e a supporto compatto è sommabile se e solo se è misurabile.

Sia, ancora f non negativa, e sia $\mathcal{G}_0^-(f)$ misurabile, in questo caso la funzione ha sottografico misurabile

$$\mathcal{G}^-(f) = \mathcal{G}_0^-(f) \cup (\mathbb{R}^n \times]-\infty, 0])$$

e perciò è essa stessa misurabile. Dunque, la funzione f è sommabile:

Teorema VI.6 Sia $f(\mathbf{x})$ limitata, a supporto compatto e non negativa, allora gli insiemi

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_0^-(f) &\equiv \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid 0 < y < f(\mathbf{x})\} \\ \mathcal{G}_0^{\bar{}}(f) &\equiv \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid 0 < y \leq f(\mathbf{x})\}\end{aligned}$$

sono misurabili se e solo se f è sommabile. In tal caso,

$$m_{n+1}(\mathcal{G}_0^-(f)) = m_{n+1}(\mathcal{G}_0^{\bar{}}(f)) = \int f \, d\mathbf{x}$$

VI.3 Estensioni dell'integrale

VI.3.1 Estensione di sommabilità e misurabilità

Sommabilità in un insieme

Come per l'integrale di Riemann, procediamo ad allargare la nozione di integrazione, definendo l'integrale esteso a un insieme e l'integrale di funzioni non limitate.

Definizione VI.4 Sia E un insieme limitato di $\mathbb{R}^n$, sia $f(\mathbf{x})$ una funzione limitata definita sull'insieme E . Diremo che f è sommabile in E se la funzione

$$f^*(\mathbf{x}) \equiv \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in E \\ 0 & \mathbf{x} \notin E \end{cases}$$

è sommabile. Quando ciò avviene la quantità $\int f^* \, d\mathbf{x}$ si chiama integrale della funzione f esteso all'insieme E , e si indica con il simbolo

$$\int_E f \, d\mathbf{x}$$

Si noti che la definizione è ben posta poiché f^* è limitata e nulla fuori dal compatto $\bar{E}$ chiusura di E , essendo $E \subseteq \bar{E}$, perciò $\mathbb{R}^n \setminus \bar{E} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus E$ da cui se $\mathbf{x} \notin \bar{E}$ allora $\mathbf{x} \notin E$ e dunque $f(\mathbf{x}) = 0$. Siccome f è sommabile in E se e solo se f^* è sommabile in $\mathbb{R}^n$ vale la seguente

Proposizione VI.5 Siano f e g due funzioni limitate definite in $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e ivi sommabili, allora f^+ , f^- , $|f|$, $f+g$ e, se $c \in \mathbb{R}$, cf sono sommabili in E . Inoltre,

$$\begin{aligned} \int_E (f+g) \, d\mathbf{x} &= \int_E f \, d\mathbf{x} + \int_E g \, d\mathbf{x} \\ \int_E c \cdot f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= c \int_E f \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

se poi $f \leq g$ allora

$$\int_E f \, d\mathbf{x} \leq \int_E g \, d\mathbf{x}$$

infine,

$$\left| \int_E f \, d\mathbf{x} \right| \leq \int_E |f| \, d\mathbf{x}$$

Inoltre sia $f(\mathbf{x}) \geq 0$, allora

$$\int_E f \, d\mathbf{x} = \int f^* \, d\mathbf{x} = m_{n+1}(\mathcal{G}_0^-(f^*))$$

ma $\mathcal{G}_0^-(f^*) = \mathcal{G}_0^-(f) \equiv \{(\mathbf{x}, y) \in E \times \mathbb{R} \mid 0 < y < f(\mathbf{x})\}$, infatti se esistesse $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus E$ e $(\mathbf{x}, y) \in \mathcal{G}_0^-(f^*)$ per qualche y si avrebbe

$$0 < y < f^*(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow 0 < 0$$

assurdo. Ora, f è sommabile se e solo se f^* è sommabile, ma ciò si verifica se e solo se, teorema VI.6, $\mathcal{G}_0^-(f^*)$ è misurabile, da cui, se e solo se $\mathcal{G}_0^-(f)$ è misurabile.

Teorema VI.7 Sia $f(\mathbf{x})$ definita in E , limitata e non negativa, gli insiemi

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0^-(f) &\equiv \{(\mathbf{x}, y) \in E \times \mathbb{R} \mid 0 < y < f(\mathbf{x})\} \\ \mathcal{G}_0^{\bar{-}}(f) &\equiv \{(\mathbf{x}, y) \in E \times \mathbb{R} \mid 0 < y \leq f(\mathbf{x})\} \end{aligned}$$

sono misurabili se e solo se f è sommabile in E . In tal caso risulta

$$m_{n+1}(\mathcal{G}_0^-(f)) = m_{n+1}(\mathcal{G}_0^{\bar{-}}(f)) = \int_E f \, d\mathbf{x}$$

Sia ancora f non negativa sommabile su E . Sia $D \subseteq E$ e sia f sommabile su D , allora

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0^-(f|_D) &\subseteq \mathcal{G}_0^-(f) \\ m_{n+1}(\mathcal{G}_0^-(f|_D)) &\leq m_{n+1}(\mathcal{G}_0^-(f)) \end{aligned}$$

perciò

$$\int_D f \, d\mathbf{x} \leq \int_E f \, d\mathbf{x}$$

D'altra parte, sia ancora f non negativa, e sia $D \subseteq E$. Sia f sommabile in E , allora esistono $\{\phi_k\} \subseteq \mathcal{S}^+(f_E^*)$ e $\{\psi_k\} \subseteq \mathcal{S}^-(f_E^*)$ che possiamo supporre positive e tali che le successioni dei loro integrali tendono all'integrale di f su E . Siano ora $\bar{\phi}_k \equiv (\phi_k)_D^*$ e $\bar{\psi}_k \equiv (\psi_k)_D^*$, troviamo che $\{\bar{\phi}_k\} \subseteq \mathcal{S}^+(f_D^*)$ e $\{\bar{\psi}_k\} \subseteq \mathcal{S}^-(f_D^*)$. Per quanto detto

$$\int_D (\bar{\phi}_k - \bar{\psi}_k) \, d\mathbf{x} = \int_D (\phi_k - \psi_k) \, d\mathbf{x} \leq \int_E (\phi_k - \psi_k) \, d\mathbf{x} \rightarrow 0$$

da cui f non negativa è sommabile anche su $D \subseteq E$.

Nel caso in cui f sia di segno variabile, f^+ e f^- saranno sommabili su E e perciò, essendo non negative, su D , dunque f sarà sommabile in D .

Sia ancora f non negativa. Siano $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = E$, con f . Allora

$$\mathcal{G}_0^-(f|_A) \cup \mathcal{G}_0^-(f|_B) = \mathcal{G}_0^-(f)$$

inoltre $\mathcal{G}_0^-(f|_A) \cap \mathcal{G}_0^-(f|_B) = \emptyset$. Ambedue gli insiemi che partiscono il sottografico di E sono misurabili se e solo se $f|_{A,B}$ sommabile. Se f è sommabile in E allora lo è su A e B e i due sottografici sono misurabili. Viceversa, i due sottografici sono misurabili, e allora è misurabile anche il sottografico su E , perciò f è sommabile su E . In ogni caso si ricava

$$\int_A f \, d\mathbf{x} + \int_B f \, d\mathbf{x} = \int_E f \, d\mathbf{x}$$

se f è di segno variabile

$$\int_A f \, d\mathbf{x} + \int_B f \, d\mathbf{x} = \int_A f^+ \, d\mathbf{x} + \int_B f^+ \, d\mathbf{x} - \int_A f^- \, d\mathbf{x} - \int_B f^- \, d\mathbf{x} = \int_E f^+ \, d\mathbf{x} - \int_E f^- \, d\mathbf{x} = \int_E f \, d\mathbf{x}$$

In conclusione

Proposizione VI.6 *Sia f definita sull'insieme E . Se (A, B) è una partizione dell'insieme E , f è sommabile in E se e solo se è sommabile su A e B . In tal caso,*

$$\int_A f \, d\mathbf{x} + \int_B f \, d\mathbf{x} = \int_E f \, d\mathbf{x}$$

Misurabilità in un insieme

Supponiamo ora che il dominio E della funzione f sia misurabile. In questo caso si ha

Definizione VI.5 *Sia $f : \mathbb{R}^n \supseteq E \rightarrow \mathbb{R}$ con E misurabile. Allora si dice che f è misurabile in E se per ogni $t \in \mathbb{R}$ risulta misurabile l'insieme*

$$F_t^E \equiv \{\mathbf{x} \in E \mid f(\mathbf{x}) > t\}$$

Vale, come per la sommabilità in un insieme, la seguente

Proposizione VI.7 *Sia E misurabile e sia $f : \mathbb{R}^n \supseteq E \rightarrow \mathbb{R}$. Allora f è misurabile in E se e solo se $f^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (che vale 0 sul complementare di E e vale $f(\mathbf{x})$ in E) è misurabile in $\mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione Cominciamo col notare che

$$F_t^E = F_t \cap E$$

infatti, se $\mathbf{x} \in F_t^E$ allora $\mathbf{x} \in E$ e $f(\mathbf{x}) = f^*(\mathbf{x}) > t$ perciò $\mathbf{x} \in F_t \cap E$. Se poi $\mathbf{x} \in F_t \cap E$ allora $\mathbf{x} \in E$ da cui $t < f^*(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ e allora $\mathbf{x} \in F_t^E$. Ne deriva che se f^* è misurabile, essendo E misurabile, F_t^E , intersezione di due misurabili, è misurabile.

Sia ora F_t^E misurabile per ogni t . Sia $t < 0$, allora per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus E$ vale $f^*(\mathbf{x}) \geq 0 > t$, da cui

$$F_t = F_t^E \cup (\mathbb{R}^n \setminus E)$$

perciò, per ogni $t < 0$, siccome $\mathbb{R}^n \setminus E$ è misurabile, F_t è misurabile. Vediamo ora il caso $t \geq 0$. Sia ha direttamente

$$F_t = F_t^E$$

infatti, sia $\mathbf{x} \in F_t$. Sono dati due casi, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus E$ e $\mathbf{x} \in E$. Nel secondo caso $t < f^*(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ perciò $\mathbf{x} \in F_t^E$. Per il primo caso, $0 \leq t < f^*(\mathbf{x}) = 0$ cioè $0 < 0$ il che è assurdo e $\mathbf{x} \in E$. La tesi è dimostrata.

(c.v.d.)

Indichiamo con $\mathcal{M}_E$ l'insieme delle funzioni misurabili in E . In forza della proposizione appena dimostrata è facile vedere che continuano a valere le asserzioni dimostrate nel caso di misurabilità su $\mathbb{R}^n$:

Proposizione VI.8 *Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

- (i) $F_t^{E'} \equiv \{\mathbf{x} \in E \mid f(\mathbf{x}) \leq t\}$ è misurabile per ogni $t \in \mathbb{R}$;
- (ii) $F_t^{E''} \equiv \{\mathbf{x} \in E \mid f(\mathbf{x}) < t\}$ è misurabile per ogni $t \in \mathbb{R}$;
- (iii) $F_t^{E'''} \equiv \{\mathbf{x} \in E \mid f(\mathbf{x}) \geq t\}$ è misurabile per ogni $t \in \mathbb{R}$;

(iv) $f(\mathbf{x})$ è misurabile in E .

Dimostrazione $f(\mathbf{x})$ è misurabile se e solo se $f^*(\mathbf{x})$ è misurabile. Ciò vale se e solo se F_t è misurabile, ossia se e solo se F_t', F_t'', F_t''' sono misurabili.

Se mostriamo che tali insiemi sono misurabili se e solo se sono misurabili le loro intersezioni con E , cioè $F_t^{E'}, F_t^{E''}, F_t^{E'''}$, abbiamo finito. Un'implicazione è ovvia. Vediamo l'altra. Siccome $F_t^{E'} = E \setminus F_t^E$, se questo è misurabile allora è misurabile F_t^E , perciò è misurabile F_t e dunque è misurabile F_t' . Sia ora $F_t^{E''}$ misurabile. Sia $t \leq 0$, sia $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus E$, allora

$$0 = f^*(\mathbf{x}) < t \leq 0$$

assurdo, perciò, se $t \leq 0$

$$F_t'' = F_t^{E''}$$

se poi $t > 0$

$$F_t'' = F_t^{E''} \cup (\mathbb{R}^n \setminus E)$$

da cui F_t'' è misurabile. Infine, sia $F_t^{E'''}$ misurabile, si ha

$$E \setminus F_t^{E'''} = F_t^{E''}$$

(c.v.d.) perciò $F_t^{E''}$ è misurabile, ma allora F_t'' è misurabile e perciò anche F_t''' .

Teorema VI.8
(proprietà delle
funzioni
misurabili in
un insieme)

Valgono le seguenti proprietà

- (i) se $f \in \mathcal{M}_E$ e $c \in \mathbb{R}$ allora $f + c$ e $cf \in \mathcal{M}_E$;
- (ii) se $f, g \in \mathcal{M}_E$ allora $f + g$ e fg sono misurabili;
- (iii) se $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_E$ allora le funzioni

$$M(\mathbf{x}) \equiv \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k(\mathbf{x}), \quad m(\mathbf{x}) \equiv \inf_{k \in \mathbb{N}} f_k(\mathbf{x})$$

sono misurabili;

- (iv) se $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_E$ e $f_k(\mathbf{x}) \leq f_{k+1}(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x}$, allora la funzione

$$f(\mathbf{x}) \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\mathbf{x})$$

è misurabile;

- (v) se $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_E$ le funzioni

$$f(\mathbf{x}) \equiv \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k(\mathbf{x})$$

$$g(\mathbf{x}) \equiv \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(\mathbf{x})$$

sono misurabili.

Dimostrazione $(cf)^* = cf^*$, $(f + g)^* = f^* + g^*$, $(fg)^* = f^*g^*$. Allora se f e g sono misurabili, tali sono f^* e g^* , tali sono cf^* , $f^* + g^*$ e f^*g^* , per quanto scritto sopra, tali sono, infine, cf , $f + g$ e fg . (i) e (ii) restano dimostrate.

Vediamo (iii), (iv) e (v). Si ha $M(\mathbf{x}) = \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in E$. Consideriamo la funzione definita in $\mathbb{R}^n$ da

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} f_k^*(\mathbf{x})$$

allora, se $\mathbf{x} \in E$ tale funzione coincide con $M(\mathbf{x})$, mentre se $\mathbf{x} \notin E$, tale funzione è nulla essendo per ogni k $f_k^*(\mathbf{x}) = 0$. Allora

$$M^*(\mathbf{x}) = \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k^*(\mathbf{x})$$

Ma quest'ultima è misurabile, essendo misurabili le f_k e perciò le f_k^* . Analogamente si fa per (c.v.d.) l'inf, il lim, il lim sup e il lim inf.

Infine, vale il seguente

Teorema VI.9 Una funzione f limitata definita in un insieme E misurabile e limitato è misurabile in E se e solo se è sommabile in E .

Dimostrazione f è sommabile in E se e solo se f^* è sommabile in $\mathbb{R}^n$, se e solo f^* è misurabile in $\mathbb{R}^n$, se e solo se f è misurabile in E .
(c.v.d.)

Definizione generale di integrale: funzioni non negative

Vediamo adesso la definizione più generale possibile di integrale di una funzione (anche illimitata) definita su un insieme arbitrario (anche non limitato). Cominciamo però dal caso in cui f sia non negativa, come abbiamo fatto per l'integrale di Riemann in senso generalizzato, nel corso di Analisi I.

Definizione VI.6 Sia E un insieme di $\mathbb{R}^n$ e sia $f(\mathbf{x})$ una funzione definita in E e non negativa. Diremo che f è sommabile in E se

(i) per ogni $t > 0$ la funzione troncata

$$f_t(\mathbf{x}) \equiv \min\{f(\mathbf{x}), t\}$$

è sommabile in $E \cap B(0, t)$;

(ii) risulta

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{E \cap B(0, t)} f_t(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} < +\infty$$

In tal caso il limite di cui sopra si indica ancora come integrale della funzione f esteso a E .

Si deve notare come il limite adoperato nella definizione esiste sicuramente. Ciò perché, nell'ipotesi (i)

$$F(t) \equiv \int_{E \cap B(0, t)} f_t(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

è monotona crescente. Infatti, sia $t_1 < t_2$ allora $f_{t_1}(\mathbf{x}) = \min\{f(\mathbf{x}), t_1\} \leq \min\{f(\mathbf{x}), t_2\} = f_{t_2}(\mathbf{x})$ da cui

$$\begin{aligned} \int_{E \cap B(0, t_1)} f_{t_1}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &\leq \int_{E \cap B(0, t_1)} f_{t_2}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq \int_{E \cap B(0, t_2)} f_{t_2}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ F(t_1) &\leq F(t_2) \text{ se } t_1 < t_2 \end{aligned}$$

Dunque, il limite esiste sempre in $\overline{\mathbb{R}}$. Per abuso di linguaggio diremo che l'integrale di f su E è $+\infty$ quando, verificata (i), risulti

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{E \cap B(0, t)} f_t(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = +\infty.$$

Osservazione VI.1 Ovviamente la definizione appena data è un'estensione della precedente. Se infatti f ed E sono limitati, esiste $t_0 \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{aligned} f_{t_0}(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) \\ E \cap B(0, t_0) &= E \end{aligned}$$

in tal caso, per $t > t_0$, $F(t) = \int_E f \, d\mathbf{x}$.

Osservazione VI.2 Sia ancora f non negativa, sommabile in E . Risulta allora

$$\int_E f \, d\mathbf{x} = \lim_{r \rightarrow \infty} \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{E \cap B(0, r)} f_s(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \lim_{s \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{E \cap B(0, r)} f_s(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

Cominciamo con il definire la funzione di due variabili reali positive

$$G(r, s) \equiv \int_{E \cap B(0, r)} f_s \, d\mathbf{x}$$

essa è crescente in r fissata s ed è crescente in s fissata r . Ne deriva che se $s_1 < s_2$, essendo per ogni r

$$\int_{E \cap B(0, r)} f_{s_1}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq \int_{E \cap B(0, r)} f_{s_2}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

passando al limite per $r \rightarrow \infty$ (il quale esiste per monotonia)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{E \cap B(0, r)} f_{s_1}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{E \cap B(0, r)} f_{s_2}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

da cui, la funzione

$$s \mapsto \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{E \cap B(0, r)} f_s(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

è monotona e ammette limite. Un ragionamento analogo varrà per la

$$r \mapsto \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{E \cap B(0, r)} f_s(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

Sia ora $\varepsilon > 0$ e sia t_0 tale che

$$\int_E f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \varepsilon < F(t) \leq \int_E f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

per ogni $t \geq t_0$. Siano ora $t > r, s > t_0$

$$\int_E f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \varepsilon < F(t_0) = G(t_0, t_0) \leq G(t_0, s) \leq G(r, s) \leq G(t, t) = F(t) \leq \int_E f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

cioè, per ogni ε , fuori da una palla la cui ampiezza dipende da ε ,

$$\int_E f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \varepsilon < G(r, s) \leq \int_E f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

Passando al limite per $r \rightarrow \infty$

$$\int_E f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \varepsilon < \lim_{r \rightarrow \infty} G(r, s) \leq \int_E f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

passando al limite per $s \rightarrow \infty$

$$\int_E f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \varepsilon < \lim_{s \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow \infty} G(r, s) \leq \int_E f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

per l'arbitrarietà di ε si conclude

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow \infty} G(r, s) = \int_E f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

Passando al limite prima per s e poi per r si dimostra anche l'altra eguaglianza.

Teorema VI.10 Una funzione f non negativa, definita in un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$, ha troncato sommabili su E se e solo se gli insiemi

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0^-(f) &\equiv \{(\mathbf{x}, y) \in E \times \mathbb{R} \mid 0 < y < f(\mathbf{x})\} \\ \mathcal{G}_0^+(f) &\equiv \{(\mathbf{x}, y) \in E \times \mathbb{R} \mid 0 < y \leq f(\mathbf{x})\} \end{aligned}$$

sono misurabili in $\mathbb{R}^{n+1}$. f è sommabile in E se e solo se gli insiemi definiti sono misurabili e hanno misura finita. In tal caso risulta

$$\int_E f \, d\mathbf{x} = m_{n+1}(\mathcal{G}_0^-(f)) = m_{n+1}(\mathcal{G}_0^+(f))$$

Dimostrazione Definiamo per ogni reale positivo t

$$\mathcal{G}_t^-(f) \equiv \{(\mathbf{x}, y) \in E \times \mathbb{R} \mid |\mathbf{x}| < t, 0 < y < f_t(\mathbf{x})\} = \{(\mathbf{x}, y) \in (E \cap B(0, t)) \times \mathbb{R} \mid 0 < y < f_t(\mathbf{x})\}$$

$\mathcal{G}_t^-(f) \equiv \{(\mathbf{x}, y) \in E \times \mathbb{R} \mid |\mathbf{x}| < t, 0 < y \leq f_t(\mathbf{x})\} = \{(\mathbf{x}, y) \in (E \cap B(0, t)) \times \mathbb{R} \mid 0 < y \leq f_t(\mathbf{x})\}$
 f_t è sommabile in $E \cap B(0, t)$ se e solo se i due insiemi sono misurabili (teorema VI.7).

D'altra parte

$$\mathcal{G}_0^-(f) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{G}_k^-(f)$$

$$\mathcal{G}_0^{\bar{}}(f) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{G}_k^{\bar{}}(f)$$

Dimostriamo la prima uguaglianza, sia $(\mathbf{x}, y)$ nell'insieme a secondo membro, allora esiste un intero k tale che $0 < y < f_k(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})$; sia $(\mathbf{x}, y) \in \mathcal{G}_0^-(f)$ allora $0 < y < f(\mathbf{x})$, ma, per la proprietà di Archimede, esiste $k \in \mathbb{N}$, per cui $0 < y < k$, allora $y < \min\{k, f(\mathbf{x})\} = f_k(\mathbf{x})$.

Ora, se per ogni $t \in \mathbb{R}$ $\mathcal{G}_t^{-, \bar{}}(f)$ sono misurabili, allora sono misurabili per $t = k \in \mathbb{N}$ e risultano misurabili anche $\mathcal{G}_0^{-, \bar{}}(f)$. Vale pure il viceversa. Infatti, siano $\mathcal{G}_0^{-, \bar{}}(f)$ misurabili, si ha subito che

$$\mathcal{G}_t^-(f) = \mathcal{G}_0^-(f) \cap (B(0, t) \times]0, t])$$

$$\mathcal{G}_t^{\bar{}}(f) = \mathcal{G}_0^{\bar{}}(f) \cap (B(0, t) \times]0, t])$$

da cui, per ogni t , $\mathcal{G}_t^{-, \bar{}}(f)$ sono misurabili.

Dunque, se è f sommabile allora per ogni t le troncate sono sommabili, perciò gli insiemi $\mathcal{G}_t^-(f)$ e $\mathcal{G}_t^{\bar{}}(f)$ sono misurabili con misura finita. In questo caso ciascun $\mathcal{G}_k^{-, \bar{}}(f)$, $k \in \mathbb{N}$, è misurabile e dunque sono misurabili $\mathcal{G}_0^-(f)$ e $\mathcal{G}_0^{\bar{}}(f)$. Viceversa, siano $\mathcal{G}_0^-(f)$ e $\mathcal{G}_0^{\bar{}}(f)$ misurabili, allora ciascuno dei $\mathcal{G}_t^{-, \bar{}}(f)$ è misurabile e, infine, le troncate sono sommabili.

In ogni caso, abbiamo che vale (i) della definizione di sommabilità se e solo se $\mathcal{G}_0^-(f)$ (o $\mathcal{G}_0^{\bar{}}(f)$) è misurabile. Allora, sempre dal teorema VI.7,

$$\int_{E \cap B(0, t)} f_t d\mathbf{x} = m_{n+1}(\mathcal{G}_t^-(f)) = m_{n+1}(\mathcal{G}_t^{\bar{}}(f))$$

Consideriamo i tre membri dell'eguaglianza scritta come funzioni di t . La prima funzione, e così allora le altre due, è crescente, perciò è lecito passare al limite per $t \rightarrow \infty$:

$$\int_E f d\mathbf{x} \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{E \cap B(0, t)} f_t d\mathbf{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} m_{n+1}(\mathcal{G}_t^-(f)) = \lim_{t \rightarrow \infty} m_{n+1}(\mathcal{G}_t^{\bar{}}(f))$$

Notiamo ora che

$$\mathcal{G}_k^-(f) \subseteq \mathcal{G}_{k+1}^-(f)$$

$$\mathcal{G}_k^{\bar{}}(f) \subseteq \mathcal{G}_{k+1}^{\bar{}}(f)$$

allora, per il teorema di collegamento e per il teorema di subadditività della misura (usati, ordinatamente, nella prima e nella seconda eguaglianza),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m_{n+1}(\mathcal{G}_t^-(f)) = \lim_{k \rightarrow \infty} m_{n+1}(\mathcal{G}_k^-(f)) = m_{n+1}(\mathcal{G}_0^-(f))$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m_{n+1}(\mathcal{G}_t^{\bar{}}(f)) = \lim_{k \rightarrow \infty} m_{n+1}(\mathcal{G}_k^{\bar{}}(f)) = m_{n+1}(\mathcal{G}_0^{\bar{}}(f))$$

per cui

$$\int_E f d\mathbf{x} \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{E \cap B(0, t)} f_t d\mathbf{x} = m_{n+1}(\mathcal{G}_0^-(f)) = m_{n+1}(\mathcal{G}_0^{\bar{}}(f))$$

ne consegue che se f è sommabile (vale (ii) nella definizione) i due insiemi sono misurabili (per quanto detto sopra), ma hanno anche misura finita. Se, invece, hanno misura finita, f è (c.v.d.) sommabile, poiché vale (i) (per quanto detto sopra), ma vale anche (ii).

Definizione generale di integrale: funzioni di segno variabile

Veniamo al caso generale di funzioni di segno variabile.

Definizione VI.7 Una funzione f è sommabile su E se sono sommabili su E ambedue le funzioni non negative

f^+ ed f^- . In questo caso porremo

$$\int_E f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_E f^+(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_E f^-(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

Osservazione VI.3 In realtà considereremo l'integrale di f anche con valori infiniti. Sia E un insieme misurabile e sia f misurabile su E . Allora, dal teorema sulle proprietà delle funzioni misurabili in un insieme, si evince che le funzioni f^+ e f^- sono misurabili, e che lo sono anche le loro troncate ($f_t^{+,-} = \min\{f^{+,-}, t\}$). Le troncate saranno allora sommabili (poiché sono limitate e definite in un insieme limitato e misurabile). Ne deriva che per $f^{+,-}$ varrà la parte (i) della definizione di sommabilità ed esisterà, per monotonia, il limite

$$\int_E f^{+,-}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{E \cap B(0,t)} f_t^{+,-}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \in \overline{\mathbb{R}}$$

Se ambedue i limiti (per f^+ e f^-) sono finiti, allora la funzione è sommabile, se invece uno solo dei due limiti è finito la funzione si dice **integrabile** su E . Il suo integrale sarà $+\infty$ se l'integrale finito sarà quello di f^- , viceversa sarà $-\infty$.

Perciò se E è **misurabile** abbiamo su esso tre classi di funzioni

- (i) *funzioni misurabili*, secondo la definizione posta dalla proposizione VI.8;
- (ii) *funzioni integrabili*, se una almeno tra f^+ e f^- (che hanno troncate sommabili) ha integrale finito;
- (iii) *funzioni sommabili*, se entrambe f^+ e f^- sono sommabili.

Sopra abbiamo dimostrato che se una funzione è misurabile, allora ha parte positiva e parte negativa che ammettono troncate sommabili. Viceversa, se f^+ e f^- hanno troncate sommabili, allora hanno troncate misurabili (essendo esse limitate e definite su un insieme misurabile e limitato). Ma se una funzione f ha troncate misurabili allora è misurabile (se f^+ e f^- sono misurabili tale è f). Infatti, per ogni $t, r \in \mathbb{R}$, l'insieme

$$F_{r,t} \equiv \{\mathbf{x} \in E \cap B(0,t) \mid \min\{f(\mathbf{x}), t\} > r\}$$

è misurabile. Allora, se dimostriamo l'eguaglianza

$$F_r = \{\mathbf{x} \in E \mid f(\mathbf{x}) > r\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_{r,k}$$

abbiamo che f è misurabile, come unione di misurabili. Dimostriamo l'eguaglianza. Sia $\mathbf{x}$ nel primo insieme. Prendiamo $k > \|\mathbf{x}\|$ per cui $\mathbf{x} \in E \cap B(0,k)$ e prendiamo $k > f(\mathbf{x})$ sicché

$$\min\{f(\mathbf{x}), k\} = f(\mathbf{x}) > r$$

da cui $\mathbf{x} \in F_{r,k}$. Sia ora $\mathbf{x}$ nel secondo insieme, allora esiste $k \in \mathbb{N}$ per cui $\min\{f(\mathbf{x}), k\} > r$ e $\mathbf{x} \in E$. Ma

$$f(\mathbf{x}) > \min\{f(\mathbf{x}), k\} > r$$

da cui $\mathbf{x} \in F_r$. Infine, troviamo il seguente

Teorema VI.11 Una funzione f definita su un insieme misurabile E è ivi misurabile se e solo se f^+ e f^- ammettono troncate sommabili per ogni reale t .
In particolare, se f è sommabile su E misurabile, allora è ivi misurabile.

Altre considerazioni

La proposizione VI.6 diventa

Proposizione VI.9 Sia f definita sull'insieme E . Sia (A, B) una partizione dell'insieme E , allora f è integrabile in E se e solo se f è integrabile in A e in B . In tal caso,

$$\int_A f^\pm \, d\mathbf{x} + \int_B f^\pm \, d\mathbf{x} = \int_E f^\pm \, d\mathbf{x}$$

In particolare, f è sommabile in E se e solo se è sommabile in A e in B .

Dimostrazione Cominciamo dalle funzioni non negative. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ ($A \cap B(0, t), B \cap B(0, t)$) è una partizione di $E \cap B(0, t)$, perciò le troncate della funzione ristrette ad A e B sono sommabili se e solo se lo sono quelle della funzione in E , per la proposizione VI.6. Ciò varrà passando a funzioni di segno variabile, ove si considerino parte positiva e negativa. Inoltre,

$$\int_{E \cap B(0, t)} f^\pm d\mathbf{x} = \int_{A \cap B(0, t)} f^\pm d\mathbf{x} + \int_{B \cap B(0, t)} f^\pm d\mathbf{x}$$

passando ai limiti per $t \rightarrow \infty$, i tre limiti esistono per monotonia, si ha la tesi, essendo il primo limite (considerando parte positiva o negativa) finito se e solo se sono finiti gli altri due limiti (c.v.d.) (poiché hanno lo stesso segno).

Le funzioni considerate sono a valori in $\overline{\mathbb{R}}$, d'altra parte se f è sommabile è ragionevole pensare che assumerà i valori infiniti in regioni non troppo estese. Più precisamente si ha il seguente

Teorema VI.12 Sia f una funzione sommabile su un insieme misurabile E . Posto

$$F_{+\infty} \equiv \{\mathbf{x} \in E \mid f(\mathbf{x}) = +\infty\}$$

$$F_{-\infty} \equiv \{\mathbf{x} \in E \mid f(\mathbf{x}) = -\infty\}$$

risulta $m(F_{+\infty}) = m(F_{-\infty}) = 0$

Dimostrazione Consideriamo $F_{+\infty}$. Si ha

$$F_{+\infty} = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k^E$$

Infatti, è ovvio che $F_{+\infty} \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k^E$. D'altra parte, sia $\mathbf{x} \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k^E$, allora $\forall k \in \mathbb{N} f(\mathbf{x}) > k$, perciò (illimitatezza di $\mathbb{N}$) $f(\mathbf{x}) = +\infty$ e $\mathbf{x} \in F_{+\infty}$.

Ora, f è sommabile in E , perciò, teorema VI.11, f è misurabile su E e ciascuna F_k^E è misurabile, inoltre $F_{k+1}^E \subseteq F_k^E$ per cui, per l'osservazione V.4, l'insieme $F_{+\infty}$ è misurabile.

Per $r > 0$, indichiamo con χ_r la funzione caratteristica dell'insieme $F_{+\infty} \cap B(0, r)$, allora, per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale

$$f^+(\mathbf{x}) \geq k\chi_r(\mathbf{x})$$

Siccome χ_r è non negativa, si ha

$$\mathcal{G}_0^-(\chi_r) = \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid 0 < y < \chi_r(\mathbf{x})\} = (F_{+\infty} \cap B(0, r)) \times]0, 1[$$

da cui

$$m(\mathcal{G}_0^-(\chi_r)) = \int \chi_r d\mathbf{x} = m(F_{+\infty} \cap B(0, r))$$

perciò

$$m(F_{+\infty} \cap B(0, r)) = \int \chi_r d\mathbf{x} \leq \frac{1}{k} \int_E f^+ d\mathbf{x}$$

per ogni k . Passando, allora, al limite per $k \rightarrow \infty$

$$m(F_{+\infty} \cap B(0, r)) = 0$$

per ogni $r > 0$, dalla proposizione V.17

$$m(F_{+\infty}) = \lim_{r \rightarrow \infty} m(F_{+\infty} \cap B(0, r)) = 0,$$

la tesi.

Il caso $F_{-\infty}$ è del tutto analogo. Per completezza riportiamo la dimostrazione. Si ha, in primo luogo,

$$F_{-\infty} = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_{-k}^{''E}$$

infatti, $\mathbf{x}$ appartenga al primo insieme, allora per ogni k , $-\infty = f(\mathbf{x}) < -k$. Sia $\mathbf{x}$ nel secondo insieme, allora per ogni $k \in \mathbb{N}$, risulterà $f(\mathbf{x}) < -k$, perciò $f(\mathbf{x}) = -\infty$.

Se f è sommabile su E , dal teorema VI.11, si ha che è ivi misurabile. Ne deriva che ciascun $F_{-k}''^E$ è misurabile. Vediamo che la successione degli $F_{-k}''^E$ è decrescente:

$$F_{-(k+1)}''^E \subseteq F_{-k}''^E$$

infatti, se $\mathbf{x}$ è nel primo insieme, allora $f(\mathbf{x}) < -k - 1 < -k$, perciò $\mathbf{x}$ appartiene al secondo insieme. In virtù dell'osservazione V.4 abbiamo che $F_{-\infty}$ è misurabile. Per $r > 0$, indichiamo con χ_r la funzione caratteristica dell'insieme $F_{-\infty} \cap B(0, r)$, allora, per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale

$$f^-(\mathbf{x}) \geq k\chi_r(\mathbf{x})$$

Siccome χ_r è non negativa, si ha

$$\mathcal{G}_0^-(\chi_r) = \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid 0 < y < \chi_r(\mathbf{x})\} = (F_{-\infty} \cap B(0, r)) \times]0, 1[$$

da cui

$$m(\mathcal{G}_0^-(\chi_r)) = \int \chi_r d\mathbf{x} = m(F_{-\infty} \cap B(0, r))$$

perciò

$$m(F_{-\infty} \cap B(0, r)) = \int \chi_r d\mathbf{x} \leq \frac{1}{k} \int_E f^- d\mathbf{x}$$

per ogni k . Passando, allora, al limite per $k \rightarrow \infty$

$$m(F_{-\infty} \cap B(0, r)) = 0$$

per ogni $r > 0$, dalla proposizione V.17

$$m(F_{-\infty}) = \lim_{r \rightarrow \infty} m(F_{-\infty} \cap B(0, r)) = 0,$$

(c.v.d.) la tesi.

**Proprietà
verificate
quasi ovunque**

Se una proprietà è verificata per tutti gli $\mathbf{x} \in E$ tranne al più per quelli contenuti in un insieme di misura nulla, si dice che la proprietà sussiste **quasi per ogni $\mathbf{x} \in E$** , o **quasi ovunque** in E . Il teorema precedente afferma allora che una funzione sommabile su un insieme è quasi ovunque finita in esso.

Sia data una funzione misurabile su un insieme a misura nulla. Siano, intanto, f limitata e il dominio a misura nulla limitato, ne consegue che f è sommabile. D'altra parte le funzioni semplici maggioranti (che devono annullarsi fuori dal dominio E) hanno tutte integrale nullo, perciò la successione in tale insieme, che tende all'integrale di f tende a 0. Perciò f ha integrale nullo su E a misura nulla. Siano ora f ed E qualsiasi. Siccome f è misurabile, le troncate di f (parte positiva e negativa) saranno ancora misurabili e ricadendo nelle ipotesi di cui sopra, avranno integrale nullo, infatti

$$m(E \cap B(0, t)) \leq m(E) = 0$$

passando al limite per $t \rightarrow \infty$, si trova che f ha integrale di parte positiva e negativa nulli. Si conclude perciò la

Proposizione VI.10 *Sia f una funzione definita su E a misura nulla. Allora f è sommabile in E e ha integrale nullo.*

Dimostrazione Per quanto detto sopra ci basta dimostrare che una qualunque funzione definita su un insieme a misura nulla è ivi misurabile. Sia la funzione non negativa. Consideriamo

$$F_t = \{\mathbf{x} \in E \mid f(\mathbf{x}) > t\}$$

per $t < 0$ $F_t = E$ e perciò è misurabile. Per $t \geq 0$, resta comunque $F_t \subseteq E$, allora

$$0 \leq \underline{m}(F_t) \leq \overline{m}(F_t) \leq m(E) = 0$$

perciò F_t è misurabile per ogni t . Se f è di segno qualunque, comunque f^+ e f^- sono misurabili, perciò f è misurabile.

Proposizione VI.11 Sia $f(\mathbf{x}) = 0$ quasi ovunque in E qualsiasi. Allora, si ha

$$\int_E f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0$$

Dimostrazione Sia A il sottoinsieme di E su cui $f(\mathbf{x}) = 0$. Allora se $B = E \setminus A$, si ha che (A, B) è una partizione di E , e che $m(B) = 0$. Per la proposizione precedente f è sommabile in B e ha ivi integrale nullo. D'altra parte, avendo troncato tutte nulle f è sommabile in A e ha ivi integrale nullo. Per la proposizione VI.6, ciascuna troncata sull'insieme E , è sommabile e vale

$$\int_E f_t^\pm \, d\mathbf{x} = \int_A f_t^\pm \, d\mathbf{x} + \int_B f_t^\pm \, d\mathbf{x}$$

ma come detto,

$$\int_{A,B} f_t^\pm \, d\mathbf{x} = 0$$

(c.v.d.) da cui f è sommabile in E e ha integrale nullo.

In particolare se $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ quasi ovunque, allora la loro differenza è sommabile; inoltre, se una delle due è sommabile, anche l'altra è sommabile e ha lo stesso integrale.

La proposizione precedente si può invertire. Lo facciamo col seguente

Teorema VI.13 Se $f(\mathbf{x}) \geq 0$ in E e se $\int_E f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0$, allora $f(\mathbf{x}) = 0$ quasi ovunque in E .

Dimostrazione Si ha

$$F_0 \equiv \{\mathbf{x} \in E \mid f(\mathbf{x}) > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_{1/k}$$

poiché $f(\mathbf{x}) > 1/k$ in $F_{1/k}$, avremo, per ogni intero k

$$0 = \int_{F_{1/k}} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \geq \int_{F_{1/k}} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = m_{n+1}(\mathcal{G}_0^-(f|_{F_{1/k}})) \geq m_{n+1}(F_{1/k} \times]0, 1/k]) = \frac{1}{k} m_{n+1}(F_{1/k})$$

ne consegue che

$$0 \leq m_{n+1}(F_{1/k}) \leq 0$$

(c.v.d.) sicché $m(F_0) = 0$.

Riportiamo infine il seguente criterio

Teorema VI.14
(criterio del confronto)

Sia $g(\mathbf{x})$ una funzione non negativa sommabile su E . Se $f(\mathbf{x})$ è misurabile su E , e risulta

$$|f(\mathbf{x})| \leq g(\mathbf{x}) \quad \text{q.o. in } E,$$

$f(\mathbf{x})$ è sommabile su E .

Dimostrazione Cominciamo dal caso $|f| \leq g$ su tutto E . Abbiamo che parte positiva e negativa di f hanno troncature sommabili. Basta ora vedere che hanno integrale finito. Risulta

$$f_t^\pm(\mathbf{x}) \leq |f(\mathbf{x})| \leq g(\mathbf{x})$$

perciò, per ogni t

$$\int_{E \cap B(0,t)} f_t^\pm(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq \int_{E \cap B(0,t)} g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} < +\infty$$

passando al limite per $t \rightarrow \infty$, si ha la tesi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{E \cap B(0,t)} f_t^\pm(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{E \cap B(0,t)} g_t(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} < +\infty.$$

Sia ora A l'insieme in E delle $\mathbf{x}$ per cui $|f(\mathbf{x})| > g(\mathbf{x})$. Sia $B = E \setminus A$, allora f è sommabile su A (che ha misura nulla), ed è sommabile su B per quanto detto prima (g è sommabile su $B \subseteq E$). Dalla proposizione VI.9 si ricava che f è sommabile su E .
(c.v.d.)

VI.4 Teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale

VI.4.1 Il teorema di Beppo Levi

Consideriamo una successione di funzioni $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, ci chiediamo se la successione degli integrali di ciascuna f_k converge all'integrale del limite puntuale, se esiste, della $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, cioè se si può scrivere

$$\int_E \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

Nel caso di funzioni di una variabile definite su un intervallo, per l'integrale di Riemann, si ha una tale proprietà se la convergenza è uniforme (si veda il paragrafo 2, della sottosezione I.2.5). Come vedremo l'integrale di Lebesgue consente di fare di meglio.

Lemma VI.2 Sia $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni integrabili in E , con

$$0 \leq f_k(\mathbf{x}) \leq f_{k+1}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in E, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

oppure

$$f_k(\mathbf{x}) \leq f_{k+1}(\mathbf{x}) \leq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in E, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

e sia $f(\mathbf{x}) \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\mathbf{x})$, per ogni $\mathbf{x} \in E$, allora

$$\int_E f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

Dimostrazione Poniamo

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0^-(f_k) &\equiv \{(\mathbf{x}, y) \in E \times \mathbb{R} \mid 0 < y < f_k(\mathbf{x})\} \\ \mathcal{G}_0^-(f) &\equiv \{(\mathbf{x}, y) \in E \times \mathbb{R} \mid 0 < y < f(\mathbf{x})\} \end{aligned}$$

allora, per ogni intero k

$$\mathcal{G}_0^-(f_k) \subseteq \mathcal{G}_0^-(f_{k+1})$$

inoltre,

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{G}_0^-(f_k) = \mathcal{G}_0^-(f)$$

infatti, $f(\mathbf{x}) = \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k(\mathbf{x})$, perciò è ovvia l'inclusione del primo insieme nel secondo. Sia ora $(\mathbf{x}, y)$ nel secondo insieme, allora esiste un intero $\bar{k}$ tale che $y < f_{\bar{k}}(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x})$, per le proprietà del sup.

Per il teorema VI.10, ogni insieme $\mathcal{G}_0^-(f_k)$ è misurabile e ha misura pari all'integrale di f_k , poiché f_k è non negativa e integrabile, cioè ha troncate sommabili. Allora, per il teorema di subadditività numerabile, si ha che $\mathcal{G}_0^-(f)$ è misurabile e f ha integrale pari alla sua misura in $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} m_{n+1}(\mathcal{G}_0^-(f_k)) = m_{n+1}(\mathcal{G}_0^-(f)) = \int_E f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

Veniamo alla seconda parte, definiamo $g_k \equiv -f_k$ essa converge a $g = -f$ perciò

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_E g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

$$(c.v.d.) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_E f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

L'asserto continua a valere se invece di imporre che tutte le funzioni siano positive ci si limita a chiedere che per qualche $h \in \mathbb{N}$, risulti $\int_E f_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} > -\infty$, se la successione è crescente; viceversa, si impone che l'integrale sia $< +\infty$. In tal caso, buttiamo via i primi termini e poniamo $h = 1$, ora, basta considerare la successione $g_k = f_k - f_1$, essa è a termini non negativi, perciò, essendo $g = f - f_1$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int_E g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k \, d\mathbf{x} - \int_E f_1 \, d\mathbf{x} &= \int_E f \, d\mathbf{x} - \int_E f_1 \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Si conclude allora con il

Teorema VI.15
(di Beppo Levi)

Sia $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni integrabili in E , monotona crescente (rispettivamente decrescente) per ogni $\mathbf{x} \in E$. Se risulta, per qualche h

$$\int_E f_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} > -\infty,$$

(rispettivamente $\int_E f_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} < +\infty$)

Sia $f(\mathbf{x}) \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\mathbf{x})$, per ogni $\mathbf{x} \in E$, allora

$$\int_E f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

VI.4.2 Il lemma di Fatou

Vale il seguente

Lemma VI.3 Sia $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni non negative, e integrabili su un insieme misurabile E . Allora, posto

$$f(\mathbf{x}) \equiv \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(\mathbf{x})$$

vale

$$\int_E f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

Dimostrazione Anzitutto $f(\mathbf{x})$ è misurabile in E misurabile, (dal teorema sulle proprietà delle misurabili in un insieme, notando che le f_k sono misurabili). Dunque, essendo non negativa e avendo troncature sommabili (poiché è misurabile, VI.11) f è integrabile.

Per $k \in \mathbb{N}_0$, poniamo

$$g_k(\mathbf{x}) \equiv \inf_{i \geq k} f_i(\mathbf{x})$$

siccome $f_i(\mathbf{x}) \geq 0$ allora $g_k \geq 0$, inoltre $g_k(\mathbf{x}) \leq g_{k+1}(\mathbf{x})$. Se poi $k \leq i$, $g_k(\mathbf{x}) \leq f_i(\mathbf{x})$. Allora

$$\int_E g_k \, d\mathbf{x} \leq \int_E f_i \, d\mathbf{x}, \quad k \leq i$$

da cui

$$\int_E g_k \, d\mathbf{x} \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_E f_i \, d\mathbf{x}$$

Applichiamo alla successione g_k il teorema di Beppo Levi, avremo

$$\int_E \lim_{k \rightarrow \infty} g_k \, d\mathbf{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k \, d\mathbf{x} \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_E f_i \, d\mathbf{x}$$

d'altra parte

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k = \sup_{k \in \mathbb{N}} g_k = \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k = f$$

e infine,

$$(c.v.d.) \quad \int_E f \, d\mathbf{x} \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_E f_i \, d\mathbf{x}$$

Nel lemma è possibile sostituire l'ipotesi $f_k(\mathbf{x}) \geq 0$ per ogni $\mathbf{x} \in E$, con la più debole

$$f_k(\mathbf{x}) \geq \phi(\mathbf{x}), \text{ q.o. in } E$$

dove $\phi(\mathbf{x})$ è una funzione sommabile su E . Inoltre è possibile supporre che $f(\mathbf{x})$ valga il minimo limite solo quasi ovunque. Per vedere questo, intanto mostriamo la tesi se poniamo $\phi(\mathbf{x}) = 0$. Sia $A \subseteq E$ l'insieme delle $\mathbf{x}$ per cui $f_k(\mathbf{x}) < 0$, per ogni k , cioè

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{ \mathbf{x} \in E \mid f_k(\mathbf{x}) < 0 \} \cup \left\{ \mathbf{x} \in E \mid \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{x}) \right\}$$

allora, come unione numerabile di insiemi a misura nulla, per il teorema di subadditività numerabile A è misurabile e $m(A) = 0$. Allora l'insieme $B = E \setminus A$ è misurabile (come differenza di due misurabili). La coppia (A, B) è una partizione di E . Su B vale il lemma nella versione di sopra. Su A la funzione f è sommabile (avendo A misura nulla, proposizione VI.10). Perciò, essendo integrabile su A e su B , la funzione f è integrabile su E , proposizione VI.9. Per il lemma

$$\int_B f \, d\mathbf{x} \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_B f_i \, d\mathbf{x}$$

d'altra parte, per la proposizione VI.10

$$\int_A f \, d\mathbf{x} = \int_A f_i \, d\mathbf{x} = 0$$

perciò

$$\int_E f \, d\mathbf{x} \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_E f_i \, d\mathbf{x}$$

essendo, dalla VI.9,

$$\begin{aligned} \int_A f^+ \, d\mathbf{x} + \int_B f^+ \, d\mathbf{x} &= \int_E f^+ \, d\mathbf{x} \Rightarrow \int_B f \, d\mathbf{x} = \int_E f^+ \, d\mathbf{x} \\ \int_A f^- \, d\mathbf{x} + \int_B f^- \, d\mathbf{x} &= \int_E f^- \, d\mathbf{x} \Rightarrow \int_A f^- \, d\mathbf{x} = 0 = \int_E f^- \, d\mathbf{x} \\ \Rightarrow \int_E f \, d\mathbf{x} &= \int_B f \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

il che vale anche per gli f_i .

Il caso in cui $\phi(\mathbf{x})$ sia una funzione sommabile qualsiasi, si ha dal lemma e dalle considerazioni precedenti, ove si passi a considerare la successione $g_i = f_i(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x})$, in tal caso

$$\int_E f \, d\mathbf{x} - \int_E \phi \, d\mathbf{x} \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_E f_i \, d\mathbf{x} - \int_E \phi \, d\mathbf{x}$$

Analogamente varrà il teorema per il massimo limite se la successione sarà dominata da una funzione sommabile. La dimostrazione è immediata, essendo

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} x_k = - \limsup_{k \rightarrow \infty} (-x_k)$$

Lemma VI.4
(di Fatou)

Sia $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni integrabili sull'insieme misurabile E , tali che

$$f_k(\mathbf{x}) \geq \phi(\mathbf{x})$$

quasi ovunque in E , con ϕ sommabile su E . Allora, se

$$f(\mathbf{x}) = \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(\mathbf{x}), \text{ q.o. in } E$$

vale

$$\int_E f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

Se invece

$$f_k(\mathbf{x}) \leq \psi(\mathbf{x})$$

quasi ovunque in E , con ψ sommabile su E . Allora, se

$$f(\mathbf{x}) = \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k(\mathbf{x}) \text{ q.o. in } E$$

vale

$$\int_E f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

VI.4.3 Il teorema di Lebesgue

L'ultimo risultato fondamentale che presentiamo è il

Teorema VI.16 (di Lebesgue o della convergenza dominata)

Sia $\psi(\mathbf{x})$ una funzione non negativa e sommabile su un insieme misurabile E , e sia $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni integrabili su E tali che

$$|f_k(\mathbf{x})| \leq \psi(\mathbf{x}) \text{ q.o. in } E$$

e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \text{ q.o. in } E$$

allora

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k \, d\mathbf{x} = \int_E f \, d\mathbf{x}$$

Dimostrazione Anzitutto abbiamo, per ogni intero k ,

$$-\psi(\mathbf{x}) \leq f_k(\mathbf{x}) \leq \psi(\mathbf{x})$$

quasi ovunque in E . D'altra parte, quasi ovunque

$$f(\mathbf{x}) = \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k(\mathbf{x}) = \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(\mathbf{x})$$

applicando il lemma di Fatou

$$\int_E f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq \int_E \psi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

da cui esiste

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_E f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

(c.v.d.) la tesi.

Se invece di successioni, si considerano serie di funzioni, possiamo riformulare i risultati ottenuti per la successione delle somme parziali.

Caso notevole è quello di serie di funzioni non negative integrabili (o misurabili, che per funzioni non negative è lo stesso) sull'insieme E . Allora, la successione delle somme parziali, ricade nelle ipotesi del teorema di Beppo Levi, sicché

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_E f_k(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

e, perciò, per serie di funzioni non negative è sempre possibile scambiare tra loro somma e integrazione.

Nel caso generale, quanto scritto non è valido in generale, ma resta vero se risulta

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_E |f_k(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} < +\infty$$

Dimostriamolo. Tanto per cominciare risulta

$$\int_E |f_k(\mathbf{x})| d\mathbf{x} < \sum_{k=0}^{\infty} \int_E |f_k(\mathbf{x})| d\mathbf{x} < +\infty$$

dunque le f_k sono sommabili, perciò la successione delle somme parziali è sommabile e ha senso considerarne l'integrale. Consideriamo la funzione data dalla serie a termini non negativi (perciò convergente o divergente)

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} |f_k(\mathbf{x})|$$

poiché $\int v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} < +\infty$ la serie $v(\mathbf{x})$ converge quasi ovunque per il teorema VI.12, dunque, convergendo assolutamente, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(\mathbf{x})$ converge quasi ovunque. Posto

$$s_m(\mathbf{x}) \equiv \sum_{k=0}^m f_k(\mathbf{x}), \quad s(\mathbf{x}) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\mathbf{x})$$

si ha che

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_m(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x}) \text{ q.o. in } E$$

inoltre

$$|s_m| \leq v(\mathbf{x})$$

per il teorema di Lebesgue

$$\int_E s(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_E s_m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \int_E f_k d\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k d\mathbf{x}$$

Riassumendo

Teorema VI.17 Sia $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni integrabili su E . Se $f_k(\mathbf{x}) \geq 0$ per ogni k e $\mathbf{x}$, allora

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_E f_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Se, invece, f_k è di segno qualsiasi, allora integrale e somma continuano a scambiarsi se E è misurabile e risulta

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(\mathbf{x})| d\mathbf{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_E |f_k(\mathbf{x})| d\mathbf{x} < +\infty$$

VI.5 Derivazione sotto il segno di integrale

Sia E un insieme misurabile in $\mathbb{R}^n$, sia A un aperto di $\mathbb{R}^k$, consideriamone il prodotto cartesiano $E \times A$ che conterrà le coppie $(\mathbf{x}, \mathbf{t})$. Sia $f(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ una funzione definita in $E \times A$, integrabile in $\mathbf{x}$ per ogni fissato $\mathbf{t} \in A$. Poniamo allora

$$F(\mathbf{t}) \equiv \int_E f(\mathbf{x}, \mathbf{t}) d\mathbf{x}$$

Intendiamo in questa sezione indagare la continuità e la differenziabilità di f . Cominciamo dal seguente

Lemma VI.5 Sia $f(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ una funzione integrabile in $\mathbf{x}$ per ogni $\mathbf{t} \in A$ e continua in $\mathbf{t}$ per quasi ogni $\mathbf{x} \in E$. Se esiste una funzione sommabile in E , $g(\mathbf{x})$ talché

$$|f(\mathbf{x}, \mathbf{t})| \leq g(\mathbf{x})$$

per ogni $\mathbf{t} \in A$ e per quasi ogni $\mathbf{x} \in E$, allora la funzione $F(\mathbf{t})$ è continua in A .

Dimostrazione

Sia $\mathbf{t}_0 \in A$ e sia $\{\mathbf{t}_h\}_{h \in \mathbb{N}} \subseteq A$ una successione a valori in A , convergente a $\mathbf{t}_0$. Poiché $f(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ è continua in $\mathbf{t}$ per quasi tutti gli $\mathbf{x}$, varrà, dal teorema di collegamento,

$$\lim_{h \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}, \mathbf{t}_h) = f(\mathbf{x}, \mathbf{t}_0) \text{ q.o. in } E.$$

Ma quasi ovunque,

$$|f(\mathbf{x}, \mathbf{t}_h)| \leq g(\mathbf{x})$$

perciò, applicando il teorema di Lebesgue

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_E f(\mathbf{x}, \mathbf{t}_h) d\mathbf{x} = \int_E f(\mathbf{x}, \mathbf{t}_0) d\mathbf{x}$$

perciò

$$F(\mathbf{t}_h) \rightarrow F(\mathbf{t}_0)$$

(c.v.d.) valendo per ogni $\mathbf{t}_h \rightarrow \mathbf{t}_0$, ciò significa che F è continua in $\mathbf{t}_0$.

Vale il fondamentale

Teorema VI.18
(di derivazione
sotto il segno
di integrale)

Sia $f(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ una funzione integrabile in E per ogni $\mathbf{t} \in A$, di classe $\mathcal{C}^1(A)$ per quasi ogni $\mathbf{x} \in E$. Supponiamo che esistano $k+1$ funzioni sommabili in E , tali che, per ogni $\mathbf{t} \in A$ e per quasi ogni $\mathbf{x} \in E$, risulti

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{x}, \mathbf{t})| &\leq g_0(\mathbf{x}), \\ \left| \frac{\partial f}{\partial t_h}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \right| &\leq g_h(\mathbf{x}), \quad h \in J_k \end{aligned}$$

Allora $F(\mathbf{t}) \equiv \int_E f(\mathbf{x}, \mathbf{t}) d\mathbf{x}$ è di classe $\mathcal{C}^1(A)$, e risulta

$$\frac{\partial F}{\partial t_h}(\mathbf{t}) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t_h}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) d\mathbf{x}.$$

Dimostrazione

Dalle disuguaglianze e dal teorema del confronto si ha che la funzione, come le derivate sono sommabili in $\mathbf{x}$ su E .

Sia, intanto $A \subseteq \mathbb{R}$, sicché F è funzione di una sola variabile. Fissato $t_0 \in A$, esiste $r > 0$ per cui $B(t_0, r) \subseteq A$. Sia $\{t_h\} \subseteq B(t_0, r)$ una successione convergente a t_0 . Abbiamo

$$\frac{F(t_h) - F(t_0)}{t_h - t_0} = \int_E \frac{f(\mathbf{x}, t_h) - f(\mathbf{x}, t_0)}{t_h - t_0} d\mathbf{x}$$

Definiamo la successione di funzioni

$$\psi_h(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x}, t_h) - f(\mathbf{x}, t_0)}{t_h - t_0}$$

per il teorema del valor medio, quasi ovunque in E , essa varrà

$$\psi_h(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, \tau)$$

con $\tau \in B(t_0, r)$, perciò, quasi ovunque,

$$\psi_h(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, \tau) \leq g_1(\mathbf{x})$$

d'altra parte, per quasi ogni $\mathbf{x}$, la successione converge

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \psi_h(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t_0)$$

Siamo allora nelle ipotesi del teorema di Lebesgue, perciò

$$\int_E \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t_0) d\mathbf{x} = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_E \frac{f(\mathbf{x}, t_h) - f(\mathbf{x}, t_0)}{t_h - t_0} d\mathbf{x} = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{F(t_h) - F(t_0)}{t_h - t_0}$$

ma ciò vale per ogni successione convergente a t_0 , sicché dal teorema di collegamento

$$\int_E \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t_0) d\mathbf{x} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \frac{dF}{dt}(t_0)$$

dalla disuguaglianza e dal lemma si ha la continuità.

(c.v.d.) Il caso di più variabili si riconduce a questo una volta fissate tutte le t_j con $j \neq i$.

Consideriamo il caso in cui $E = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Siano allora $f(x, \mathbf{t})$ e $\partial f / \partial t_j$ continue in $[a, b] \times A$. Fissato $\mathbf{t} \in A$, la funzione $f(x, \mathbf{t})$ come le $\partial f / \partial t_j(x, \mathbf{t})$ sono continue e definite su un compatto, perciò ovunque dominate da una costante per il teorema di Weierstraß. Siamo allora nelle ipotesi del teorema di derivazione sotto il segno di integrale.

Nelle ipotesi di cui sopra, siano anche $u, w \in [a, b]$, la funzione

$$F(\mathbf{t}, u, w) = \int_u^w f(x, \mathbf{t}) dx$$

essa risulterà definita in $A \times [a, b] \times [a, b]$ e sarà $\mathcal{C}^1$ nel dominio per il teorema di cui sopra e per il teorema fondamentale del calcolo. Inoltre,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t_j} &= \int_u^w \frac{\partial f}{\partial t_j}(x, \mathbf{t}) dx \\ \frac{\partial F}{\partial u} &= -f(u, \mathbf{t}) \\ \frac{\partial F}{\partial w} &= f(w, \mathbf{t}) \end{aligned}$$

perciò se $u = \alpha(\mathbf{t})$ e $w = \beta(\mathbf{t})$ con $\alpha, \beta \in \mathcal{C}^1(A; [a, b])$, posto

$$G(\mathbf{t}) = \int_{\alpha(\mathbf{t})}^{\beta(\mathbf{t})} f(x, \mathbf{t}) dx$$

dal teorema di derivazione composta,

$$\frac{\partial G}{\partial t_j} = \frac{\partial F}{\partial w} \frac{\partial \beta}{\partial t_j} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial \alpha}{\partial t_j} + \frac{\partial F}{\partial t_j} = f(\beta(\mathbf{t}), \mathbf{t}) \frac{\partial \beta}{\partial t_j}(\mathbf{t}) - f(\alpha(\mathbf{t}), \mathbf{t}) \frac{\partial \alpha}{\partial t_j}(\mathbf{t}) + \int_{\alpha(\mathbf{t})}^{\beta(\mathbf{t})} \frac{\partial f}{\partial t_j}(x, \mathbf{t}) dx$$

In particolare, se $A \subseteq \mathbb{R}$, vale

$$\frac{d}{dt} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t) dx = f(\beta(t), t) \frac{d\beta}{dt}(t) - f(\alpha(t), t) \frac{d\alpha}{dt}(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$$

VI.6 Il teorema di Fubini

VI.6.1 Misura di insiemi tramite sezioni

In questa sezione stabiliamo dei risultati preliminari in vista della dimostrazione del teorema di Fubini.

Lemma VI.6 Sia D un insieme in $\mathbb{R}^{n+k}$, posto per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ $D_{\mathbf{x}} \equiv \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k \mid (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in D\}$, si ha che

$$m(D) = \int_{\mathbb{R}^n} m_k(D_{\mathbf{x}}) d\mathbf{x}$$

se D è un intervallo, un plirettangolo, un aperto o un compatto.

Dimostrazione Sia I un intervallo,

$$I = \left(\bigotimes_{i \in J_n} [a_i, b_i] \right) \times \left(\bigotimes_{i \in J_k} [c_i, d_i] \right)$$

allora

$$I_{\mathbf{x}} = \bigotimes_{i \in J_k} [c_i, d_i] \Rightarrow m_k(I_{\mathbf{x}}) = \prod_{i=1}^k (d_i - c_i)$$

da cui

$$\int_{\mathbb{R}^n} m_k(I_{\mathbf{x}}) d\mathbf{x} = \left(\prod_{i=1}^k (d_i - c_i) \right) m_n \left(\bigotimes_{i \in J_n} [a_i, b_i] \right) = \left(\prod_{i=1}^k (d_i - c_i) \right) \left(\prod_{i=1}^n (b_i - a_i) \right) = m(I)$$

Sia Y un plurirettangolo, $Y = I_1 \cup \dots \cup I_m$. Allora

$$m(Y) = \sum_{i=1}^m m(I_i) = \sum_{i=1}^m \int m_k(I_{i,\mathbf{x}}) d\mathbf{x} = \int \sum_{i=1}^m m_k(I_{i,\mathbf{x}}) d\mathbf{x} = \int m \left(\bigcup_{i=1}^m I_{i,\mathbf{x}} \right) d\mathbf{x}$$

d'altra parte

$$\bigcup_{i=1}^m I_{i,\mathbf{x}} = Y_{\mathbf{x}}$$

infine,

$$m(Y) = \int m(Y) d\mathbf{x}$$

Sia A aperto. Come visto nel capitolo V, è possibile determinare una successione crescente di plurirettangoli Y_h contenuti in A tali che

$$A = \bigcup_{h=1}^{\infty} Y_h$$

poi,

$$m(A) = \lim_{h \rightarrow \infty} m(Y_h) = \lim_{h \rightarrow \infty} \int m_k(Y_{h,\mathbf{x}}) d\mathbf{x}$$

ora, $Y_{h,\mathbf{x}}$ formano una successione crescente di insiemi tale che

$$A_{\mathbf{x}} = \bigcup_{h=1}^{\infty} Y_{h,\mathbf{x}}$$

infatti, sia $\mathbf{y} \in Y_{h,\mathbf{x}}$, allora $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in Y_h \subseteq Y_{h+1}$, da cui $\mathbf{y} \in Y_{h+1,\mathbf{x}}$. Per l'eguaglianza degli insiemi di cui sopra, si ha se $\mathbf{y} \in A_{\mathbf{x}}$, allora $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in A = \bigcup_{h=1}^{\infty} Y_h$, da cui esiste un k per cui $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in Y_h$, da cui $\mathbf{y} \in Y_{h,\mathbf{x}}$. Viceversa, siccome $Y_h \subseteq A$ si ricava che $\mathbf{y} \in A_{\mathbf{x}}$.

Questo implica che la successione di funzioni non negative sommabili $m_k(Y_{h,\mathbf{x}})$ è crescente, fissato $\mathbf{x}$, e ammette limite puntuale (teorema di subadditività numerabile)

$$m_k(A_{\mathbf{x}}) = \lim_{h \rightarrow \infty} m_k(Y_{h,\mathbf{x}})$$

dal teorema di Beppo Levi

$$\int m_k(A_{\mathbf{x}}) d\mathbf{x} = \lim_{h \rightarrow \infty} \int m_k(Y_{h,\mathbf{x}}) d\mathbf{x} = \lim_{h \rightarrow \infty} m(Y_h) = m(A)$$

Infine, eseguiamo la dimostrazione per i compatti. Sia K compatto. Come visto nel capitolo V, è possibile definire una successione decrescente di plurirettangoli contenenti K e tali che

$$K = \bigcap_{h=1}^{\infty} Y_h \Rightarrow m(K) = \lim_{h \rightarrow \infty} m(Y_h) = \lim_{h \rightarrow \infty} \int m_k(Y_{h,\mathbf{x}}) d\mathbf{x}$$

Procedendo come sopra si ha che $m_k(Y_{h,\mathbf{x}})$ è una successione di funzioni sommabili, decrescenti fissata la $\mathbf{x}$, essendo $Y_{h+1,\mathbf{x}} \subseteq Y_{h,\mathbf{x}}$. Inoltre,

$$K_{\mathbf{x}} = \bigcap_{h=1}^{\infty} Y_{h,\mathbf{x}} \Rightarrow m(K_{\mathbf{x}}) = \lim_{h \rightarrow \infty} m(Y_{h,\mathbf{x}})$$

infatti, sia $\mathbf{y}$ nel primo insieme, allora $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in K$, perciò per ogni $h \in \mathbb{N}$, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in Y_h$ dunque, $\mathbf{y} \in Y_{h,\mathbf{x}}$. Viceversa, $\mathbf{y} \in Y_{h,\mathbf{x}}$ per ogni h , allora $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ appartiene a Y_h per ogni h , infine $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ appartiene a K e $\mathbf{y} \in K_{\mathbf{x}}$.

Dunque, siamo nelle ipotesi del teorema di Beppo Levi, allora

$$\int m_k(K_{\mathbf{x}}) d\mathbf{x} = \lim_{h \rightarrow \infty} \int m_k(Y_{h,\mathbf{x}}) d\mathbf{x} = \lim_{h \rightarrow \infty} m(Y_h) = m(K)$$

(c.v.d.)

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente, complicato (!)

Teorema VI.19 Sia $E \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ misurabile. Allora $m_k(E_{\mathbf{x}})$ è misurabile quasi per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Inoltre,

$$m(E) = \int_{\mathbb{R}^n} m_k(E_{\mathbf{x}}) d\mathbf{x}$$

Dimostrazione Sia intanto $m(E) < +\infty$. Siccome E è misurabile, è possibile definire due successioni: una decrescente di aperti contenenti E e una crescente di compatti contenuti in E , tali che

$$\lim_{j \rightarrow \infty} m(A_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} m(K_j) = m(E)$$

Da $K_j \subseteq E \subseteq A_j$, abbiamo che $K_{j,\mathbf{x}} \subseteq E_{\mathbf{x}} \subseteq A_{j,\mathbf{x}}$ perciò

$$m(K_{j,\mathbf{x}}) \leq \underline{m}(E_{\mathbf{x}}) \leq \overline{m}(E_{\mathbf{x}}) \leq m(A_{j,\mathbf{x}})$$

inoltre, dal limite scritto sopra e dal lemma

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int m(K_{j,\mathbf{x}}) d\mathbf{x} = \lim_{j \rightarrow \infty} \int m(A_{j,\mathbf{x}}) d\mathbf{x} = m(E)$$

Da questa troviamo che

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int (m(A_{j,\mathbf{x}}) - m(K_{j,\mathbf{x}})) d\mathbf{x} = 0$$

allora $g_j(\mathbf{x}) = m(A_{j,\mathbf{x}}) - m(K_{j,\mathbf{x}})$ è decrescente, non negativa e ha limite nullo, per il teorema di Beppo Levi,

$$\int \lim_{j \rightarrow \infty} g_j d\mathbf{x} = 0$$

ne deriva che la funzione g_j è quasi ovunque nulla, perciò si ha

$$\lim_{j \rightarrow \infty} m(A_{j,\mathbf{x}}) = \lim_{j \rightarrow \infty} m(K_{j,\mathbf{x}}) \text{ quasi per ogni } \mathbf{x}$$

Considerando la disuguaglianza di sopra, avremo, passando al limite per $j \rightarrow \infty$, che $E_{\mathbf{x}}$ è quasi ovunque misurabile. Perciò, quasi ovunque, per ogni j

$$m(K_{j,\mathbf{x}}) \leq m(E_{\mathbf{x}}) \leq m(A_{j,\mathbf{x}})$$

da cui, per il criterio del confronto $m(E_{\mathbf{x}})$ è sommabile e vale, ancora per ogni intero,

$$\int m(K_{j,\mathbf{x}}) d\mathbf{x} \leq \int m(E_{\mathbf{x}}) d\mathbf{x} \leq \int m(A_{j,\mathbf{x}}) d\mathbf{x}$$

passando ora al limite

$$m(E) = \int_{\mathbb{R}^n} m_k(E_{\mathbf{x}}) d\mathbf{x}.$$

Consideriamo infine il caso in cui $m(E) = +\infty$. Posto $E^r \equiv E \cap B(0, r)$ esso è misurabile. D'altra parte $E_{\mathbf{x}}^r$ è misurabile per quanto detto prima, quasi ovunque in $\mathbb{R}^n$. Ancora, quasi ovunque,

$$m(E_{\mathbf{x}}) = \sup_{r>0} m(E_{\mathbf{x}}^r)$$

e, ancora per quanto visto sopra,

$$m(E^r) = \int m(E_{\mathbf{x}}^r) d\mathbf{x} \leq \sup_{r>0} m(E_{\mathbf{x}}^r) = \lim_{r \rightarrow \infty} m(E_{\mathbf{x}}^r)$$

D'altra parte

$$m(E) = \lim_{r \rightarrow \infty} m(E^r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \int m(E_{\mathbf{x}}^r) d\mathbf{x}$$

dal teorema di collegamento

$$m(E) = \lim_{r \rightarrow \infty} \int m(E_{\mathbf{x}}^r) d\mathbf{x} = \lim_{h \rightarrow \infty, h \in \mathbb{N}} \int m(E_{\mathbf{x}}^h) d\mathbf{x}$$

Abbiamo poi che

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{x}}^h &\subseteq E_{\mathbf{x}}^{h+1}, \\ \bigcup_{h=1}^{\infty} E_{\mathbf{x}}^h &= E_{\mathbf{x}} \\ \lim_{h \rightarrow \infty} m(E_{\mathbf{x}}^h) &= m(E_{\mathbf{x}}) \end{aligned}$$

dal teorema di Beppo Levi

$$(c.v.d.) \quad m(E) = \lim_{h \rightarrow \infty, h \in \mathbb{N}} \int m(E_{\mathbf{x}}^h) d\mathbf{x} = \int m(E_{\mathbf{x}}) d\mathbf{x}.$$

VI.6.2 Il teorema di Fubini

Teorema VI.20 (di Fubini)

Sia $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ una funzione sommabile in $\mathbb{R}^{n+k}$, allora

- (i) quasi per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, la funzione $\mathbf{y} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ è sommabile;
- (ii) $g(\mathbf{x}) \equiv \int_{\mathbb{R}^k} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$ è sommabile in $\mathbb{R}^n$;
- (iii) si ha

$$\int_{\mathbb{R}^{n+k}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^k} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

analogamente, invertendo $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

Dimostrazione

Sia intanto $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$, allora

$$\mathcal{G}_0^-(f) \equiv \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) \in \mathbb{R}^{n+k+1} \mid 0 < z < f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}$$

è misurabile e

$$m_{n+k+1}(\mathcal{G}_0^-(f)) = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

dal teorema precedente

$$\mathcal{G}_{0\mathbf{x}}^-(f) = \{(\mathbf{y}, z) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid (\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) \in \mathcal{G}_0^-(f)\} = \{(\mathbf{y}, z) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid 0 < z < f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}$$

è misurabile quasi ovunque in $\mathbb{R}^n$ e

$$m_{n+k+1}(\mathcal{G}_0^-(f)) = \int_{\mathbb{R}^n} m_{k+1}(\mathcal{G}_{0\mathbf{x}}^-(f)) d\mathbf{x}$$

Siccome $\mathcal{G}_{0\mathbf{x}}^-(f)$ è misurabile quasi ovunque, allora, fissata $\mathbf{x}$, la funzione $\mathbf{y} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, di cui $\mathcal{G}_{0\mathbf{x}}^-(f)$ è sottografico positivo, è sommabile. Inoltre, $m_{k+1}(\mathcal{G}_{0\mathbf{x}}^-(f)) = \int_{\mathbb{R}^k} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$ quasi ovunque in $\mathbb{R}^n$. D'altra parte, il primo membro è sommabile in $\mathbf{x}$, per quanto detto prima; sicché, essendo i due membri uguali quasi ovunque, anche il secondo membro sarà sommabile e l'integrale sarà lo stesso:

$$\int_{\mathbb{R}^{n+k}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = m_{n+k+1}(\mathcal{G}_0^-(f)) = \int_{\mathbb{R}^n} m_{k+1}(\mathcal{G}_{0\mathbf{x}}^-(f)) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^k} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

Il caso di funzioni di segno variabile si dimostra usando, come al solito, parte positiva e negativa.

Il teorema di Fubini si usa per calcolare l'integrale di funzioni sommabili su insiemi normali. Limitiamoci, per semplicità a funzioni di due variabili. $E \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice normale se le sezioni a

x fissata del dominio E sono intervalli in y . Cioè

$$E \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b, \alpha(x) < y < \beta(x)\}$$

Sia f integrabile su E , allora considerata f^* abbiamo

$$\int_E f(x, y) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} f^*(x, y) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy f^*(x, y)$$

d'altra parte se $x \notin]a, b[$ $f^*(x, y) = 0$

$$\int_E f(x, y) d(x, y) = \int_a^b dx \int_{\mathbb{R}} dy f^*(x, y)$$

fissata x , $f^*(x, y) = 0$ se $y \notin]\alpha(x), \beta(x)[$ perciò

$$\int_{\mathbb{R}} dy f^*(x, y) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} dy f(x, y)$$

infine,

$$\int_E f(x, y) d(x, y) = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} dy f(x, y).$$

VI.7 Lunghezze, aree e volumi

In questa sezione ci occuperemo del calcolo della lunghezza di una curva, dell'area di una superficie (dopo averla opportunamente definita) e del volume di figure di rotazione (teorema di Pappo-Guldino). Avvertiamo che saremo molto sbrigativi e questo a causa di mancanza di spazio e tempo.

VI.7.1 Cambiamento di variabile negli integrali

Tanto per cominciare enunciamo subito un teorema la cui dimostrazione richiederebbe pagine e pagine di conti, perciò la omettiamo. Il teorema è tuttavia di fondamentale importanza.

Teorema VI.21
(di cambiamento
di variabile
negli integrali)

Siano A e B due aperti di $\mathbb{R}^n$ e sia g un diffeomorfismo tra A e B . Sia E un insieme misurabile contenuto in B e sia $f(\mathbf{y})$ una funzione integrabile in E . La funzione composta $F(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x}))$ è integrabile in $g^{-1}(E)$ e si ha

$$\int_E f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{g^{-1}(E)} f(g(\mathbf{x})) |\det J_g(\mathbf{x})| d\mathbf{x}$$

VI.7.2 Lunghezza di una curva

In apertura al capitolo III, abbiamo definito la nozione di curva. Essa è una funzione continua dall'intervallo reale $I \equiv [a, b]$ in $\mathbb{R}^n$. L'immagine in $\mathbb{R}^n$ della curva si dice sostegno della curva. Due curve ϕ e ψ sono equivalenti se esiste un diffeomorfismo $g(t)$ da I a $J \equiv [c, d]$, J insieme di definizione di ψ , tale che

$$\phi(t) = \psi(\lambda(t))$$

Due curve equivalenti hanno lo stesso sostegno

Definiamo lunghezza della curva ϕ regolare a tratti (cioè $\mathcal{C}^1$ e **con derivata mai nulla** a tratti) la quantità

$$L(\phi) = \int_a^b \left\| \dot{\phi}(t) \right\|_n dt.$$

Vogliamo vedere che la lunghezza è una caratteristica del sostegno, cioè è eguale per curve equivalenti. Siano allora ϕ e ψ equivalenti, sia λ il diffeomorfismo tra I e J . λ dovrà essere monotona. Per fissare le idee sia crescente, sicché $\dot{\lambda} > 0$. Allora

$$L(\psi) = \int_c^d \left\| \frac{d\psi}{ds} \right\|_n ds$$

cambiando variabile, $s = \lambda(t)$, si ha $c = \lambda(a) < d = \lambda(b)$

$$L(\psi) = \int_{\lambda^{-1}(c)}^{\lambda^{-1}(d)} \left\| \frac{d\psi(\lambda(t))}{ds} \right\|_n \lambda dt = \int_a^b \left\| \frac{d\psi(\lambda(t))}{ds} \lambda \right\|_n dt = \int_a^b \left\| \frac{d\phi}{dt} \right\|_n dt = L(\phi)$$

VI.7.3 Superfici. Area di una superficie

Definizione VI.8 Una superficie in $\mathbb{R}^3$ è una coppia (K, ϕ) costituita da un compatto K non vuoto in $\mathbb{R}^2$, avente parte interna aperta e connessa. ϕ è un'applicazione da K in $\mathbb{R}^3$ tale che

- (i) $\phi \in C^1(K)$, (cioè $\phi = \Phi|_K$, con $\Phi \in C^1(\Omega)$, $\Omega \supseteq K$)
- (ii) $\phi|_K$ è iniettiva
- (iii) lo jacobiano di ϕ ha rango massimo.

Dalla (iii) si ha che

$$\det \frac{\partial(\phi_1, \phi_2, \phi_3)}{\partial(u, v)} \neq 0$$

ne deriva che l'applicazione

$$\begin{cases} x = \phi_1(u, v) \\ y = \phi_2(u, v) \end{cases}$$

è un diffeomorfismo locale, sicché nell'intorno di ogni punto della parte interna di K si può invertire e trovare

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

da cui la superficie si scrive localmente come

$$z = \phi_3(u(x, y), v(x, y))$$

Si definisce curva sulla superficie (K, ϕ) , la curva $\psi(t)$ tale che per ogni t $\psi(t)$ appartiene al sostegno della superficie. Data una superficie si chiamano linee coordinate u le curve

$$\begin{cases} x = \phi_1(u, v_0) \\ y = \phi_2(u, v_0) \\ z = \phi_3(u, v_0) \end{cases}$$

al variare di v_0 . Analogamente si pone la definizione per le linee coordinate v .

Dalla (iii) si ha ancora che i vettori $\partial\phi/\partial u$ e $\partial\phi/\partial v$ sono linearmente indipendenti, perciò i vettori tangenti in un punto alla linea coordinata u e alla linea coordinata v sono non tangenti. Risulta allora ben posta la definizione di versore normale alla superficie come

$$\nu \equiv \left(\frac{\partial\phi}{\partial u} \times \frac{\partial\phi}{\partial v} \right) / \left\| \frac{\partial\phi}{\partial u} \times \frac{\partial\phi}{\partial v} \right\|_3$$

Si definisce area della superficie $\Sigma = (K, \phi)$ la quantità

$$\int_K \left\| \frac{\partial\phi}{\partial u} \times \frac{\partial\phi}{\partial v} \right\|_3 d(u, v)$$

Ancora, tramite la nozione di diffeomorfismo, è possibile definire superfici equivalenti. Esse hanno la stessa area. Sia

$$\phi(u, v) = \psi(\pi(u, v)) = \psi(r(u, v), s(u, v))$$

allora

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial u} &= \frac{\partial\psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial u} + \frac{\partial\psi}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial u} \\ \frac{\partial\phi}{\partial v} &= \frac{\partial\psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial v} + \frac{\partial\psi}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial v} \end{aligned}$$

da cui, con un minimo di algebra,

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \times \frac{\partial \psi}{\partial s} \det J_\pi$$

Quindi,

$$\begin{aligned} \int_{K'} \left\| \frac{\partial \psi}{\partial r} \times \frac{\partial \psi}{\partial s} \right\|_3 d(r, s) &= \int_K \left\| \frac{\partial \psi}{\partial r} \times \frac{\partial \psi}{\partial s} \right\|_3 |\det J_\pi| d(u, v) = \int_K \left\| \frac{\partial \psi}{\partial r} \times \frac{\partial \psi}{\partial s} \det J_\pi \right\|_3 d(u, v) = \\ &= \int_K \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\|_3 d(u, v) \end{aligned}$$

VI.7.4 Area e volume delle figure di rotazione in $\mathbb{R}^3$

Sia $f(z) \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^+)$ e consideriamo la superficie ottenuta ruotando il grafico di $x = f(z)$ attorno all'asse z . In coordinate cilindriche, la superficie ha equazione

$$\rho = f(z)$$

da cui,

$$\begin{cases} x = f(z) \cos \varphi \\ y = f(z) \sin \varphi \\ z = z \end{cases}, z \in [a, b], \varphi \in [0, 2\pi[$$

allora

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial z} &= \begin{pmatrix} f'(z) \cos \varphi \\ f'(z) \sin \varphi \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} &= \begin{pmatrix} -f(z) \sin \varphi \\ f(z) \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

perciò i due vettori sono ortogonali e il modulo del prodotto vettoriale è dato dal prodotto dei moduli

$$\left\| \frac{\partial \phi}{\partial z} \times \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right\|_3 = \sqrt{(1 + [f'(z)]^2)} f^2(z)$$

infine, dal teorema di Fubini

$$A = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b dz \sqrt{(1 + [f'(z)]^2)} f^2(z) = 2\pi \int_a^b \sqrt{(1 + [f'(z)]^2)} f^2(z) dz$$

Veniamo infine al calcolo del volume. Qui si procede tramite il teorema VI.19. Il volume considerato è dato dalla misura in $\mathbb{R}^3$ di un insieme E che può essere sezionato a z costante

$$\mathcal{V} = \int_a^b m(E_z) dz$$

dove E_z è la circonferenza di raggio $f(z)$, infine,

$$\mathcal{V} = \pi \int_a^b f^2(z) dz$$

Torniamo a considerare ora la sezione a $y = 0$, $|x| \leq f(z)$. Consideriamo solo l'insieme

$$A = \{(x, z) | x = f(z)\}$$

definiamo baricentro di tale insieme il punto $(\bar{x}, \bar{z})$:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\int_A x d(x, z)}{\int_A d(x, z)} = \frac{\int_A x d(x, z)}{m_2(A)} \\ \bar{z} &= \frac{\int_A z d(x, z)}{\int_A d(x, z)} = \frac{\int_A z d(x, z)}{m_2(A)} \end{aligned}$$

Abbiamo che, per il teorema di Fubini

$$m_2(A) \bar{x} = \int_a^b dz \int_0^{f(z)} dx x = \frac{1}{2} \int_a^b f^2(z) dz = \frac{\mathcal{V}}{2\pi}$$

da cui il **teorema di Pappo-Guldino**

$$\mathcal{V} = 2\pi m_2(A) \bar{x}$$

Per cui il volume della figura ottenuta dalla rotazione di A è dato dalla lunghezza della circonferenza avente la distanza del baricentro dall'asse come raggio, moltiplicata per l'area di A .

VI.8 Cenni di calcolo delle variazioni

VI.8.1 Equazioni di Eulero-Lagrange

Alla conclusione di questo capitolo, riportiamo un argomento di carattere complementare, ma che riveste grande importanza in Fisica: il calcolo delle variazioni. Com spesso in questa trattazione, ci limiteremo a lambire l'argomento, vedendone solo i tratti essenziali.

Fissiamo $I \equiv [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, e consideriamo la funzione

$$\mathcal{L} : I \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$$

definiamo adesso

$$\mathcal{S}(\mathbf{q}) \equiv \int_a^b \mathcal{L}(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) dt$$

essendo $\mathcal{F}$ definito sull'insieme

$$X \equiv \{ \mathbf{q} \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}^\ell) \mid \mathbf{q}(a) = \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^\ell, \dot{\mathbf{q}}(b) = \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^\ell \}$$

Il nostro problema sarà trovare, se esiste, la funzione $\mathbf{q} \in X$, tale che $\mathcal{S}(\mathbf{q})$ assuma valore minimo in X :

$$\mathcal{S}(\mathbf{q}) = \inf_{\mathbf{u} \in X} \mathcal{S}(\mathbf{u})$$

Con terminologia derivante dalla Meccanica Classica, $\mathcal{L}$ si dice **lagrangiana**, $\mathcal{S}$ si dice **integrale d'azione** associato alla tale lagrangiana, $\mathbf{q}$ si dice **equazione del moto**.

In primo luogo, ma nel seguito non faremo molto di più, determineremo una condizione necessaria, affinché $\mathbf{q}$ sia il minimo dell'integrale d'azione.

A questo scopo consideriamo la funzione $\phi \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}^\ell)$ per cui

$$\phi(a) = \phi(b) = 0.$$

Allora, per ogni $\mathbf{u} \in X$, la funzione $\mathbf{u} + \lambda\phi \in X$. Fissata dunque ϕ , è naturale introdurre la funzione

$$g(\lambda) = \mathcal{S}(\mathbf{u} + \lambda\phi)$$

Cominciamo col notare che se g è derivabile, una condizione necessaria affinché $\mathbf{u}$ sia minimo dell'integrale d'azione è che $dg/d\lambda(0) = 0$, infatti

$$g(0) = \mathcal{S}(\mathbf{u}) \leq \mathcal{S}(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in X$$

dunque

$$g(0) = \mathcal{S}(\mathbf{u}) \leq \mathcal{S}(\mathbf{u} + \lambda\phi) = g(\lambda), \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

perciò, $g(0)$ è un minimo per $g(\lambda)$, dal teorema di Fermat ricaviamo

$$\frac{dg}{d\lambda}(0) = 0.$$

Si tratta di mostrare se, e sotto quali ipotesi (!), la funzione g è derivabile. In tal caso, dobbiamo cercare di semplificare l'espressione per la derivata. Stiamo tentando di eseguire la

seguinte operazione

$$\frac{d}{d\lambda} \int_a^b \mathcal{L} \left(t, \mathbf{u}(t) + \lambda\phi, \dot{\mathbf{u}}(t) + \lambda\dot{\phi} \right) dt$$

ove si è convenuto di riguardare la lagrangiana come funzione di t e λ , avendo fissato ϕ e $\mathbf{u}$. È chiaro che dobbiamo ricorrere al teorema di derivazione sotto il segno di integrale. Anzitutto la nostra funzione lagrangiana dovrà essere integrabile per ogni valore di λ , e q.p.o. istante, dovrà essere $\mathcal{C}^1$ in λ . Inoltre, per ogni valore di λ , la lagrangiana deve essere dominata nel tempo da una funzione positiva sommabile e così la derivata in λ . In tal caso $\mathcal{S}$ sarà $\mathcal{C}^1$ in λ e potremo scambiare derivazione e integrazione. Siccome la lagrangiana è definita su un insieme chiuso e limitato, le ipotesi risulteranno tutte verificate se essa risulterà $\mathcal{C}^1$ in tutte le variabili:

(i) se $\mathcal{L}$ è $\mathcal{C}^0$ in t , $\mathcal{L}$ sarà sommabile per ogni λ (essendo il dominio chiuso e limitato);

(ii) se $\mathcal{L}$ è $\mathcal{C}^1$ rispetto alle derivazioni in $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ lo sarà per la derivazione in λ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} + \dot{\phi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{p}}$$

(iii) dalla continuità di lagrangiana e sue derivate, per il teorema di Weierstraß, si ha che esse sono dominate da una costante che su $[a, b]$ è una funzione sommabile.

Abbiamo dunque,

$$\frac{dg}{d\lambda} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathcal{L} \left(t, \mathbf{u}(t) + \lambda\phi, \dot{\mathbf{u}}(t) + \lambda\dot{\phi} \right) dt = \int_a^b \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} dt + \int_a^b \dot{\phi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{p}} dt$$

supposta la derivata nel tempo della derivata di $\mathcal{L}$ in $\mathbf{p}$ continua, possiamo integrare per parti il secondo integrale

$$\frac{dg}{d\lambda} = \int_a^b \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} dt + \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{p}} \Big|_a^b - \int_a^b \phi \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{p}} dt = \int_a^b \phi \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{p}} \right] dt$$

ricordiamo che se $\mathbf{u}$ è soluzione del nostro problema $dg/d\lambda$ deve essere risultare nullo in $\lambda = 0$, per ogni $\phi(t)$ a estremi nulli sull'intervallo. D'altra parte vale il seguente

Lemma VI.7 Sia $F \in \mathcal{C}^0(I)$ tale che per ogni $\phi \in \mathcal{C}^0(I)$, $\phi(a) = \phi(b) = 0$, risulti

$$\int_a^b F(t) \phi(t) dt = 0$$

Allora $F(t) = 0, t \in I$.

Dimostrazione Sia per assurdo $F(t)$ diversa da 0 all'istante $t_0 \in I$. Per fissare le idee, sia $F(t_0) = h > 0$, allora, per la permanenza del segno esiste un intorno $]t_0 - \delta; t_0 + \delta[$ all'interno del quale F è positiva. Scegliamo allora ϕ tale che sia nulla fuori dall'intorno considerato, 0 agli estremi, positiva nell'intorno detto in cui F è positiva. Allora la funzione $F\phi$ è non negativa, ha integrale nullo, è continua. Se ne ricava che $F\phi = 0$ identicamente. Assurdo.

(c.v.d.)

Dunque, se $\mathbf{q}(t)$ è l'equazione del moto associato alla lagrangiana $\mathcal{L}$, si ha che

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{p}} (t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} (t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = 0$$

le ℓ equazioni determinate prendono il nome di **equazioni di Eulero-Lagrange**.

Si noti che

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{p}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{p}^2} \ddot{\mathbf{q}}$$

perciò le equazioni di Eulero e Lagrange sono equazioni differenziali del secondo ordine. Il problema di risolvere le equazioni di Eulero-Lagrange non è però di Cauchy, non sono infatti forniti i dati iniziali, ma le condizioni al contorno, cioè i valori della soluzione eventuale nei punti di partenza e arrivo.

Variabili cicliche

Supponiamo che la lagrangiana sia indipendente dalla q_i , allora la i -esima equazione diviene

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

allora la variabile q_i si dice **ciclica** e si ha

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = C$$

La quantità $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_i$ si dice **impulso** della coordinata lagrangiana i -esima. Si deduce perciò che *l'impulso associato a una coordinata ciclica si conserva*.

Lagrangiana indipendente dal tempo

Supponiamo che la lagrangiana sia indipendente esplicitamente dal tempo, risulti cioè

$$\mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$$

in tal caso le equazioni di Eulero-Lagrange diventano

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^2} \ddot{\mathbf{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{p}} \dot{\mathbf{q}} \right) &= 0 \end{aligned}$$

moltiplichiamo ambo i membri per $\dot{\mathbf{q}}$,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}}^2 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^2} \ddot{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = 0$$

notiamo che

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}}^2 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^2} \ddot{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \ddot{\mathbf{q}}$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \ddot{\mathbf{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} \right) - \frac{d}{dt} \mathcal{L} &= 0 \end{aligned}$$

infine,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{L} \right) = 0$$

la funzione entro parentesi si dice **hamiltoniana**, e si indica col simbolo H . Si è perciò trovato che *l'hamiltoniana di un sistema lagrangiano indipendente esplicitamente dal tempo si conserva*.

Geodetiche

Un noto problema variazionale è quello di determinare le curve su una superficie (in generale una varietà riemanniana) data che unendo due punti sulla superficie misurano la minore lunghezza possibile. A questo scopo sia la curva $\phi(t)$ e la superficie $f(u, v)$. Allora,

$$\phi(t) = f(u(t), v(t))$$

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial (u, v)}(\dot{u}, \dot{v}) \Rightarrow \left\| \frac{d\phi}{dt} \right\| = \left\| \frac{\partial f}{\partial (u, v)}(\dot{u}, \dot{v}) \right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial (u, v)}(\dot{u}, \dot{v}) \right)^t \left(\frac{\partial f}{\partial (u, v)}(\dot{u}, \dot{v}) \right)} = \\ &= \sqrt{(\dot{u}, \dot{v})^t \left(\frac{\partial f}{\partial (u, v)} \right)^t \left(\frac{\partial f}{\partial (u, v)} \right) (\dot{u}, \dot{v})} = (\dot{u}, \dot{v})^t g(u(t), v(t)) (\dot{u}, \dot{v}) \end{aligned}$$

dove la funzione $g(u, v)$ prende il nome di **metrica riemanniana** della superficie f . Si tratterà di minimizzare la quantità

$$L = \int_a^b (\dot{u}, \dot{v})^t g(u(t), v(t)) (\dot{u}, \dot{v}) dt$$

con $(u, v)(a)$ e $(u, v)(b)$ fissati.

Il problema si risolve con le tecniche descritte.

VI.8.2 Funzionali convessi ed equazioni di Eulero-Lagrange

Esiste un caso in cui le equazioni di Eulero-Lagrange esprimono condizione anche sufficiente, per cui un'equazione del moto renda minimo l'integrale d'azione. Richiamiamo la ben nota

Definizione VI.9 Sia X un sottoinsieme di un $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale, X si dice convesso se per ogni coppia di vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$, il segmento che collega $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ è tutto contenuto in X . Cioè se per ogni $\lambda \in [0, 1]$ risulta

$$\lambda \mathbf{u} + (1 - \lambda) \mathbf{v} \in X$$

Osservazione VI.4 Si noti che uno spazio convesso è connesso per segmenti, perciò è connesso per archi e quindi è connesso.

L'insieme X delle funzioni $\mathcal{C}^1$ dall'intervallo I allo spazio $\mathbb{R}^\ell$ con estremi fissati è convesso. Infatti, prendiamo le leggi orarie $\mathbf{q}_1$ e $\mathbf{q}_2 \in X$, per ogni $\lambda \in [0, 1]$

$$\lambda \dot{\mathbf{q}}_1 + (1 - \lambda) \dot{\mathbf{q}}_2 \in \mathcal{C}^1(I)$$

inoltre,

$$\begin{aligned} \lambda \dot{\mathbf{q}}_1(a) + (1 - \lambda) \dot{\mathbf{q}}_2(a) &= \lambda \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha} - \lambda \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha} \\ \lambda \dot{\mathbf{q}}_1(b) + (1 - \lambda) \dot{\mathbf{q}}_2(b) &= \lambda \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta} - \lambda \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} \end{aligned}$$

Diventa sensato allora definire la nozione di convessità per i funzionali in X essendo esso convesso:

Definizione VI.10 Dato X uno spazio convesso, si dice che $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ è un funzionale convesso se per ogni coppia di vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$ e per ogni $\lambda \in [0, 1]$ risulta

$$F[\lambda \mathbf{u} + (1 - \lambda) \mathbf{v}] \leq \lambda F(\mathbf{u}) + (1 - \lambda) F(\mathbf{v})$$

Vogliamo dimostrare che se l'integrale d'azione è convesso allora la condizione necessaria di minimo espressa dalle equazioni di Eulero-Lagrange, diventa sufficiente.

Cominciamo col notare che l'integrale d'azione è convesso se la lagrangiana è convessa nelle variabile $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^\ell$: poniamo $\mathbf{x} \equiv (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{2\ell}$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2) &= \int_a^b \mathcal{L}(t, \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2) dt \leq \int_a^b [\lambda \mathcal{L}(t, \mathbf{x}_1) + (1 - \lambda) \mathcal{L}(t, \mathbf{x}_2)] dt \leq \\ &\leq \lambda \int_a^b \mathcal{L}(t, \mathbf{x}_1) dt + (1 - \lambda) \int_a^b \mathcal{L}(t, \mathbf{x}_2) dt = \lambda \mathcal{S}(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda) \mathcal{S}(\mathbf{x}_2) \end{aligned}$$

Proviamo ora l'asserzione fatta sopra

Proposizione VI.12 Se $\mathbf{q} \in X$ soddisfa le equazioni di Eulero-Lagrange con lagrangiana $\mathcal{L}$ convessa in $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^\ell$ e $\mathcal{L} \in \mathcal{C}^2(I \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^\ell)$, allora $\mathbf{q}$ è un minimo dell'integrale d'azione.

Dimostrazione L'integrale d'azione è convesso. Scriviamo ancora $g(\lambda)$, essa risulterà una funzione convessa

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \mathcal{S}(\mathbf{q} + \lambda \phi) \\ g(1) &= \mathcal{S}(\mathbf{q} + \phi) \\ g(0) &= \mathcal{S}(\mathbf{q}), \forall \phi \end{aligned}$$

la nostra tesi è che $\mathcal{S}(\mathbf{q}) \leq \mathcal{S}(\mathbf{u})$, per ogni $\mathbf{u} \in X$, cioè che $g(0) \leq \mathcal{S}(\mathbf{u})$, per ogni $\mathbf{u} \in X$.

Sia $\mathbf{u} \in X$, prendiamo $\phi = \mathbf{u} - \mathbf{q}$:

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \mathcal{S}(\mathbf{q} + \lambda(\mathbf{u} - \mathbf{q})) = \mathcal{S}(\lambda \mathbf{u} + (1 - \lambda) \mathbf{q}) \leq \lambda \mathcal{S}(\mathbf{u}) + (1 - \lambda) \mathcal{S}(\mathbf{q}) = \\ &= \lambda \mathcal{S}(\mathbf{u}) + (1 - \lambda) g(0) = \lambda g(1) + (1 - \lambda) g(0) \end{aligned}$$

per $\lambda \neq 0$

$$\frac{g(\lambda) - g(0)}{\lambda} \leq g(1) - g(0)$$

al limite per $\lambda \rightarrow 0^+$, si ha

$$\frac{dg}{d\lambda}(0) \leq g(1) - g(0)$$

ma per ipotesi

$$\frac{dg}{d\lambda}(0) = 0$$

e infine

$$(c.v.d.) \quad g(0) = \mathcal{S}(\mathbf{q}) \leq g(1) = \mathcal{S}(\mathbf{u}).$$

VI.8.3 La trasformazione di Legendre e le equazioni di Hamilton-Jacobi

Sia f una funzione $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ convessa. Consideriamo la funzione

$$F(\xi, p) = \xi \cdot p - f(\xi), \quad p \in \mathbb{R}^n$$

A p fissato la F è concava, perciò esiste ed è unico ξ tale che F sia massima. Risulta ben definita la funzione $\xi(p)$

$$F(\xi(p), p) = \max_{\xi \in \mathbb{R}^n} (p \cdot \xi - f(\xi))$$

Definizione VI.11 Si chiama trasformata di Legendre di $f(\xi)$ la funzione

$$g(p) = F(\xi(p), p) = p \cdot \xi(p) - f(\xi)$$

Ora, siccome il massimo è unico e non visono minimi, esso, per il teorema di Fermat, si troverà in corrispondenza di uno zero del differenziale di F :

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_i} = p_i - \frac{\partial f}{\partial \xi_i} = 0$$

perciò il vettore $\xi(p)$ cercato è tale che

$$p = \frac{\partial f}{\partial \xi}$$

Se la lagrangina $\mathcal{L}$ è convessa nella terza variabile, $\dot{\mathbf{q}}$, la sua trasformata di Legendre rispetto alla terza variabile si dice hamiltoniana, $H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$. Si noti che

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$$

è il vettore dei momenti coniugati alle coordinate lagrangiane. Dalla definizione di trasformata di Legendre si ha subito

$$H(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})) = \dot{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

cioè

$$H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) - \mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}))$$

deriviamo ambo i membri in p_k

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_k} &= \dot{q}_k + \mathbf{p} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial p_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial p_k} = \dot{q}_k + \dot{\mathbf{p}} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial p_k} - \dot{\mathbf{p}} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial p_k} = \dot{q}_k \\ \frac{\partial H}{\partial q_k} &= \mathbf{p} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial q_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial q_k} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = -\dot{p}_k \end{aligned}$$

In definitiva, le equazioni di Eulero-Lagrange si trasformano nelle ben note **equazioni di Hamilton-Jacobi**:

$$\begin{cases} \dot{q}_k = \partial H / \partial p_k \\ \dot{p}_k = -\partial H / \partial q_k \end{cases}$$

La serie di Fourier

In questo capitolo lambiremo le serie di Fourier. Per mancanza di tempo, la trattazione è un po' affrettata, ma abbastanza completa. L'introduzione alle serie non è storica e risulterà di certo molto astratta. A ben pensarci però è sufficientemente naturale e consente di raggiungere subito risultati peraltro generali.

VII.1 Somme di segnali sinusoidali

VII.1.1 Polinomi trigonometrici

Funzioni periodiche

Una funzione reale si dice T -periodica se per ogni reale t risulta $f(t+T) = f(t)$. Se due funzioni sono periodiche e hanno lo stesso periodo, periodiche con lo stesso periodo risultano anche somma e prodotto.

Se f è T -periodica e derivabile, si ha che

$$\frac{df}{dt}(t+T) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+T+h) - f(t+T)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{df}{dt}(t)$$

anche la derivata è periodica.

Sia ora f generalmente continua, sia F la primitiva

$$F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

poniamo $M \equiv F(T)$. Notiamo che, per ogni a

$$\begin{aligned} \int_a^{T+a} f(\tau) d\tau &= \int_a^T f(\tau) d\tau + \int_T^{T+a} f(\tau) d\tau = \int_a^T f(\tau) d\tau + \int_0^a f(\sigma - T) d\sigma \\ &= \int_a^T f(\tau) d\tau + \int_0^a f(\tau) d\tau = \int_0^T f(\tau) d\tau \end{aligned}$$

allora

$$F(t+T) = \int_0^{t+T} f(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) d\tau + \int_t^{t+T} f(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) d\tau + M = F(t) + M$$

perciò la primitiva è periodica se e solo se la funzione ha media nulla su un periodo. Siccome, l'integrale su un periodo non dipende dagli estremi di integrazione, per quanto visto sopra, indicheremo

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_T f(t) dt$$

Polinomi trigonometrici

Poniamo la seguente definizione

Definizione VII.1 Una polinomio trigonometrico di grado n e periodo T è una funzione a valori reali T -periodica,

del tipo

$$P(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) \right]$$

con $t, a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Ogni addendo prende il nome di componente. L'addendo costante $a_0/2$, si dice componente continua; la quantità $\omega \equiv 2\pi/T$ si dice pulsazione del segnale; mentre la funzione

$$t \mapsto a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t)$$

si dice armonica fondamentale.

Utilizzando le formule di Eulero, procediamo a riscrivere il polinomio trigonometrico in notazione complessa,

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(\omega kt) + b_k \sin(\omega kt)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[\frac{a_k}{2} (e^{i\omega kt} + e^{-i\omega kt}) + \frac{b_k}{2i} (e^{i\omega kt} - e^{-i\omega kt}) \right] = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[\frac{a_k - ib_k}{2} e^{i\omega kt} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-i\omega kt} \right] = \sum_{k=-n}^n c_k e^{i\omega kt} \end{aligned}$$

dove si è posto

$$\begin{cases} c_k \equiv \frac{a_k - ib_k}{2} & k > 0 \\ c_{-k} \equiv \bar{c}_k & k > 0 \\ c_0 \equiv \frac{a_0}{2} \end{cases}$$

Il vettore $\hat{P} \equiv (c_i)_{i=-n \dots n}$ si dice **spettro complesso** del polinomio trigonometrico $P(t)$. Fissato un vettore in $\mathbb{C}^{2n+1}$, si determina univocamente un polinomio trigonometrico, avente il vettore per spettro. D'altra parte, vale anche il viceversa, sicché lo spazio dei polinomi trigonometrici di grado n è un $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale avente dimensione $2n+1$. Vale infatti il seguente

Lemma VII.1 Sia $k \in \mathbb{Z}$, allora

$$\frac{1}{T} \int_T e^{i\omega kt} dt = \delta_{0,k}$$

Dimostrazione La media su un periodo vale se $k \neq 0$

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{i\omega kt} dt = \frac{1}{T} \frac{1}{i\omega k} e^{i\omega kt} \Big|_0^T = \frac{e^{2\pi ik} - 1}{2\pi ki} = \frac{\cos(2\pi k) + i \sin(2\pi k) - 1}{2\pi ki} = \frac{1 + 0 - 1}{2\pi ki} = 0$$

d'altra parte se $k = 0$,

$$(c.v.d.) \quad \frac{1}{T} \int_0^T dt = 1$$

Proposizione VII.1 Sia $P(t)$ un polinomio trigonometrico, allora per ogni k da $-n$ a n , il suo spettro è dato da

$$c_k = \frac{1}{T} \int_T P(t) e^{-i\omega kt} dt$$

Dimostrazione Infatti,

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_T P(t) e^{-i\omega ht} dt &= \frac{1}{T} \int_T \sum_{k=-n}^n c_k e^{i\omega kt} e^{-i\omega ht} dt = \sum_{k=-n}^n c_k \left(\frac{1}{T} \int_T e^{i\omega(k-h)t} dt \right) = \\ (c.v.d.) &= \sum_{k=-n}^n c_k \delta_{h,k} = c_h \end{aligned}$$

Allora, abbiamo stabilito un isomorfismo dallo spazio dei polinomi trigonometrici in $\mathbb{C}^{2n+1}$, resta quindi dimostrato che lo spazio dei polinomi trigonometrici ha in $\mathbb{C}$ dimensione pari a $2n + 1$.

Dal lemma di cui sopra, si deduce che

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(ht) \cos(kt) &= \pi \delta_{h,k} \quad (h^2 + k^2 \neq 0) \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(ht) \sin(kt) &= 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(ht) \sin(kt) &= \pi \delta_{h,k}\end{aligned}$$

Energia

Data una funzione f periodica a quadrato sommabile su un periodo, si dice **energia** della funzione la quantità

$$\frac{1}{T} \int |f(t)|^2 dt$$

si ha la seguente

Proposizione VII.2 (eguaglianza dell'energia)

Sia $P(t)$ un polinomio trigonometrico di spettro complesso $(c_k)_{k=-n \dots n}$, allora l'energia del polinomio vale

$$\frac{1}{T} \int |P(t)|^2 dt = \sum_{k=-n}^n |c_k|^2$$

Dimostrazione Si ha

$$|P(t)|^2 = P(t) \overline{P(t)} = \sum_{k=-n}^n c_k e^{i\omega kt} \sum_{h=-n}^n \bar{c}_h e^{-i\omega ht} = \sum_{k,h=-n}^n c_k \bar{c}_h e^{i\omega(k-h)t}$$

perciò

$$\frac{1}{T} \int |P(t)|^2 dt = \sum_{k,h=-n}^n c_k \bar{c}_h \frac{1}{T} \int e^{i\omega(k-h)t} dt = \sum_{k,h=-n}^n c_k \bar{c}_h \delta_{hk} = \sum_{k=-n}^n c_k \bar{c}_k = \sum_{k=-n}^n |c_k|^2$$

(c.v.d.)

VII.2 La serie di Fourier nello spazio L_T^2

VII.2.1 Alcune considerazioni sugli spazi prehilbertiani

Famiglie di vettori ortogonali

Consideriamo uno $\mathbb{K}$ -spazio di prodotto scalare (o hermitiano) $(H, (\cdot|\cdot))$. Abbiamo subito la seguente

Proposizione VII.3 In uno spazio di prodotto scalare, una famiglia di vettori ortogonali non nulli è un sistema linearmente indipendente.

Dimostrazione La famiglia di vettori ortogonali sia $\{u_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, allora $(u_\lambda | u_\mu) = \delta_{\lambda,\mu}$. Prendiamo un numero finito arbitrario m di vettori in Λ , vediamo che essi sono indipendenti:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i u_{\lambda(i)} = 0, \quad \alpha_i \in \mathbb{K}$$

moltiplichiamo scalarmente ambo i membri per $u_{\lambda(k)}$

$$0 = \left(u_{\lambda(k)} \left| \sum_{i=1}^m \alpha_i u_{\lambda(i)} \right. \right) = \sum_{i=1}^m \alpha_i (u_{\lambda(k)} | u_{\lambda(i)}) = \alpha_k |u_{\lambda(k)}|^2$$

(c.v.d.) ripetendo per $k \in J_m$, notando che $|u_{\lambda(k)}|^2 \neq 0$, la tesi.

Vale il fondamentale

Teorema VII.1
(di Pitagora)

Sia H uno spazio di prodotto scalare e $\{u_i\}_{i \in J_m}$ una famiglia finita di vettori ortogonali. Allora

$$|u_1 + \dots + u_m|^2 = |u_1|^2 + \dots + |u_m|^2$$

Dimostrazione Si ha

$$\left| \sum_{i=1}^m u_i \right|^2 = \left(\sum_{i=1}^m u_i \left| \sum_{j=1}^m u_j \right. \right) = \sum_{i,j=1}^m (u_i | u_j) = \sum_{i=1}^m (u_i | u_i) = \sum_{i=1}^m |u_i|^2$$

(c.v.d.)

Proiezione ortogonale

Stabiliamo in primo luogo la seguente

Proposizione VII.4 Sia H uno spazio di prodotto scalare.

(i) Sia $x \in H$, e sia $r \equiv \{c + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$, la retta affine per c parallela a $v \neq 0$, entrambi in H . Allora esiste ed è unico $a \in r$, tale che $|x - a| = d(x, r)$, tale punto è tale che $x - a \in V^\perp$.

(ii) $V \subseteq H$, sottospazio vettoriale. Sia $x \in H$, allora

$$|x - y| = d(x, H), y \in V \Leftrightarrow |x - y| \in V^\perp$$

se esiste y è unico e si dice proiezione ortogonale di x su V .

Dimostrazione Vediamo (i). Sia $a \in r$

$$\begin{aligned} 0 &= (x - a | v) \Leftrightarrow 0 = (x - c - \lambda v | v) \Leftrightarrow 0 = (x - c | v) - \lambda |v|^2 \Leftrightarrow \\ \lambda &= \frac{(x - c | v)}{|v|^2} \end{aligned}$$

da cui l'unicità di a . Il fatto che $d(x, a) \leq d(x, w)$ per ogni $w \in r$ si ha notando che $w = a + \alpha v$

$$d(x, w) = |x - a - \alpha v|^2 = |(x - a) - \alpha v|^2 = |x - a|^2 + |\alpha v|^2 \geq d(x, a)$$

Vediamo (ii). Sia $(x - y) \in V^\perp$ allora per ogni $v \in V$, $x - y$ è ortogonale a v , usando ancora Pitagora

$$|x - (y + v)|^2 = |(x - y) + v|^2 = |x - y|^2 + |v|^2$$

questa è minima se e solo se $|v|^2 = 0$, cioè se e solo se $v = 0$. Viceversa risulti $y \in V$ e $d(x, y) = d(x, V)$. Se y realizza la minima distanza da V , realizza la minima distanza da ogni sottoinsieme di V contenente y , ad esempio ciascuna retta affine per y parallela a $v \in V$,

(c.v.d.) allora per quanto detto sopra $x - y$ è ortogonale a v . Dunque, $x - y \in V^\perp$.

Sia allora V un sottospazio di dimensione finita m , preso un sistema ortonormale di m vettori di V , allora la proiezione di x su V vale

$$\text{proj}_V(x) = \sum_{k=1}^m (x | u_k) u_k$$

infatti $(x - \text{proj}_V(x)) \in V^\perp$. Per vedere questo è sufficiente che il vettore x meno la sua proiezione è ortogonale a ciascun u_k (infatti il sistema è una base di V : è linearmente indipendente, si veda la prima proposizione di questa sottosezione, e ha cardinalità eguale alla dimensione di V). Abbiamo

$$(x - \text{proj}_V(x) | u_i) = (x | u_i) - \sum_{k=1}^m (x | u_k) (u_i | u_k) = (x | u_i) - (x | u_i) = 0$$

**Diseguaglianza
di Bessel
e identità
di Parseval**

Consideriamo ora una famiglia numerabile di vettori ortonormali, $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Per ogni $m \in \mathbb{N}$, definiamo

$$V_m = \text{Span} \langle u_i \rangle_{i \in J_m}$$

allora

$$\text{proj}_{V_m}(x) = \sum_{k=1}^m (x | u_k) u_k \equiv p_m(x)$$

vale anche

$$\begin{aligned} |x - p_m(x)|^2 &= (d(x, V_m))^2 \geq 0 \\ |x|^2 &= |x - p_m|^2 + |p_m|^2 \end{aligned}$$

da cui si ottiene $|p_m|^2 \leq |x|^2$ e

$$|x|^2 \geq |p_m|^2 = \sum_{k=1}^m |(x | u_k)|^2$$

passando al limite per $m \rightarrow \infty$, si ottiene la **disuguaglianza di Bessel**

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x | u_k)|^2 \leq |x|^2$$

Adesso mostreremo quando vale l'eguaglianza (**identità di Parseval**). Per far questo ci occorrono alcuni risultati preliminari.

Sia x un punto qualsiasi e siano $W \subseteq V$ due sottoinsiemi di uno spazio metrico con distanza d , tali che W sia denso in V . Valga cioè che per ogni v fissato e per ogni $\varepsilon > 0$, esista w tale che $d(v, w) < \varepsilon$. Vogliamo dimostrare che $d(x, W) = d(x, V)$, laddove certo è che $d(x, W) \geq d(x, V)$. Si ha

$$\begin{aligned} d(x, W) &\leq d(x, w) \leq d(x, v) + d(v, w) \\ d(x, W) &\leq d(x, v) + \varepsilon \\ d(x, W) - \varepsilon &\leq d(x, v) \end{aligned}$$

da cui, per la massimalità dell'inf,

$$d(x, W) \leq d(x, V)$$

infine,

$$d(x, V) = d(x, W).$$

Sia ora $V = \overline{W}$, allora vogliamo vedere che W è denso in V . Fissiamo allora $x \in V$, se $x \in W$ la tesi è ovvia preso x stesso $d(x, x) = 0 < \varepsilon$ per ogni ε . Sia allora $x \in \mathcal{D}W$. Esiste una successione di punti x_n contenuti in W tali che $d(x, x_n) \rightarrow 0$, per ciò per ogni fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ talché

$$d(x, x_\nu) < \varepsilon$$

e $x_\nu \in W$.

Riassumendo

Lemma VII.2 Sia $x \in (X, d)$ spazio metrico. Siano $W \subseteq V$ tali che W è denso in V , allora

$$d(x, V) = d(x, W)$$

Lemma VII.3 Sia $W \subseteq X$ spazio metrico nella distanza d . Allora V è denso nella sua chiusura $\overline{W}$. In particolare, se $x \in X$

$$d(x, W) = d(x, \overline{W})$$

Lemma VII.4 Sia W chiuso. Allora $x \in W$ se e solo se $d(x, W) = 0$

Dimostrazione Se $x \in W$ la tesi è ovvia. Sia, allora, $d(x, W) = 0$, allora per ogni $\varepsilon > 0$, troviamo un punto y di W tale che

$$d(x, y) < d(x, W) + \varepsilon = \varepsilon$$

preso $\varepsilon = 1/n$ per $n \in \mathbb{N}_0$, troviamo una successione y_n di punti di W , convergente a x , perciò (c.v.d.) $x \in W$.

Torniamo ai problemi lasciati in sospeso. Sia allora W lo spazio generato da una famiglia numerabile di vettori ortogonali in H . Allora, definiti gli spazi V_m come gli spazi generati dai primi m vettori della famiglia, si ha

$$W = \text{Span} \langle u_i \rangle_{i \in \mathbb{N}} = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$$

abbiamo che nella disuguaglianza di Bessel vale l'uguaglianza se e solo se x appartiene alla chiusura di W . Dalla disuguaglianza di Bessel si ha che la serie è limitata e a termini positivi, perciò convergente.

Altre considerazioni. $V_m \subseteq V_{m+1}$, perciò la successione $\{d(x, V_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ è decrescente perciò ammette limite nel suo estremo inferiore che è maggiore o eguale a 0. Vediamo che

$$\xi \equiv \inf_m d(x, V_m) = d(x, W),$$

infatti, per ogni m $d(x, V_m) \leq d(x, W)$ per cui $\xi \leq d(x, W)$. Ora, fissiamo $\varepsilon > 0$, troviamo un $\bar{m}$ per cui

$$\xi + \frac{\varepsilon}{2} > d(x, V_{\bar{m}})$$

per cui esiste $v \in V_{\bar{m}} \subseteq W$ per cui

$$d(x, V_{\bar{m}}) > d(x, v) - \frac{\varepsilon}{2}$$

infine, per ogni ε si trova $v \in W$ talché

$$\xi + \varepsilon > d(x, v)$$

la tesi. Si ha perciò che

$$d(x, W) = d(x, \overline{W}) = \lim_{m \rightarrow \infty} d(x, V_m)$$

Ma $x \in \overline{W}$ se e solo se $d(x, \overline{W}) = 0$ (essendo $\overline{W}$ chiuso), cioè se e solo se $\lim_{m \rightarrow \infty} d(x, V_m) = 0$, se e solo se $\lim_{m \rightarrow \infty} (d(x, V_m))^2 = 0$, se e solo se

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |x - p_m(x)|^2 = 0$$

ma $|x - p_m(x)|^2 = |x|^2 - |p_m(x)|^2$, perciò, il tutto vale se e solo se

$$|x|^2 - \lim_{m \rightarrow \infty} |p_m(x)|^2 = 0$$

infine, essendo

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |p_m(x)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x|u_k)|^2$$

$x \in \overline{W}$ se e solo se

$$|x|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x|u_k)|^2$$

In questo caso, allora

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |x - p_m(x)| = 0$$

da cui $p_m(x) \rightarrow x$, cioè

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (x|u_k) u_k$$

Abbiamo quindi dimostrato i seguenti

Teorema VII.2
(disuguaglianza di Bessel)

Sia $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ un sistema ortonormale nello spazio prehilbertiano H , allora vale la disuguaglianza di Bessel

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x|u_k)|^2 \leq |x|^2$$

Teorema VII.3
(identità di Parseval)

Sia $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ un sistema ortonormale nello spazio prehilbertiano H . Vale l'identità di Parseval se e solo se x appartiene alla chiusura dello spazio generato dal sistema ortonormale:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x|u_k)|^2 = |x|^2 \Leftrightarrow x \in \overline{\text{Span}\langle u_k \rangle_{k \in \mathbb{N}}}$$

In tal caso

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (x|u_k) u_k$$

VII.2.2 Lo spazio L_T^2

Introduzione

Siano f, g a valori complessi T -periodiche, a quadrato sommabile, si scriverà $f, g \in L_T^2$. Poniamo allora

$$(f \cdot g)_{L^2} \equiv \frac{1}{T} \int_T f(t) \overline{g(t)} dt$$

La forma introdotta è un prodotto hermitiano, sicché lo spazio delle funzioni L_T^2 è prehilbertiano. Infatti

$$((f_1 + \lambda f_2) \cdot g)_{L^2} = \frac{1}{T} \int_T f_1(t) \overline{g(t)} dt + \frac{\lambda}{T} \int_T f_2(t) \overline{g(t)} dt = (f_1 \cdot g)_{L^2} + \lambda (f_2 \cdot g)_{L^2}$$

$$(f \cdot (g_1 + \mu g_2))_{L^2} = \frac{1}{T} \int_T f(t) \overline{g_1(t)} dt + \frac{\mu}{T} \int_T f(t) \overline{g_2(t)} dt = (f \cdot g_1)_{L^2} + \mu (f \cdot g_2)_{L^2}$$

$$\begin{aligned} (f \cdot g)_{L^2} &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \overline{g(t)} dt = \frac{1}{T} \int_T \overline{g(t)} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_T \overline{(g(t) \overline{f(t)})} dt = \frac{1}{T} \int_T \overline{g(t) \overline{f(t)}} dt = \\ &= \overline{(g \cdot f)_{L^2}} \end{aligned}$$

$$(f \cdot f)_{L^2} = \frac{1}{T} \int_T |f(t)|^2 dt \geq 0, (f \cdot f)_{L^2} = 0 \Rightarrow |f(t)| = 0 \text{ q.o.}$$

Per quanto visto nella prima sezione, troviamo subito un sistema ortonormale per il prodotto hermitiano definito,

$$\mathbf{e}_k \equiv e^{i\omega_k t}, k \in \mathbb{Z}$$

presa una funzione $f \in L_T^2$ consideriamo le sue componenti rispetto al sistema ortonormale trovato

$$(f \cdot \mathbf{e}_k)_{L^2} = \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-ikt} dt \equiv c_k(f)$$

dove ciascun $c_k(f)$ si definisce **coefficiente di Fourier** della funzione f .

Dunque, lo spettro di un polinomio trigonometrico è dato da

$$c_k = (P \cdot \mathbf{e}_k)_{L^2},$$

per un polinomio trigonometrico, per quanto visto nella proposizione di eguaglianza dell'energia, vale anche

$$|P|_{L^2}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |P(t)|^2 dt = 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 = \sum_{k=-n}^n |(P \cdot \mathbf{e}_k)_{L^2}|^2$$

Serie di Fourier

Ci proponiamo adesso di sfruttare il lavoro svolto nella precedente sottosezione. Perciò consideriamo lo spazio prehilbertiano L_T^2 e la famiglia numerabile di vettori ortonormali

$$\{\mathbf{e}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

Sia $x(t) \in L_T^2$, allora possiamo considerare il polinomio trigonometrico dato dalla proiezione di x sugli spazi V_m generati dai primi $2m + 1$ vettori del sistema

$$S_m(t) = \text{proj}_{V_m} x(t) = \sum_{k=-m}^m (x \cdot \mathbf{e}_k)_{L^2} \mathbf{e}_k = \sum_{k=-m}^m c_k(x) \mathbf{e}_k$$

Il limite per $m \rightarrow \infty$ si dice **serie di Fourier** di $x(t)$. Troviamo subito che vale la **diseguaglianza di Bessel** per le serie dei polinomi trigonometrici generati dalla proiezione di $x(t)$. In questo contesto la diseguaglianza di Bessel prende il nome di **diseguaglianza dell'energia**:

Teorema VII.4
(diseguaglianza dell'energia)

Sia $x(t)$ una funzione in L_T^2 . Allora i coefficienti di Fourier della $x(t)$ sono tali che

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_k(x)|^2 \leq |x|_{L^2}^2 = \int_T |x(t)|^2 dt$$

Inoltre vale

$$|x - p_m(x)|^2 = |x|^2 - |p_m(x)|^2$$

Teorema VII.5
(di Pitagora)

Sia $x(t)$ una funzione in L_T^2 . Allora la proiezione di x

$$S_m(t) = \text{proj}_{V_m} x(t) = \sum_{k=-m}^m (x \cdot \mathbf{e}_k)_{L^2} \mathbf{e}_k = \sum_{k=-m}^m c_k(x) \mathbf{e}_k$$

è tale che

$$|x(t) - S_m(t)|_{L^2}^2 = |x|_{L^2}^2 - |S_m(t)|_{L^2}^2$$

Convergenza delle serie di Fourier in norma L^2 : eguaglianza dell'energia

Il problema adesso è quello di stabilire quando vale l'identità di Parseval, che chiameremo ora **eguaglianza dell'energia**, ci chiediamo cioè quando valga

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 = |f|_{L^2}^2$$

$$x(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m(t)$$

Con un po' di fatica vedremo che in realtà questo risultato vale sempre. Cioè la serie di Fourier di ogni funzione di L_T^2 converge alla funzione stessa, in norma L^2 .

Intanto supponiamo di avere già dimostrato quello che vedremo in seguito, per cui funzioni T -periodiche continue $\mathcal{C}^1$ a tratti hanno serie di Fourier convergenti uniformemente ad esse stesse. Siccome la convergenza uniforme implica la convergenza in norma L^2 , abbiamo trovato una sottoclasse $\mathcal{A}$ di funzioni a quadrato sommabile per cui la serie di Fourier converge alla funzione.

Dalla disuguaglianza di Schwartz, applicata a $|f|$ e 1, si ha

$$|f|_{L^2} \geq \int_T |f|(t) \frac{dt}{T}$$

da cui si deduce che

$$|f|_{L^1} \leq |f|_{L^2}$$

e, dunque, $f \in L_T^2 \Rightarrow f \in L_T^1$. Vedremo che le funzioni a scalino (costanti a tratti) estese per periodicità sono dense in L_T^2 .

Le funzioni a scalino possono essere approssimate in norma L^2 con funzioni continue $\mathcal{C}^1$ a tratti. È sufficiente unire i salti con segmenti aventi pendenza sufficientemente alta sicché la

differenza integrale tra le funzioni sia piccola a piacere. Da questo si deduce infine che $\mathcal{A}$ è denso in L_T^2 . D'altra parte, per quanto detto e dal teorema sull'identità di Parseval

$$\mathcal{A} \in \overline{\text{Span} \langle \mathbf{e}_k \rangle_{k \in \mathbb{Z}}}$$

dimostriamo che così vale anche per L_T^2 . Sia $x \in L_T^2$, allora $x \in \mathcal{P} \equiv \overline{\text{Span} \langle \mathbf{e}_k \rangle_{k \in \mathbb{Z}}}$ se e solo se $d(x, \mathcal{P}) = 0$: sia $p \in \mathcal{P}$

$$d(x, \mathcal{P}) \leq d(x, p) \leq d(x, f) + d(f, p)$$

dove $f \in \mathcal{A}$. D'altra parte, per massimalità dell'inf

$$d(x, \mathcal{P}) \leq d(x, f) + d(f, \mathcal{P})$$

dunque, siccome $d(f, \mathcal{P}) = 0$

$$d(x, p) \leq d(x, f) \Rightarrow d(x, \mathcal{P}) \leq d(x, f)$$

ora, per ogni $\varepsilon > 0$ si trova $f \in \mathcal{A}$, per cui

$$d(x, \mathcal{P}) \leq d(x, f) \leq \varepsilon$$

infine, per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si ha la tesi.

Modulo dimostrare che le serie delle funzioni in $\mathcal{A}$ convergono uniformemente alle rispettive funzioni e che le funzioni a scalino sono dense in L_T^2 , abbiamo trovato il seguente

Teorema VII.6
(eguaglianza dell'energia)

La serie di Fourier di una qualsiasi funzione $x \in L_T^2$ converge in norma L^2 a x

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (x \cdot \mathbf{e}_k)_{L^2} \mathbf{e}_k \xrightarrow{L^2} x,$$

vale l'eguaglianza dell'energia

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |(x \cdot \mathbf{e}_k)_{L^2}|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 = |x|_{L^2}^2.$$

Prima di proseguire è giusto dimostrare la densità delle funzioni a scalino a supporto compatto nell'insieme delle funzioni sommabili in $\mathbb{R}^n$ (dal quale discende uno dei risultati di cui avevamo bisogno):

Proposizione VII.5 Per ogni $f \in L^1$ a dominio limitato in $\mathbb{R}^n$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione a scalino e a supporto compatto a valori in $\mathbb{R}$ tale che

$$|f - g|_{L^1} = \int |f - g| \, d\mathbf{x} < \varepsilon$$

Dimostrazione Basta limitarsi a f positiva e reale, usando poi f^+ , f^- , parte reale e parte immaginaria, determiniamo la tesi nel caso generale.

Se $f \geq 0$, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $0 \leq \phi \leq f$, $\phi = \sum_{k=1}^m c_k \chi_{E_k}$ con $c_k > 0$, semplice per cui

$$\int f - \phi \, d\mathbf{x} < \frac{\varepsilon}{2}$$

basta ora trovare g a scalini per cui

$$\int |g - \phi| \, d\mathbf{x} < \frac{\varepsilon}{2}$$

prendiamo per ciascun E_k un plurirettangolo $A_k \subseteq E_k$, tale che

$$m(E_k \triangle A_k) \leq a\varepsilon$$

ove $a \equiv \min \{1/2mc_k \mid k \in J_m\}$, posto

$$\phi = \sum_{k=1}^m c_k \chi_{A_k}$$

essa avrà supporto compatto e inoltre

$$(c.v.d.) \quad \int \phi - g \, d\mathbf{x} = \sum_{k=1}^m c_k m (E_k \triangle A_k) \leq \sum_{k=1}^m c_k a \varepsilon \leq \sum_{k=1}^m \frac{\varepsilon}{2m} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ora, manca da mostrare la densità delle funzioni a scalino in L^2 , a questo scopo premettiamo la dimostrazione del seguente

Lemma VII.5 *Le funzioni L^2 possono essere approssimate in norma L^2 mediante funzioni limitate.*

Dimostrazione Consideriamo $f \in L^2$ non limitata (altrimenti la tesi è ovvia) e positiva (se f non è positiva si ragiona prendendo parte positiva e negativa e usando poi la diseuguaglianza triangolare), e sia f_N la troncata N -esima della funzione f , cioè valga

$$f_N(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \text{se } f(\mathbf{x}) \leq N \\ N, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Adesso consideriamo l'integrale

$$\int_S |f - f_N|^2 \, d\mathbf{x} = \int_S |f - N|^2 \chi_{R_N} \, d\mathbf{x}$$

dove χ_{R_N} è la funzione caratteristica dell'insieme R_N dei punti sui quali $f(\mathbf{x}) > N$. Abbiamo dunque una successione di funzioni definite in S ,

$$F_N(\mathbf{x}) \doteq |f(\mathbf{x}) - N|^2 \chi_{R_N}(\mathbf{x})$$

la successione è certamente puntualmente decrescente perché gli insiemi R_N sono incapsulati e perché f è positiva. Ciasuna funzione F_N è sommabile come prodotto di sommabili (f è L^2 perciò è misurabile, tale è allora l'insieme R_N : la sua funzione caratteristica è allora sommabile). Inoltre,

$$|f(\mathbf{x}) - N| \leq |f(\mathbf{x})| + N$$

ma sugli insiemi R_N , si ha $N < |f(\mathbf{x})|$ da cui

$$|f(\mathbf{x}) - N|^2 \leq 4|f(\mathbf{x})|^2$$

e perciò vale il teorema di Beppo Levi

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_S |f - f_N|^2 \, d\mathbf{x} = \int \lim_{N \rightarrow \infty} (|f - N|^2 \chi_{R_N}) \, d\mathbf{x}$$

Calcoliamo il limite (puntuale) entro integrale: sia $\mathbf{x} \in S$ se $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ allora $\mathbf{x} \in S \setminus R_N$, ne deriva che il limite per $N \rightarrow \infty$ di $F_N(\mathbf{x})$ è nullo. Si conclude perciò che l'insieme sul quale la funzione limite è certamente nulla è il complementare dell'insieme su cui f assume valore infinito. Ma tale insieme è a misura nulla. La funzione limite è dunque nulla su S tranne al più un insieme di misura nulla, essendo una funzione pari a 0 quasi ovunque essa avrà integrale 0:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - f_N\|_{L^2} = 0$$

(c.v.d.) Fissato un ε esiste sempre un N tale che $\|f - f_N\|_{L^2} < \varepsilon$, la tesi.

Lemma VII.6 *Per ogni $f \in L^2$ a dominio limitato in $\mathbb{R}^n$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione φ a scalino e a supporto compatto a valori in $\mathbb{C}$ tale che*

$$\|f - \varphi\|_{L^2} = \left(\int |f - \varphi|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Le funzioni a scalino sono dense in L^2 .

Dimostrazione Data $f \in L^2$ e fissato $\varepsilon > 0$ troviamo una funzione limitata g tale che

$$\|f - g\|_{L^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

ma se g è limitata allora è sommabile, cioè L^1 , perciò troviamo una funzione a scalino tale che

$$\|g - \varphi\|_{L^1} < \left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)^2$$

D'altra parte $(g - \varphi)$ è una funzione limitata

$$\|g - \varphi\|_{L^2}^2 = \int_S |g - \varphi|^2 d\mathbf{x} \leq \sup |g - \varphi| \int_S |g - \varphi| d\mathbf{x} = \sup |g - \varphi| \|g - \varphi\|_{L^1}$$

posto $M \doteq (\sup |g - \varphi|)^{1/2}$ si ha

(c.v.d.)
$$\|f - \varphi\|_{L^2} < \|f - g\|_{L^2} + \|g - \varphi\|_{L^2} < \varepsilon$$

VII.3 Teoremi di convergenza puntuale

VII.3.1 Il lemma di Riemann-Lebesgue

Premettiamo un risultato molto importante, il

Lemma VII.7
(di Riemann-Lebesgue)

Sia $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, limitata localmente sommabile τ -periodica. Per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$, si ha allora

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t) p(\lambda t) dt = \left(\int_0^\tau p(t) \frac{dt}{\tau} \right) \left(\int_{\mathbb{R}} f(t) dt \right)$$

Dimostrazione

Posto $\mu \equiv \int p(t) \frac{dt}{\tau}$, a meno di porre $p \rightarrow p - \mu$, si può supporre la media di p nulla. Con un cambio di segno il limite per $\lambda \rightarrow -\infty$ si riconduce al limite per $\lambda \rightarrow +\infty$. Perciò ci limitiamo a quest'ultimo.

Vediamo intanto che il lemma è vero per $f = \chi_{[a,b]}$. Supposto $\lambda > 0$, con il cambiamento di variabile $\lambda t = s$,

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{[a,b]} p(\lambda t) dt = \int_a^b p(\lambda t) dt = \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda a}^{\lambda b} p(s) ds$$

se m è il massimo intero per cui $\lambda a + m\tau \leq \lambda b$, allora l'ultimo integrale si spezza come

$$\int_{\lambda a}^{\lambda b} p(s) ds = \sum_{i=1}^m \int_{\lambda a}^{\lambda a + i\tau} p(s) ds + \int_{\lambda a + m\tau}^{\lambda b} p(s) ds$$

la sommatoria è banalmente nulla, dunque, posto $c \equiv \lambda a + m\tau$ e $d \equiv \lambda b$, si ottiene

$$\int_a^b p(\lambda t) dt = \frac{1}{\lambda} \int_c^d p(s) ds$$

da cui

$$\left| \int_a^b p(\lambda t) dt \right| = \frac{1}{\lambda} \left| \int_c^d p(s) ds \right| \leq \frac{1}{\lambda} \int_c^d |p(s)| ds$$

ma siccome $|p(s)|$ è positiva, per monotonia nel dominio

$$\frac{1}{\lambda} \int_c^d |p(s)| ds \leq \frac{1}{\lambda} \int_c^{c+\tau} |p(s)| ds = \frac{1}{\lambda} \int_0^\tau |p(s)| ds$$

il quale tende ovviamente a 0, per $\lambda \rightarrow \infty$.

Per linearità di limiti ed integrali, il lemma è vero per funzioni a scalino che sono combinazioni lineari di funzioni caratteristiche di intervalli limitati. Ma le funzioni a scalino sono dense in $L^1(\mathbb{R})$ per quanto visto nella sezione precedente. Presa perciò $f \in L^1(\mathbb{R})$ e fissato $\varepsilon > 0$, si trova g a scalino per cui

$$\int_{\mathbb{R}} |f - g| dt \leq \varepsilon$$

Allora

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\mathbb{R}} f(t) p(\lambda t) dt \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}} (f(t) - g(t) + g(t)) p(\lambda t) dt \right| \leq \\
 &\leq \left| \int_{\mathbb{R}} (f(t) - g(t)) p(\lambda t) dt \right| + \left| \int_{\mathbb{R}} g(t) p(\lambda t) dt \right| \leq \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(t) - g(t)| |p(\lambda t)| dt + \left| \int_{\mathbb{R}} g(t) p(\lambda t) dt \right| \leq \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(t) - g(t)| \|p\|_{\infty} dt + \left| \int_{\mathbb{R}} g(t) p(\lambda t) dt \right| \leq \\
 &\leq \varepsilon \|p\|_{\infty} + \left| \int_{\mathbb{R}} g(t) p(\lambda t) dt \right|
 \end{aligned}$$

l'ultimo addendo tende a 0 per λ che tende a ∞ , cioè esiste λ_{ε} , per cui per $\lambda \geq \lambda_{\varepsilon}$, l'addendo è definitivamente minore di ε , ne deriva che per ogni ε , esiste λ_{ε} tale che se $\lambda \geq \lambda_{\varepsilon}$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(t) p(\lambda t) dt \right| \leq \varepsilon (\|p\|_{\infty} + 1)$$

(c.v.d.) da cui la tesi.

Corollario VII.1 Sia $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ come nel lemma; se $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $f \in L^1([a, b])$, allora

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \int_a^b f(t) p(\lambda t) dt = \left(\int_0^{\tau} p(t) \frac{dt}{\tau} \right) \left(\int_a^b f(t) dt \right)$$

Dimostrazione Basta applicare il lemma a $f^*_{[a,b]}$.

Preso una funzione f T -periodica useremo il lemma di Riemann-Lebesgue, per studiare il comportamento dei coefficienti di Fourier per $k \rightarrow \infty$, in particolare abbiamo che

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \int_T f(t) e^{ik\omega t} \frac{dt}{T} = 0.$$

Questo fatto può essere dimostrato direttamente per funzioni in L^2_T , senza ricorrere al lemma di Riemann-Lebesgue. Se f è a quadrato sommabile la serie dei moduli quadrati dei coefficienti di Fourier è convergente, perché limitata, sussiste la disuguaglianza dell'energia, allora anche i coefficienti di Fourier devono andare a 0.

VII.3.2 Il teorema di convergenza puntuale

Vogliamo scrivere in modo più semplice la somma parziale m -esima della serie di Fourier di una funzione $f \in L^1_T$. Abbiamo

$$\begin{aligned}
 S_m(t) &= \sum_{k=-m}^m c_k(f) e^{ik\omega t} = \sum_{k=-m}^m \left(\int_T f(\sigma) e^{-ik\omega\sigma} \frac{d\sigma}{T} \right) e^{ik\omega t} = \sum_{k=-m}^m \left(\int_T f(\sigma) e^{ik\omega(t-\sigma)} \frac{d\sigma}{T} \right) = \\
 &= \int_T f(\sigma) \left(\sum_{k=-m}^m e^{ik\omega(t-\sigma)} \right) \frac{d\sigma}{T}
 \end{aligned}$$

Nucleo di Dirichlet

Poniamo ora la seguente

Definizione VII.2 Sia $m \geq 0$ intero, si definisce m -esimo nucleo di Dirichlet la funzione $D_m : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, talché

$$D_m(z) = \sum_{k=-m}^m e^{ikz}$$

La funzione D_m è la somma di $2m + 1$ in progressione geometrica di ragione e^{iz} , perciò se

$e^{iz} \neq 1$, cioè se $z \neq 2\pi\mathbb{Z}$, risulta

$$D_m(z) = e^{-imz} \sum_{k=-m}^m e^{i(k+m)z} = e^{-imz} \sum_{j=0}^{2m} e^{ijz} = e^{-imz} \frac{e^{i(2m+1)z} - 1}{e^{iz} - 1} = \frac{e^{imz+iz} - e^{-imz}}{e^{iz} - 1}$$

moltiplicando numeratore e denominatore per $e^{-iz/2}$

$$\frac{e^{i(m+1/2)z} - e^{-i(m+1/2)z}}{e^{iz/2} - e^{-iz/2}} = \frac{\sin((m+1/2)z)}{\sin(z/2)} = D_m(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$$

negli altri punti $D_m(z)$ vale $2m+1$. Inoltre,

$$D_m(z) = 1 + 2 \sum_{k=1}^m \frac{e^{ikz} + e^{-ikz}}{2} = 1 + 2 \sum_{k=1}^m \cos(kz)$$

Si noti come $D_m(z)$ è pari. Sulla retta reale, dall'ultima eguaglianza, avendo $\cos(k\omega t)$ periodo T/k ,

$$\int_T D_m(\omega t) \frac{dt}{T} = 1$$

**Dimostrazione
del teorema di
convergenza
puntuale**

Tornando al calcolo di cui sopra, ricordando che D_m è pari, con due successivi cambi di variabile

$$\begin{aligned} S_m(t) &= \int_{-T/2}^{T/2} f(\sigma) \left(\sum_{k=-m}^m e^{ik\omega(t-\sigma)} \right) \frac{d\sigma}{T} = \int_{-T/2}^{T/2} f(\sigma) D_m(\omega(t-\sigma)) \frac{d\sigma}{T} = \int_{T/2+t}^{-T/2+t} f(t-s) D_m(\omega s) \frac{ds}{T} \\ &= \int_{-t-T/2}^{-t+T/2} f(t+\theta) D_m(\omega\theta) \frac{d\theta}{T} \end{aligned}$$

$$S_m(t) = \int_T f(t+\theta) D_m(\omega\theta) \frac{d\theta}{T}$$

Dall'ultima eguaglianza della prima riga si trova, del resto

$$S_m(t) = \int_{-T/2+t}^{T/2+t} f(t-s) D_m(\omega s) \frac{ds}{T} = \int_T f(t-s) D_m(\omega s) \frac{ds}{T}$$

facciamo la media aritmetica, con l'altra espressione ricavata di $S_m(t)$

$$S_m(t) = \frac{1}{2} \int_T [f(t+s) + f(t-s)] D_m(\omega s) \frac{ds}{T}$$

Ora, sia f una funzione sommabile e fissiamo $a \in \mathbb{R}$, per la quale valga la **condizione di Dini**, cioè risulti sommabile in un intorno di $s=0$, la quantità

$$\left| \frac{f(a+s) + f(a-s) - 2f(a)}{s} \right|$$

essa sarà sommabile anche lontano da $s=0$, perché poi sarà prodotto di una somma di sommabili con una continua (1/2). Valendo la condizione di Dini la serie di Fourier di f convergerà a $f(a)$, che è appunto un risultato di **convergenza puntuale**.

Abbiamo, ricordando che l'integrale di $D_m(\omega s)$ è nullo su un periodo

$$f(a) = \int_{-T/2}^{T/2} f(a) D_m(\omega s) ds$$

dunque,

$$\begin{aligned} S_m(a) - f(a) &= \int_{-T/2}^{T/2} \frac{f(a+s) + f(a-s) - 2f(a)}{2} D_m(\omega s) \frac{ds}{T} = \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} \frac{f(a+s) + f(a-s) - 2f(a)}{2 \sin(s/2)} \sin((m+1/2)s) \frac{ds}{T} \end{aligned}$$

del resto

$$\frac{f(a+s) + f(a-s) - 2f(a)}{2\sin(s/2)} = \frac{f(a+s) + f(a-s) - 2f(a)}{s} \frac{s}{2\sin(s/2)}$$

il primo fattore è sommabile, il secondo è continuo, dunque, sommabile, la funzione è sommabile, inoltre $\sin((m+1/2)s)$ è periodica e ha media nulla, applicando il lemma di Riemann-Lebesgue, passando al limite per $m \rightarrow \infty$, si ottiene la tesi.

Si ha la seguente

Proposizione VII.6 (test del Dini)

Sia f sommabile e T -periodica, se per un punto $a \in \mathbb{R}$, in un intorno di $s = 0$, risulta sommabile la quantità

$$\left| \frac{f(a+s) + f(a-s) - 2f(a)}{s} \right|$$

allora la serie di Fourier di f converge in a a $f(a)$.

Corollario VII.2 Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, una funzione T -periodica sommabile. Sia $a \in \mathbb{R}$, tale che i limiti destro e sinistro di f esistano finiti in a

$$\begin{aligned} f(a^-) &\equiv \lim_{\theta \rightarrow 0^+} f(a-\theta) \in \mathbb{C} \\ f(a^+) &\equiv \lim_{\theta \rightarrow 0^+} f(a+\theta) \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Supponiamo, inoltre, che le quantità

$$\frac{f(a \pm \theta) - f(a^\pm)}{\pm \theta}$$

siano sommabili in un intorno qualsiasi di $\theta = 0$. Allora la serie di Fourier di f converge in a alla media aritmetica dei limiti destro e sinistro si a :

$$\frac{f(a^+) + f(a^-)}{2} = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m(a)$$

Dimostrazione Sia g eguale a f , tranne in a , dove

$$g(a) = \frac{f(a^+) + f(a^-)}{2}$$

allora,

$$\frac{f(a+s) - f(a^+) + f(a-s) - f(a^-)}{s} = \frac{g(a+s) + g(a-s) - 2g(a)}{s}$$

è sommabile, perciò g è nelle ipotesi del test del Dini. $c_k(g) = c_k(f)$ perché gli integrali di funzioni uguali tranne in un insieme a misura nulla (un punto) sono uguali.

Allora se in un intorno qualsiasi di $\theta = 0$, la funzione è lipschitziana, i rapporti incrementali sono limitati e vale la condizione di Dini, se mostriamo che f lipschitziana a tratti implica l'esistenza di limiti destro e sinistro abbiamo un nuovo risultato per la convergenza puntuale. Stabiliamo quindi il

Lemma VII.8 Sia f una funzione lipschitziana a tratti, allora f ammette finiti, limiti destri e sinistri in ogni punto.

Dimostrazione Sia per $x < x_0$ e $x > x_0$ f lipschitziana, allora, per $x \geq x_0$ f è continua e si ha la tesi. Vediamo però che esistono

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x)$$

Vediamo il limite sinistro. Se esiste esso è finito perché la funzione è localmente limitata. Sia $]a, x_0[$ l'intervallo in cui f è lipschitziana, allora esiste M per cui

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|, \quad x, y \in]a, x_0[$$

x_0 è il sup dei punti dell'intervallo considerato, prendiamo allora $\{x_n\} \subseteq]a, x_0[$, tale che x_n converge a x_0 . In quanto convergente essa è di Cauchy. Per ogni $m, n \in \mathbb{N}$, si ha

$$|f(x_m) - f(x_n)| \leq M|x_m - x_n|$$

fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\nu \in \mathbb{N}$, per cui se $n > m \geq \nu$, si ha

$$|f(x_m) - f(x_n)| \leq M|x_m - x_n| < M\varepsilon$$

ma allora anche $f(x_n)$ è di Cauchy, allora $f(x_n) \rightarrow b \in \mathbb{R}$. Per la tesi ci basta vedere che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste ν tale che $x_\nu < x < x_0$ implica $|f(x) - b| < \varepsilon$. Fissiamo ν tale che $|x_\nu - x_0| < \varepsilon/2M$ e $|f(x_\nu) - b| < \varepsilon/2$, se vediamo che $|f(x_\nu) - f(x)| < \varepsilon/2$ abbiamo finito. Ma

$$(c.v.d.) \quad |f(x_\nu) - f(x)| \leq M|x_\nu - x| \leq M\frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Teorema VII.7 *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ T -periodica e lipschitziana a tratti, allora la sua serie di Fourier converge in ogni punto alla media del limite destro e sinistro della funzione.*

In particolare, il teorema si applica alle funzioni $\mathcal{C}^1$ a tratti.

VII.4 Teoremi di convergenza uniforme

Finalmente, siamo in grado di dimostrare il risultato che ci occorreva nella discussione sull'identità di Parseval, nello spazio delle funzioni a quadrato sommabile. Dimosteremo cioè che le funzioni continue, $\mathcal{C}^1$ a tratti, periodiche hanno serie di Fourier che convergono uniformemente ad esse.

Teorema VII.8 *Sia f T -periodica continua e $\mathcal{C}^1$ a tratti. Allora la serie di Fourier converge totalmente (e perciò uniformemente) a f su ogni intervallo limitato.*

Dimostrazione Dal teorema precedente, essendo f continua, si ricava la convergenza puntuale. Per ottenere la convergenza totale notiamo che

$$\|c_k(f) e^{i\omega kt}\|_\infty \leq \|c_k(f)\|_\infty = |c_k(f)|$$

per la disuguaglianza dell'energia, (valida per ogni funzione in L_T^2) sappiamo già che la serie dei moduli dei quadrati dei c_k è convergente, vediamo adesso che ciò è vero per la serie dei moduli.

Siccome $f \in \mathcal{C}^1$ a tratti, è possibile integrare per parti ($\dot{f}$ sarà continua a tratti). Per $n \neq 0$, troviamo

$$c_n(f) = \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt = \left[f(t) \frac{e^{-in\omega t}}{-in\omega} \right]_0^T - \int_0^T \dot{f}(t) \frac{e^{-in\omega t}}{-in\omega} dt = \frac{c_n(\dot{f})}{in\omega}$$

La funzione $\dot{f}$, essendo continua a tratti è a quadrato sommabile. Applichiamo la disuguaglianza dell'energia ai $c_n(\dot{f})$. Abbiamo

$$\sum_{n=-m}^m |c_n(\dot{f})|^2 \leq |\dot{f}|_{L^2}^2$$

applichiamo la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz alle m -uple

$$\left(|c_n(\dot{f})| \right)_{n \in J_m}, \left(\frac{1}{|i\omega n|} \right)_{n \in J_m}$$

si ha

$$\sum_{n=1}^m |c_n(f)| \leq \left(\sum_{n=1}^m |c_n(\dot{f})|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^m \frac{1}{\omega^2 n^2} \right)^{1/2}$$

Passando al limite per $m \rightarrow \infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f)| \leq M \|f\|_{L^2}^2$$

analogamente

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_{-n}(f)| \leq M \|f\|_{L^2}^2$$

Infine, la convergenza totale discende dalla

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n(f)| \leq |c_0(f)| + 2M \|f\|_{L^2}^2$$

(c.v.d.) Ma allora la serie converge uniformemente al suo limite puntuale, cioè alla funzione stessa.

Esempio VII.1 Consideriamo, in primo luogo, la funzione $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, avente grafico a *dente di sega*:

$$\begin{aligned} t &\mapsto \frac{2}{T}t, \quad t \in \left] -\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right[\\ \frac{T}{2} &\mapsto 0 \end{aligned}$$

estesa per T -periodicità sulla retta reale. Calcoliamone la serie di Fourier che sappiamo convergerà puntualmente ovunque alla funzione. Abbiamo, per $n > 0$

$$\begin{aligned} Tc_n(f) &= \int_{-T/2}^{T/2} \frac{2}{T} t e^{-in\omega t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} \frac{2}{T} t \frac{d}{dt} \left(\frac{e^{-in\omega t}}{-in\omega} \right) dt = \left[-\frac{2}{2in\pi} t e^{-in\frac{2\pi}{T}t} \right]_{-T/2}^{T/2} + \int_{-T/2}^{T/2} \frac{2}{T} \frac{e^{-in\omega t}}{in\omega} dt \\ &= -\frac{1}{in\pi} \left(\frac{T}{2} e^{-in\pi} + \frac{T}{2} e^{in\pi} \right) = -\frac{T}{in\pi} \cos(n\pi) \end{aligned}$$

infine

$$c_n = -\frac{\cos(n\pi)}{in\pi} \Rightarrow a_n = 0, \quad b_n = -\frac{2\cos(n\pi)}{n\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

Ora, calcoliamo

$$\begin{aligned} (S_m - S_n) \cos \frac{\omega t}{2} &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=n+1}^m \frac{(-1)^{k+1}}{k} \frac{e^{i\omega k t} - e^{-i\omega k t}}{2i} \frac{e^{i\omega t/2} + e^{-i\omega t/2}}{2} = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=n+1}^m \frac{(-1)^{k+1}}{k} \frac{e^{i\omega t(k+1/2)} + e^{i\omega t(k-1/2)} - e^{-i\omega t(k-1/2)} - e^{-i\omega t(k+1/2)}}{2i} = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=n+1}^m \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right) t + \frac{1}{\pi} \sum_{k=n+1}^m \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin\left(k - \frac{1}{2}\right) t = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=n+1}^m \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right) t + \frac{1}{\pi} \sum_{h=n}^{m-1} \frac{(-1)^{h+2}}{h+1} \sin\left(h + \frac{1}{2}\right) t = \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t + \frac{1}{\pi} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{k=n+1}^{m-1} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{(-1)^{k+2}}{k+1} \right) \sin\left(k + \frac{1}{2}\right) t \end{aligned}$$

vediamo quanto fa l'ultima sommatoria

$$\sum_{k=n+1}^{m-1} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{(-1)^{k+2}}{k+1} \right) = \sum_{k=n+1}^{m-1} \left(\frac{k(-1)^{k+2} + k(-1)^{k+1} + (-1)^{k+2}}{k(k+1)} \right) =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{m-1} \left(\frac{k(-1)^{k+1}(-1+1) + (-1)^{k+2}}{k(k+1)} \right) = \sum_{k=n+1}^{m-1} \frac{(-1)^{k+2}}{k(k+1)}$$

se ne ricava che, passando ai moduli

$$|S_m - S_n| \cos \frac{\omega t}{2} \leq \frac{1}{\pi} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{\pi} \frac{1}{m} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=n+1}^{m-1} \frac{1}{k(k+1)}$$

poiché, per ogni $|t| \leq p < T/2$

$$\cos \frac{\omega t}{2} > 0, \left| \frac{\omega t}{2} \right| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow |t| < \frac{T}{2}$$

d'altra parte

$$\sum_{k=n+1}^{m-1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n+1}^{m-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m}$$

sicché

$$|S_m - S_n| \cos \frac{\omega t}{2} \leq \frac{2}{\pi} \frac{1}{n+1}$$

per $|t| \leq p < T/2$, $\cos(\omega t/2) \leq \cos(\omega p/2)$

$$\sup_{|t| \leq p} |S_m - S_n| \leq \frac{1}{\cos(\omega p/2)} \frac{2}{\pi} \frac{1}{n+1}$$

da cui, sul dominio scelto le somme parziali formano una successione di Cauchy e quindi si ha convergenza uniforme.

Sfruttando la convergenza uniforme sui compatti in cui f è continua della funzione dell'esempio precedente si giunge alla seguente importante generalizzazione.

Teorema VII.9
(di convergenza
uniforme)

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, T -periodica e $\mathcal{C}^1$ a tratti. La serie di Fourier converge uniformemente ad f su ogni compatto che non contenga punti di salto di f .

Dimostrazione

Sia f discontinua (discontinuità che abbiamo già visto sono a salto) nei punti $t_1, \dots, t_h$, in un intervallo-periodo, allora sia ϕ dell'esempio precedente, ogni periodo essa ha salto 1. Passiamo a considerare la funzione

$$F(t) = f(t) + \sum_{k=1}^h \frac{\delta_k}{2} \phi(t - t_k + T/2)$$

essa è continua e regolare a tratti, perciò la sua serie di Fourier convergerà uniformemente a F . Ma la serie di Fourier di f si ottiene dalla somma di un numero finito di serie, quella della F che converge uniformemente e quella delle h

$$\frac{\delta_k}{2} \phi(t - t_k + T/2),$$

perciò sarà uniformemente convergente negli intervalli in cui esse convergono uniformemente, (c.v.d.) cioè nei compatti che non contengono i t_k .

Per l'integrazione delle serie di Fourier, si ha il seguente

Teorema VII.10
(integrazione
termine a
termine)

Sia f continua a tratti T -periodica e sia $F(t) \equiv \int_{t_0}^t f(s) ds$. Allora presi due punti t, t_0 in un intervallo-periodo

(i) $G(t) \equiv F(t) - c_0(f)(t - t_0)$ è T -periodica e

$$c_k(G) = \frac{c_k(f)}{i\omega k}, k \neq 0$$

(ii) *La serie*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{t_0}^t c_k(f) e^{i\omega ks} ds$$

converge totalmente sul periodo alla $F(t)$.**Dimostrazione**

Per (i) si noti che $G(t)$ è la funzione integrale nulla in t_0 della funzione $f(t) - c_0(f)$, essa ha media nulla su un periodo ed è periodica, ne consegue che $G(t)$ è T -periodica:

$$\int_0^T f(t) - c_0(f) dt = \int_0^T f(t) dt - Tc_0(f) = \int_0^T f(t) dt - T \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = 0$$

Abbiamo che $G(t)$ è T -periodica e continua. Inoltre ha per derivata $f(t) - c_0(f)$, perciò è $\mathcal{C}^1$ a tratti. Ricade nelle ipotesi del teorema di convergenza uniforme. Sfruttiamo ora il fatto che $f(t) = dG/dt + c_0(f)$ e che dG/dt è continua a tratti, per $n \geq 1$

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{dG}{dt} + c_0(f) \right) e^{-in\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dG}{dt} e^{-in\omega t} dt + \frac{c_0(f)}{T} \int_0^T e^{-in\omega t} dt = \\ &= \left[\frac{1}{T} G(t) e^{-in\omega t} \right]_0^T + \frac{in\omega}{T} \int_0^T G(t) e^{-in\omega t} dt = in\omega c_n(G) \end{aligned}$$

se ne ricava che

$$c_n(G) = \frac{c_n(f)}{in\omega}$$

Veniamo a (ii):

$$\begin{aligned} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{t_0}^t c_k(f) e^{i\omega ks} ds &= c_0(f)(t - t_0) + \sum_{-\infty, k \neq 0}^{+\infty} \frac{c_k(f)}{i\omega k} e^{i\omega kt} - \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{c_k(f)}{i\omega k} e^{i\omega kt_0} = c_0(f)(t - t_0) + G(t) - \\ &= F(t) \end{aligned}$$

(c.v.d.) uniformemente.

VII.4.1 Il teorema di Féjer

Data $f \in L_T^1$, consideriamo per ogni $m \geq 1$, la quantità

$$\sigma_m f(t) \equiv \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} S_k f(t) = \frac{1}{m} \int_T f(t + \theta) \left(\sum_{k=0}^{m-1} D_k(\theta) \right) \frac{d\theta}{T} = \int_T f(t + \theta) \Phi_m(\theta) \frac{d\theta}{T}$$

dove si è definito il **nucleo di Fejer**

$$\Phi_m(s) \equiv \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} D_k(s), \quad s \in \mathbb{C}$$

Come media di quantità aventi media integrale 1, la media integrale del nucleo di Fejer è 1. Diamone adesso un'espressione più concisa. Ricordando che

$$D_k(s) = \frac{e^{iks} e^{is/2} - e^{-iks} e^{-is/2}}{e^{is/2} - e^{-is/2}}$$

supponiamo ora $s \notin 2\pi\mathbb{Z}$, così

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m-1} D_k(s) &= \frac{e^{is/2} \sum_{k=0}^{m-1} e^{iks} - e^{-is/2} \sum_{k=0}^{m-1} e^{-iks}}{e^{is/2} - e^{-is/2}} = \frac{1}{e^{is/2} - e^{-is/2}} \left(e^{is/2} \frac{e^{ims} - 1}{e^{is} - 1} - e^{-is/2} \frac{e^{-ims} - 1}{e^{-is} - 1} \right) = \\ &= \frac{1}{e^{is/2} - e^{-is/2}} \left(\frac{e^{ims} - 1}{e^{is/2} - e^{-is/2}} + \frac{e^{-ims} - 1}{e^{is/2} - e^{-is/2}} \right) = \frac{e^{ims} + e^{-ims} - 2}{(e^{is/2} - e^{-is/2})^2} = \frac{2 \cos(ms) - 2}{\sin^2(s/2)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{2(1 - \cos(ms))}{\sin^2(s/2)} = \frac{\sin^2(ms/2)}{\sin^2(s/2)}$$

perciò, per l' m -esimo nucleo di Fejer

$$\Phi_m(s) = \frac{1}{m} \frac{\sin^2(ms/2)}{\sin^2(s/2)}$$

da cui il nucleo di Fejer è sempre positivo.

Lemma VII.9 Sia $T > 0$, se $0 < \delta < T/2$, la successione di funzioni $\Phi_m(\omega t)$ converge uniformemente a 0 in $[\delta, T - \delta] + T\mathbb{Z}$.

Dimostrazione Abbiamo

$$0 \leq \Phi_m(\omega t) \leq \frac{1}{m} \frac{1}{\sin^2(\omega t/2)}$$

ma in $[\delta, T - \delta]$, $\sin^2(\omega t/2) \geq \sin^2(\delta\omega/2)$, perciò

$$0 \leq \Phi_m(\omega t) \leq \frac{1}{m} \frac{1}{\sin^2(\omega t/2)} \leq \frac{1}{m} \frac{1}{\sin^2(\omega\delta/2)}$$

la tesi si ha passando al limite per $m \rightarrow \infty$. La periodicità fa seguire la proposizione per gli insiemi traslati di un numero intero di periodi.

(c.v.d.)

Infine, a conclusione dell'intera nostra trattazione sulla serie di Fourier,

Teorema VII.11
(di Fejer)

Sia $f \in L^1_T$; se f è continua in $a \in \mathbb{R}$, la successione $\sigma_m f$ della media delle somme parziali della serie di Fourier di f converge in a ad $f(a)$. Se f è continua si ha convergenza uniforme in ogni compatto di $\mathbb{R}$.

Dimostrazione Si ha

$$\sigma_m f(a) - f(a) = \int_T f(a + \theta) \Phi_m(\theta) \frac{d\theta}{T} - \int_T f(a) \Phi_m(\theta) \frac{d\theta}{T} = \int_T [f(a + \theta) - f(a)] \Phi_m(\theta) \frac{d\theta}{T},$$

da cui

$$|\sigma_m f(a) - f(a)| \leq \left| \int_{-T/2}^{T/2} [f(a + \theta) - f(a)] \Phi_m(\theta) \frac{d\theta}{T} \right| \leq \int_{-T/2}^{T/2} |f(a + \theta) - f(a)| \Phi_m(\theta) \frac{d\theta}{T}$$

Fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che sia $|f(a + \theta) - f(a)| \leq \varepsilon$, se $|\theta| < \delta$, posto allora

$$\begin{aligned} c_m &\equiv \max \{ \Phi_m(\omega t) \mid t \in [\delta, T - \delta] + T\mathbb{Z} \} : \\ |\sigma_m f(a) - f(a)| &\leq \int_{-\delta}^{\delta} \varepsilon \Phi_m(\theta) \frac{d\theta}{T} + \int_{-T/2}^{-\delta} |f(a + \theta) - f(a)| \Phi_m(\theta) \frac{d\theta}{T} + \\ &\quad + \int_{\delta}^{T/2} |f(a + \theta) - f(a)| \Phi_m(\theta) \frac{d\theta}{T} \\ &\leq \int_{-\delta}^{\delta} \varepsilon \Phi_m(\theta) \frac{d\theta}{T} + \int_{-T/2}^{-\delta} |f(a + \theta) - f(a)| c_m(\delta) \frac{d\theta}{T} + \\ &\quad + \int_{\delta}^{T/2} |f(a + \theta) - f(a)| c_m(\delta) \frac{d\theta}{T} \\ &\leq \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_m(\theta) \frac{d\theta}{T} + c_m(\delta) \int_{-T/2}^{T/2} (|f(a + \theta)| + |f(a)|) \frac{d\theta}{T} \leq \varepsilon + c_m(\delta) [|f|_{L^1} + |f(a)|] \end{aligned}$$

poiché per $m \rightarrow \infty$, per il lemma precedente, $c_m(\delta) \rightarrow 0$, la tesi.

Se f è continua, su un intervallo-periodo, sarà uniformemente continua, dunque troviamo un δ che va bene simultaneamente per tutti gli a nell'intervallo considerato, sicché

$$\begin{aligned} |\sigma_m f(a) - f(a)| &\leq \varepsilon + c_m(\delta) [|f|_{L^1} + |f(a)|], \quad \forall a \\ \|\sigma_m f(a) - f(a)\|_{\infty} &\leq \varepsilon + c_m(\delta) [|f|_{L^1} + |f(a)|] \end{aligned}$$

(c.v.d.) la conclusione.

Forme differenziali

In questo capitolo studieremo in dettaglio le applicazioni dagli aperti di $\mathbb{R}^n$ a valori nel suo duale. Queste si chiamano forme differenziali e comprendono i differenziali delle funzioni reali definite su $\mathbb{R}^n$.

VIII.1 Definizione e prime proprietà

VIII.1.1 Forme differenziali

Definizione di forma differenziale

Poniamo subito la seguente

Definizione VIII.1 Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$. Una forma differenziale ω in A è un'applicazione di A in $(\mathbb{R}^n)^*$:

$$\omega : A \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$$

Dunque, preso $\mathbf{x} \in A$ si ha che $\omega(\mathbf{x})$ è un omomorfismo definito su $\mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{R}$. Se introduciamo nel duale di $\mathbb{R}^n$ la base canonica, $\{dx_i | i \in J_n\}$ esisteranno, unici, n reali tali che

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}) dx_i$$

Sono perciò definite univocamente n funzioni $a_i(\mathbf{x})$ definite da A in $\mathbb{R}$. A seconda che esse siano continue oppure C^k , la forma differenziale si dirà continua o C^k .

VIII.1.2 Integrazione delle forme differenziali

Integrale lungo una curva

Un'altra fondamentale definizione è la seguente

Definizione VIII.2 Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, sia $\omega \equiv \sum a_i dx_i$ una forma differenziale continua in A . Sia $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regolare a tratti, con sostegno contenuto in A . Si definisce integrale di ω lungo la curva φ la quantità

$$\int_{\varphi} \omega \equiv \int_a^b \sum_{i=1}^n a_i(\varphi(t)) \dot{\varphi}_i(t) dt$$

Vediamo cosa accade se a φ sostituiamo la curva equivalente $\psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ essendo

$$p : [a, b] \rightarrow [c, d]$$

il diffeomorfismo tale che

$$\varphi(t) = \psi(p(t))$$

allora

$$\int_{\varphi} \omega \equiv \int_a^b \sum_{i=1}^n a_i(\psi(p(t))) \dot{\psi}_i(t) \dot{p}(t) dt = \int_c^d \sum_{i=1}^n a_i(\psi(r)) \dot{\psi}_i(r) dr = \int_{\psi} \omega$$

nel caso in cui p sia crescente, perciò il sostegno sia percorso nello stesso verso nelle due parametrizzazioni. In caso contrario, si devono invertire gli estremi di integrazione e con ciò

$$\int_{\varphi} \omega = - \int_{\psi} \omega$$

Riassumendo

Proposizione VIII.1 *Siano φ e ψ due curve equivalenti e sia ω una forma differenziale continua in un intorno del loro sostegno. Risulta*

$$\int_{\varphi} \omega = \int_{\psi} \omega$$

se φ e ψ hanno lo stesso verso, e

$$\int_{\varphi} \omega = - \int_{\psi} \omega$$

se hanno verso opposto.

**Cammino
e integrale
sul cammino
orientato**

Da quanto detto emerge che l'aspetto importante nell'integrazione non è tanto la curva, ma il suo sostegno. Nell'insieme delle curve la relazione *essere equivalenti* è, appunto, di equivalenza. Ogni classe di equivalenza (che è rappresentata, appunto dal sostegno comune a tutte le curve della classe) si dice **cammino**. All'interno di una classe di equivalenza, scelto un orientamento, la sottoclasse di curve avente quello stesso orientamento si dice **cammino orientato**.

Si può perciò definire l'integrale di ω lungo un **cammino orientato** γ come l'integrale lungo una qualsiasi curva avente γ come sostegno percorso nel verso specificato

$$\int_{\gamma} \omega$$

Poi, se γ^+ e γ^- sono due cammini equivalenti e di verso opposto, risulta

$$\int_{\gamma^+} \omega = - \int_{\gamma^-} \omega$$

**Un esempio
importante**

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \equiv (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), F_3(\mathbf{x}))$ un campo di forze in A . Allora la forma differenziale

$$\omega(\mathbf{x}) \equiv F_1(\mathbf{x}) dx_1 + F_2(\mathbf{x}) dx_2 + F_3(\mathbf{x}) dx_3$$

è il **lavoro elementare** della forza in $\mathbf{x}$. Scelto un cammino tutto contenuto in A il lavoro compiuto sul cammino è l'integrale della forma.

**Integrale del
differenziale di
una funzione**

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{C}^1(A)$, e sia $\varphi : [a, b] \rightarrow A$ una curva regolare a tratti. Si ha

$$\int_{\varphi} df = \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t)) \dot{\varphi}_i(t) dt$$

Ora, posto $F(t) \equiv f(\varphi(t))$, $t \in [a, b]$, funzione continua a tratti, risulta

$$\dot{F}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t)) \dot{\varphi}_i(t)$$

da cui

$$\int_{\varphi} df = \int_a^b \dot{F}(t) dt = F(b) - F(a) = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a))$$

dal teorema fondamentale del calcolo.

Ora, preso un cammino orientato γ nell'insieme delle curve regolari a tratti, avente estremi

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ risulta

$$\int_{\gamma} df = f(\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_1)$$

che è il **teorema fondamentale del calcolo** a più variabili. *L'integrale del differenziale di una funzione lungo una curva non dipende dalla curva stessa, ma solo dai suoi estremi.*

VIII.2 Forme differenziali esatte

Poniamo la seguente

Definizione VIII.3 *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia ω una forma differenziale continua in A . La forma ω si dirà esatta se esiste una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1(A)$, tale che $\omega = df$.*

Se ω è esatta e f è tale che $df = \omega$ si dice che f è una **primitiva** di ω . Ora, se f è una primitiva di ω , anche $f + c$, con $c \in \mathbb{R}$, è una primitiva di ω . Sia ora A connesso e siano f e g due primitive di ω . Allora $d(f - g) = 0$, ma essendo A connesso, $f - g = c$, dunque $f = g + c$. Perciò se f è primitiva $f + c$ è una primitiva, se poi A è connesso due primitive differiscono sempre per una costante.

In questa sezione cercheremo alcune condizioni che consentano di stabilire se una forma è esatta. Cominciamo col seguente

Lemma VIII.1 *Sia A un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$. Se $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}_1$ sono due punti di A , esiste una curva φ regolare a tratti, con sostegno contenuto in A e avente come estremi i punti $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}_1$.*

Dimostrazione Fissato $\mathbf{x}_0 \in A$, indichiamo con B l'insieme dei punti di A che possono essere congiunti a $\mathbf{x}_0$ mediante una curva regolare a tratti avente sostegno in B . Per dimostrare il lemma basterà vedere che $B = A$.

Intanto vediamo che B è aperto. Sia $\mathbf{x} \in B$ e sia $\varphi : [a, b] \rightarrow A$, una curva con $\varphi(a) = \mathbf{x}_0$ e $\varphi(b) = \mathbf{x}$. Poiché A è aperto esiste I $\mathbf{y}$ -palla tutta contenuta in A . Sia $\mathbf{x} \in I$. La curva $\psi : [a, b + 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ di equazioni

$$\begin{cases} \varphi(t), & t \in [a, b] \\ \mathbf{y} + (t - b)(\mathbf{x} - \mathbf{y}), & t \in]b, b + 1] \end{cases}$$

ha sostegno in A e congiunge $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}$. Se ne conclude che $I \subseteq B$, perciò B è aperto. Ora, consideriamo $A \setminus B$. Preso $\mathbf{y} \in A \setminus B$ esiste I $\mathbf{y}$ -palla tutta contenuta in A . Sia $\mathbf{x} \in I$, ora supponiamo per assurdo che $\mathbf{x} \in B$. Allora se φ è la curva che congiunge $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}$ presa ψ come sopra, troviamo una curva a sostegno in A che congiunge $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{y}$, il che è assurdo. Concludiamo che $\mathbf{x} \in A \setminus B$, perciò $I \subseteq A \setminus B$ e $A \setminus B$ è aperto. Infine, abbiamo trovato una partizione di A formata da insiemi aperti (e dunque simultaneamente chiusi). Siccome A è connesso, uno dei (c.v.d.) due insiemi deve essere vuoto. Tuttavia essendo $\mathbf{x}_0 \in B$ si ha che $A \setminus B = \emptyset$, perciò $A = B$.

Dunque un aperto connesso è anche connesso per archi.

Preso allora un aperto connesso A , siano $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ in A . Indichiamo con $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ l'insieme delle curve regolari a tratti a sostegno contenuto in A e aventi estremi ordinatamente in $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. Se ω è una forma esatta, $\omega = df$, e se $\varphi \in \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, allora

$$\int_{\varphi} \omega = f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})$$

e per questo se $\varphi, \psi \in \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ si ha

$$\int_{\varphi} \omega = \int_{\psi} \omega$$

Con questo si perviene al seguente

Teorema VIII.1 *Sia A un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$ e sia ω una forma continua in A . Condizione necessaria e sufficiente affinché ω sia esatta è che comunque si prendano due punti $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ e due curve*

$\varphi, \psi \in \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, risulti

$$\int_{\varphi} \omega = \int_{\psi} \omega$$

Dimostrazione Sopra abbiamo mostrato la necessarietà della condizione. Dimostriamone la sufficienza. Per questo occorrerà trovare una primitiva della forma. Se

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}) dx_i$$

la tesi equivale a trovare una funzione f di classe $\mathcal{C}^1(A)$, tale che per ogni $\mathbf{x} \in A$ risulti

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = a_i(\mathbf{x})$$

Sia $\mathbf{x}_0 \in A$. Preso $\mathbf{x} \in A$, sia $\varphi \in \Phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$ e sia

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\varphi} \omega$$

il che è lecito, poiché per ipotesi si è imposto

$$\int_{\varphi} \omega = \int_{\psi} \omega$$

Vogliamo vedere che effettivamente f è una primitiva di ω . Sia $\mathbf{v}$ un versore, poiché A è aperto, esiste $B(\mathbf{x}, \delta) \subseteq A$. Preso $|h| < \delta$, il segmento $(\mathbf{x}, \mathbf{x} + h\mathbf{v})$ è tutto contenuto nella palla, e perciò in A .

Preso $\varphi \in \Phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$, con $\varphi : [a, b] \rightarrow A$, definiamo $\psi : [a, b+1] \rightarrow A$ come

$$\psi(t) \equiv \begin{cases} \varphi(t), & t \in [a, b] \\ \mathbf{x} + (t-b)h\mathbf{v}, & t \in]b, b+1] \end{cases}$$

si trova che $\psi \in \Phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x} + h\mathbf{v})$. Allora

$$f(\mathbf{x} + h\mathbf{v}) = \int_{\psi} \omega = \int_{\varphi} \omega + \int_b^{b+1} \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x} + (t-b)h\mathbf{v}) hv_i dt$$

posto $s \equiv h(t-b)$ e ricordando la definizione di f

$$f(\mathbf{x} + h\mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) + \int_0^h \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x} + s\mathbf{v}) v_i ds$$

Perciò

$$\frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x} + s\mathbf{v}) v_i ds$$

passando al limite si ottiene perciò

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}) v_i$$

(c.v.d.) da cui si ottiene la tesi sostituendo a $\mathbf{v}$ i vettori della base standard $\mathbf{e}_i$.

Ricaviamo ora il seguente

Corollario VIII.1 *Sia A un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$ e sia ω una forma continua in A . Condizione necessaria e sufficiente affinché ω sia esatta è che per ogni curva chiusa φ regolare a tratti, con sostegno contenuto in A , sia*

$$\int_{\varphi} \omega = 0$$

Dimostrazione Una curva è chiusa se i due estremi coincidono, cosicché, se ω è esatta, la tesi è immediata.

Viceversa valga su ogni curva chiusa

$$\int_{\varphi} \omega = 0$$

vogliamo vedere che ω è esatta. A tale scopo prendiamo due punti di A $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. Siano

$$\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

definite rispettivamente su $[a, b]$ e su $[c, d]$. Definiamo adesso $\varphi_3 : [b, b+1] \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$\varphi_3(t) \equiv \varphi_2(d - (d - c)(t - b))$$

che è equivalente a φ_2 e ne percorre il sostegno in senso inverso, perciò

$$\int_{\varphi_2} \omega = - \int_{\varphi_3} \omega$$

Prendiamo infine la curva chiusa regolare a tratti ($\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}$) $\varphi : [a, b+1] \rightarrow \mathbb{R}$ talché

$$\varphi(t) \equiv \begin{cases} \varphi_1(t), & t \in [a, b] \\ \varphi_3(t), & t \in]b, b+1] \end{cases}$$

si ha, per ipotesi,

$$\int_{\varphi} \omega = 0 = \int_{\varphi_1} \omega + \int_{\varphi_3} \omega$$

da cui

$$\int_{\varphi_1} \omega = - \int_{\varphi_3} \omega$$

(c.v.d.) la tesi, dal teorema precedente.

I risultati ottenuti sono molto generali e perciò di notevole interesse teorico (si pensi all'introduzione dell'energia potenziale), ma difficilmente possono essere usati nella pratica perché poco maneggevoli.

Se la forma ω è di classe $\mathcal{C}^1(A)$ si può dire qualcosa di più: sia f una primitiva di ω , avremo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = a_i(\mathbf{x})$$

da cui avremo che $f \in \mathcal{C}^2(A)$ e perciò si potrà usare il teorema di Schwarz:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x})$$

e quindi

$$\frac{\partial a_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})$$

Una forma per cui risulti identicamente

$$\frac{\partial a_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}), i, j \in J_n$$

si dice **chiusa**. Si è perciò trovato che **una forma esatta** (di classe $\mathcal{C}^1$) è **chiusa**. La condizione trovata è perciò necessaria. Si può vedere che non è sufficiente (considerando nel piano privato dell'origine la forma

$$\omega(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

e calcolandone l'integrale sul circolo unitario).

La condizione di chiusura diventa equivalente a quella di esattezza se si fa l'ipotesi che A sia **stellato**:

Definizione VIII.4 Un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice **stellato** rispetto a un suo punto $\mathbf{x}_0$ se per ogni $\mathbf{x} \in A$ il segmento di estremi $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}$ è tutto contenuto in A .

Lemma VIII.2
(di Poincaré)

Sia A un aperto stellato rispetto a un suo punto $\mathbf{x}_0$. Ogni forma $\omega \in \mathcal{C}^1(A)$ e chiusa è esatta

Dimostrazione Sia $\mathbf{x}$ un punto di A e sia φ la curva di equazione

$$\varphi(t) \equiv \mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad t \in [0, 1]$$

Poniamo

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\varphi} \omega = \int_0^1 \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) (x_i - x_i^0) dt$$

Vediamo che f è una primitiva di ω usando il teorema di derivazione sotto il segno di integrale

$$\frac{\partial f}{\partial x_h}(\mathbf{x}) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n t \frac{\partial a_i}{\partial x_h}(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) (x_i - x_i^0) dt + \int_0^1 a_h(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) dt$$

ma siccome la forma è chiusa

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial a_h}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) (x_i - x_i^0) = da_h(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \dot{F}(t)$$

avendo posto $F(t) \equiv a_h(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))$. Infine,

$$\frac{\partial f}{\partial x_h}(\mathbf{x}) = \int_0^1 t \dot{F}(t) dt + \int_0^1 F(t) dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}(tF(t)) dt = F(1) = a_h(\mathbf{x})$$

(c.v.d.) perciò ω è esatta.

Si può comunque dimostrare in modo del tutto generale che forme $\mathcal{C}^1$ chiuse sono localmente esatte.

VIII.3 Il teorema della divergenza

VIII.3.1 Integrali curvilinei e superficiali

Integrali curvilinei

Sia $\varphi(t)$ una curva regolare a tratti e sia $f(\mathbf{x})$ una funzione definita in un aperto contenente il sostegno di φ , si definisce **integrale di f lungo φ** la quantità

$$\int_{\varphi} f ds \equiv \int_a^b f(\varphi(t)) \|\dot{\varphi}(t)\| dt$$

L'integrale definito non dipende dalla parametrizzazione ma solo dal cammino.

Integrali superficiali

Abbiamo introdotto la nozione di superficie al capitolo 6, data una superficie Σ (definita sul compatto K), parametrizzata dalla funzione dal piano nello spazio $\varphi(u, v)$, e data la funzione $f(x, y, z)$, definita in un intorno della sostegno della superficie, definiamo **integrale superficiale di f su Σ** come

$$\int_{\Sigma} f d\sigma \equiv \int_K f(\varphi(u, v)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| d(u, v)$$

Esattamente come per l'area della superficie, si dimostra che l'integrale di superficie non dipende dalla parametrizzazione della stessa.

VIII.3.2 Il teorema della divergenza o di Gauss-Green

Poniamo immediatamente la seguente

Definizione VIII.5 Un aperto limitato A di $\mathbb{R}^n$ si dice regolare se esiste una funzione di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\begin{aligned} A &= \{\mathbf{x} \mid F(\mathbf{x}) < 0\} \\ \partial A &= \{\mathbf{x} \mid F(\mathbf{x}) = 0\} \\ \nabla F(\mathbf{x}) &\neq 0, \quad \mathbf{x} \in \partial A \end{aligned}$$

Dunque, se A è regolare la sua frontiera è una superficie regolare. Il versore

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \equiv \frac{\nabla F(\mathbf{x})}{\|\nabla F(\mathbf{x})\|}, \mathbf{x} \in \partial A$$

è il versore normale **esterno** a ∂A in $\mathbf{x}$.

Prendiamo ora un campo vettoriale $\mathbf{w}$ definito su B aperto di $\mathbb{R}^n$ (a valori in $\mathbb{R}^n$). Definiamo **divergenza** del campo $\mathbf{w}$ la quantità

$$\operatorname{div} \mathbf{w} \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial w_i}{\partial x_i}$$

Vale allora il teorema della divergenza o di Gauß-Green

Teorema VIII.2 (della divergenza)

Sia A un aperto regolare limitato e sia $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ un campo vettoriale di classe $\mathcal{C}^1(B)$, $B \supseteq \bar{A}$. Allora risulta

$$\int_A \operatorname{div} \mathbf{w}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial A} (\mathbf{w} | \boldsymbol{\nu}) \, d\sigma$$

Avendo dato la definizione di integrale su una superficie solo nel caso $n = 2$ (integrali curvilinei) o $n = 3$ (integrali superficiali) ci limiteremo a questi due casi, più precisamente al primo.

Dimostrazione del teorema della divergenza

Cominciamo con il fissare il seguente risultato

Lemma VIII.3 Sia $f(x, y) \in \mathcal{C}^1(Q)$, ove $Q =]a, b[\times]a, b[$ con supporto contenuto strettamente in Q . Allora

$$\int_Q \frac{\partial f}{\partial x} \, dx dy = \int_Q \frac{\partial f}{\partial y} \, dx dy = 0$$

Dimostrazione Basta notare che

$$\int_Q \frac{\partial f}{\partial x} \, dx dy = \int_a^b dy \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x} \, dx = \int_a^b [f(b, y) - f(a, y)] \, dy = 0$$

(c.v.d.) essendo $f(a, y) = f(b, y) = 0$.

Sia A un aperto regolare, dal teorema di Dini troviamo, per ogni punto $P_0(x_0, y_0)$ della frontiera, un rettangolo $Q(P_0, r) = \{(x, y) \mid |x - x_0| < r, |y - y_0| < r\}$ per cui $\partial A \cap Q(P_0, r)$ è il grafico di una funzione, ad esempio $y = \alpha(x)$. Sono date due possibilità, o

$$A \cap Q(P_0, r) = \{(x, y) \in Q(P_0, r) \mid y > \alpha(x)\}$$

e allora

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha'^2}} \begin{pmatrix} \alpha' \\ -1 \end{pmatrix}$$

oppure

$$A \cap Q(P_0, r) = \{(x, y) \in Q(P_0, r) \mid y < \alpha(x)\}$$

con

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha'^2}} \begin{pmatrix} -\alpha' \\ 1 \end{pmatrix}$$

(nel seguito ci porremo in quest'ultima evenienza).

Lemma VIII.4 Sia $f \in \mathcal{C}^1$ con supporto contenuto in $Q(P_0, r)$. Allora

$$\begin{aligned} \int_A \frac{\partial f}{\partial y} \, dx dy &= \int_{\partial A} f \nu_2 \, ds \\ \int_A \frac{\partial f}{\partial x} \, dx dy &= \int_{\partial A} f \nu_1 \, ds \end{aligned}$$

Dimostrazione Abbiamo

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = \int_Q \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = \int_{x_0-r}^{x_0+r} dx \int_{y_0-r}^{\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial y} dy = \int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x, \alpha(x)) dx$$

ma

$$\nu_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha'^2}}$$

perciò

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = \int_{x_0-r}^{x_0+r} f \nu_2(x, \alpha(x)) \sqrt{1+\alpha'^2} dx = \int_{\partial A \cap Q} f \nu_2 ds$$

Per la seconda parte,

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_{x_0-r}^{x_0+r} dx \int_{y_0-r}^{\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial x} dy = \int_{x_0-r}^{x_0+r} dx \frac{d}{dx} \int_{y_0-r}^{\alpha(x)} f(x, y) dy - \int_{x_0-r}^{x_0+r} \alpha'(x) f(x, \alpha(x)) dx$$

il primo integrale è nullo, infatti, essendo le seguenti integrande nulle,

$$\int_{y_0-r}^{\alpha(x_0+r)} f(x_0+r, y) dy - \int_{y_0-r}^{\alpha(x_0-r)} f(x_0-r, y) dy = 0,$$

quindi

$$(c.v.d.) \quad \int_A \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = - \int_{x_0-r}^{x_0+r} \alpha'(x) f(x, \alpha(x)) dx = \int_{\partial A} f \nu_1 ds.$$

Ci occorre, infine, la seguente

Lemma VIII.5
(di partizione dell'unità)

Siano $Q_i \equiv Q(P_i, r_i)$, $i \in J_N$, un numero finito di quadrati che ricoprono $\bar{A}$, allora esistono N funzioni ψ_i in $C^1(\mathbb{R}^2)$, tali che il supporto di ψ_i sia contenuto in $\bar{Q}(P_i, 2r_i)$ e tali che

$$\sum_{i=1}^N \psi_i(x, y) = 1, \forall (x, y) \in \bar{A}$$

Dimostrazione Consideriamo la funzione

$$g(t) \equiv \begin{cases} 1, & |t| \leq 1 \\ 1/27 (4-t^2)^2 (2t^2+1), & 1 < t \leq 2 \\ 0, & t > 2 \end{cases} \in C^1(\mathbb{R}^2).$$

Preso $P_i(x_i, y_i)$ definiamo $\varphi_i = g((x-x_i)/r_i) g((y-y_i)/r_i)$. φ_i è nulla fuori da $Q(P_i, 2r_i)$ e risulta $\varphi_i = 1$ in Q_i . Poniamo ora

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \varphi_1 \\ \psi_k &= \varphi_k (1 - \varphi_{k-1}) \dots (1 - \varphi_1) \end{aligned}$$

Le funzioni definite sono C^1 e nulle fuori da $Q(P_i, 2r_i)$. Dimostriamo ora che

$$\sum_{i=1}^k \psi_i = 1 - (1 - \varphi_1) \dots (1 - \varphi_k)$$

L'eguaglianza è vera per $k=1$. Sia vera per k , allora

$$\sum_{i=1}^{k+1} \psi_i = 1 - (1 - \varphi_1) \dots (1 - \varphi_k) + \varphi_{k+1} (1 - \varphi_k) \dots (1 - \varphi_1) = 1 - (1 - \varphi_1) \dots (1 - \varphi_{k+1})$$

Dunque,

$$\sum_{i=1}^N \psi_i = 1 - (1 - \varphi_1) \dots (1 - \varphi_N)$$

Perciò, se $\mathbf{x} \in \bar{A}$, allora esiste h tale che $\mathbf{x} \in Q_h$ perciò $\varphi_h(\mathbf{x}) = 1$ e dunque la somma delle ψ_i (c.v.d.) vale 1.

Sia ora $f \in \mathcal{C}^1(B)$, $\bar{A} \subseteq B$. Allora per ogni $P \in \bar{A}$ sia $Q(P, r)$ tale che

- (i) $P \in A$ allora r sia tale che $\bar{Q}(P, r) \subseteq A$;
- (ii) $P \in \partial A$ allora r sia tale che $\bar{Q}(P, 2r) \subseteq B$ e $\partial A \cap Q(P, 2r)$ sia grafico di una funzione (per esempio $y = \alpha(x)$).

Siccome $\bar{A}$ è compatto dal ricoprimento aperto si può estrarre un ricoprimento finito, $Q(P_i, r_i)$. Prese ψ_i come nella proposizione di partizione dell'unità, si ha

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = \int_A \frac{\partial}{\partial y} \left(\sum_{i=1}^N \psi_i f \right) dx dy = \sum_{i=1}^N \int_A \frac{\partial}{\partial y} (\psi_i f) dx dy$$

Se $P_i \in A$ allora, dal primo lemma si ricava che

$$\int_A \frac{\partial}{\partial y} (\psi_i f) dx dy = 0 = \int_{\partial A} \psi_i f \nu_2 ds$$

essendo su ∂A ψ_i nulla. Se $P_i \in \partial A$, allora, dal secondo lemma

$$\int_A \frac{\partial}{\partial y} (\psi_i f) dx dy = \int \psi_i f \nu_2 ds$$

Infine si ricavano

$$\begin{aligned} \int_A \frac{\partial f}{\partial y} dx dy &= \int_{\partial A} f \nu_2 ds \\ \int_A \frac{\partial f}{\partial x} dx dy &= \int_{\partial A} f \nu_1 ds \end{aligned}$$

Per ottenere la tesi del teorema della divergenza, poniamo $f = w_2$ e $f = w_1$ e sommiamo membro a membro.

VIII.4 Il teorema di Stokes

VIII.4.1 Alcune considerazioni preliminari

Anche in questa sezione lavoreremo nel caso geometricamente più semplice, il piano. Nel dimostrare il teorema della divergenza, assumendo il complesso di notazioni della sezione precedente, abbiamo trovato

$$\begin{aligned} \int_A \frac{\partial f}{\partial y} dx dy &= \int_{\partial A} f \nu_2 ds \\ \int_A \frac{\partial f}{\partial x} dx dy &= \int_{\partial A} f \nu_1 ds \end{aligned}$$

Ora, vediamo che succede se ∂A è il sostegno di una curva regolare chiusa parametrizzata da $\varphi(t) \equiv (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, definito il **versore tangente**,

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \frac{\dot{\varphi}}{\|\dot{\varphi}\|} = \frac{(\dot{x}, \dot{y})}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

La parametrizzazione φ determina su ∂A una orientazione. Definiamo **positiva** l'orientazione se per ogni punto di ∂A , l'angolo tra $\boldsymbol{\nu}$ e $\boldsymbol{\tau}$ è pari a $\pi/2$. Indichiamo il cammino corrispondente con ∂A^+ , il cammino inverso con ∂A^- .

Supponiamo che φ induca un'orientazione positiva, allora risulta subito

$$\boldsymbol{\nu}(t) = \frac{(\dot{y}, -\dot{x})}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

Dunque

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_{\partial A} f \nu_1 ds = \int_a^b (f \nu_1)(\varphi(t)) \|\dot{\varphi}\| dt = \int_a^b f(x(t), y(t)) \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt =$$

$$= \int_a^b f(\varphi(t)) \dot{y} dt$$

definita la forma differenziale $f(x, y) dy$ l'ultimo integrale è proprio l'integrale della forma appena definita, con ciò

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_{\partial A^+} f dy$$

In maniera del tutto analoga si trova che

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = - \int_{\partial A^+} f dx$$

Esempio VIII.1 Poniamo $f = x$ allora

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_A dx dy = m(A) = \int_{\partial A^+} x dy$$

poniamo $f = y$ analogamente

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = \int_A dx dy = m(A) = - \int_{\partial A^+} y dx$$

Infine

$$m(A) = \frac{1}{2} \int_{\partial A^+} (x dy - y dx)$$

Adesso poniamo $f(x, y) = N(x, y)$ e successivamente $f(x, y) = -M(x, y)$:

$$\begin{aligned} \int_A \frac{\partial N}{\partial x} dx dy &= \int_{\partial A^+} N dy \\ \int_A -\frac{\partial M}{\partial y} dx dy &= \int_{\partial A^+} M dx \end{aligned}$$

definita la forma differenziale $\omega = M dx + N dy$ troviamo, sommando membro a membro

$$\int_{\partial A^+} \omega = \int_A \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$

Trovata questa formula vogliamo migliorare il lemma di Poincaré. Preliminarmente fissiamo la seguente

Definizione VIII.6 *A aperto di $\mathbb{R}^2$ si dice semplicemente connesso se, comunque si prenda $\varphi : [a, b] \rightarrow A$ chiusa e regolari a tratti, il suo sostegno sia frontiera di un insieme tutto contenuto in A .*

Si può dimostrare (ma noi non lo faremo) che un insieme stellato è semplicemente connesso. Dimostriamo, infine, il seguente

Teorema VIII.3 *Sia A un aperto semplicemente connesso. Ogni forma differenziale chiusa, ω , su A è esatta.*

Dimostrazione Sia φ chiusa e regolare a tratti in A . Allora l'insieme B di cui il sostegno di φ è frontiera è contenuto in A . Poiché $\omega = M dx + N dy$ è chiusa, risulta

$$\pm \int_{\partial B^+} \omega = \int_B \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

da cui, in ogni caso,

$$\int_{\varphi} \omega = 0$$

(c.v.d.) e ω è esatta.

VIII.4.2 La formula di Stokes

Sia D un compatto in (u, v) chiusura di un aperto connesso. Sia $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie regolare di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

Sia A un aperto regolare la cui chiusura sia contenuta nella parte interna di D . Chiamiamo S l'immagine secondo φ di A e chiameremo ∂S il bordo di S , $\varphi(\partial A)$. Se $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ parametrizza ∂A e la orienta in modo positivo, la curva

$$\Gamma \equiv \varphi \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

parametrizza ∂S . Perciò se γ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}, t \in [a, b]$$

Γ avrà equazioni

$$\begin{cases} x = x(u(t), v(t)) \\ y = y(u(t), v(t)) \\ z = z(u(t), v(t)) \end{cases}, t \in [a, b]$$

Nell'intorno di S , sia definito il campo vettoriale

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} X(x, y, z) \\ Y(x, y, z) \\ Z(x, y, z) \end{pmatrix}$$

definiamo **rotore** del campo vettoriale, il campo

$$\text{curl } \mathbf{v} \equiv \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ X & Y & Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Y_z + Z_y \\ -Z_x + X_z \\ -X_y + Y_x \end{pmatrix}$$

Definita, nel solito intorno di S , la forma differenziale associata a $\mathbf{v}$

$$\omega \equiv X dx + Y dy + Z dz$$

possiamo enunciare, con le notazioni fissate, il seguente

Teorema VIII.4
(di Stokes)

Sia S una superficie di classe $\mathcal{C}^2$, risulta

$$\int_S (\text{curl } \mathbf{v} | \mathbf{n}) d\sigma = \int_{\partial S^+} \omega$$

dove con $\mathbf{n}$ si è indicato il versore normale a S

$$\mathbf{n} = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} = \frac{1}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} \begin{pmatrix} y_u z_v - z_u y_v \\ z_u x_v - x_u z_v \\ x_u y_v - y_u x_v \end{pmatrix}$$

Dimostrazione Si ha

$$\begin{aligned} \int_S (\text{curl } \mathbf{v} | \mathbf{n}) d\sigma &= - \int_A (Y_z - Z_y) (y_u z_v - z_u y_v) + (Z_x - X_z) (z_u x_v - x_u z_v) \\ &\quad + (X_y - Y_x) (x_u y_v - y_u x_v) du dv \end{aligned}$$

Definiamo, in $\mathbb{R}^2$, la forma

$$\bar{\omega} \equiv (X x_u + Y y_u + Z z_u) du + (X x_v + Y y_v + Z z_v) dv = M(u, v) du + N(u, v) dv$$

ricaviamo

$$\int_S (\text{curl } \mathbf{v} | \mathbf{n}) d\sigma = - \int_A (M_v - N_u) du dv = \int_{\partial A^+} \bar{\omega}$$

l'ultimo membro è pari a

$$\begin{aligned} \int_{\partial A^+} \bar{\omega} &= \int_a^b [(Xx_u + Yy_u + Zz_u)\dot{u} + (Xx_v + Yy_v + Zz_v)\dot{v}] dt = \\ &= \int_a^b [X(x_u\dot{u} + x_v\dot{v}) + Y(y_u\dot{u} + y_v\dot{v}) + Z(z_u\dot{u} + z_v\dot{v})] dt = \int_{\partial S^+} \omega \end{aligned}$$

(c.v.d.)

VIII.4.3 Energia potenziale

Sia dato un campo di forze in una regione aperta:

$$\mathbf{F} \equiv \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{x}) \\ F_2(\mathbf{x}) \\ F_3(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

come abbiamo visto nella prima sezione la forma differenziale

$$\omega = \sum_{i=1}^3 F_i dx_i$$

rappresenta il lavoro elementare della forza $\mathbf{F}$, sicché sul tratto $A\varphi B$, il lavoro compiuto dal campo di forze vale

$$W = \int_{\varphi} \omega$$

Se $\mathbf{F}$ induce una forma **esatta**, cioè se ω ha integrale nullo su ogni curva chiusa tutta contenuta nel dominio, il campo di forze si dice **conservativo**, e in tal caso esiste la funzione $U \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$, tale che

$$-dU = \omega$$

tale funzione si dice **energia potenziale del campo $\mathbf{F}$** , ed è tale che

$$W(A\varphi B) = \int_{\varphi} \omega = U(A) - U(B)$$

che rappresenta il **teorema dell'energia potenziale**.

Se ora supponiamo che il dominio sia semplicemente connesso, abbiamo che ω è esatta se e solo se ω è chiusa, cioè

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

il che equivale a dire che

$$\text{curl } \mathbf{F} = 0$$

cioè il campo di forze è **irrotazionale**.

Si conclude che *un campo di forze conservativo è irrotazionale, e un campo di forze irrotazionale su un dominio semplicemente connesso è conservativo.*

Indice Analitico

- algoritmo
 - di Volterra-Picard o delle approssimazioni successive, 82
- aperto, 13
 - regolare, 196
- armonica fondamentale, 172
- azione
 - di un diffeomorfismo su un'equazione differenziale, 110
- baricentro, 165
- base (di uno spazio vettoriale), 24
- cammino, 192
 - orientato, 192
- campo di forze
 - conservativo, 202
 - irrotazionale, 202
- Cantor
 - insieme di, 124
- chiuso, 13
- chiusura, 14
- coefficienti di Fourier, 177
- componente continua, 172
- condizione di Dini, 183
- continuità, 19
 - delle applicazioni bilineari, 30
 - delle forme lineari, 30
 - delle funzioni lineari, 28
 - uniforme, 35
- contrazione, 39
- convergenza
 - puntuale, 22
 - uniforme, 22
- criterio
 - del confronto, 152
 - dell'asintoto, 91
- curva, 61
 - di fase, 77
 - integrale, 91
- densità, 179
- derivata
 - direzionale, 41
 - parziale, 44
- derivato, 14
- determinismo, 77
- diametro, 15
- diffeomorfismo, 73
- differenziale, 45
 - dipendenza funzionale, 69
 - diseguaglianza
 - dell'energia, 178
 - di Bessel, 175
 - di Cauchy e Schwartz, 25
 - di Gronwall, 87
 - triangolare, 11
 - distanza, 11
 - continuità della, 20
 - divergenza, 197
 - duale, 24
 - energia, 173
 - energia potenziale, 202
 - equazione
 - di Eulero, 105
 - differenziale
 - a variabili separabili, 88
 - lineare, 92
 - omogenea, 90
 - ordinaria, 78
 - integrale di Volterra, 79
 - equazioni
 - di Eulero-Lagrange, 167
 - di Hamilton-Jacobi, 170
 - equilibrio
 - punto di, 78
 - evoluzione temporale
 - operatore di, 77
 - flusso
 - continuità del, 106
 - di fase, 77
 - forma
 - differenziale, 191
 - chiusa, 195
 - esatta, 193
 - forma quadratica, 25
 - frontiera, 14
 - funzione
 - caratteristica, 131
 - differenziabile, 45
 - esponenziale di matrici, 97
 - integrabile, 149
 - misurabile, 137
 - misurabile su un insieme, 144
 - periodica, 171
 - semplice, 131
 - sommabile, 134
 - definizione generale di, 146

- sommabile su un insieme, 142
- funzioni
 - lipschitziane, 27
- geodetiche, 168
- gruppo a un parametro, 77
- hamiltoniana, 168
- hessiana, 58
- identità di Parseval, 175
- impulso, 168
- insieme
 - semplicemente connesso, 200
 - stellato, 195
- integrale, 142
 - curvilineo, 196
 - d'azione, 166
 - di una forma differenziale, 191
 - superficiale, 196
- integrali
 - primi del moto, 111
- intervallo, 113
- intorno, 12
- isometria, 26
- giacobiano, 46
- lagrangiana, 166
- lavoro, 192
 - elementare, 192
- leggi di de Morgan, 14
- lemma
 - delle contrazioni di Cacciopoli-Banach, 39
 - di Fatou, 155
 - di partizione dell'unità, 198
 - di Poincaré, 195
 - di Riemann-Lebesgue, 181
- limite, 18
- linee coordinate, 164
- Lipschitz
 - costante di, 27
- massimi e minimi, 57
- metodo
 - della variazione delle costanti arbitrarie, 96
- metrica, 11
 - riemanniana, 168
- misura
 - di Lebesgue, 117
 - di un aperto, 114
 - di un compatto, 115
 - esterna, 116
 - interna, 116
- misurabile
 - insieme, 124
- moto, 77
- norma, 24
 - operatoriale, 29
 - più fine, 31
- nucleo
 - di Dirichlet, 182
 - di Féjer, 188
- omeomorfismo, 19
- orbita, 77
- palla, 12
- parte esterna, 15
- parte interna, 15
- plurirettangolo, 113
- polinomio trigonometrico, 171
- primitiva, 193
- problema di Cauchy, 78
- prodotto
 - hermitiano, 25
 - scalare, 25
- proiezione ortogonale, 174
- prolungamento, 84
- proprietà
 - dell'esponenziale di matrici, 98
- pulsazione, 172
- punto di accumulazione, 14
- punto unito, 39
- quasi ovunque, 151
- raffinamento, 114
- reticolato, 113
- ricoprimento finito, 33
- rotore, 201
- serie di Fourier, 178
- sfera dei versori, 29
- singolare
 - punto, 91
- sistema
 - linearizzato, 110
- sistemi
 - autonomi, 90
- soluzione
 - dell'equazione differenziale, 78
 - generale, 94
 - massimale, 84
- sostegno
 - di una curva, 61
- sottografico, 139
- sottosuccessione, 16
- spazio
 - connesso, 38
 - per archi, 38
 - convesso, 169
 - convesso nella direzione di un versore, 45
 - delle fasi, 77
 - allargato al tempo, 78
 - di Banach, 25
 - di Hilbert, 26
 - metrico, 11

- completo, 16
- normato, 24
- sequenzialmente compatto, 32
- totalmente limitato, 33
- vettoriale, 23
- spettro complesso, 172
- successione, 16
 - convergente, 16
 - di Cauchy, 16
- superficie, 164
- supporto compatto, 133
- teorema
 - degli zeri, 38
 - dei moltiplicatori di Lagrange, 74
 - del differenziale totale, 47
 - del limite delle restrizioni, 19
 - del valor medio per derivate direzionali, 43
 - dell'energia potenziale, 202
 - dell'invertibilità locale, 73
 - dell'uniforme continuità, 35
 - della divergenza o di Gauss-Green, 197
 - delle funzioni implicite (I), 66
 - delle funzioni implicite (II), 72
 - delle orbite periodiche, 92
 - delle piccole oscillazioni, 110
 - di additività numerabile della misura, 123
 - di Ascoli-Arzelà, 83
 - di Beppo Levi, 154
 - di Bolzano-Weierstrass, 32
 - di cambiamento di variabile negli integrali, 163
 - di cambio di variabile nei limiti, 21
 - di caratterizzazione degli spazi compatti, 33
 - di Cauchy-Lipschitz o di esistenza locale, 80
 - di collegamento, 18
 - di continuità del flusso, 107
 - di convergenza puntuale della serie di Fourier, 185
 - di convergenza uniforme della serie di Fourier, 187
 - di derivazione composta, 55
 - di derivazione sotto il segno di integrale, 158
 - di differenziabilità del flusso, 109
 - di Dini
 - nel piano, 62
 - nello spazio, 64
 - di eguaglianza dell'energia, 178
 - di equivalenza delle norme, 37
 - di esistenza e unicità globale, 88
 - di Féjer, 189
 - di Fermat, 57
 - di Fubini, 162
 - di fuga dai compatti, 86
 - di Heine-Pincherle-Borel, 37
 - di integrazione della serie di Fourier, 187
 - di Lagrange, 54
 - di Lebesgue o della convergenza dominata, 156
 - di Liouville, 95
 - di misura del prodotto cartesiano, 127
 - di Pappo-Guldino, 166
 - di Peano, 83
 - di Pitagora, 174
 - di proprietà delle funzioni misurabili, 138
 - di rettificazione, 112
 - di Schwartz, o dell'inversione dell'ordine di derivazione, 49
 - di Stokes, 201
 - di subadditività numerabile della misura, 123
 - di Taylor, 54
 - di Weierstrass, 35
 - fondamentale del calcolo, 193
- termine forzante, 93
- trasformata di Legendre, 170
- troncata, 146
- variabile ciclica, 168
- versore normale, 164
- vincolo, 74
- wronskiana, 94

Bibliografia

1. Enrico Giusti, *Analisi Matematica 1*, Bollati Boringhieri;
2. Enrico Giusti, *Analisi Matematica 2*, Bollati Boringhieri;
3. Enrico Giusti, *Esercizi e complementi di Analisi Matematica 2*, Bollati Boringhieri;
4. Giuseppe De Marco, *Analisi Due*, Decibel-Zanichelli;
5. Mariano Giaquinta, Giuseppe Modica, *Analisi Matematica, voll. I, II*, Pitagora editrice;
6. V. I. Arnol'd, *Equazioni Differenziali Ordinarie*, Mir;
7. V. I. Arnol'd, *Metodi matematici della Meccanica Classica*, Editori Riuniti;
8. L. D. Landau, E. M. Lifschitz, *Meccanica*, Editori Riuniti;
9. I. M. Gelfand, S. V. Fomin, *Calculus of Variations*, Prentice-Hall Inc.;
10. Antonio Fasano, Stefano Marmi, *Meccanica Analitica*, Bollati Boringhieri;
11. Andrea Milani, Giacomo Mazzini, *Sistemi Dinamici*, versione Web;
12. Franco Conti, *Calcolo*, Mc Graw Hill;
13. Appunti dalle lezioni dei docenti seguenti: *prof. M.K.V. Murthy, dr. V.M. Tortorelli, prof. S. Servadio.*